Research Note

انتخاب آرمان در برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی از طریق تحلیل مؤلفه‌های اصلی اعداد فازی شهودی بازه‌یی

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۷)
دوره‌ی ۱-۳۴، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۱۱۱-۱۲۰، (یادداشت فنی)

زهره کاهه (دانشجوی دکتری)
نسیم نهاوندی* (دانشیار)
رضا برادران کاظم‌زاده (دانشیار)
دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه تربیت مدرس

zohreh.kaheh@modares.ac.ir
n_nahavandi@modares.ac.ir.
rkazem@modares.ac.ir

مهم‌ترین مشکل مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی انتخاب آرمان با توجه به محدودیت اطلاعات است. در این مقاله، مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی در حالتی که باید گروه بزرگی از تصمیم گیرندگان آرمان‌ها را تعیین کنند، در نظر گرفته شده است. به‌منظور ادغام نظرات و انتخاب آرمان از الگوریتم تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای اعداد فازی شهودی بازه‌یی (IVIF) استفاده شده است. به‌منظور بررسی عملکرد سازوکار پیشنهادی، یک مثال عددی از پیشینه‌ی تحقیق انتخاب و حل شده است. رویکرد پیشنهادی قادر است نظرات و درجه‌ی تردید تصمیم‌گیرندگان با منافع مختلف را در مدل وارد کند. رویکردهای پیشین علاوه‌بر در نظر نگرفتن تردید تصمیم‌گیرندگان در انتخاب آرمان‌ها، مستلزم تعریف متغیرهای متعددی هستند که موجب افزایش پیچیدگی محاسباتی می‌شود؛ اما رویکرد پیشنهادی از طریق انتخاب یک یا تعداد محدودی آرمان با استفاده از الگوریتم IVIF-PCA موجب کاهش پیچیدگی محاسباتی می‌شود.

واژگان کلیدی: برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی، فازی شهودی بازه‌یی، تحلیل مؤلفه‌های اصلی، عدم قطعیت، درجه‌ی تردید.

۱. مقدمه

در برنامه‌ریزی آرمانی تعیین یک مقدار آرمان منحصر به فرد برای هر تابع هدف با توجه به محدودیت اطلاعات امری دشوار و نا کارآمد است. برای غلبه بر این مشکل نوع جدیدی از برنامه‌ریزی آرمانی به نام برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی ارائه شده است. یکی از مهم‌ترین مشکلات در مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی انتخاب آرمان برای هر یک از اهداف است که با توجه به محدودیت اطلاعات امری دشوار است و بی‌دقتی در انتخاب آن، تصمیم‌گیرنده را از هدف دور می‌کند. همچنین با وجود ارائه‌ی مدل‌های مختلف برای افزایش انعطاف‌پذیری در تصمیم‌گیری، همچنان مدل‌های کنونی قادر به در نظر گرفتن درجه‌ی تردید تصمیم‌گیرنده نیستند. تردید تصمیم‌گیرنده در این مسئله در واقع بیان‌کننده‌ی شک او در مناسب یا نا مناسب بودن آرمان است.

دراین پژوهش آرمان‌ها به‌صورت گزینه‌هایی در نظرگرفته می‌شود که تصمیم‌گیرندگان مختلف میزان موافقت و عدم موافقت خود با آن را به صورت اعداد فازی شهودی بازه‌یی بیان می‌کنند. برای ادغام نظرات مختلف تصمیم‌گیرندگان از روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای اعداد فازی شهودی بازه‌یی استفاده می‌شود. علت به‌کارگیری روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی آن است که نظرات تصمیم‌گیرندگان معمولاً با یکدیگر هم‌پوشانی دارد؛ پس درصدد استخراج بیشترین اطلاعات ممکن با حذف این هم‌پوشانی‌ها هستیم. به‌طور کلی، رویکرد پیشنهادی قادر است نظرات تصمیم‌گیرندگان مختلف در گروه‌های بزرگ و درجه‌ی تردید تصمیم‌گیرندگان را در مدل وارد کند.

در بخش ۲ به مروری بر پیشینه‌ی تحقیق در حوزه‌ی مدل‌های توسعه‌یافته‌ی برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی و تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای اعداد فازی شهودی بازه‌یی پرداخته می‌شود. در بخش ۳ به روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای اعداد فازی شهودی بازه‌یی (IVIF-PCA) پرداخته می‌شود. در بخش ۴ روش پیشنهادی تشریح و در بخش ۵ یک مثال عددی از پیشینه‌ی تحقیق ارائه و حل می‌شود. در انتها در بخش ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌شود.

۲. پیشینه‌ی تحقیق

با توجه به هدف مقاله که ارائه‌ی سازوکاری برای تعیین آرمان‌ها در برنامه‌ریزی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۳/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۵/۹/۲۱، پذیرش ۱۳۹۵/۱۱/۲۵.
DOI:10.24200/J65.2018.20035

آرمانی چندگزینه‌یی است، در ادامه روند توسعه‌ی سازوکارهای تعیین آرمان‌ها در برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی و تحلیل مؤلفه‌های اصلی تبیین می‌شود. مسئله‌ی برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی کلاسیک به صورت مجموعه‌ی معادلات ۱ است:[1]

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{m} d_i^+ + d_i^- \\ &s.t. \\ &f_1(x) - d_i^+ + d_i^- = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} s_{ij}(B) \\ &s_{ij}(B) \in R_i(x), i = 1, \dots, m \\ &x \in F \\ &d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

در این مدل $S_{ij}(B)$ بیانگر یک تابع از متغیرهای دودویی است و $R_i(x)$ تابعی از محدودیت‌های منابع است. سمت راست محدودیت مربوط به آرمان از جمله $g_{ij}S_{ij}(B)$ می‌تواند سه حالت داشته باشد: (۱) هر چه بیشتر باشد بهتر است (بیشینه کردن $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}S_{ij}(B)$)، (۲) هر چه کمتر باشد بهتر است (کمینه کردن $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}S_{ij}(B)$)، و (۳) تنها برابر آرمان بودن اهمیت داشته باشد.

عموماً روش‌های خطی‌سازی برای مسائل با اندازه‌ی کوچک و متوسط کارآمد هستند. اما حل این مدل به علت وجود تعداد زیادی متغیر دودویی برای اندازه‌ی مسئله بزرگ دشوار خواهد بود.

چانگ[2] مدل خطی برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی را پیشنهاد کرد که نیازی به استفاده از متغیرهای صفر و یک ندارد و در آن به‌جای متغیرهای دودویی از یک متغیر پیوسته برای هر آرمان استفاده شده است.[2] مدل مسئله‌ی برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی تجدید نظر شده به‌صورت مجموعه معادلات (۲) است:

$$\begin{aligned} &min \sum_{i=1}^{m} [w_i(d_i^+ + d_i^-) + \alpha_i(e_i^+ + e_i^-)] \\ &s.t. \\ &f_1(x) - d_i^+ + d_i^- = y_i \\ &y_i - e_i^+ + e_i^- = g_{i,\max} or g_{i,\min} \\ &g_{i,\min} \leq y_i \leq g_{i,\max} \\ &x \in F \\ &d_i^+, d_i^-, e_i^+, e_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2}$$

در مدل فوق y_i متغیر پیوسته در محدوده‌ی $g_{i,min} \leq y_i \leq g_{i,max}$ است. w_i بیانگر اهمیت دست‌یابی به آرمان مربوط به هدف iام و برابر وزن انحرافات $|f_i(x) - y_i|$ است. α_i وزن مجموع انحرافات $|y_i - g_{i,\max}|$ برای مسئله‌ی بیشینه‌سازی و یا مجموع انحرافات $|y_i - g_{i,min}|$ برای مسئله‌ی کمینه‌سازی است.

در این مدل انحرافات می‌توانند در حدود بسیار متفاوتی نوسان داشته باشند که این امر موجب یک انحراف غیرعمدی می‌شود.

برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی با در نظرگرفتن تابع مطلوبیت اولین بار توسط چانگ[3] مطرح شد. در واقع باتوجه به این‌که تعیین مقادیر عددی برای هر یک از توابع هدف به علت محدودیت اطلاعات امری ناکارآمد است، چانگ[3] مفهوم جدید تعریف و دست‌یابی به سطح آرمان به وسیله‌ی تابع مطلوبیت را جایگزین تعریف سطوح آرمان به وسیله‌ی مقادیر عددی در برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی کرده است. در واقع او مفهوم بردار سطح آرمانی (تعیین چند آرمان برای هر هدف) را با در نظرگرفتن تابع مطلوبیت توسعه داد. در رویکرد پیشنهادی او تصمیم‌گیرنده قصد دارد مطلوبیت مورد انتظار خود را بیشینه کند؛ بدین‌منظور دو تابع مطلوبیت خطی و S-Shape را در نظر گرفته است که در این‌جا تنها مدل خطی ذکر می‌شود.[3] مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی با در نظرگرفتن تابع مطلوبیت خطی در حالت کمینه‌سازی (بیشینه‌سازی) به شرح مجموعه معادلات ۳ است:[3]

$$\begin{aligned} &min \sum_{i=1}^{m} [w_i(d_i^+ + d_i^-) + \beta_i \delta_i^-] \\ &s.t. \\ &\lambda_i \leq \frac{f_i(x) - g_{i,\max}}{f_i^- - g_{i,\max}} = \beta_i or \lambda_i \leq \frac{y_i - g_{i,\min}}{g_{i,\max} - g_{i,\min}} \\ &f_1(x) - d_i^+ + d_i^- = y_i \\ &\lambda_i + \delta_i^- = 1 \\ &g_{i,\min} \leq y_i \leq g_{i,\max} \\ &x \in F \\ &d_i^+, d_i^-, \delta_i^+, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3}$$

در این مدل وزن β_i یک مؤلفه‌ی ترجیحی مرتبط با مطلوبیت است. λ_i نیز میزان مطلوبیت مسئله است. همچنین δ_i^- برابر مجموع انحرافات $|y_i - g_{i,\max}|$ برای مسئله‌ی بیشینه‌سازی و یا مجموع انحرافات $|y_i - g_{i,\max}|$ برای مسئله‌ی کمینه‌سازی است.

جدیدی و همکاران[4] به توسعه‌ی مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی با در نظر گرفتن تابع مطلوبیت خطی و قابلیت کنترل داخل و خارج بازه‌ی آرمانی پرداختند. همان‌طور که قبلاً شرح داده شد، در مدل توسعه‌یافته‌ی مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی، یک بازه برای آرمان در نظرگرفته می‌شود. با تنظیم w_i در روش قبل، مقدار هدف $f_i(x)$ به سمت سطح آرمانی y_i که در بازه‌ی آرمانی $[g_{i,min}, g_{i,max}]$ محدود است، رانده می‌شود. به‌طور هم‌زمان با تنظیم β_i در مدل، y_i نیز به سمت $g_{i,min}$ (برای مسئله‌ی کمینه‌سازی) رانده می‌شود. در اینجا باید به نکات زیر توجه شود: (۱) برای مسئله‌ی کمینه‌سازی حد پایین یعنی $g_{i,min}$ به‌عنوان جواب ایده‌آل مثبت تنظیم شود؛ (۲) حدبالا یعنی $g_{i,max}$ نقطه‌ی بحرانی است که مقدار هدف نباید به‌صورت معناداری از آن بیشتر شود. مثلاً تولیدکننده‌ها پیش از انتخاب تأمین‌کننده‌های خود، بیشینه‌ی قیمت قطعات و مواد خامی را که قادر به پرداخت آن هستند یا به عبارتی بیشینه‌ی هزینه‌ی تدارکات را تعیین می‌کنند. در این مورد بیشینه‌ی هزینه‌ی تدارکات نقطه‌ی بحرانی در نظرگرفته می‌شود. به عبارت دیگر اگر مقدار هدف در بازه‌ی آرمانی $[g_{i,min}, g_{i,max}]$ قرار بگیرد، حد پایین به عنوان یک نقطه‌ی محوری در نظرگرفته می‌شود که هدف را به سمت خود جذب می‌کند. اگر با جذب یک هدف به سمت حد پایین، هدف دیگری خارج از بازه‌ی آرمانی‌اش بیفتد (به علت تناقض و تضاد بین اهداف مختلف)، حد بالا یعنی $g_{i,max}$ به عنوان یک نقطه‌ی محوری جدید در نظرگرفته می‌شود که سعی می‌کند هدف را به سمت خود جذب کند.[4] جدیدی و همکاران[4] رویکردی به شرح زیر برای در نظرگرفتن این شرایط پیشنهاد کردند. این رویکرد جدید توجه ویژه‌یی به $g_{i,min}$ و $g_{i,max}$ به عنوان دو نقطه‌ی محوری دارد که تصمیم‌گیرنده را قادر

می‌سازد تا داخل و خارج بازه‌ی آرمانی را کنترل کند. مدل پیشنهادی آنها به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m} w_i \alpha_i \\
&\quad s.t. \\
&\quad \frac{f_i^- - f_i(x)}{f_i^- - f_i^+} = \alpha_i \\
&\quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \\
&\quad x \in F
\end{aligned} \tag{۴}$$

در این مدل α_i یک ضریب پیوسته است که مبیّن فاصله‌ی نرمال شده‌ی مقدار تابع هدف حاصل‌شده از f_i^- است. با استفاده از متغیرهای جدید مدل به صورت مجموعه معادلات ۵ بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m} (w_i^{\alpha} \alpha_i - w_i^{\beta} \beta_i) \\
&\quad s.t. \\
&\quad f_i(x) = \alpha_i g_{i,\min} + (1 - \alpha_i) g_{i,\max} + \beta_i (f_i^- - g_{i,\max}) \\
&\quad \alpha_i \leq y_i \leq 1 + \alpha_i \\
&\quad \beta_i + y_i \leq 1 \\
&\quad y_i \in \{0, 1\} \\
&\quad 0 \leq \alpha_i, \beta_i \leq 1 \\
&\quad x \in F
\end{aligned} \tag{۵}$$

این مدل دست‌یابی به جواب موجه $f_i(x)$ را تضمین می‌کند. همچنین از آن‌جا که $1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq 0$، ترجیحات تصمیم‌گیرنده می‌تواند به راحتی و بدون اختلال ناشی از تفاوت مقیاس هدف‌ها مدل‌سازی شود.

ابزار دیگر مورد استفاده در این مقاله، تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) [۱] است که یک روش تحلیل آماری چند متغیره‌ی شناخته شده است. در (PCA) به وسیله‌ی یک تبدیل متعامد تحلیل بر روی تعدادی متغیر همبسته به تحلیل بر روی تعدادی متغیر ناهمبسته تبدیل می‌شود. اغلب این روش با به کارگیری تعداد محدودی از اولین مؤلفه‌های اصلی که تغییرپذیری در داده‌های اصلی را منعکس می‌کنند، برای کاهش ابعاد استفاده می‌شود. برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی به کتاب رنچر[۵] رجوع شود.

تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) یک ابزار کلاسیک برای تحلیل داده‌های اکتشافی و ایجاد مدل‌های پیش‌بینی است. در سال‌های اخیر با پیدایش بحث داده‌های بزرگ نیاز به روش‌های PCA توسعه‌یافته با کارایی بالا احساس می‌شود؛ بدین‌منظور وانگ و همکاران[۶] روش CIPCA [۲] را که یک روش توسعه یافته از روش کلاسیک PCA برای داده‌های بازه‌یی است، ارائه کرده‌اند. وجه تمایز CIPCA با سایر روش‌های توسعه‌یافته‌ی PCA نظیرVPCA [۳] وCPCA [۴] در این است که این روش می‌تواند اطلاعات کامل در مشاهدات بازه‌یی را در برگیرد. CIPCA یک رویکرد کارآمد جایگزین PCA برای داده‌های عددی در مقیاس بزرگ فراهم می‌کند و قادر است ساختار پنهان در داده‌های بزرگ را بیابد.

روش IVIF-PCA [۵] نیز یک روش توسعه یافته‌ی دیگر از روش کلاسیک PCAبرای داده‌های بازه‌یی است. به کارگیری اعداد فازی شهودی بازه‌یی برای توصیف داده‌ها عدم قطعیت و تردید در نظرات مطرح شده توسط تصمیم‌گیرندگان را منعکس می‌کند. این روش برای در نظر گرفتن عدم قطعیت و تردید در تصمیم‌گیری را لیو و همکاران[۷و۸] ارائه داده‌اند. با آزمایش‌های عددی نشان داده شده است که روش IVIF-PCA نسبت به روش‌های توسعه یافته‌ی قبلی PCA برای مسائل تصمیم‌گیری گروهی پیچیده کارآمدتر است.

همگام با پژوهش‌های انجام شده برای توسعه‌ی مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی، پژوهش‌هایی در حوزه‌ی کاربرد آنها نیز صورت گرفته است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌شود.

لی و همکاران[۹] برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی فازی را برای انتخاب تأمین‌کننده نمایشگرهای TFT-LCD به کار گرفته‌اند. در نظر گرفتن چندین آرمان، رفتار تصمیم‌گیرندگان، و محدودیت منابع از نقاط قوت مدل آنها بوده است. پاکسوی و چانگ[۱۰] برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی اصلاح‌شده را برای مسئله‌ی کنترل موجودی چند دوره‌یی در سطح زنجیره‌ی تأمین و فروش از طریق پنجره‌های تبلیغاتی که در سایت‌ها قرار داده‌اند (Popup)، به کار گرفته‌اند. هو و همکاران[۱۱] برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی و تحلیل سلسله‌مراتبی را برای مسئله‌ی انتخاب مکان مناسب برای خرید یا اجاره‌ی منزل مسکونی یا محل کسب و کار به کار برده‌اند.

سیلوا و همکاران[۱۲] برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی عدد صحیح را برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی تولید شرکت شکر و اتانول در برزیل به کار برده‌اند. آنها نتایج برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی را با برنامه‌ریزی آرمانی وزنی مقایسه کرده‌و برتری برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی را نتیجه گرفته‌اند.

۳. روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای اعداد فازی شهودی بازه‌یی

با بررسی مدل کلاسیک PCA، مشاهده می‌شود که در صورت وجود تعداد زیاد متغیرهای هم‌بسته می‌توان ترکیب خطی آنها را برای ایجاد متغیرهای جدید مستقل به کار گرفت. با وجود این به علت آن‌که ترکیب خطی متغیرهای IVIF ممکن است یک متغیر IVIF نباشد، برای راحتی لیو و همکاران[۸] عدد IVIF و مجموعه‌ی IVIF را تعمیم داده و مفاهیم جدیدی را تعریف کرده‌اند. مفاهیم و تعاریف اولیه‌ی مربوط به مجموعه‌های فازی شهودی (IF) در پیوست ۱ بیان شده است.

۱.۳. الگوریتم IVIF-PCA

الگوریتم IVIF-PCA یک الگوریتم جدید برای تحلیل مؤلفه‌های اصلی بر روی اطلاعات فازی ـ بازه‌یی است،[۸] که در ادامه توضیح داده می‌شود: فرض می‌کنیم m متغیر IVIF به نام $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_m$ وجود دارد که مشابه با روش PCA کلاسیک، kامین مؤلفه‌ی اصلی یعنی $\dot{Y}_K$ یک ترکیب خطی از $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_m$ نظیر $Y_k = \sum_{j=1}^{m} e_{ik} \dot{A}_j$ است به‌طوری که $\dot{A} = (\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_m)$ و $e_k = (e_{1k}, \ldots, e_{mk})^T$ است و شرط $e_k^T e_k = 1$ و $e_k^T e_1 = 0$ نیز برقرار است. مطابق با قاعده‌ی ۱ که در بخش قبل بیان شد، واریانس $\dot{Y}_k$ به‌صورت رابطه‌ی ۶ است:

$$D(\dot{Y}_k) = COV(\dot{Y}_k, \dot{Y}_k) = e_k^T C e_k \tag{۶}$$

در این رابطه C ماتریس کوواریانس $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_m$ است. هدف مسئله یافتن m بردار متعامد $e_1, \ldots, e_m$ است که $\sum_{k=1}^{m} D(\dot{Y}_k)$ را با شرط $D(\dot{Y}_k) \geq$

$D(\dot{Y}_m) \geq \ldots$ بیشینه کند. مدل بهینه‌سازی به شرح رابطه‌ی ۷ است:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{k=1}^{m} e_k^T C e_k \\ & s.t. \\ & e_k^T e_k = 1 \\ & e_k^T e_l = 0 \\ & e_1^T C e_1 \geq \ldots \geq e_m^T C e_m \\ & 1 = 1, 2, \ldots, m \\ & 1 \neq k \end{aligned} \tag{7}$$

جواب بهینه $e_1, \ldots, e_m$ بردار ویژه‌های C است که متناظر با مقادیر ویژه‌ها به ترتیب نزولی است. گام های الگوریتم به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

گام ۱. به دست آوردن ماتریس نمونه‌یی $\dot{A} = (\dot{A}_1, \dot{A}_2, \ldots, \dot{A}_m)$ که به‌صورت رابطه‌ی ۸ نشان داده می‌شود:

$$\hat{A} = (\dot{A}_1, \ldots, \dot{A}_m) = (\dot{\alpha}_{ij})_{n*m} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \ldots & \dot{\alpha}_{1m} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \dot{\alpha}_{n1} & \ldots & \dot{\alpha}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & D(\dot{A}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} d(\dot{\alpha}_{xi}, E(\dot{A}))^2 \\ & COV(\dot{A}, \dot{A}) = COV \end{aligned} \tag{8}$$

به‌طوری‌که $\dot{A}_j = (\dot{\alpha}_{1j}, \ldots, \dot{\alpha}_{nj})^T$ بیان‌گر مشاهدات j امین متغیر IVIF است.

گام ۲. ماتریس کوواریانس محاسبه می‌شود.

گام ۳. ضرایب و واریانس‌های مؤلفه‌های اصلی محاسبه می‌شود.

گام ۴. مطابق با الزامات p مؤلفه‌ی اصلی اول انتخاب می‌شود.

گام ۵. ماتریس امتیاز محاسبه می‌شود.

۲.۳. تضمین IVIF بودن مؤلفه‌های اصلی

اگر مجموع مؤلفه‌های بردار ویژه برابر یک نباشد، مؤلفه‌های اصلی ممکن است اعداد IVIF نباشند. به‌منظور تضمین اینکه اطلاعات نهایی اعداد IVIF هستند، از تغییر مقیاس و انتقال به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

انتقال (traslation):

بدین‌منظور برای هر ستون از ماتریس نمرات (Score Matrix) کمینه‌ی «حد پایین درجه عضویت» و «حد پایین درجه‌ی عدم عضویت» را به عنوان s_k انتخاب می‌کنیم. سپس هر عنصر $\dot{y}_{ik}$ به‌وسیله‌ی s_k انتقال داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \hat{y}_{ik} = ([\dot{\mu}_{ik}^L - s_k, \dot{\mu}_{ik}^u - s_k], [\dot{\nu}_{ik}^L - s_k, \dot{\nu}_{ik}^u - s_k]) = \\ & ([\hat{\mu}_{ik}^L, \hat{\mu}_{ik}^u], [\hat{\nu}_{ik}^L, \hat{\nu}_{ik}^u]) \end{aligned} \tag{9}$$

تغییر مقیاس (scaling):

بدین‌منظور برای هر ستون از ماتریس نمرات (Score Matrix) بیشینه‌ی مجموع «حد بالای درجه‌ی عضویت» و «حد بالای درجه‌ی عدم عضویت» اعضای هر ستون با عنوان l_k به‌صورت زیر خواهد بود و تغییر مقیاس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} & l_k = \max\{\hat{\mu}_{ik}^u + \hat{\nu}_{ik}^u\} \\ & l = \max\{l_k\} (k = 1, \ldots, P) \end{aligned} \tag{10}$$

اگر $1 < 1$، تغییر مقیاس به‌صورت زیر انجام می‌شود و در غیر این صورت تغییر مقیاس انجام نمی‌شود:

$$\tilde{y}_{ik} = ([\hat{\mu}_{ik}^L / s_k, \hat{\mu}_{ik}^u / s_k], [\hat{\nu}_{ik}^L / s_k, \hat{\nu}_{ik}^u / s_k]) \tag{11}$$

هر خط از ماتریس نمونه‌یی از متغیرهاست. هنگامی که مؤلفه‌های ماتریس اعداد بازه‌یی باشند هر خط از ماتریس به عنوان یک مکعب مستطیل در فضای اقلیدسی در نظر گرفته می‌شود. به‌طور مشابه هنگامی که مؤلفه‌های اعداد IVIF باشند از دو مکعب مستطیل برای نمایش اطلاعات در هر نمونه استفاده می‌شود. بنابراین این روال تبدیل می‌تواند از لحاظ هندسی نمایش داده شود. به این علت که این تبدیل بر روی تمام نمونه‌ها به‌صورت یکسان اعمال می‌شود، تبدیل موقعیت نسبی نمونه‌ها را تغییر نمی‌دهد و مؤلفه‌های اصلی مستقل باقی می‌مانند.

با توجه به پیشینه‌ی تحقیق درباره‌ی مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی مشاهده شد در صورتی که در مسئله منافع گروه بزرگی از تصمیم‌گیرندگان مطرح باشد و به تعریف آرمان‌های متعدد نیاز باشد، در مدل‌های موجود به تعریف متغیرهای متعدد نیاز است که پیچیدگی محاسباتی را بالا می‌برد؛ همچنین مدل‌های موجود تردید تصمیم‌گیرندگان در انتخاب آرمان‌ها را نیز در نظر نمی‌گیرند. رویکرد پیشنهادی قادر است نظرات تصمیم‌گیرندگان با منافع مختلف در گروه‌های بزرگ و درجه‌ی تردید تصمیم‌گیرندگان را در مدل وارد کند و موجب کاهش پیچیدگی محاسباتی از طریق انتخاب یک یا تعداد محدودی آرمان به صورت علمی و دقیق با استفاده از الگوریتم IVIF-PCA شود.

۴. روش پیشنهادی مبتنی بر IVIF-PCA

هدف از این تحقیق ارائه‌ی یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی مبتنی‌بر نظرات ارائه شده توسط تعدادی تصمیم‌گیرنده در گروه‌های بزرگ است. از آن‌جا که با افزایش تعداد تصمیم‌گیرندگان، هم‌پوشانی و همبستگی نظرات تصمیم گیرندگان افزایش می‌یابد، این رویکرد مبتنی‌بر استخراج بیشترین اطلاعات ممکن با حذف این هم‌پوشانی‌هاست. چنان‌که در روش IVIF-PCA بیان شد، پس از تحلیل داده‌ها به تعداد تصمیم‌گیرندگان که همان متغیرها در PCA هستند، مؤلفه‌ی اصلی خواهیم داشت که اولین مؤلفه‌های اصلی بیشترین دانش را دربرمی‌گیرند. پس برای کاهش ابعاد مسئله تعداد محدودی از اولین مؤلفه‌های اصلی که معمولاً بر اساس معیاری نظیر نرخ مشارکت تجمعی مشخص می‌شوند، در نظرگرفته می‌شود. گام های روش پیشنهادی به شرح زیر است:

گام ۱. ایجاد ماتریس تصمیم: تعدادی آرمان مشابه آن‌چه در برنامه‌ریزی آرمانی چند گزینه‌یی متداول است انتخاب می‌شود؛ سپس هر تصمیم‌گیرنده درباره‌ی موافقت و عدم موافقت خود نسبت به هر آرمان عددی در بازه‌ی صفر و یک تخصیص می‌دهد. در نهایت یک ماتریس n در m حاصل می‌شود که سطرهای آن هر

یک از آرمان‌ها (n آرمان) و ستون‌های آن تصمیم‌گیرندگان (m تصمیم‌گیرنده) و درایه‌های آن اعداد فازی شهودی بازه‌یی هستند که مبیّن میزان موافقت یا عدم موافقت هر تصمیم‌گیرنده با آن آرمان هستند.

گام ۲. محاسبه‌ی ماتریس کوواریانس: به‌منظور محاسبه‌ی ماتریس کوواریانس ابتدا میانگین نمونه‌یی برای متغیرهای IVIF تعمیم‌یافته محاسبه می‌شود:

$$E(\dot{A}) = ([E(\dot{\mu}_{\dot{A}}^{L}(x)), E(\dot{\mu}_{\dot{A}}^{U}(x))], [E(\dot{\nu}_{\dot{A}}^{L}(x)), E(\dot{\nu}_{\dot{A}}^{U}(x))])$$
$$= ([\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\mu}_{\dot{A}}^{L}(x_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\mu}_{\dot{A}}^{U}(x_i)], [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\nu}_{\dot{A}}^{L}(x_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\nu}_{\dot{A}}^{U}(x_i)])$$
(۱۲)

سپس کوواریانس نمونه‌یی برای هر دو متغیر IVIF تعمیم‌یافته (درایه‌های ماتریس واریانس کوواریانس) محاسبه می‌شود:

$$COV(\dot{A}, \dot{B}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d(\dot{\alpha}_{xi}, E(\dot{A}))d(\dot{\beta}_{xi}.E(\dot{B})) \qquad (13)$$

گام ۳. محاسبه‌ی مقادیر ویژه و ضرایب مؤلفه‌های اصلی: با توجه به آن‌که خروجی مرحله‌ی قبل اعداد حقیقی هستند، محاسبه‌ی ضرایب و واریانس‌های مؤلفه‌های اصلی مطابق الگوریتم PCA کلاسیک انجام می‌شود.[8] بدین ترتیب مقادیر ویژه و ضرایب مؤلفه‌های اصلی محاسبه می‌شود.

گام ۴. تعیین ارزش ادغام شده‌ی هر آرمان: معمولاً با در نظرگرفتن مقیاس‌هایی نظیر نرخ مشارکت تجمعی چند مؤلفه‌ی اول که بیشترین اطلاعات را در برمی‌گیرند، انتخاب می‌شوند. اولین مؤلفه‌ی اصلی که از تحلیل IVIF-PCA حاصل شده یک ترکیب خطی از تعدادی متغیر است که تعداد متغیرها در این ترکیب خطی برابر تعداد تصمیم‌گیرندگان است. در نهایت با قرار دادن اعداد IVIF تبیین شده توسط هر تصمیم‌گیرنده برای هر آرمان، در ترکیب خطی به اطلاعات نهایی ادغام شده دست می‌یابیم.

گام ۵. تبدیل به اعداد IVIF: ممکن است اعداد حاصل IVIF نباشند و لازم است به اعداد IVIF تبدیل شوند. این عمل مطابق آن‌چه در بخش ۲-۴-۲ شرح داده شد، انجام می‌شود.

گام ۶. مقایسه‌ی آرمان‌ها: در نهایت برای هر آرمان یک عدد فازی شهودی بازه‌یی تعریف می‌شود که باید با یکدیگر مقایسه شوند و بهترین آرمان در نظرگرفته شود. به‌منظور مقایسه طبق تعریف ۴ عمل می‌کنیم.

بدین ترتیب مرجح‌ترین آرمان‌ها مشخص می‌شود و می‌توان مسئله را با تعداد محدودی آرمان مشخص شده حل کرد. این فرایند باید برای هر یک از توابع هدف انجام شود.

۵. مثال عددی

به‌منظور بررسی عملکرد رویکرد پیشنهادی مثال چانگ[1] با رویکرد پیشنهادی حل شده است. تفاوت مثال با مثال چانگ افزایش تعداد آرمان‌ها و در نظرگرفتن نظر تصمیم گیرندگان متعدد با منافع مختلف برای انتخاب آرمان است. بنابراین برای هر هدف ۷ آرمان در نظرگرفته شده است.

$$\begin{aligned}
Goals: &(G_1)5x_1 + 2x_2 + x_3 = 70,\ 75,\ 80,\ 85,\ 90,\ 95,\ 100\\
&(G_2)4x_1 + 3x_2 2x_3 = 70,\ 75,\ 80,\ 85,\ 90,\ 95,\ 100\\
&(G_3)\ 3/5x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 80,\ 85,\ 90,\ 95,\\
&100,\ 105,\ 110\\
&Constraints: x_2 + x_3 \geq 10,\ x_2 \geq 4,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 15.
\end{aligned}$$
(۱۴)

طبق آنچه بیان شد، برای هر یک از توابع هدف پس از طوفان فکری جمعی از متخصصان و کارشناسان تعدادی آرمان مختلف در نظرگرفته می‌شود؛ که در این‌جا به علت آن‌که مثال مذکور فرضی است این داده‌ها به‌صورت فرضی در نظرگرفته شده‌اند. برای آن‌که مقدار آرمان به‌صورت هدفمند انتخاب شود از تعدادی تصمیم‌گیرنده (حداقل ۲۰ متخصص در حوزه‌ی مربوط) درخواست می‌شود تا به هر یک از آرمان‌ها یک درجه‌ی موافقت و یک درجه‌ی عدم موافقت ـ به صورت زیربازه‌یی از صفر و یک ـ اختصاص دهند. مثلاً به تصمیم‌گیرندگان مثالی را ارائه می‌دهیم. اگر داشته باشیم $\dot{\alpha} = ([0/6, 0/7], [0/2, 0/3])$ آنگاه تفسیر $\dot{\alpha}$ به این صورت است که درجه‌ی رضایت از آرمان مورد نظر در بازه‌ی $[0/6, 0/7]$ قرار دارد، و درجه‌ی عدم رضایت از آرمان مورد نظر در بازه‌ی $[0/2, 0/3]$ قرار دارد. همچنین اشاره می‌کنیم که مجموع حد بالای دو بازه باید کوچک‌تر از یا مساوی با یک باشد. در صورتی که بدانیم بیان این نکته ممکن است موجب ابهام تصمیم‌گیرندگان شود، اشاره‌یی به این موضوع نمی‌کنیم؛ اما قبل از انجام هرگونه تحلیلی به کمک عملگر تبدیل (انتقال و تغییر مقیاس) اعداد را به اعداد IVIF تبدیل می‌کنیم.

اعداد به دست آمده برای هر یک از اهداف یک ماتریس با ۷ سطر و ۲۰ ستون را تشکیل می‌دهد. این ۲۰ ستون نظرات تصمیم‌گیرندگان مختلف است که معمولاً با یکدیگر هم‌پوشانی (و هم‌بستگی) دارند. هدف استخراج بیشترین اطلاعات ممکن با حذف این هم‌پوشانی‌هاست. بدین‌منظور مراحل IVIF-PCA انجام می‌شود.

نظرات تصمیم‌گیرندگان نسبت به هر آرمان به اختصار در پیوست ۲ نشان داده شده است. برای کاهش حجم محاسبات فرض می‌کنیم نظر تصمیم گیرندگان نسبت به آرمان اهداف مختلف یکسان است، در غیر این صورت باید برای هر تابع هدف عملیات زیر به صورت مجزا انجام شود. به علت ازدیاد داده‌ها هر یک از اجزای اعداد $([a, b], [c, d])$ به صورت مجزا در پیوست ۲ نشان داده شده است. همچنین به عنوان نمونه مؤلفه‌ی اصلی اول به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
pc_1 = &0/0228x_1 + 0/0494\,x_2 + 0/0732\,x_3 + 0/0881\,x_4\\
&+0/0980\,x_5 + 0/1004\,x_6 + 0/1038\,x_7 + 0/1275\,x_8\\
&+0/1428\,x_9 + 0/1645\,x_{10} + 0/1993\,x_{11} + 0/2200\,x_{12}\\
&+0/2325\,x_{13} + 0/2574,x_{14} + 0/2922\,x_{15} + 0/3053\,x_{16}\\
&+0/3179\,x_{17} + 0/3416\,x_{18} + 0/3654\,x_{19} + 0/3891x_{20}
\end{aligned}$$
(۱۵)

به‌منظور کاهش محاسبات تنها مؤلفه‌ی اول را در نظر می‌گیریم. در اینجا طبق این رابطه برای مؤلفه‌ی اصلی اول نظرات ادغام شده‌ی تصمیم‌گیرندگان برای هر یک از ۷ آرمان محاسبه شده است که نتایج به شرح جدول ۱ است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این اعداد IVIF نیستند و لازم است به اعداد IVIF تبدیل شوند. بدین‌منظور

جدول ۱. ادغام نظرات مربوط به هر آرمان.

آرمان اول	([۱٫۵۷۰۸,۱٫۹۶۲۱]، [۰٫۹۸۹۷,۱٫۵۸۰۱])
آرمان دوم	([۲٫۲۰۲۵,۲٫۷۴۹۱]، [۰٫۳۶۱۲,۰٫۷۵۳۶])
آرمان سوم	([۲٫۲۵۶۹,۲٫۶۵۳۴]، [۰٫۳۲۸۲,۰٫۸۵۶۶])
آرمان چهارم	([۱٫۵۸۳۸,۱٫۶۷۸۱]، [۱٫۰۶۳۴,۱٫۶۵۸۵])
آرمان پنجم	([۱٫۵۱۶۸,۱٫۹۶۵۱]، [۰٫۸۶۳۸,۱٫۵۲۷۶])
آرمان ششم	([۱٫۵۲۲۸,۱٫۹۱۲۰]، [۱٫۱۷۱۰,۱٫۶۸۶۹])
آرمان هفتم	([۱٫۲۱۲۶,۱٫۶۰۹۱]، [۱٫۶۹۳۸,۲٫۱۲۲۸])

جدول ۲. انتقال به عنوان گام اول تبدیل به اعداد **IVIF**.

آرمان اول	([۰٫۵۸۱۱,۰٫۹۷۲۳]، [۰,۰٫۵۹۰۴])
آرمان دوم	([۱٫۸۴۱۳,۲٫۳۸۷۹]، [۰,۰٫۳۹۲۳])
آرمان سوم	([۱٫۹۲۸۶,۲٫۳۲۵۱]، [۰,۰٫۵۲۸۴])
آرمان چهارم	([۰٫۵۲۰۴۱,۰٫۶۱۴۷]، [۰,۰٫۵۹۵۰])
آرمان پنجم	([۰٫۶۵۲۹,۱٫۱۰۱۲]، [۰,۰٫۶۶۳۷])
آرمان ششم	([۰٫۳۵۱۸,۰٫۷۴۱۰]، [۰,۰٫۵۱۵۸])
آرمان هفتم	([۰,۰٫۳۹۶۵]، [۰٫۴۸۱۱,۰٫۹۱۰۲])

جدول ۳. تغییر مقیاس به عنوان گام دوم تبدیل به اعداد **IVIF**.

آرمان اول	([۰٫۲۰۳۶,۰٫۳۴۰۷]، [۰,۰٫۲۰۶۹])
آرمان دوم	([۰٫۶۴۵۲,۰٫۸۳۶۸]، [۰,۰٫۱۳۷۴۹])
آرمان سوم	([۰٫۶۷۵۸,۰٫۸۱۴۸]، [۰,۰٫۱۸۵۱])
آرمان چهارم	([۰٫۱۸۲۳,۰٫۲۱۵۴]، [۰,۰٫۲۰۸۵])
آرمان پنجم	([۰٫۲۲۸۸,۰٫۳۸۵۹]، [۰,۰٫۲۳۲۵])
آرمان ششم	([۰٫۱۲۳۲,۰٫۲۵۹۶]، [۰,۰٫۱۸۰۷])
آرمان هفتم	([۰,۰٫۱۳۸۹]،[۰٫۱۶۸۶,۰٫۳۱۸۹])

جدول ۴. امتیاز هر آرمان برای تابع هدف اول.

شماره‌ی آرمان	مقدار تابع امتیاز
آرمان اول	-۰٫۳۳۷
آرمان دوم	-۱٫۳۴۴
آرمان سوم	-۱٫۳۰۵
آرمان چهارم	-۰٫۱۸۹
آرمان پنجم	-۰٫۳۸۲
آرمان ششم	-۰٫۲۰۲
آرمان هفتم	۰٫۳۴۸۶

در جدول ۲ گام انتقال نشان داده شده است. در جدول ۳ گام تغییر مقیاس نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با توجه به آن‌که ۷ آرمان تعریف کرده بودیم برای هر آرمان یک بازه به صورت فوق تعریف می‌شود که باید با یکدیگر مقایسه شوند و بهترین آرمان در نظر گرفته شود. به‌منظور مقایسه طبق تعریف ۴ در پیوست ۱ در جدول ۴ بیان شده است. از میان آرمان‌های مورد نظر با توجه به الگوریتم IVIF-PCA برای اعمال نظر تصمیم‌گیرندگان با منافع مختلف، هفتمین آرمان یعنی مقدار ۱۰۰ بهترین است.

جدول ۵. امتیاز هر آرمان برای تابع هدف اول.

شماره‌ی آرمان	مقدار تابع امتیاز
آرمان اول	-۰٫۲۴۳۵۵
آرمان دوم	-۰٫۱۲۸۱۲
آرمان سوم	۰٫۱۸۲۶۰۲
آرمان چهارم	-۰٫۱۸۱۴۸
آرمان پنجم	-۰٫۲۰۸۵۵
آرمان ششم	-۰٫۶۴۴۰۶
آرمان هفتم	-۰٫۶۸۰۷۷

برای تابع هدف دوم تمام این مراحل را انجام می‌دهیم. در نهایت امتیاز هر آرمان مرتبط با تابع هدف دوم به‌صورت جدول ۵ خواهد بود: از میان آرمان‌های مورد نظر با توجه به الگوریتم IVIF-PCA برای اعمال نظر تصمیم‌گیرندگان با منافع مختلف، سومین آرمان یعنی مقدار ۸۰ انتخاب می‌شود. در نهایت با فرض آن‌که نظرات در ارتباط با آرمان‌های سومین تابع هدف مشابه آرمان‌های دومین تابع هدف باشد، برای تابع هدف سوم نیز سومین آرمان یعنی مقدار ۹۰ انتخاب می‌شود. بنابر آن‌چه ذکر شد مسئله به مسئله‌ی برنامه‌ریزی آرمانی کلاسیک به شرح زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Goals:\ (G_1)3x_1+2x_2+x_3=100\\
&\quad (G_2)4x_1+3x_2+2x_3=80\\
&\quad (G_3)\,3/5x_1+5x_2+3x_3=90\\
&\quad Constraints:\ x_2+x_3\geq 10,\ x_2\geq 4,\ x_1+x_2+x_3\leq 15.
\end{aligned} \tag{16}$$

با حل این مسئله در LINGO جواب بهینه‌ی ۴۳٫۳۳۳۳۳ حاصل می‌شود. همچنین مقادیر بهینه‌ی x_1، x_2، x_3 به ترتیب برابر ۱۳٫۳۳۳۳۳، ۶٫۶۶۶۶۶۷ و ۳٫۳۳۳۳۳۳ است. در صورتی که با حل این مسئله در LINGO جواب موجه حاصل نشود، در این مرحله سه راه حل وجود دارد: (۱) باید دو مؤلفه‌ی اصلی اول برای انتخاب آرمان‌ها در نظر گرفته شود و مجدداً مراحل فوق تکرار شود. (۲) برنامه‌ریزی آرمانی کلاسیک با دومین آرمان بهتر از دید تصمیم‌گیرندگان (یعنی آرمان پنجم) حل شود. (۳) برنامه‌ریزی آرمانی به صورت چندگزینه‌یی و با دو آرمان بهتر از دید تصمیم‌گیرندگان حل شود.

۶. نتیجه‌گیری و زمینه‌های تحقیقات آتی

یکی از مهم‌ترین مشکلات در مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی انتخاب آرمان برای هر یک از اهداف است که با توجه به محدودیت اطلاعات امری دشوار است. بنابراین ممکن است بی‌دقتی در انتخاب آرمان تصمیم‌گیرندگان را از دست‌یابی به هدف مورد نظرشان دور کند. همچنین با وجود ارائه‌ی مدل‌های مختلف برای افزایش انعطاف‌پذیری در تصمیم‌گیری، همچنان مدل‌های کنونی قادر به در نظرگرفتن درجه‌ی تردید تصمیم‌گیرندگان نیستند. تردید تصمیم‌گیرنده در این مسئله در واقع بیان‌کننده‌ی شک او در مناسب یا نامناسب بودن آرمان است. در این پژوهش آرمان‌ها به صورت گزینه‌هایی در نظر گرفته شده‌اند که تصمیم‌گیرندگان مختلف میزان موافقت

و عدم موافقت خود با آن را به صورت اعداد فازی شهودی بازه‌یی بیان می‌کنند. همچنین به‌منظور ادغام نظرات مختلف تصمیم‌گیرندگان از روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای اعداد فازی شهودی بازه‌یی استفاده شده است. سازوکار توسعه داده شده در این مقاله قادر است نظرات تصمیم‌گیرندگان با منافع مختلف در گروه‌های بزرگ و درجه‌ی تردید تصمیم‌گیرندگان را در مدل وارد کند که در مدل‌های پیشین به آن توجه نشده است.

از مزایای سازوکار پیشنهادی علاوه بر در نظر گرفتن نظرات تصمیم‌گیرندگان با منافع مختلف در گروه‌های بزرگ و درجه‌ی تردید تصمیم‌گیرندگان، کاهش پیچیدگی محاسباتی از طریق انتخاب یک آرمان به صورت علمی و دقیق با استفاده از الگوریتم IVIF-PCA است.

در این مقاله میزان رضایت و عدم رضایت از آرمان‌ها به صورت اعداد IVIF در نظر گرفته شده است؛ بنابراین یکی از ایده‌های مطرح برای توسعه‌ی مدل پیشنهادی در پژوهش‌های آتی در نظر گرفتن خود آرمان‌ها به صورت اعداد IVIF و به کارگیری سازوکاری برای تعبیه‌ی آن در مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌یی است. از دیگر زمینه‌های توسعه‌ی این پژوهش به کارگیری این سازوکار در مسائل واقعی نظیر مسائل مطرح در برنامه‌ریزی زنجیره‌ی تأمین است.

پانوشت‌ها

1. Principal Component Analysis
2. Complete-Information-Based Principal Component Analysis
3. Vertices Principal Component Analysis
4. Centers Principal Component Analysis
5. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Principal Component Analysis

منابع (References)

1. Chang, C.T."Multi-choice goal programming", *Omega*, **35**(4), pp. 389-396. (2007).
2. Chang, C.T. "Revised multi-choice goal programming", *Applied Mathematical Modelling*, **32**(12), pp. 2587-2595. (2008).
3. Chang, C.T. "Multi-choice goal programming with utility functions", *European Journal of Operational Research*, **215**(2), pp. 439-445. (2011).
4. Jadidi, O., Cavalieri, S. and Zolfaghari, S. "An improved multi-choice goal programming approach for supplier selection problems", *Applied Mathematical Modelling*, **39**(14), pp.4213-4222 (2014).
5. Rencher, A.C. "Methods of multivariate analysis",(Vol. 492). *John Wiley & Sons*, **492** (2003).
6. Wang, H., Guan, R. and Wu, J. "CIPCA: Complete-Information-based Principal Component Analysis for interval-valued data", *Neurocomputing*, **86**, pp. 158-169. (2012).
7. Liu, B., Chen, Y., Shen, Y. and etal. "A complex multi-attribute large-group decision making method based on the interval-valued intuitionistic fuzzy principal component analysis model", *Soft Computing*, **18**(11), pp. 2149-2160, (2014).
8. Liu, B., Shen, Y., Zhang, W. and et al. "An interval-valued intuitionistic fuzzy principal component analysis model-based method for complex multi-attribute large-group decision-making", *European Journal of Operational Research*, **245**(1), pp. 209-225. (2015).
9. Lee, A.H., Kang, H.Y. and Chang, C.T. "Fuzzy multiple goal programming applied to TFT-LCD supplier selection by downstream manufacturers", "Expert Systems with Applications", **36**(3), pp. 6318-6325. (2009).
10. Paksoy, T. and Chang, C.T. "Revised multi-choice goal programming for multi-period, multi-stage inventory controlled supply chain model with popup stores in Guerrilla marketing", "Applied Mathematical Modelling", **34**(11), pp. 3586-3598. (2010).
11. Ho, H. P., Chang, C. T. and Ku, C. Y. "On the location selection problem using analytic hierarchy process and multi-choice goal programming", *International Journal of Systems Science*, **44**(1), pp. 94-108. (2013).
12. da Silva, A.F., Marins, F.A.S. and Montevechi, J. A. B. "Multi-choice mixed integer goal programming optimization for real problems in a sugar and ethanol milling company", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(9), pp. 6146-6162. (2013).
13. Atanassov, K. and Gargov, G. "Interval valued intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, **31**(3), pp. 343-349, (1989).
14. Xu, Z.S. and Yager, R.R. "Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets", *International Journal of General Systems*, **35**, pp. 417-433. (2006).
15. Xu, Z.S. "Choquet integrals of weighted intuitionistic fuzzy information", *Information Sciences*, **180**, pp. 726-736. (2010).

پیوست

پیوست ۱. فازی شهودی و فازی شهودی بازه‌یی

در منطق کلاسیک ریاضی صحت یک گزاره برابر مقدار صفر یا یک است. اما در منطق فازی این صحت مقداری حقیقی در بازه‌ی [۰, ۱] است که این میزان صحت «درجه‌ی صحت» یا «درجه‌ی عضویت» نامیده می‌شود. آتاناسوف[۱۳] یک مقدار حقیقی دیگر از فاصله‌ی [۰, ۱] را با عنوان «درجه‌ی عدم صحت» یا «درجه‌ی عدم عضویت» به این مفهوم افزود. تعریف آتاناسوف از مفهوم مجموعه‌های فازی شهودی (IF) به شرح زیر است.

تعریف ۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی اعداد حقیقی غیرتهی باشد. مجموعه‌ی

IF به نام A در X به صورت رابطه‌ی ۱۷ تعریف می‌شود:

$$A = \{(x, \mu_A(x), (\nu_A(x) | x \in X\} \tag{17}$$

به‌طوری‌که $\mu_A(x)$ و $\nu_A(x)$ به ترتیب مبیّن درجه‌ی عضویت و عدم عضویت x هایی در X است که به مجموعه‌ی A نگاشت دارد؛ این نگاشت به شرح روابط ۱۸ است:

$$\begin{aligned}&\mu_A : X \to [0,1],\ or\ x \in X \to \mu_A(x) \in [0,1]\\ &\nu_A : X \to [0,1],\ or\ x \in X \to \nu_A(x) \in [0,1]\end{aligned} \tag{18}$$

که به ازای هر $x \in X$ داریم: $1 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 0$ در تعریف ۱ مفهومی با عنوان شاخص شهودی یا درجه‌ی تردید x در A وجود دارد که به صورت رابطه‌ی ۱۹ تعریف می‌شود:

$$\pi_A(x) = 1 = \mu_A(x) - \nu_A(x) \tag{19}$$

که به ازای هر x عضو X این مقدار در بازه‌ی $1, \pi_A(x) \leq 0$ قرار می‌گیرد.

به‌منظور ساده‌سازی ژو و یاگر[14] برای نمایش مؤلفه در مجموعه‌ی IF، عدد فازی شهودی را با $\alpha_x = (\mu_A(x), \nu_A(x))$ نشان داده‌اند. به‌طورکلی به علت پیچیدگی و نامعینی اطلاعات، استفاده از اعداد حقیقی برای بیان دقیق درجه‌ی عضویت یا عدم عضویت در مجموعه‌ی IF چالش برانگیز است؛ در حالی که اعداد بازه‌یی اغلب مناسب‌تر هستند. بنابراین در فازی شهودی بازه‌یی(IVIF) «درجه‌ی صحت یا عضویت» و «درجه‌ی عدم صحت یا عدم عضویت» به صورت زیربازه‌های بسته‌یی از بازه‌ی [۱ ,۰] بیان می‌شود.

تعریف ۲. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی باشد، مجموعه‌ی IVIF به صورت رابطه‌ی ۲۰ تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(X), \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(X)) | x \in X\} \tag{20}$$

به طوری‌که $\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(X) = [\tilde{\mu}^L_{\tilde{A}}(X), \tilde{\mu}^U_{\tilde{A}}(X)] \subset [0,1]$ و $\tilde{\nu}_{\tilde{A}}(X) = [\tilde{\nu}^L_{\tilde{A}}(X), \tilde{\nu}^U_{\tilde{A}}(X)] \subset [0,1]$ و $\tilde{\mu^U}_{\tilde{A}}(X) + \tilde{\nu}^U_{\tilde{A}}(X) \leq 1$. همچنین اگر $\tilde{\mu}^L_{\tilde{A}}(X) = \tilde{\mu}^U_{\tilde{A}}(X)$ و $\tilde{\nu}^L_{\tilde{A}}(X) = \tilde{\nu}^U_{\tilde{A}}(X)$، مجموعه‌ی IVIF به مجموعه‌ی IF تبدیل می‌شود.

مطابق تعریف مؤلفه‌های پایه‌یی مجموعه‌ی IVIF عبارت‌اند از بازه‌های مرتب‌شده‌ی درجه‌ی عضویت یا عدم عضویت xهایی در X که به $\tilde{A}$ نگاشت دارد.

تعریف ۳. فرض کنیم $\tilde{\alpha}_1 = ([a_1, b_1], [c_1, d_1])$ و $\tilde{\alpha}_2 = ([a_2, b_2], [c_2, d_2])$ دو عدد IVIF باشند. چهار عمل که می‌توانند روی آنها انجام شوند به شرح مجموعه روابط ۲۱ است:

$$\begin{aligned}&\tilde{\alpha}_1 \oplus \tilde{\alpha}_2 = ([a_1 + a_2 - a_1 a_2, b_1 + b_2 - b_1 b_2], [c_1 c_2, d_1 d_2])\\ &\tilde{\alpha}_1 \otimes \tilde{\alpha}_2 = ([a_1 a_2, b_1 b_2], [c_1 + c_2 - c_1 c_2, d_1 + d_2 - d_1 d_2])\\ &\lambda \tilde{\alpha}_1 = ([1 - (1 - a_1)^\lambda, 1 - (1 - b_1)^\lambda], [c_1^\lambda, d_1^\lambda]), \lambda > 0\\ &\tilde{\alpha}_1^\lambda = ([a_1^\lambda, b_1^\lambda], [1 - (1 - c_1)^\lambda, 1 - (1 - d_1)^\lambda]), \lambda > 0\end{aligned} \tag{21}$$

معمولاً مقایسه و رتبه‌بندی اعداد IVIF پس از ادغام اطلاعات برای تصمیم‌گیری نهایی لازم است. ژو[15] یک تابع امتیاز و یک تابع صحت برای رتبه‌بندی اعداد IVIF پیشنهاد داده که به شرح تعریف ۴ است.

تعریف ۴. فرض کنیم $\tilde{\alpha} = ([a, b], [c, d])$ یک عدد IVIF باشد. تابع امتیاز و تابع صحت آن به ترتیب به صورت $s(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{2}(a - c + b - d)$ و $h(\tilde{\alpha}\frac{1}{2}(a + b + c + d)$ نشان داده می‌شود. بدین ترتیب با داشتن دو عدد IVIF به صورت $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$، داریم:

- اگر $s(\tilde{\alpha}) < s(\tilde{\beta})$ آنگاه $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$
- اگر $s(\tilde{\alpha}) = s(\tilde{\beta})$ آنگاه $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$
- اگر $h(\tilde{\alpha}) = h(\tilde{\beta})$ آنگاه $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$
- اگر $h(\tilde{\alpha}) < h(\tilde{\beta})$ آنگاه $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$

تعریف ۶. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی باشد. برای عدد IVIF به‌صورت رابطه‌ی ۲۲ است.

$$\begin{aligned}&(\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(X), \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(X)) =\\ &\quad \tilde{\alpha}_x = ([\tilde{\mu}^L_{\tilde{A}}(X), \tilde{\mu}^U_{\tilde{A}}(X)], [\tilde{\nu}^L_{\tilde{A}}(X), \tilde{\nu}^U_{\tilde{A}}(X)])\end{aligned} \tag{22}$$

محدودیت بازه‌های $\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(X)$ و $\tilde{\nu}_{\tilde{A}}(X)$ را حذف می‌کنیم (منظور محدودیت تعلق داشتن به بازه‌ی [۱ ,۰] و محدودیت ارضای رابطه‌ی $\tilde{\mu}_{\tilde{A}^U}(X) + \tilde{\nu}_{\tilde{A}^U}(X) \leq 1$ است) و دو بازه‌ی جدید به صورت $\dot{\mu}_{\dot{A}}(X)$ و $\dot{\nu}_{\dot{A}}(X)$ به دست می‌آوریم.

مشابه عمل جمع و ضرب اعداد بازه‌یی که پیش از این بیان شد، عمل جمع خطی و ضرب خطی را برای اعداد IVIF تعمیم داده شده به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۷. فرض می‌کنیم $\dot{\alpha} = ([a_1, b_1], [c_1, d_1])$ و $\dot{\beta} = ([a_2, b_2], [c_2, d_2])$ دو عدد IVIF تعمیم داده‌شده باشند. جمع خطی $\dot{\alpha}$ و $\dot{\beta}$ به صورت رابطه‌ی ۲۳ نشان داده می‌شود:

$$\dot{\alpha} + \dot{\beta} = ([a_1 + a_2, b_1 + b_2], [c_1 + c_2, d_1 + d_2]) \tag{23}$$

در ادامه به ارائه‌ی مفاهیم واریانس نمونه‌یی و کوواریانس نمونه‌یی برای متغیرهای IVIF تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود: میانگین نمونه‌یی برای متغیر IVIF تعمیم‌یافته:

$$\begin{aligned}&E(\dot{A}) = ([E(\dot{\mu}^L_{\dot{A}}(x)), E(\dot{\mu}^U_{\dot{A}}(x))], [E(\dot{\nu}^L_{\dot{A}}(x)), E(\dot{\nu}^U_{\dot{A}}(x))])\\ &= ([\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{\mu}_{\dot{A}^L}(x_i) =, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{\mu}^U_{\dot{A}}(x_i)], [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{\nu}^L_{\dot{A}}(x_i),\\ &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{\nu}^U_{\dot{A}}(x_i)])\end{aligned} \tag{24}$$

تفاوت بین دو متغیر IVIF تعمیم یافته $\dot{\alpha}$ و $\dot{\beta}$:

$$d(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{1}{2}((a_1 + b_1 - a_2 - b_2) - \frac{1}{2}(c_1 + d_1 - c_2 - d_2) \tag{25}$$

مفهوم تفاوت بین دو متغیر IVIF تعمیم‌یافته $\dot{\alpha}$ و $\dot{\beta}$:

تفاوت بین دو متغیر IVIF تعمیم‌یافته $\dot{\alpha}$ و $\dot{\beta}$ یا $d(\dot{\alpha}, \dot{\beta})$ شامل دو بخش است: تفاوت درجه‌ی عضویت و تفاوت درجه‌ی عدم عضویت. به علت آن‌که درجه‌ی عضویت و درجه‌ی عدم عضویت دو مفهوم متضاد هستند، تفاوت دو متغیر IVIF تعمیم‌یافته می‌تواند با تفریق تفاوت درجه‌ی عدم عضویت از تفاوت درجه‌ی عضویت حاصل شود.

واریانس نمونه‌یی برای متغیر IVIF تعمیم‌یافته:

$$D(\dot{A}) = \frac{1}{n - 1}\sum_{i=1}^{n} d(\dot{\alpha}_{xi}, E(\dot{A}))^2 \tag{26}$$

کوواریانس نمونه‌یی برای دو متغیر IVIF تعمیم یافته:

$$COV(\dot{A},\dot{B})=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d(\dot{\alpha}_{xi},E(\dot{A}))d(\dot{\beta}_{xi},E(\dot{b})) \qquad (۲۷)$$

قاعده ۱. فرض می‌کنیم m متغیر IVIF به نام $\dot{A}_1,\dot{A}_2,\dots,\dot{A}_3$ وجود دارد، واریانس ترکیب خطی آنها نظیر $\dot{A}_1=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\dot{A}_j$ به صورت رابطه‌ی ۲۸ است:

$$D(\dot{A})=COV(\dot{A},\dot{A})=COV(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\dot{A}_j,\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\dot{A}_j)$$
$$=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\begin{pmatrix}cov(\dot{A}_1,\dot{A}_1) & cov(\dot{A}_1,\dot{A}_m)\\ cov(\dot{A}_m,\dot{A}_1) & cov(\dot{A}_m,\dot{A}_m)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ .\\ \lambda_m\end{pmatrix}\lambda^T C\lambda \qquad (۲۸)$$

پیوست ۲. ماتریس تصمیم برای تابع هدف اول

۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۷	۰٫۶	۰٫۶	۰	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۳	۰	۰	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۶	۰	۰٫۶	۰
۰٫۱	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۱	۰	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۱	۰	۰	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰	۰٫۱	۰
۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۱	۰	۰٫۲	۰	۰٫۱	۰	۰	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۱	۰	۰٫۱	۰
۰٫۱	۰٫۱	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۶	۰	۰٫۲	۰٫۳	۰	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۳	۰	۰٫۱	۰٫۶	۰	۰٫۶	۰
۰٫۷	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۳	۰	۰	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۳
۰٫۶	۰٫۶	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۷	۰٫۷	۰	۰	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۳
۰٫۱	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۷	۰	۰	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۷

a در ([a,b],[c,d]).

۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۹	۰٫۸	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۳	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۱
۰٫۱	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۵	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۱
۰٫۲	۰٫۳	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۸	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۱	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۸	۰٫۱	۰٫۸	۰٫۱
۰٫۸	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۵
۰٫۷	۰٫۸	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۵
۰٫۱	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۹	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۹	۰٫۱	۰٫۹	۰٫۱	۰٫۹

b در ([a,b],[c,d]).

۰٫۵	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۵	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۷
۰٫۷	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۳	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۷
۰٫۶	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۴	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۶	۰٫۷
۰٫۶	۰٫۶	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۷
۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۵	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۳	۰٫۵	۰٫۳
۰٫۱	۰٫۱	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۳
۰٫۷	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۷	۰	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۱	۰	۰٫۷	۰	۰٫۷	۰

cدر ([a,b],[c,d]).

۰٫۷	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۵	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۸	۰٫۴	۰٫۴	۰٫۴	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۲	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۸
۰٫۸	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۶	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۸
۰٫۷	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۸	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۶	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۷	۰٫۸
۰٫۷	۰٫۷	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۶	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۲	۰٫۶	۰٫۲	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۸
۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۸	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۲	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۲	۰٫۶	۰٫۸	۰٫۴	۰٫۸	۰٫۴
۰٫۲	۰٫۲	۰٫۶	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۴	۰٫۷	۰٫۴
۰٫۸	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۸	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۸	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۸	۰٫۱	۰٫۸	۰٫۱

d در ([a,b],[c,d]).

ماتریس تصمیم برای تابع هدف دوم

$$\begin{bmatrix}
0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\
0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.7 & 0.7 & 0 & 0 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\
0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0 & 0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.7 \\
0.1 & 0.6 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0.6 & 0 & 0.6 & 0 \\
0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.7 & 0.6 & 0.6 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 & 0.6 & 0 \\
0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\
0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0
\end{bmatrix}$$

a در ([a,b],[c,d]).

$$\begin{bmatrix}
0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.5 \\
0.8 & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.8 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0.8 & 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.5 \\
0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0.1 & 0.9 & 0.1 & 0.9 \\
0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0.8 & 0.8 & 0.5 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 0.1 & 0.8 & 0.1 \\
0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.3 & 0.7 & 0.1 & 0.7 & 0.1 \\
0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.1
\end{bmatrix}$$

b در ([a,b],[c,d]).

$$\begin{bmatrix}
0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\
0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.6 & 0.3 \\
0.5 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.7 & 0 \\
0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.7 & 0.4 & 0.3 & 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.7 & 0.5 & 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.7 \\
0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.7 \\
0.5 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0.7 & 0.7 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.7 & 0.5 & 0.7 \\
0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.7
\end{bmatrix}$$

cدر ([a,b],[c,d]).

$$\begin{bmatrix}
0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.2 & 0.7 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.8 & 0.4 & 0.8 & 0.4 \\
0.2 & 0.6 & 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0.4 \\
0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.8 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0.8 & 0.1 \\
0.7 & 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0.8 & 0.2 & 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.8 \\
0.7 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.8 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.7 & 0.7 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.8 \\
0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.8 & 0.8 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\
0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.8
\end{bmatrix}$$

d در ([a,b],[c,d]).