

# طراحی نمودار کنترل تطبیقی با نمونه‌گیری اضافی بین زمان‌های ثابت با رویکرد زنجیره‌ی مارکوف

شروین اسدزاده\* (استادیار)

زهراسادات طباطبایی زواره‌کاشانی (کارشناس ارشد)

گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شمال

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۷ (۱۳۹۷)  
دربی ۱، شماره ۲/۲، ص ۱۵۱-۱۶۶، (پادداشت فنی)

نمودارهای کنترل انتخاب عامل انحراف به دلیل وجود خاصیت آبخاری در فرایندهای چندمرحله‌یی، یکی از نمودارهای کاربردی و تخصصی به منظور پایش و تشخیص تغییرات در فرایندهای چندمرحله‌یی به شمار می‌آیند. در این مقاله، یک رویکرد پایش تطبیقی به منظور پایش فرایند دومرحله‌یی ارائه شده که در آن نمونه‌گیری در نقاط زمانی ثابت انجام می‌شود، اما می‌توان نمونه‌های اضافی بین این زمان‌های ثابت را نیز گرفت. شاخص متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار از طریق رویکرد زنجیره‌ی مارکوف، برای ارزیابی عملکرد نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر در زمان ثابت محاسبه شده است. مقایسه‌ی نتایج عددی حاصل از نمودار کنترل تطبیقی با نمونه‌گیری در زمان‌های ثابت، و نیز با نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت و نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر، حکایت از عملکرد بهتر نمودارهای ارائه شده دارد. در نهایت، طراحی آماری مناسب نمودارهای کنترل پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است.

**واژگان کلیدی:** فرایندهای چندمرحله‌یی، نمودار کنترل تطبیقی، فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر با نمونه‌گیری در زمان‌های ثابت، متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار.

sh\_asadzadeh@iau-tnb.ac.ir  
zhr.tabataba@gmail.com

## ۱. مقدمه

مدت زمان زیادی است که از کیفیت به عنوان یک عامل رقابتی کلیدی در جهان نام برده می‌شود. نمودار کنترل از پرکاربردترین و پیچیده‌ترین ابزارهای هفت‌گانه‌ی کنترل فرایند آماری است که نقش مهمی در ارتقاء کیفیت فرایندها از طریق پایش و شناسایی تغییرات رخ داده در آن‌ها ایفا می‌کند. به دلیل اهمیت نمودارهای کنترل، نوآوری‌های زیادی در خصوص بهبود عملکرد آن‌ها انجام شده است. معرفی نمودارهای کنترل تطبیقی<sup>۱</sup> از جمله‌ی این موارد است.

نمودار کنترل تطبیقی یکی از روش‌هایی است که در سال‌های اخیر مورد بررسی قرار گرفته است. در این نوع از نمودارهای کنترل، حداقل یکی از پارامترهای طراحی نمودار کنترل -- اندازه نمونه ( $n$ )، فاصله‌ی نمونه‌گیری ( $h$ )، ضریب حدود کنترل ( $k$ ) -- متغیر است. در این نمودارها با رسم حدود هشدار ( $w$ ) بر نمودار، نمودار به چند ناحیه‌ی تقسیم، و پارامترهای نمودار کنترل برای نمونه‌ی بعدی با توجه به آماری کنونی تعیین می‌شود.<sup>[۱-۴]</sup>

بسیاری از تحقیقاتی که در رابطه با کنترل فرایند آماری ارائه شده، با فرض وجود یک مرحله‌ی کاری است؛ ولی واقعیت فرایندهای تولیدی عموماً حکایت از

چندمرحله‌یی بودن آنها دارد. به فرایندهایی که در آن‌ها مشخصات کیفی مورد نظر در یک محصول، پس از طی چندین مرحله‌ی کاری تأثیرگذار بر هم تحقق می‌یابد، «فرایندهای چندمرحله‌یی»<sup>۲</sup> می‌گویند.<sup>[۵]</sup> در این فرایندها، مشخصه‌های کیفی مورد نظر به مشخصه‌های کیفی مراحل قبل خود وابسته است و اگر در یک مرحله از فرایند، محصول از کیفیت مناسبی برخوردار نباشد نمی‌توان آن کیفیت نامطلوب را صرفاً ناشی از کیفیت نامطلوب فرایند در آن مرحله دانست، بلکه ممکن است ناشی از کیفیت ضعیف مراحل قبلی باشد. ویژگی ذکر شده از خصوصیات اصلی فرایندهای چندمرحله‌یی است که به «خاصیت آبخاری»<sup>۳</sup> معروف است.<sup>[۶ و ۷]</sup> پیشرفت در فناوری سبب توسعه‌ی نمودارهای کنترل برای پایش محصولات و فرایندهای پیچیده‌تر شده است. دانش کافی از ساختار محصول و فرایند در به‌کارگیری مناسب نمودارهای کنترل بسیار مؤثر است چرا که استفاده از نمودارهای کنترل در شرایط نامناسب موجب بروز خطا در تفسیر وضعیت فرایند می‌شود.<sup>[۸]</sup> براین اساس، به‌کارگیری نمودارهای کنترل سنتی منجر به ایجاد نتایج اشتباه می‌شود. لذا غالباً برای پایش فرایندهای چندمرحله‌یی از «نمودار انتخاب عامل انحراف»<sup>۴</sup> استفاده می‌شود.<sup>[۹ و ۱۰]</sup> در فرایندهای چندمرحله‌یی، تشخیص سریع شرایط خارج از کنترل بسیار مهم است. از این رو، نمودارهای کنترل تطبیقی در فرایندهای چندمرحله‌یی نیز مد نظر قرار گرفته است.

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۲۰۱۶/۲/۱۳۹۶، اصلاحیه ۱۳۹۶/۴/۳۰، پذیرش ۱۳۹۶/۶/۱۱

DOI:10.24200/J65.2018.20093

عده‌یی از محققین اثر ترکیب‌های مختلف ویژگی‌های تطبیقی و نمودارهای کنترل انتخاب عامل انحراف را بررسی کردند. آنان برای اولین بار از مفهوم نمودارهای کنترل تطبیقی برای پایش فرایندهای چندمرحله‌یی استفاده کرده<sup>[۱]</sup> و نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف با اندازه نمونه‌ی متغیر را ارائه کردند. به‌کارگیری سه فاصله‌ی نمونه‌گیری متفاوت و طراحی نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف، از طریق فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر مورد بررسی قرار گرفت.<sup>[۱۲]</sup> همچنین نمودارهای کنترل انتخاب عامل انحراف با اندازه نمونه‌ی متغیر و فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر با سه اندازه نمونه‌ی متفاوت و سه فاصله‌ی متفاوت ارائه شده است.<sup>[۱۳]</sup> نورالسنا و شکاری<sup>[۱۴]</sup> با دو سیاست مختلف ترکیب دو اندازه نمونه و همچنین دو فاصله‌ی نمونه‌گیری مختلف، نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف با اندازه نمونه‌ی متغیر و فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر را ارائه کردند. توسعه‌ی نمودارهای کنترل انتخاب عامل انحراف با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر برای تشخیص تغییرات در میانگین و واریانس فرایندهای دومرحله‌یی از دیگر تحقیقات انجام شده در این حوزه است.<sup>[۱۵]</sup> مرور ادبیاتی جامع در زمینه‌ی نمودارهای کنترل تطبیقی صورت پذیرفته است.<sup>[۱]</sup>

با توجه به بررسی‌های انجام شده، مشخص شد که پژوهش‌های انگشت‌شماری در حوزه‌ی رویکردهای تطبیقی برای پایش فرایندهای چندمرحله‌یی انجام شده است. از این رو با توجه به اهمیت و کاربرد فراوان این رویکرد در فرایندهای تولیدی مختلف، بر آن شدیم تا در این پژوهش یک رویکرد جدید تطبیقی به‌منظور پایش فرایندهای دومرحله‌یی ارائه کنیم که در آن نمونه‌ها معمولاً در نقاط زمانی ثابت گرفته می‌شوند اما می‌توان نمونه‌هایی اضافی بین این زمان‌های ثابت نیز گرفت.

بخش دوم این مقاله به تشریح مسئله و مفروضات مدل اختصاص یافته و روش پیشنهادی برای پایش فرایند دومرحله‌یی با استفاده از نمودار کنترل تطبیقی در بخش‌های سوم و چهارم معرفی می‌شوند. در بخش پنجم و ششم به بررسی عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با استفاده از شاخص متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار پرداخته و عملکرد آن با نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت و نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر مقایسه می‌شود. سپس در بخش هفتم طراحی آماری مناسب در روش پیشنهادی بررسی می‌شود. نتیجه‌گیری نیز در بخش نهایی ارائه خواهد شد.

## ۲. بیان مسئله و مفروضات

فرض کنید که یک فرایند دومرحله‌یی به‌هم وابسته وجود دارد که مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول ( $X$ ) از توزیع نرمال با میانگین  $\mu_x$  و انحراف استاندارد ثابت  $\sigma_x$  و مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم ( $Y$ ) این فرایند متأثر از  $X$  است. به‌منظور پایش، نمونه‌یی با اندازه ۱ در فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت گرفته می‌شود و مشاهدات زوجی  $(X_i, Y_i)$  در انتهای مرحله‌ی دوم به دست می‌آید. از آنجا که دو مرحله‌ی فرایند وابسته‌اند، رابطه‌ی بین  $X$  و  $Y$  به‌کمک نمونه‌ی  $n$  تایی بیان می‌شود:

$$Y_i | X_i = f(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

که در آن  $\varepsilon_i$  خطای تصادفی نام دارد و زمانی که مرحله‌ی دوم تحت کنترل است  $\varepsilon_i \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$  دو نمودار کنترل مجزا به‌منظور پایش فرایند ایجاد می‌شوند. برای پایش مرحله‌ی اول، نمودار کنترل  $X$  بر مبنای توزیع تحت کنترل  $X$  رسم می‌شود و برای پایش مرحله‌ی دوم، مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم

فرایند با تعدیل اثر  $X$  بر  $Y$  باید مشخص شود که به‌عنوان مقادیر باقی‌مانده یا مقادیر انتخاب عامل انحراف،  $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ، شناخته شده‌اند. نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف بر مبنای توزیع تحت کنترل مقادیر انتخاب عامل انحراف ایجاد می‌شود. از این رو، زمانی که مرحله‌ی اول و مرحله‌ی دوم هر دو تحت کنترل اند  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$  و  $e \sim N(0, \sigma_e^2)$ . فرض بر این است که فرایند در حالت کنترل آماری شروع می‌شود و انحرافات تصادفی<sup>۵</sup> با نام  $AC1$  و  $AC2$ ، ممکن است به‌صورت تصادفی به‌ترتیب در مرحله‌ی اول و مرحله‌ی دوم فرایند مطابق با توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda_i$ ،  $i = 1, 2$  رخ دهد. وقوع  $AC1$  میانگین مرحله‌ی اول را از  $\mu_x$  به  $\mu_x + \delta_1 \sigma_x$  تغییر می‌دهد که  $\delta_1 > 0$  و وقوع  $AC2$  منجر به تغییر در میانگین  $e_i$  از صفر به  $\delta_2 \sigma_e$  می‌شود ( $\delta_2 > 0$ ).<sup>[۱۲]</sup>

## ۳. ارائه‌ی نمودارهای کنترل تطبیقی با نمونه‌گیری در

### زمان‌های ثابت

چنان که در بخش قبل اشاره شد، به‌منظور پایش فرایند دومرحله‌یی وابسته نمونه‌هایی با اندازه‌ی ۱ در انتهای مرحله‌ی دوم گرفته و مشاهدات زوجی  $(X_i, Y_i)$  تشکیل می‌شود. لذا رابطه‌ی بین  $X$  و  $Y$  توسط نمونه‌های زوجی تعیین می‌شود. سپس نمونه‌ی آماری  $(X_i, e_i)$  محاسبه و به‌ترتیب در نمودارهای کنترل  $X$  و انتخاب عامل انحراف با فاصله‌ی نمونه‌گیری تطبیقی در زمان‌های ثابت رسم می‌شود. اگر نمونه‌ی آماری بین خطوط هشدار قرار بگیرد، واضح است که باید زمان بیشتری برای گرفتن نمونه‌ی بعدی صبر کرد زیرا هیچ دلیلی دال بر این که این فرایند نیاز به تنظیم داشته باشد، وجود ندارد. اگر نمونه‌ی آماری نزدیک به حدود کنترل اما نه خارج از آنها قرار گیرد، منطقی است که باید زمان کم‌تری را برای گرفتن نمونه‌ی بعدی صبر کرد زیرا این فرایند می‌تواند در صورت نیاز تنظیم شود. زمانی که حداقل یک نمونه‌ی آماری خارج از حدود کنترل قرار گیرد، فرایند تا شناسایی و رفع مشکل متوقف می‌شود. برای راحتی استفاده از نمودارهای پیشنهادی، نمونه‌های آماری  $X$  و  $e$  به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$Z_X = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (2)$$

$$Z_e = \frac{e}{\sigma_e} \quad (3)$$

زمانی که مرحله‌ی اول تحت کنترل است داریم:  $Z_X \sim N(0, 1)$ ، و زمانی که مرحله‌ی دوم تحت کنترل است داریم:  $Z_e \sim N(0, 1)$ .

حدود هشدار و حدود کنترل نمودارهای کنترل  $Z_X$  و  $Z_e$  به‌ترتیب به‌صورت  $\pm w_X$ ،  $\pm k_X$  و  $\pm w_e$ ،  $\pm k_e$  تعریف می‌شود که  $w_X < k_X$  و  $w_e < k_e$ . به‌کارگیری حدود هشدار و حدود کنترل، هر نمودار کنترل تطبیقی را به سه ناحیه تقسیم می‌کند:

$IX_1 = (-w_X, w_X)$	ناحیه‌ی مرکزی $Z_X$
$IX_2 = (-k_X, -w_X] \cup [w_X, k_X)$	ناحیه‌ی هشدار $Z_X$
$IX_3 = (-k_X, k_X)$	ناحیه‌ی کنترل $Z_X$
$Ie_1 = (-w_e, w_e)$	ناحیه‌ی مرکزی $Z_e$
$Ie_2 = (-k_e, -w_e] \cup [w_e, k_e)$	ناحیه‌ی هشدار $Z_e$
$Ie_3 = (-k_e, k_e)$	ناحیه‌ی کنترل $Z_e$

#### ۴. محاسبه‌ی حدود هشدار برای نمودارهای کنترل $Z_X$ و

##### $Z_e$ تطبیقی با نمونه‌گیری در زمان‌های ثابت

پارامترهای طراحی نمودار کنترل  $X$  و نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف با فاصله‌ی نمونه‌گیری تطبیقی در زمان‌های ثابت، فاصله‌های نمونه‌گیری  $(t_1, t_2, t_3)$ ، حدود کنترل  $(k_e$  و  $k_x)$  و حدود هشدار  $(w_e$  و  $w_x)$  است. سه فاصله‌ی نمونه‌گیری توسط مهندسی فرایند تعیین می‌شود و حدود کنترل همیشه ثابت است. بنابراین فقط لازم است حدود هشدار محاسبه شود. به منظور سادگی در محاسبه‌ی حدود هشدار، از  $p_0$  که به صورت احتمال شرطی قرار گرفتن نمونه‌های آماری داخل ناحیه‌ی مرکزی  $(-w, w)$  به شرط نیفتادن آنها در ناحیه‌ی خارج از کنترل  $[k, \infty) \cup (-\infty, -k]$  تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم.

$$p_0 = P(|Z_X| < w_X | |Z_X| < k_X) \times P(|Z_e| < w_e | |Z_e| < k_e) \quad (5)$$

مقدار بزرگ برای  $p_0$  نشان‌دهنده‌ی نزدیک بودن حدود هشدار به حدود کنترل خواهد بود. با ساده کردن این رابطه خواهیم داشت:

$$p_0 = \frac{\Phi(w_X) - \Phi(-w_X)}{\Phi(k_X) - \Phi(-k_X)} \times \frac{\Phi(w_e) - \Phi(-w_e)}{\Phi(k_e) - \Phi(-k_e)} \quad (6)$$

که در آن  $\Phi(\cdot)$  تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.

با فرض این‌که  $k_X = k_e = k$  و  $w_X = w_e = w$  این رابطه چنین ساده می‌شود:

$$p_0 = \frac{(\Phi(w) - \Phi(-w))^2}{(\Phi(k) - \Phi(-k))^2} \quad (7)$$

در نتیجه حدود هشدار را می‌توان با ساده کردن رابطه‌ی فوق محاسبه کرد:

$$w = \Phi^{-1} \left( \frac{[\Phi(k) - \Phi(-k)] \sqrt{p_0} + \Phi(-k)}{2} \right) \quad (8)$$

#### ۵. تشریح شاخص ارزیابی عملکرد

کارایی یک نمودار کنترل از طریق سرعت آن در تشخیص تغییرات فرایند سنجیده می‌شود. زمانی که فواصل نمونه‌گیری متغیر است و فرایند در حالت کنترل آماری شروع می‌شود، سرعت تشخیص توسط شاخص متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار قابل محاسبه است. رویکردی که کوچک‌ترین مقدار متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار را دارد مطلوب‌تر است زیرا چنین نمودار کنترلی می‌تواند فرایند خارج از کنترل را زودتر تشخیص دهد. زمانی که حداقل یکی از مراحل خارج از کنترل باشد، فرایند خارج از کنترل تلقی می‌شود.

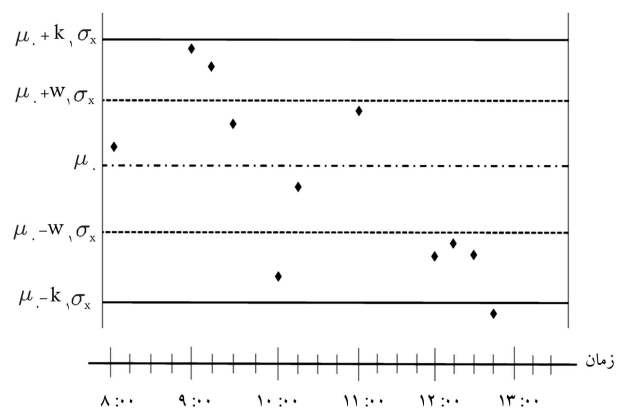
چنان‌که قبلاً بیان شد، زمان رخداد انحرافات تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda_i$ ،  $i = 1, 2$  است. از این رو اگر  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) مدت زمان شروع فرایند تا وقوع انحرافات تصادفی باشد،  $T_i$  از توزیع نمایی به صورت  $T_i \sim \exp(\lambda_i)$ ،  $i = 1, 2$  پیروی خواهد کرد. بنابراین زمان  $T$  (رخداد اولین انحراف تصادفی) کمینه  $T_1$  و  $T_2$  است که از توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda_1 + \lambda_2$  پیروی می‌کند.

متوسط زمان یک چرخه‌ی فرایند<sup>۷</sup>، متوسط زمان از شروع فرایند تا رخ دادن

روش نمونه‌گیری در نمودارهای کنترل ارائه شده، استفاده از فاصله‌ی نمونه‌گیری در زمان‌های ثابت  $(h_f)$  است تا زمانی که نمونه نزدیک به هدف باشد، به طوری که هیچ نشانه‌ی از تغییر فرایند وجود نداشته باشد. با این حال، اگر نمونه دور از هدف باشد اما داخل محدوده قرار گیرد به طوری که برخی از نشانه‌های تغییر فرایند وجود داشته باشد، مجازیم که نمونه‌های اضافی بین دو زمان نمونه‌گیری را ثابت در نظر بگیریم. فرض کنید فاصله‌ی  $h_f$  بین دو زمان ثابت به  $m$  زیرفاصله به طول  $h_s$  که  $h_s = h_f/m$  تقسیم شده است. تعیین  $m$  یا  $h_s$  بسته به اهمیت کاربرد، به فاصله‌ی زمانی نمونه‌ی مورد نظر بعد از نمونه‌های دیگر بستگی دارد.<sup>[۴]</sup> برای مثال، شکل ۱ یک نمودار کنترل با رویکرد تطبیقی در زمان‌های ثابت را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، اگر  $h_f = 1$  (ساعت) و  $m = 4$  (یا  $h_s = 15$  دقیقه) باشد، نمونه‌گیری به طور معمول هر ۱ ساعت انجام می‌شود. اما چنانچه نمونه خارج از حدود هشدار قرار گیرد (نظیر نمونه‌ی شماره ۲ در ساعت ۹)، نمونه‌ی بعدی ۱۵ دقیقه بعد گرفته خواهد شد.

پیش از آن‌که از نمودارهای کنترل  $X$  و انتخاب عامل انحراف با فاصله‌ی نمونه‌گیری تطبیقی در زمان‌های ثابت استفاده شود، لازم است سه فاصله‌ی نمونه‌گیری  $t_1 = h_s$  و  $t_2 = h_f/2$  مشخص شود. اگر هر دو نمونه‌ی آماری  $(Z_X, Z_e)$  در ناحیه‌ی مرکزی بیفتند، به دلیل عدم نیاز فرایند به تنظیم، واضح است که نمونه‌ی بعدی باید در فاصله‌ی نمونه‌گیری بزرگ‌تر ( $t_3$ ) گرفته شود. اگر هر دو نمونه‌ی آماری خارج از حدود هشدار اما داخل حدود کنترل قرار گیرند، باید فاصله‌ی نمونه‌گیری کوچک‌تر ( $t_1$ ) برای نمونه‌گیری بعدی اتخاذ شود چون فرایند می‌تواند نیاز به تنظیم داشته باشد. چنانچه یکی از نمونه‌های آماری داخل حدود هشدار و دیگری خارج حدود هشدار اما داخل حدود کنترل بیفتند، متوسط فاصله‌ی نمونه‌گیری ( $t_2$ ) باید انتخاب شود. اگر حداقل یکی از نمونه‌های آماری خارج از ناحیه‌ی کنترل قرار گیرد، نمونه‌گیری متوقف شده و فرایند پس از شناسایی مشکل و رفع آن دوباره آغاز می‌شود. اولین نمونه‌گیری در زمان ثابت مشخص شده انجام می‌شود و نمونه‌گیری‌های دیگر مبتنی بر موقعیت نمونه‌ی آماری قبلی گرفته می‌شوند. طبق طرح تطبیقی و نواحی معرفی شده، می‌توان گفت:

$$t_k = \begin{cases} t_3 & \text{if } Z_X \in I_{X_1} \cap Z_e \in I_{e_1} \\ t_2 & \text{if } Z_X \in I_{X_1} \cap Z_e \in I_{e_2} \\ t_2 & \text{if } Z_X \in I_{X_2} \cap Z_e \in I_{e_1} \\ t_1 & \text{if } Z_X \in I_{X_2} \cap Z_e \in I_{e_2} \end{cases} \quad (9)$$



شکل ۱. مثالی از نمودار کنترل با رویکرد تطبیقی در زمان‌های ثابت.

جدول ۱. حالات گذرا و جاذب برای فرایند.

حالت فرایند	AC۱	موقعیت $Z_X$	هشدار در مرحله‌ی اول	AC۲	موقعیت $Z_e$	هشدار در مرحله‌ی دوم	نوع حالت
۱	خیر	$I_{X_1}$		خیر	$I_{e_1}$		
۲	خیر	$I_{X_1}$		بلی	$I_{e_1}$		
۳	بلی	$I_{X_1}$		خیر	$I_{e_1}$		
۴	بلی	$I_{X_1}$		بلی	$I_{e_1}$		
۵	خیر	$I_{X_2}$		خیر	$I_{e_1}$		
۶	خیر	$I_{X_2}$		بلی	$I_{e_1}$		
۷	بلی	$I_{X_2}$		خیر	$I_{e_1}$		
۸	بلی	$I_{X_2}$		بلی	$I_{e_1}$		
۹	خیر	$I_{X_1}$	ندارد	خیر	$I_{e_2}$	ندارد	حالت گذرا
۱۰	خیر	$I_{X_1}$		بلی	$I_{e_2}$		
۱۱	بلی	$I_{X_1}$		خیر	$I_{e_2}$		
۱۲	بلی	$I_{X_1}$		بلی	$I_{e_2}$		
۱۳	خیر	$I_{X_2}$		خیر	$I_{e_2}$		
۱۴	خیر	$I_{X_2}$		بلی	$I_{e_2}$		
۱۵	بلی	$I_{X_2}$		خیر	$I_{e_2}$		
۱۶	بلی	$I_{X_2}$		بلی	$I_{e_2}$		
۱۷			به غیر از حالت‌های فوق				حالت جاذب

اولین هشدار خارج از کنترل است. بنابراین:

که  $\mathbf{b}' = (p_0, 0, 0, 0, \frac{p_1}{\lambda_1}, 0, 0, 0, \frac{p_1}{\lambda_1}, 0, 0, 0, p_2, 0, 0, 0)$  بردار احتمال شروع است. احتمال‌های  $p_1$  و  $p_2$  نیز چنین تعریف می‌شود:

$$p_1 = P(|Z_X| < w_X | |Z_X| < k_X) \times [1 - P(|Z_e| < w_e | |Z_e| < k_e)] \quad (11)$$

$$p_2 = 1 - p_0 - p_1 \quad (12)$$

همچنین، چون فرض بر آن است که فرایند از حالت تحت کنترل شروع می‌شود، فقط می‌توان به حالات ۱، ۵، ۹ و ۱۳ مقدار داد. ماتریس  $\mathbf{I}$ ، ماتریس همانی از مرتبه ۱۶ است. ماتریس  $\mathbf{Q}$  یک ماتریس مربعی از مرتبه ۱۶ است که با حذف حالت جاذب از ماتریس  $\mathbf{P}$  به دست می‌آید؛ بردار  $\mathbf{t}'$  بردار فواصل نمونه‌گیری برای حالات ۱ تا ۱۶ است که به صورت  $\mathbf{t}' = (t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2, t_1, t_1, t_1, t_1)$  نمایش داده می‌شود. در نتیجه متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار با استفاده از رابطه‌ی ۹ به دست می‌آید.

## ۶. تحلیل عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی

به منظور ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل، متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار در شرایط مشابه تحت کنترل محاسبه شده است:

$$E(\text{VSIFT زمان نمونه‌گیری نمودار}) | \delta_1 = 0, \delta_2 = 0$$

$$= E(\text{VSI زمان نمونه‌گیری نمودار}) | \delta_1 = 0, \delta_2 = 0$$

$$E(\text{VSIFT زمان نمونه‌گیری نمودار}) | \delta_1 = 0, \delta_2 = 0$$

$$= \text{FSI زمان نمونه‌گیری نمودار}$$

که در نهایت با ساده کردن معادلات فوق مقدار  $w$  به دست خواهد آمد. به طور کاملاً مشابه و به منظور آسان شدن محاسبه‌ی  $w$ ، از  $p_0$  که به صورت احتمال شرطی

$$\text{ATC} = \text{AATS} + E(T)$$

$$\text{AATS} = \text{ATC} - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (9)$$

با توجه به خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی، می‌توان با استفاده از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف<sup>۸</sup> متوسط زمان چرخه‌ی فرایند را محاسبه کرد. در زمان نمونه‌گیری، با عنایت به وضعیت هر مرحله (تحت کنترل یا خارج از کنترل) و محل نمونه‌ی فعلی، حالت‌های گذرا<sup>۹</sup> از ۱ تا ۱۶ به دست می‌آید. در واقع زمانی حالتی گذراست که هر دو نمونه‌ی آماری  $Z_e$  و  $Z_X$  داخل حدود کنترل قرار گیرند. زمانی که حداقل یک نقطه خارج از حدود کنترل قرار گیرد، حالت جاذب<sup>۱۰</sup> نام دارد. در جدول ۱ هفده حالت ممکن فرایند بیان شده است.

فرض کنید  $\mathbf{P}$  ماتریس احتمال انتقال باشد که به صورت ماتریس مربعی از مرتبه ۱۷ نشان داده می‌شود.  $P_{i,j}(t_k)$  احتمال انتقال از حالت قبلی  $i$  به حالت جاری  $j$  با فاصله‌ی نمونه‌گیری  $t_k$  است که توسط حالت قبلی  $i$ ،  $i = 1, 2, \dots, 17$  و  $k = 1, 2, 3$  مشخص می‌شود. به عنوان مثال:

$$P_{1,2}(t_2) = P[|Z_X| < w_X | \delta_1] \times P[|Z_e| < w_e | \delta_2] \times (1 - e^{-\lambda_1 t_2}) \times (1 - e^{-\lambda_2 t_2}) = (\Phi(w_X - \delta_1) - \Phi(-w_X - \delta_1)) \times (\Phi(w_e - \delta_2) - \Phi(-w_e - \delta_2)) \times (1 - e^{-\lambda_1 t_2}) \times (1 - e^{-\lambda_2 t_2})$$

محاسبات برای همه احتمالات انتقال در «پیوست» ارائه شده است. با استفاده از خاصیت زنجیره‌ی مارکوف، متوسط زمان یک چرخه‌ی فرایند را می‌توان چنین محاسبه کرد:

$$\text{ATC} = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{t} \quad (10)$$

جدول ۲. مقادیر متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار برای نمودارهای کنترل  $Z_e$  و  $Z_x$  تطبیقی با نمونه‌گیری در زمان ثابت (روش پیشنهادی) با  $(\text{ساعت}) = 1 \text{ م} = \lambda_2 = 0,04$  و  $\lambda_1 = 0,03$ .

m	p	t <sub>1</sub>	w	$\delta_1 = 0,05$		$\delta_2 = 0,04$	
				۱,۲۵	۱	۱,۲۵	۱
۶,۱۸۸۰	۶,۲۴۲۲	۶,۲۶۶۰	۶,۲۱۶۶	۵,۹۰۲۰	۵,۷۰۲۳	۵,۶۷۵۳	۵,۶۴۸۶
۱۳,۰۸۰۴	۱۳,۲۶۳۳	۱۳,۲۸۶۳	۱۳,۲۳۶۳	۱۲,۹۲۱۰	۱۲,۷۱۱۰	۱۲,۶۸۴۰	۱۲,۶۵۷۰
۱۶,۷۷۸۸	۱۶,۹۶۳۳	۱۶,۹۸۶۳	۱۶,۹۳۶۳	۱۶,۶۲۱۰	۱۶,۴۱۱۰	۱۶,۳۸۴۰	۱۶,۳۵۷۰
۲۰,۴۷۰۳	۲۰,۶۵۳۳	۲۰,۶۷۶۳	۲۰,۶۲۶۳	۲۰,۳۱۱۰	۲۰,۱۰۱۰	۲۰,۰۷۴۰	۲۰,۰۴۷۰
۲۳,۱۶۲۰	۲۳,۳۴۵۳	۲۳,۳۶۸۳	۲۳,۳۱۸۳	۲۳,۰۰۳۰	۲۲,۷۹۳۰	۲۲,۷۶۶۰	۲۲,۷۳۹۰
۲۵,۸۵۳۷	۲۶,۰۳۸۳	۲۶,۰۶۱۳	۲۶,۰۱۱۳	۲۵,۷۰۳۰	۲۵,۴۹۳۰	۲۵,۴۶۶۰	۲۵,۴۳۹۰
۲۸,۵۴۵۴	۲۸,۷۲۸۳	۲۸,۷۵۱۳	۲۸,۷۰۱۳	۲۸,۳۹۳۰	۲۸,۱۸۳۰	۲۸,۱۵۶۰	۲۸,۱۲۹۰
۳۱,۲۳۷۱	۳۱,۴۲۰۳	۳۱,۴۴۳۳	۳۱,۳۹۳۳	۳۱,۰۸۵۰	۳۰,۸۷۵۰	۳۰,۸۴۸۰	۳۰,۸۲۱۰
۳۳,۹۲۸۸	۳۴,۱۱۲۰	۳۴,۱۳۵۰	۳۴,۰۸۵۰	۳۳,۷۷۷۰	۳۳,۵۶۷۰	۳۳,۵۴۰۰	۳۳,۵۱۳۰
۳۶,۶۲۰۵	۳۶,۸۰۳۷	۳۶,۸۲۶۷	۳۶,۷۷۶۷	۳۶,۴۶۹۰	۳۶,۲۵۹۰	۳۶,۲۳۲۰	۳۶,۲۰۵۰
۳۹,۳۱۲۲	۳۹,۴۹۵۴	۳۹,۵۱۸۴	۳۹,۴۶۸۴	۳۹,۱۶۱۰	۳۸,۹۵۱۰	۳۸,۹۲۴۰	۳۸,۸۹۷۰
۴۲,۰۰۳۹	۴۲,۱۸۷۱	۴۲,۲۱۰۱	۴۲,۱۶۰۱	۴۱,۸۵۳۰	۴۱,۶۴۳۰	۴۱,۶۱۶۰	۴۱,۵۸۹۰
۴۴,۶۹۵۶	۴۴,۸۷۸۳	۴۴,۹۰۱۳	۴۴,۸۵۱۳	۴۴,۵۴۳۰	۴۴,۳۳۳۰	۴۴,۳۰۶۰	۴۴,۲۷۹۰
۴۷,۳۸۷۳	۴۷,۵۷۰۵	۴۷,۵۹۳۵	۴۷,۵۴۳۵	۴۷,۲۳۵۰	۴۷,۰۲۵۰	۴۷,۰۰۰۰	۴۶,۹۷۵۰
۵۰,۰۷۹۰	۵۰,۲۶۲۲	۵۰,۲۸۵۲	۵۰,۲۳۵۲	۵۰,۰۲۷۰	۴۹,۸۱۷۰	۴۹,۷۹۰۰	۴۹,۷۶۳۰
۵۲,۷۷۰۷	۵۲,۹۵۳۹	۵۲,۹۷۶۹	۵۲,۹۲۶۹	۵۲,۶۱۹۰	۵۲,۴۰۹۰	۵۲,۳۸۲۰	۵۲,۳۵۵۰
۵۵,۴۶۲۴	۵۵,۶۴۵۶	۵۵,۶۶۸۶	۵۵,۶۱۸۶	۵۵,۳۱۱۰	۵۵,۱۰۱۰	۵۵,۰۷۴۰	۵۵,۰۴۷۰
۵۸,۱۵۴۱	۵۸,۳۳۷۳	۵۸,۳۶۰۳	۵۸,۳۱۰۳	۵۸,۰۰۳۰	۵۷,۷۹۳۰	۵۷,۷۶۶۰	۵۷,۷۳۹۰
۶۰,۸۴۵۸	۶۱,۰۲۹۰	۶۱,۰۵۲۰	۶۱,۰۰۲۰	۶۰,۶۹۵۰	۶۰,۴۸۵۰	۶۰,۴۵۸۰	۶۰,۴۳۱۰
۶۳,۵۳۷۵	۶۳,۷۲۰۷	۶۳,۷۴۳۷	۶۳,۶۹۳۷	۶۳,۳۸۷۰	۶۳,۱۷۷۰	۶۳,۱۵۰۰	۶۳,۱۲۳۰
۶۶,۲۲۹۲	۶۶,۴۱۲۴	۶۶,۴۳۵۴	۶۶,۳۸۵۴	۶۶,۰۷۹۰	۶۵,۸۶۹۰	۶۵,۸۴۲۰	۶۵,۸۱۵۰
۶۸,۹۲۰۹	۶۹,۱۰۴۱	۶۹,۱۲۷۱	۶۹,۰۷۷۱	۶۸,۷۷۱۰	۶۸,۵۶۱۰	۶۸,۵۳۴۰	۶۸,۵۰۷۰
۷۱,۶۱۲۶	۷۱,۷۹۵۸	۷۱,۸۱۸۸	۷۱,۷۶۸۸	۷۱,۴۶۳۰	۷۱,۲۵۳۰	۷۱,۲۲۶۰	۷۱,۲۰۰۰
۷۴,۳۰۴۳	۷۴,۴۸۷۵	۷۴,۵۱۰۵	۷۴,۴۶۰۵	۷۴,۱۵۵۰	۷۳,۹۴۵۰	۷۳,۹۱۸۰	۷۳,۸۹۱۰
۷۷,۰۰۰۰	۷۷,۱۸۳۲	۷۷,۲۰۶۲	۷۷,۱۵۶۲	۷۶,۸۵۱۰	۷۶,۶۴۱۰	۷۶,۶۱۴۰	۷۶,۵۸۷۰
۷۹,۶۹۱۷	۷۹,۸۷۴۹	۷۹,۸۹۷۹	۷۹,۸۴۷۹	۷۹,۵۴۳۰	۷۹,۳۳۳۰	۷۹,۳۰۶۰	۷۹,۲۷۹۰
۸۲,۳۸۳۴	۸۲,۵۶۶۶	۸۲,۵۸۹۶	۸۲,۵۳۹۶	۸۲,۲۳۵۰	۸۲,۰۲۵۰	۸۲,۰۰۰۰	۸۱,۹۷۳۰
۸۵,۰۷۵۱	۸۵,۲۵۸۳	۸۵,۲۸۱۳	۸۵,۲۳۱۳	۸۴,۹۲۷۰	۸۴,۷۱۷۰	۸۴,۶۹۰۰	۸۴,۶۶۳۰
۸۷,۷۶۶۸	۸۷,۹۵۰۰	۸۷,۹۷۳۰	۸۷,۹۲۳۰	۸۷,۶۱۹۰	۸۷,۴۰۹۰	۸۷,۳۸۲۰	۸۷,۳۵۵۰
۹۰,۴۵۸۵	۹۰,۶۴۱۷	۹۰,۶۶۴۷	۹۰,۶۱۴۷	۹۰,۳۱۱۰	۹۰,۱۰۱۰	۹۰,۰۷۴۰	۹۰,۰۴۷۰

FSI control charts

جدول ۳. مقادیر متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار برای نمودارهای کنترل Zx و Ze تطبیقی با نمونه‌گیری در زمان ثابت (روش پیشنهادی) با (ساعت) t\_p = ۱، λ\_۱ = ۰٫۰۵ و λ\_۲ = ۰٫۰۵.

Table with 15 columns: w, t1, p, m, δ1, δ2, ۰٫۷۵, ۱, ۱٫۲۵, ۱٫۵. It contains numerical data for various parameters and time intervals.

FSI control charts

شده است (زمانی که  $m = 2$ ,  $w = 1,7887$ ,  $\delta_1 = 0,5$  و  $\delta_2 = 0,5$ ). از طرفی، مقدار متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار برای نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر (VSI) به‌ازای  $w = 1,7887$ ,  $\delta_1 = 0,5$  و  $\delta_2 = 0,5$  زمانی که  $\lambda_1 = 0,03$  و  $\lambda_2 = 0,04$  برابر  $74,6527$  و زمانی که  $\lambda_1 = 0,05$  و  $\lambda_2 = 0,05$  برابر  $74,6350$  گزارش شده است. به‌منظور مقایسه‌ی دقیق‌تر رویکرد پیشنهادی با نمودار کنترل موجود<sup>[۱۲]</sup> جدول‌های ۶ و ۷ به‌ازای  $m = 5$  ارائه شده است:

Difference ۱ = max.AATS of VSI control chart –

max.AATS of VSIFT control chart

Difference ۲ = min.AATS of VSI control chart –

min.AATS of VSIFT control chart

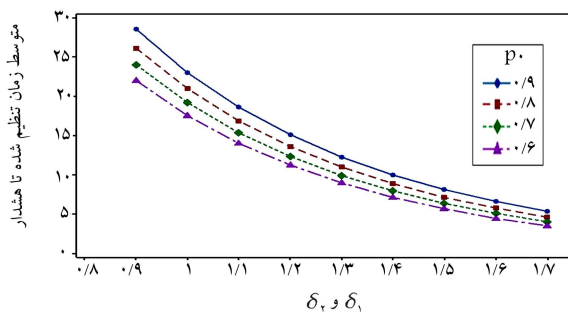
بدیهی است استفاده از نمودار کنترل تطبیقی با نمونه‌گیری در زمان‌های ثابت (رویکرد پیشنهادی) به‌جای نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر، متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار را حدود ۱ تا ۱۹ ساعت کاهش می‌دهد. با توجه به نتایج عددی این جداول، نمودار کنترل پیشنهادی همیشه بهتر از نمودار کنترل موجود<sup>[۱۲]</sup> خواهد بود. این محاسبات به‌ازای دیگر مقادیر  $m$  نیز تکرار شد که برتری رویکرد پیشنهادی را نشان می‌دهد و لذا از ارائه‌ی جداول مشابه خودداری شده است.

## ۷. طراحی آماری مناسب

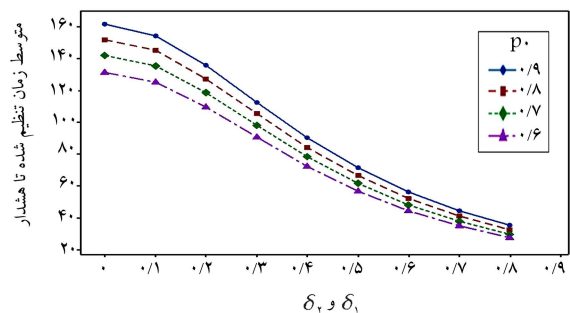
مهندسی فرایند به دلیل تشخیص سریع‌تر تغییرات در اولین و دومین مرحله‌ی فرایند نیاز به انتخاب مقادیر مناسب پارامترها دارند. با توجه به مقادیر متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار به‌دست آمده از جداول ۲ و ۳، شکل‌های ۲ و ۳ با استفاده از نرم‌فزار مینی‌تب برای بررسی و تحلیل آماری رویکرد پیشنهادی ارائه شده که

قرارگرفتن نمونه‌های آماری داخل ناحیه‌ی مرکزی  $(-w, w)$  به شرط نیفتادن آن‌ها در ناحیه‌ی خارج از کنترل  $U [k, \infty) \cup (-\infty, -k]$  تعریف می‌شود، استفاده شده است. همچنین ترکیبات مختلف  $0,05, 0,03, 0,04, 0,05, \lambda_1 = 0,03, \lambda_2 = 0,04, p_0 = 0,09$  و  $0,05, 0,05, 0,05, 0,05, \delta_1 = 0,5, \delta_2 = 0,5, h_f = 1, m = 2, 3, 5, 10, 20$  مورد مطالعه قرار گرفته است. نماد  $(0,25, 0,25)$  برای  $\delta_1$  و  $(0,25, 0,25)$  برای  $\delta_2$  نشان‌دهنده‌ی مقادیر پایین  $(0,5)$  و بالای  $(1,5)$  پارامتر  $\delta$  است. همچنین مقادیر داخل پراکنش نشان‌گر میزان جهش از مقدار قبلی پارامتر است. حدود هشدار با استفاده از رابطه‌ی ۸ و فاصله‌ی نمونه‌گیری کوچک‌تر چنان که در بخش ۳ بیان شد، به‌صورت  $t_1 = h_s$  محاسبه می‌شود. جدول‌های ۲ و ۳ مقادیر متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار به‌ازای  $m$  و  $p_0$ ‌های متنوع و ترکیبات مختلف  $(\lambda_1, \lambda_2)$  و  $(\delta_1, \delta_2)$  را نشان می‌دهند. با توجه به جدول‌های ۲ و ۳، بیشترین مقدار ممکن متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار برای نمودار کنترل پیشنهادی (VSIFT) به‌ازای  $\lambda_1 = 0,03$  و  $\lambda_2 = 0,04$  مقدار  $71,7281$  و به‌ازای  $\lambda_1 = 0,05$  و  $\lambda_2 = 0,05$  مقدار  $72,1460$  گزارش شده است (زمانی که  $m = 2$ ,  $p_0 = 0,09$  و  $\delta_1 = 0,5$  و  $\delta_2 = 0,5$  است). از سوی دیگر، مقدار متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار برای نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت به‌ازای  $\delta_1 = 0,5$  و  $\delta_2 = 0,5$  زمانی که  $\lambda_1 = 0,03$  و  $\lambda_2 = 0,04$  برابر  $77,7839$  و زمانی که  $\lambda_1 = 0,05$  و  $\lambda_2 = 0,05$  برابر  $77,3323$  گزارش شده است. بنابراین، نتایج عددی این جداول نشان می‌دهد که نمودار کنترل پیشنهادی همیشه بهتر از نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت (FSI) خواهد بود. متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار به‌ازای  $m$ ‌های متنوع،  $w$ ‌های رویکرد<sup>[۱۲]</sup> و ترکیبات مختلف  $(\lambda_1, \lambda_2)$  و  $(\delta_1, \delta_2)$  نیز در جدول‌های ۴ و ۵ گزارش شده است.

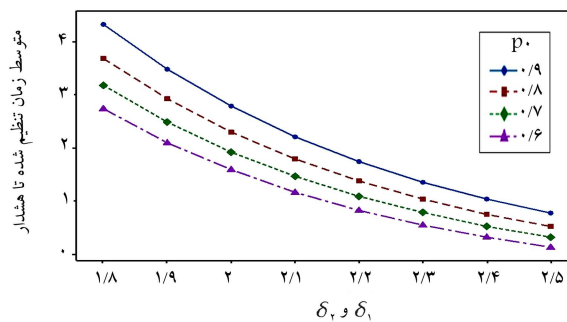
با توجه به جدول‌های ۴ و ۵، بیشترین مقدار ممکن متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار برای نمودار کنترل پیشنهادی (VSIFT) به‌ازای  $\lambda_1 = 0,03$  و  $\lambda_2 = 0,04$  مقدار  $69,9383$  و به‌ازای  $\lambda_1 = 0,05$  و  $\lambda_2 = 0,05$  مقدار  $70,3624$  گزارش



ب)  $\delta_1$  و  $\delta_2$  بین ۰/۹ تا ۱/۷



الف)  $\delta_1$  و  $\delta_2$  بین صفر تا ۰/۹



ج)  $\delta_1$  و  $\delta_2$  بین ۱/۸ تا ۲/۵

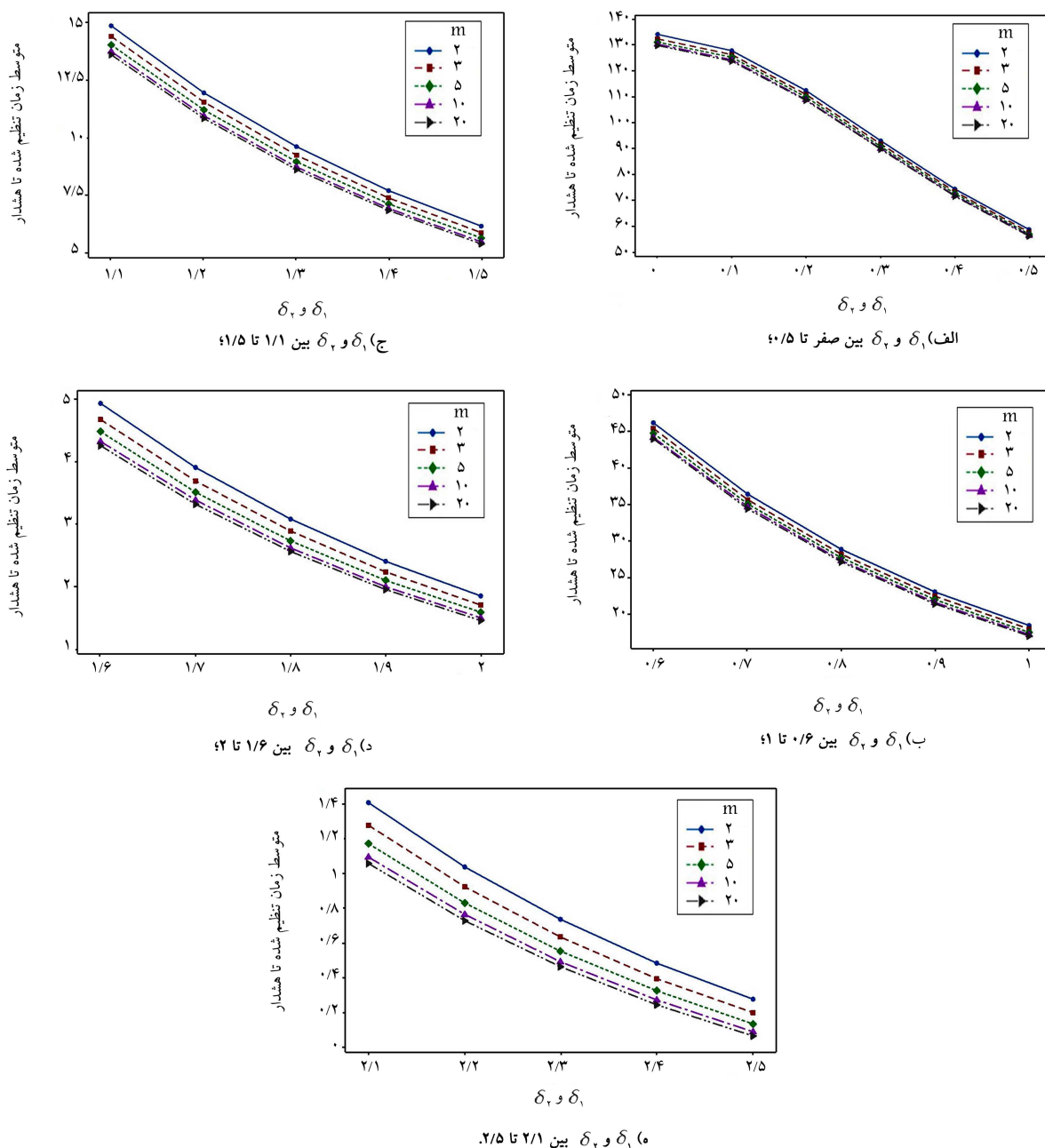
شکل ۲. متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار نمودار کنترل تطبیقی پیشنهادی به‌ازای  $m = 5$ ,  $p_0$  مختلف.

جدول ۴. مقادیر متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار برای نمودارهای کنترل  $Z_{\lambda}$  و  $Z_e$  تطبیقی با نمونه‌گیری در زمان ثابت با  $t_3 = 1$ ،  $t_4 = 0.3$ ،  $\lambda_1 = 0.4$

Table with columns: m, p, t1, w, delta1, delta2, lambda1, lambda2, and rows of numerical data.







شکل ۳. متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار نمودار کنترل تطبیقی پیشنهادی به ازای  $p_0 = 0.06$ ،  $m$  مختلف.

افزایش  $m$  نیز منجر به کاهش مقدار متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار می‌شود. علت این اتفاق را می‌توان چنین بیان کرد که فاصله‌ی زمانی نمونه‌گیری در زمان‌های ثابت به فواصل کوتاه‌تری تقسیم می‌شود و لذا نمونه‌گیری‌ها بیشتر خواهد شد و در نتیجه توان پی بردن به حالت‌های خارج کنترل توسط نمودار کنترل افزایش می‌یابد. بنابراین، هرچه فاصله‌ی زمانی بین نمونه‌گیری کوچک‌تر باشد، عکس‌العمل و لذا قدرت کشف نمودار کنترل بهتر خواهد شد. همچنین طبق رویکرد پیش‌نهادی افزایش  $m$  منجر به بهبود متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار می‌شود. در نتیجه حالت بهینه‌ی آماری انتخاب فواصل نمونه‌گیری کوچک با  $m$ ‌های بزرگ خواهد بود که مسلماً به لحاظ آماری سودمند اما از نظر اقتصادی مقرون به‌صرفه نیست. از این رو، بحث طراحی اقتصادی - آماری این‌گونه نمودارهای کنترل تطبیقی می‌تواند

به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مقادیر متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار نمودار کنترل تطبیقی پیشنهادی با  $m = 5$  و  $p_0$ ‌های مختلف و مقادیر متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار نمودار کنترل تطبیقی پیشنهادی با  $p_0 = 0.06$  و  $m$ ‌های مختلف هستند. با توجه به شکل ۲ و به‌ازای شیفت‌های مختلف، نتایج نشان می‌دهد که هرچه مقدار  $p$  کوچک‌تر باشد، مقدار متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار نیز کوچک‌تر خواهد بود. این بدان علت است که حدود هشدار به خط مرکز نزدیک‌تر بوده و در نتیجه آماره با احتمال بیشتری در خارج از حدود هشدار قرار خواهد گرفت. لذا نمونه‌گیری در فواصل نزدیک‌تری انجام می‌گیرد. افزون بر این، هرچه مقادیر شیفت‌ها بزرگ‌تر باشد، متوسط زمان تنظیم شده تا هشدار کوچک‌تر شده و در نتیجه توانایی تشخیص نمودار کنترل بیشتر خواهد شد. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود









10. Asadzadeh, Sh., Aghaie, A. and Yang, C.M. "Monitoring and diagnosing multistage processes: A review of cause selecting control charts", *Journal of Industrial and Systems Engineering*, **2**(3), pp. 215-236 (2008).
11. Yang, S.-F. and Su, H.-C. "Controlling-dependent process steps using variable sample size control charts", *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **22**(5-6), pp. 503-517 (2006).
12. Yang, S.-F. and Su, H.-C. "Adaptive sampling interval cause-selecting control charts", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **31**(11-12), pp. 1169-1180 (2007).
13. Yang, S.-F. and Su, H.-C. "Adaptive control schemes for two dependent process steps", *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, **20**(1), pp. 15-25 (2007).
14. Noorosana, R. and Shekary, M.A. "Monitoring two dependent process steps using special variable sample sizes and sampling intervals cause-selecting control charts", *Quality and Reliability Engineering International*, **28**(4), pp. 437-453 (2012).
15. Yang, S. and Chen, W. "Controlling over-adjusted process mean and variances using VSI cause-selecting control charts", *Expert Systems with Applications*, **36**(3), pp. 7170-7182 (2009).
16. Yang, S. "Process control using VSI cause-selecting control charts", *Journal of Intelligent Manufacturing*, **21**(6), pp. 853-867 (2010).

### پیوست

احتمال انتقال از حالت قبلی  $i$  به حالت جاری  $j$  با فاصله‌ی نمونه‌گیری  $t_k$  به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$P_{i,j}(t_k) \quad i = 1, \dots, 17, \quad j = 1, \dots, 17, \quad k = 1, 2, 3$$

$$P_{1,1}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e \rangle \times e^{-\lambda_1 t_r} \times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,2}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,3}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$\times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,4}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,5}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e \rangle$$

$$\times e^{-\lambda_1 t_r} \times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,6}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle$$

$$\times e^{-\lambda_1 t_r} \times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,7}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle$$

$$\times P [|Z_e| \langle w_e \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$\times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,8}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle$$

$$\times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,9}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X \rangle \times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e \rangle$$

$$\times e^{-\lambda_1 t_r} \times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,10}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X \rangle \times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_r \rangle$$

$$\times e^{-\lambda_1 t_r} \times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,11}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e \rangle$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_1 t_r}) \times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,12}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_r \rangle$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_1 t_r}) \times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,13}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X \rangle$$

$$\times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e \rangle \times e^{-\lambda_1 t_r} \times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,14}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X \rangle$$

$$\times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_r \rangle \times e^{-\lambda_1 t_r}$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,15}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle$$

$$\times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$\times e^{-\lambda_r t_r}$$

$$P_{1,16}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle$$

$$\times P [-k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_r \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_r t_r})$$

$$P_{1,17}(t_r) = 1 - \sum_{j=1}^{16} P_{1,j}(t_r)$$

$$P_{2,1}(t_r) = 0$$

$$P_{2,2}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle \times e^{-\lambda_1 t_r}$$

$$P_{2,3}(t_r) = 0$$

$$P_{2,4}(t_r) = P [|Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$P_{2,5}(t_r) = 0$$

$$P_{2,6}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle$$

$$\times e^{-\lambda_1 t_r}$$

$$P_{2,7}(t_r) = 0$$

$$P_{2,8}(t_r) = P [-k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \times P [|Z_e| \langle w_e | \delta_r \rangle$$

$$\times (1 - e^{-\lambda_1 t_r})$$

$$P_{2,9}(t_r) = 0$$

$$P_{\tau,1\psi}(t_{\tau}) = \lambda - \sum_{j=1}^{1\psi} P_{\tau,j}(t_{\tau})$$

$$P_{\tau,1}(t_{\tau}) = P_{\tau,r}(t_{\tau}) = P_{\tau,r}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,r}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [ |Z_e| \langle w_e | \delta_{\tau} \rangle ]$$

$$P_{\tau,d}(t_{\tau}) = P_{\tau,\phi}(t_{\tau}) = P_{\tau,v}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,\lambda}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \rangle \rangle \times P [ |Z_e| \langle w_e | \delta_{\tau} \rangle ]$$

$$P_{\tau,4}(t_{\tau}) = P_{\tau,1^{\circ}}(t_{\tau}) = P_{\tau,11}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle ]$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = P_{\tau,1d}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1\phi}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \rangle \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle ]$$

$$P_{\tau,1\psi}(t_{\tau}) = \lambda - \sum_{j=1}^{1\psi} P_{\tau,j}(t_{\tau})$$

احتمالات انتقال  $P_{1^{\circ},j}(t_{\tau}), P_{4,j}(t_{\tau}), P_{\lambda,j}(t_{\tau}), P_{v,j}(t_{\tau}), P_{\phi,j}(t_{\tau}), P_{d,j}(t_{\tau}), P_{1r,j}(t_{\tau}), P_{1j}(t_{\tau})$  در  $t_{\tau}$  به جای  $t_{\tau}$  با جایگذاری  $t_{\tau}$  به جای  $t_{\tau}$  و  $P_{1r,j}(t_{\tau})$  و  $P_{1j}(t_{\tau})$  به ازای  $j = 1, \dots, 1\psi$  قابل محاسبه می باشند.

$$P_{d,j}(t_{\tau}) = P_{1j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{\phi,j}(t_{\tau}) = P_{r,j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{v,j}(t_{\tau}) = P_{r,j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{\lambda,j}(t_{\tau}) = P_{r,j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{4,j}(t_{\tau}) = P_{1j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{1^{\circ},j}(t_{\tau}) = P_{r,j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{11,j}(t_{\tau}) = P_{r,j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{1r,j}(t_{\tau}) = P_{r,j}(t_{\tau}) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

احتمالات انتقال  $P_{1\phi,j}(t_1), P_{1d,j}(t_1), P_{1r,j}(t_1), P_{1j}(t_1)$  با جایگذاری  $t_1$  به جای  $t_{\tau}$  در  $P_{1r,j}(t_{\tau}), P_{1j}(t_{\tau}), P_{1r,j}(t_{\tau}), P_{1j}(t_{\tau})$  به ازای  $j = 1, \dots, 1\psi$  قابل محاسبه است.

$$P_{1r,j}(t_1) = P_{1j}(t_1) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{1r,j}(t_1) = P_{r,j}(t_1) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{1d,j}(t_1) = P_{r,j}(t_1) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{1\phi,j}(t_1) = P_{r,j}(t_1) \quad j = 1, \dots, 1\psi$$

$$P_{1v,j} = \circ \quad j \neq 1\psi$$

$$P_{1\psi,1\psi} = \lambda$$

$$P_{\tau,1^{\circ}}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times e^{-\lambda_1 t_{\tau}}$$

$$P_{\tau,11}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_{\tau}})$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X \rangle \rangle \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times e^{-\lambda_1 t_{\tau}}$$

$$P_{\tau,1d}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1\phi}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \rangle \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times (1 - e^{-\lambda_1 t_{\tau}})$$

$$P_{\tau,1\psi}(t_{\tau}) = \lambda - \sum_{j=1}^{1\psi} P_{\tau,j}(t_{\tau})$$

$$P_{\tau,1}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,r}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,r}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [ |Z_e| \langle w_e \rangle \times e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}}$$

$$P_{\tau,r}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [ |Z_e| \langle w_e | \delta_{\tau} \rangle \times (1 - e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}})$$

$$P_{\tau,d}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,\phi}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,v}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \rangle \rangle \times P [ |Z_e| \langle w_e \rangle \times e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}}$$

$$P_{\tau,\lambda}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \rangle \rangle \times P [ |Z_e| \langle w_e | \delta_{\tau} \rangle \times (1 - e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}})$$

$$P_{\tau,4}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1^{\circ}}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,11}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}}$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = P [ |Z_X| \langle w_X | \delta_1 \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times (1 - e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}})$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1r}(t_{\tau}) = \circ$$

$$P_{\tau,1d}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \rangle \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}}$$

$$P_{\tau,1\phi}(t_{\tau}) = P [ -k_X \langle Z_X \langle -w_X \cup w_X \langle Z_X \langle k_X | \delta_1 \rangle \rangle \rangle \times P [ -k_e \langle Z_e \langle -w_e \cup w_e \langle Z_e \langle k_e | \delta_{\tau} \rangle \rangle \rangle \times (1 - e^{-\lambda_{\tau} t_{\tau}})$$