

رویکرد یک نظریه‌ی بازی برای تعیین سطح تبلیغات یک محصول به همراه قیمت‌گذاری دو محصول مکمل جانشین با وجود قیمت مشخص برای محصول اصلی

مرتضی راستی‌برزکی (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۸ (۱۳-۱)
دوری ۳۵-۱، شماره‌ی ۲/۱، ص ۱۱-۱۸

تبلیغات و قیمت‌گذاری از موضوعات راهبردی شرکت‌ها محسوب می‌شوند. سه محصول شامل یک کالای اصلی و دو کالای مکمل آن که جانشین یکدیگر هستند را در نظر بگیرید. در این مقاله برای اولین بار، مسئله‌ی تعیین هم‌زمان سطح تبلیغات محصول اصلی به همراه قیمت‌گذاری دو محصول جانشین مکمل محصول اصلی بررسی شده است. جواب‌های تعادلی مسئله به همراه تحلیل‌های پارامتریک بر روی سطح تبلیغات تعادلی با رویکرد استکلبرگ - برترند که در آن محصول اصلی رهبر و محصولات جانشین پیرو هستند، محاسبه و ارائه شده است. تحلیل حساسیت پارامتریک نشان می‌دهد که تقاضای پایه‌ی بازار بر روی تبلیغات تعادلی بی‌اثر است. همچنین، کشسانی قیمت خودی بر روی تبلیغات تعادلی اثر منفی و کشسانی قیمت غیرخودی بر روی تبلیغات تعادلی اثر مثبت دارد. نتایج تحلیلی نشان می‌دهد قیمت محصول اصلی، اثر مثبت بر روی سطح تبلیغات محصول اصلی دارد.

rasti@cc.iut.ac.ir

واژگان کلیدی: تبلیغات، قیمت‌گذاری، کالاهای مکمل و جانشین، نظریه‌ی بازی.

۱. مقدمه

قیمت‌گذاری دو محصول مکمل با تقاضای وابسته به قیمت هر دو محصول^۱ تحت مدل استکلبرگ - برترند و همچنین تصمیمات قیمت‌گذاری دو محصول جانشین با تقاضای وابسته به قیمت نهایی هر دو محصول در یک سیستم مونتاژ بر طبق سفارش توسط تعدادی از محققان انجام شده است.^[۶،۵] تصمیمات قیمت‌گذاری و سفارش‌دهی در یک زنجیره‌ی تأمین شامل یک تأمین‌کننده و یک خرده‌فروش و برای یک محصول توسط لای و همکاران^[۷] بررسی شده است. اثرات ساختار قدرت بر تصمیمات تولیدکننده برای فروش از طریق خرده‌فروش توسط چوی^[۸] بررسی شده است. آی و همکاران^[۹] کار مشابهی را برای محصولات جانشین انجام داده‌اند. قیمت‌گذاری و خدمت‌دهی در بازی استکلبرگ در دو زنجیره‌ی تأمین رقیب با محصولات جانشین و با در نظر گرفتن تابع تقاضای غیرقطعی نیز انجام شده است.^[۱۰] ارتک و گریفین،^[۱۱] قیمت‌گذاری و تعیین سود را در یک زنجیره‌ی تأمین دو مرحله‌ی بررسی کرده‌اند. بازی استکلبرگ - برترند برای یک مسئله‌ی قیمت‌گذاری توسط ژانگ و همکاران^[۱۲] بررسی شده است؛ آنها، اثر جایگزینی محصول و موقعیت کانال بر تصمیم قیمت‌گذاری در یک زنجیره‌ی تأمین با کانال توزیع دوگانه را تحلیل کرده‌اند.

قیمت‌گذاری^۱ و تبلیغات^۲ از موضوعات مهم و کاربردی‌اند که اخیراً مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌اند. تعیین مناسب سطح قیمت‌ها و ارائه‌ی برنامه‌های تبلیغاتی مناسب تأثیر بسزایی در رشد تقاضا و در نهایت سودآوری شرکت‌ها دارد. در این مقاله یکی از مسائل تبلیغات و قیمت‌گذاری برای اولین بار با استفاده از نظریه‌ی بازی بررسی می‌شود. دانش تصمیم‌گیری چندعاملی یا همان نظریه‌ی بازی به بررسی مسائلی می‌پردازد که تصمیمات چند عامل بر روی یکدیگر تأثیر می‌گذارد. در واقع «تصمیم‌گیری چندعاملی یا نظریه‌ی بازی^۳ به بررسی مسائلی می‌پردازد که چند عامل^۴ یا بازیکن در پی تصمیماتی هستند تا مطلوبیت یا عایدی خود را بیشینه کنند؛ به طوری که تصمیمات هر عامل بر تابع مطلوبیت سایر عامل‌ها تأثیرگذار باشد.»^[۱]

از طرف دیگر، موضوع قیمت‌گذاری سال‌ها مورد توجه محققان بوده است. مدل‌های کورنو^[۲] و برترند^[۳] پایه و اساس بسیاری از تحقیقات حوزه‌ی تعیین مقدار تولید و قیمت‌گذاری هستند. سینگ و ویز^[۴] موضوع قیمت‌گذاری یک محصول با وجود محصول مشابه جانشین^۵ یا محصول مکمل^۶ را بررسی کردند. مسئله‌ی

همان‌طور که اشاره شد موضوع تبلیغات یکی از مهم‌ترین موضوعاتی است که مورد توجه محققان قرار گرفته است و اغلب در کنار قیمت‌گذاری بحث و بررسی

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۴/۱۷، اصلاحیه ۱۳۹۷/۲/۲، پذیرش ۱۳۹۷/۳/۱۳.

DOI:10.24200/J65.2018.7236.1770

می‌شود. مثلاً جورجینسن و زکور^[۱۳] و هوآنگ و لی^[۱۴] مسئله‌ی تبلیغات را با وجود یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش بررسی کردند. یو و همکاران^[۱۵] با افزودن تابع تقاضای وابسته به قیمت و تخفیف مستقیم تولیدکننده به مشتری، مدل هوآنگ و لی را توسعه دادند. اسمرکوزکی و ژانگ^[۱۶] قیمت‌گذاری و تبلیغات را با رویکرد استکلبرگ - تولیدکننده و رویکرد متمرکز، در زنجیره‌ی تأمین مورد توجه قرار دادند. زی و وی^[۱۷] قیمت‌گذاری و تبلیغات را با تابع تقاضایی متفاوت با رویکرد متمرکز و استکلبرگ - تولیدکننده بررسی کرده‌اند. زی و نیرت^[۱۸] قیمت‌گذاری و تبلیغات را با سه بازی متمرکز، استکلبرگ و نش بررسی کردند. هی و همکاران^[۱۹] قیمت‌گذاری و تبلیغات را در زنجیره‌ی تأمین با بازی احتمالی استکلبرگ بررسی کردند. سیداصفهان‌ی و همکاران^[۲۰] مدل زی و نیرت را با تعمیم تابع تقاضا گسترش دادند.

مسئله‌ی مورد بررسی در این مقاله، تعیین سطح تبلیغات یک محصول اصلی به همراه قیمت‌گذاری هم‌زمان دو محصول جانشین که هر یک از آنها مکمل محصول اصلی هستند، می‌باشد؛ بنابراین دو محصول مکمل مورد نظر جانشین یکدیگر محسوب می‌شوند. این مسئله بدون وجود تبلیغات اولین بار توسط راستی برزکی^[۱] معرفی شده است. کاربردهای زیادی برای این مسئله قابل معرفی است، قیمت‌گذاری بنزین و گاز به‌عنوان کالاهای جانشین یکدیگر برای خودرو (محصول اصلی) نمونه‌ی بی‌از کاربرد مسئله‌ی مورد بررسی است. گوشی همراه به همراه دو نوع سیم کارت و نیز قیمت‌گذاری مدام و خودکار (دو محصول جانشین) که محصول اصلی مکمل آن دفتر است، مثال‌هایی دیگر از این مسئله است (برای مثال‌های بیشتر رجوع شود به^[۱]). به‌طور خلاصه، این پژوهش از دو جنبه با مسئله‌ی راستی برزکی^[۱] متفاوت است:

۱. برای اولین بار در پژوهش حاضر برای تولیدکننده‌ی صفر (تولیدکننده‌ی محصول اصلی) تبلیغات در نظر گرفته شده است. تبلیغات مطابق دنیای واقعی از یک طرف دارای هزینه است و از طرف دیگر باعث افزایش تقاضا می‌شود.
 ۲. بازی مورد استفاده در این مقاله بازی استکلبرگ - برترند یا همان رفتار رهبر - پیرو است که متفاوت از مقاله‌ی^[۱] است. تولیدکننده‌ی محصول اصلی، رهبر این مسئله با متغیر تصمیم سطح تبلیغات و پیرو، دو تولیدکننده‌ی محصولات جانشین با متغیرهای تصمیم قیمت محصول خود هستند (بازی برترند بین تولیدکنندگان محصولات جانشین).
- تعریف مسئله در بخش ۲ آورده شده است. مسئله در بخش ۳ فرمول‌بندی شده است. تعادل استکلبرگ - برترند در بخش ۴ محاسبه شده است. بخش ۵، شامل تحلیل حساسیت است. در بخش ۶ به حل و بررسی یک مثال عددی پرداخته می‌شود و در نهایت، در بخش ۷، جمع‌بندی آورده شده است.

۲. تعریف مسئله

سه تولیدکننده ($i = 0, 1, 2$) دارای سه محصول مرتبط باهم را در نظر بگیرید. محصول اصلی با نام محصول ۰ برای استفاده توسط مشتری، به یکی از دو محصول دیگر نیاز دارد. محصولات یک و دو جانشین هم‌دیگر هستند؛ بنابراین، هر یک از محصولات یک و دو، مکمل محصول اصلی محسوب می‌شوند. به کاربردهای واقعی این مسئله در مقدمه اشاره شد. تقاضای هر یک از این سه محصول به قیمت خود و قیمت دو محصول دیگر وابسته است؛ بنابراین، برای هر تولیدکننده تابع تقاضای حساس به قیمتی وجود دارد که متأثر از قیمت محصول خود و قیمت دو محصول دیگر است. همان‌طور که گفته شد این مسئله اولین

بار توسط راستی برزکی^[۱] معرفی شده است. در این مقاله مشابه راستی برزکی فرض می‌شود قیمت محصول اصلی (محصول شماره صفر) مشخص است و دو تولیدکننده‌ی دیگر بر اساس قیمت محصول اصلی نسبت به قیمت‌گذاری محصول خود اقدام می‌کنند. در پژوهش حاضر تبلیغات در نظر گرفته شده است. مشابه پژوهش‌های موجود در پیشینه‌ی موضوع (مانند،^[۲۱]) تابع تقاضای محصولات به‌صورت خطی فرض شده است. همه‌ی اطلاعات در مورد پارامترها و رفتار توابع تقاضا برای همه‌ی تولیدکنندگان شناخته شده است (بازی با اطلاعات کامل).

۱.۲. علائم

علائم مورد استفاده در این مقاله عبارت‌اند از:

نمایه

i : اندیس تولیدکننده.

پارامترها

α_i : پایه‌ی بازار تولیدکننده i ($i = 0, 1, 2$)؛

β : کشسانی تقاضای هر محصول ناشی از تغییر قیمت محصول خود (Self-price elasticity)؛

γ : کشسانی تقاضای هر محصول ناشی از تغییر قیمت محصول دیگر محصولات (Cross-price elasticity)؛

θ : کشسانی تقاضای محصولات مکمل ناشی از تغییر قیمت محصول اصلی (Cross-price elasticity)؛

p_0 : قیمت فروش محصول اصلی؛

λ : ضریب اثر تبلیغات در مقدار تقاضا؛

ρ : ضریب اثر هزینه‌ی تبلیغات (ضریب هزینه‌ی تبلیغات در تابع هدف تولیدکننده محصول اصلی).

متغیرهای تصمیم

a_0 : سطح تبلیغات تولیدکننده‌ی محصول اصلی؛

p_i : قیمت فروش محصول i ($i = 1, 2$).

توابع تقاضا و سود

D_i : تقاضای محصول i ($i = 0, 1, 2$)؛

π_i : تابع سود تولیدکننده i ($i = 0, 1, 2$).

علامت اختصاری (اندیس بالا)

SB : بازی استکلبرگ-برترند.

برای هر یک از محصولات یک و دو، پایه‌ی بازاری در نظر گرفته شده است که با تغییرات قیمت محصولات تغییر می‌کند. مطابق دنیای واقعی فرض می‌شود با افزایش قیمت یک محصول تقاضای آن محصول کاهش می‌یابد (β). همچنین فرض می‌شود با افزایش قیمت محصول مکمل تقاضای محصول دیگر (محصول جانشین) افزایش می‌یابد؛ زیرا تعدادی از مشتریان با افزایش قیمت یک محصول از خرید آن منصرف و متقاضی محصول جانشین می‌شوند (γ). λ اثر تبلیغات در مقدار تقاضای محصول در نظر گرفته شده است. فرض می‌شود ضریب اثر تبلیغات در هزینه ρ باشد.

۲.۲. فرضیات

فرضیات در نظر گرفته شده در این مقاله عبارت‌اند از:

۴. تعادل استکلبرگ - برترند

تعادل استکلبرگ - برترند بر مبنای تصمیم‌گیری پویای (مرحله‌یی) رهبر و پیرو و همچنین تصمیم‌گیری هم‌زمان پیروان محاسبه می‌شود. بدین‌منظور فرض می‌شود دو تولیدکننده محصول‌های جانشین یکدیگر دارای قدرت هم‌سطح هستند. در این بخش تعادل استکلبرگ - برترند مربوط به متغیرهای تصمیم یعنی قیمت‌های دو محصول جانشین و سطح تبلیغات آورده می‌شود. همان‌طور که گفته شد تولیدکننده محصول اصلی رهبر و دو تولیدکننده‌ی دیگر پیرو هستند؛ بنابراین، برای حل مسئله و یافتن جواب‌های تعادلی، ابتدا قیمت محصولات جانشین به عنوان تابعی از سطح تبلیغات تولیدکننده محصول اصلی محاسبه و سپس با جایگذاری آنها در تابع سود تولیدکننده محصول اصلی، مقدار بهینه سطح تبلیغات تعیین می‌شود و در نهایت قیمت‌های تعادلی با جایگذاری سطح بهینه‌ی تبلیغات در آنها تعیین می‌شوند.

لم ۱. π_i ($i = 1, 2$) نسبت به p_i مقعر است.

اثبات:

با توجه به این‌که $i = 1, 2$ ، $-2\beta < 0$ ، $\frac{d^2 \pi_i}{dp_i^2} = -2\beta < 0$ ؛ بنابراین توابع سود نسبت به قیمت‌ها مقعر هستند. □

لم ۲. جواب‌های تعادلی محصولات یک و دو برحسب سطح تبلیغات محصول اصلی از روابط ۸ و ۹ به دست می‌آیند.

$$p_1 = \frac{2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2 - (\beta + \gamma)(p_0\theta - a_0\lambda)}{4\beta^2 - \gamma^2} \quad (8)$$

$$p_2 = \frac{\gamma\alpha_1 + 2\beta\alpha_2 - (\beta + \gamma)(p_0\theta - a_0\lambda)}{4\beta^2 - \gamma^2} \quad (9)$$

اثبات:

با توجه به لم ۱، قیمت‌های تعادلی محصولات یک و دو از حل هم‌زمان دستگاه مشتق مرتبه اول به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{d\pi_1}{dp_1} = 0 \rightarrow p_1 = \frac{p_2\gamma - p_0\theta + a_0\lambda + \alpha_1}{2\beta} \\ \frac{d\pi_2}{dp_2} = 0 \rightarrow p_2 = \frac{p_1\gamma - p_0\theta + a_0\lambda + \alpha_2}{2\beta} \end{cases}$$

با حل هم‌زمان این دستگاه، مقادیر قیمت‌های تعادلی به دست می‌آید؛ بنابراین، اثبات کامل می‌شود. □

لم ۳. با در نظر گرفتن قیمت‌های تعادلی محصولات یک و دو در تابع سود تولیدکننده محصول اصلی، π_0 نسبت به λ مقعر است.

اثبات:

با جای‌گذاری روابط ۸ و ۹ در رابطه‌ی ۶ داریم:

$$\pi_0^{SB} = \frac{-2p_0^2\beta\theta + 2a_0p_0\beta\lambda + a_0^2(-2\beta + \gamma)\rho + p_0\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{2\beta - \gamma}$$

با توجه به این‌که:

$$\frac{d^2 \pi_0}{da_0^2} = \frac{2(-2\beta + \gamma)\rho}{2\beta - \gamma} < 0$$

بنابراین لم برقرار است. □

۱. همه‌ی قیمت‌ها مثبت هستند.

۲. همه‌ی توابع تقاضا غیرمنفی هستند.

۳. تقاضای محصول اصلی برابر مجموع تقاضاهای محصولات مکمل آن است.

۴. تولیدکنندگان ظرفیت لازم برای پاسخ به تقاضا را دارند (پژوهش‌های مشابه با این فرض [۲۴،۲۳]).

۵. کشسانی تقاضا به محصول خود بیشتر از کشسانی تقاضا به دو محصول دیگر است؛ یعنی $\beta > \gamma$ ؛ (مثلاً [۲۵،۲۴]).

۶. کشسانی تقاضا متأثر از قیمت دو محصول مکمل، یکسان است (مشابه [۲۷،۲۸]).

۷. مشابه مرجع [۲۹] هزینه‌های تولید، صفر در نظر گرفته شده است.

۸. هزینه تبلیغات با توان دو در تابع هدف ظاهر می‌شود؛ این فرض در حوزه‌ی مباحث تبلیغات به ویژه در مقالات نظریه‌ی بازی متداول است.

۳. فرمول‌بندی مسئله

با توجه به تعریف مسئله و فرضیات ارائه شده تقاضای محصولات مکمل تابعی خطی از پایه‌ی بازار، قیمت هر محصول و قیمت محصول جانشین آن، قیمت محصول اصلی و سطح تبلیغات است؛ بنابراین تابع تقاضای سه محصول به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$D_1 = \alpha_1 - \beta p_1 + \gamma p_2 - \theta p_0 + \lambda a_0 \quad (1)$$

$$D_2 = \alpha_2 - \beta p_2 + \gamma p_1 - \theta p_0 + \lambda a_0 \quad (2)$$

$$D_0 = D_1 + D_2 \quad (3)$$

مطابق رابطه‌ی ۱ مقدار تقاضای یک محصول با افزایش قیمت آن محصول کاهش و با افزایش قیمت محصول جانشین آن افزایش می‌یابد. همچنین، مقدار تقاضای یک محصول با افزایش قیمت محصول اصلی کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش قیمت محصول اصلی تقاضای محصول اصلی و در نتیجه تقاضای محصول مکمل آن کاهش می‌یابد. با افزایش تبلیغات محصول اصلی، مقدار تقاضای محصول مکمل نیز افزایش می‌یابد؛ بنابراین، قسمت آخر رابطه‌ی ۱ با علامت مثبت در آن رابطه ظاهر شده است. توضیح رابطه‌ی ۲ نیز مشابه رابطه‌ی ۱ است و رابطه‌ی ۳ تقاضای محصول اصلی را نشان می‌دهد که مطابق فرضیات تعریف شده است. این روابط را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$D_0 = (\alpha_1 + \alpha_2) - 2\theta p_0 - (\beta - \gamma)p_1 - (\beta - \gamma)p_2 + 2\lambda a_0 \quad (4)$$

$$D_i = \alpha_i - \beta p_i + \gamma p_{2-i} - \theta p_0 + \lambda a_0 \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

سود هر تولیدکننده از تفاضل درآمد و هزینه‌ها قابل دست‌یابی است؛ بنابراین سود تولیدکننده‌ی اول از حاصل ضرب تقاضا در قیمت محصول اصلی منهای هزینه‌ی تبلیغات و سود تولیدکننده‌ی دوم از حاصل ضرب تقاضا در قیمت به دست می‌آید. بنابراین، توابع سود سه تولیدکننده عبارت‌اند از:

$$\pi_0 = ((\alpha_1 + \alpha_2) - 2\theta p_0 - (\beta - \gamma)p_1 - (\beta - \gamma)p_2 + 2\lambda a_0)p_0 - \rho a_0^2 \quad (6)$$

$$\pi_i = (\alpha_i - \beta p_i + \gamma p_{2-i} - \theta p_0 + \lambda a_0)p_i \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

$$D_i^{SB} = \frac{\beta(p \cdot (\beta + \gamma)(\beta\lambda^i + (-\beta + \gamma)\theta\rho) + (\beta - \gamma)\rho(\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i}))}{(-\beta + \gamma)^2(\beta + \gamma)\rho} \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

$$\pi_i^{SB} = \frac{p \cdot (\beta \cdot (\beta - \gamma)\lambda^i - \beta(\beta - \gamma)(p \cdot \beta\theta + a \cdot (\beta - \gamma)\lambda)\rho + \beta(\beta - \gamma)\rho(\alpha_1 + \alpha_2))}{(-\beta + \gamma)^2\rho} \quad (18)$$

$$\pi_i^{SB} = \frac{((\beta + \gamma)(p \cdot \theta - a \cdot \lambda) - \beta\alpha_i - \gamma\alpha_{r-i})(-\beta + \gamma)(a \cdot (-\beta + \gamma)\lambda\rho + p \cdot \beta(\lambda^i - \theta\rho)) - \beta\rho(\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i})}{(-\beta + \gamma)^2\rho} \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

همچنین توابع سود در نقطه‌ی تعادل استکلبرگ - برترند به ترتیب عبارت‌اند از:

$$D_i^{SB} = \frac{\beta(p \cdot (\beta\lambda^i + (-\beta + \gamma)\theta\rho) + (\beta - \gamma)\rho(\alpha_1 + \alpha_2))}{(-\beta + \gamma)^2\rho} \quad (16)$$

لم ۵. بررسی شرایط شدنی بودن جواب‌ها با توجه به غیر منفی بودن توابع تقاضا

با توجه به فرضیات، لازم است فرض مثبت بودن تقاضا یا به عبارت دیگر، شرط شدنی بودن جواب‌ها بررسی شود. بنابراین:

$$D_i^{SB} > 0 \rightarrow \theta > \frac{\beta\lambda^i}{\beta\rho - \gamma\rho} \text{ AND } p_i < \frac{(\beta - \gamma)\rho(\alpha_1 + \alpha_2)}{2((\beta - \gamma)\theta\rho - \beta\lambda^i)} \quad (20)$$

$$D_i^N > 0 \rightarrow \theta > \frac{\beta\lambda^i}{\beta\rho - \gamma\rho} \text{ AND } p_i < \frac{(\beta - \gamma)\rho(\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i})}{(\beta + \gamma)((\beta - \gamma)\theta\rho - \beta\lambda^i)} \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

بنابراین، برای مسئله‌ی مطرح شده در این پژوهش شرایط شدنی بودن مندرج در روابط ۲۰ و ۲۱ باید بین پارامترهای مسئله برقرار باشد تا نقاط تعادلی معتبر باشند؛ در غیراین صورت، مسئله ساده می‌شود و کافی است شرایط مرزی بررسی شود.

۵. تحلیل حساسیت مقدار تبلیغات تعادلی

در این بخش تحلیل حساسیت تبلیغات تعادلی آورده می‌شود. با توجه به پیچیدگی توابع تقاضا و سود در نقطه‌ی تعادل، سایر تحلیل‌ها با استفاده از آزمون‌های عددی در بخش بعد آمده است. با بررسی رابطه‌ی ۱۰، نتایج زیر قابل دست‌یابی است.

نتیجه ۲. پایه‌ی بازار محصولات مکمل، بر روی مقدار تبلیغات تعادلی محصول اصلی بی‌اثر است.

با توجه به رابطه‌ی ۱۰، می‌توان گفت با افزایش/کاهش پایه‌ی بازار محصولات مکمل، سطح تبلیغات تعادلی تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، تبلیغات تعادلی محصول اصلی تابعی از پایه‌ی بازار محصولات مکمل نیست.

نتیجه ۳. بر روی تبلیغات تعادلی محصول اصلی اثر منفی و γ بر روی آن اثر مثبت دارد.

با افزایش β ، سطح تبلیغات تعادلی کاهش و با افزایش γ ، سطح تبلیغات تعادلی افزایش می‌یابد. با مشتق گرفتن از سطح تبلیغات تعادلی نسبت به β و γ می‌توان

قضیه ۱. سطح تبلیغات و قیمت‌های تعادلی استکلبرگ - برترند عبارت‌اند:

$$a_i = \frac{p_i \beta \lambda}{2\beta\rho - \gamma\rho} \quad (10)$$

$$p_1 = \frac{p_i (\beta + \gamma) \left(-\theta + \frac{\beta\lambda^2}{2\beta\rho - \gamma\rho} \right) + 2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2}{4\beta^2 - \gamma^2} \quad (11)$$

$$p_2 = \frac{p_i (\beta + \gamma) \left(-\theta + \frac{\beta\lambda^2}{2\beta\rho - \gamma\rho} \right) + \gamma\alpha_1 + 2\beta\alpha_2}{4\beta^2 - \gamma^2} \quad (12)$$

روابط ۱۱ و ۱۲ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$p_i = \frac{p_i (\beta + \gamma) \left(-\theta + \frac{\beta\lambda^i}{2\beta\rho - \gamma\rho} \right) + \gamma\alpha_i + 2\beta\alpha_{r-i}}{4\beta^2 - \gamma^2} \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

اثبات:

با توجه به لم ۳، مقدار بهینه‌ی سطح تبلیغات از حل مشتق مرتبه اول تابع سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$\frac{d\pi_i}{da_i} = 0 \rightarrow a_i = \frac{p_i \beta \lambda}{2\beta\rho - \gamma\rho}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۰ در روابط ۸ و ۹ قیمت‌های تعادلی به دست می‌آیند و اثبات کامل می‌شود. □.

لم ۴. بررسی شرایط شدنی بودن جواب‌ها با توجه به غیر منفی بودن متغیرهای تصمیم

با توجه به فرضیات، سطح تبلیغات و قیمت‌ها باید مثبت باشند. با توجه به رابطه‌ی ۱۰ و این‌که مطابق فرضیات $\beta > \gamma$ ، سطح تبلیغات همواره مثبت است، برای آن‌که $p_i^N > 0$ ، $i = 1, 2$ باید:

$$\alpha_i > \frac{(\beta + \gamma)(p_i \theta - a_i \lambda) - \gamma\alpha_{r-i}}{2\beta} \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

که می‌توان با بازنویسی آن به صورت رابطه‌ی ۱۵ شرط شدنی بودن جواب‌ها را مطابق رابطه‌ی مذکور در محاسبات آتی لحاظ کرد.

$$p_i < \frac{2a_i \beta \lambda + a_i \gamma \lambda + 2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i}}{2\beta\theta + \gamma\theta} \quad (15)$$

با جای‌گذاری قیمت‌های تعادلی (رابطه‌ی ۱۳) در توابع تقاضا (روابط ۴ و ۵) و توابع سود (روابط ۶ و ۷) نتایج زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱. تقاضاها و سودهای تعادلی

توابع تقاضای محصول اصلی و محصولات جانشین مکمل محصول اصلی و

$$p_0 = 250;$$

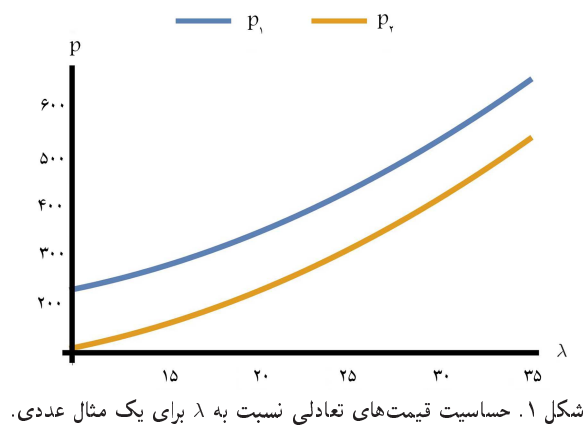
$$\lambda = 3.$$

نتیجه‌ی حل این مثال عددی با روابط مندرج در بخش تعادل استکلیبرگ - برترند در جدول ۱ آمده است. نمودار حساسیت قیمت تعادلی محصولات جانشین و همچنین تقاضاها و سودهای تعادلی هر یک از تولیدکنندگان مربوط به این مثال عددی نسبت به λ در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ آمده است. همان‌طور که از این شکل‌ها مشخص است با افزایش λ قیمت‌ها، تقاضاها و سودهای تعادلی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر چنانچه کشسانی تقاضا نسبت به قیمت محصول رقیب افزایش یابد، قیمت‌ها و تقاضاها و سودهای تعادلی افزایش می‌یابد. از شکل ۳ می‌توان برداشت کرد که برای این مثال آهنگ افزایش سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی کمتر از آهنگ افزایش سودهای تعادلی محصولات مکمل آن است. به عبارت دیگر، با افزایش کشسانی تقاضا نسبت به قیمت محصول رقیب، تولیدکنندگان محصولات جانشین نسبت به تولیدکننده‌ی محصول اصلی افزایش سود بیشتری دارند. همچنین این شکل‌ها نشان می‌دهد از بین محصولات جانشین، محصولی که پایه‌ی بازار بزرگتری دارد دارای قیمت، تقاضا و سود تعادلی بیشتری است.

نمودار حساسیت قیمت تعادلی محصولات جانشین و همچنین تقاضاها و سودهای تعادلی هر یک از تولیدکنندگان نسبت به p در شکل‌های ۴ تا ۶ آمده است. همان‌طور که از این شکل‌ها مشخص است با افزایش p قیمت‌ها، تقاضاها و سودهای تعادلی کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر هر چقدر ضریب هزینه‌ی تبلیغات افزایش یابد قیمت‌ها، تقاضاها و سودهای تعادلی برای هر سه تولیدکننده کاهش

جدول ۱. نتیجه‌ی حل یک مثال عددی.

متغیرها	مقادیر
a_0	۲۱٫۷
p_1	۱۹۵
p_2	۷۵
D_0	۲۹۷۰
D_1	۲۱۴۵
D_2	۸۲۵
π_0	۷۳۳۱۱۱
π_1	۴۱۸۳۰۵
π_2	۶۱۸۸۶



گفت با افزایش یک واحد β سطح تبلیغات به اندازه‌ی $\frac{p_0 \gamma \lambda}{(2\beta - \gamma)^2 \rho}$ کاهش و با افزایش γ سطح تبلیغات به اندازه‌ی $\frac{p_0 \beta \lambda}{(2\beta - \gamma)^2 \rho}$ افزایش می‌یابد؛ زیرا:

$$\frac{da_0}{d\beta} = -\frac{p_0 \gamma \lambda}{(2\beta - \gamma)^2 \rho}$$

$$\frac{da_0}{d\gamma} = \frac{p_0 \beta \lambda}{(2\beta - \gamma)^2 \rho}$$

بنابراین چنانچه کشسانی تقاضا نسبت به قیمت محصولات مکمل افزایش یابد، سطح تبلیغات تعادلی محصول اصلی کاهش می‌یابد و چنانچه کشسانی تقاضا نسبت به قیمت محصول رقیب افزایش یابد سطح تبلیغات تعادلی محصول اصلی افزایش می‌یابد.

نتیجه ۴. قیمت محصول اصلی، اثر مثبت بر روی سطح تبلیغات محصول اصلی دارد.

با توجه به رابطه‌ی ۱۰، می‌توان گفت با افزایش p_0 ، سطح تبلیغات تعادلی افزایش می‌یابد. با مشتق گرفتن از سطح تبلیغات تعادلی نسبت به p_0 داریم:

$$\frac{da_0}{dp_0} = \frac{\beta \lambda}{(2\beta - \gamma) \rho}$$

بنابراین، با افزایش یک واحد p_0 ، سطح تبلیغات تعادلی به اندازه‌ی $\frac{\beta \lambda}{(2\beta - \gamma) \rho}$ افزایش می‌یابد.

نتیجه ۵. کشسانی تقاضای محصولات مکمل نسبت به قیمت محصول اصلی (θ)، بر روی مقدار تبلیغات تعادلی محصول اصلی بی‌اثر است. با توجه به رابطه‌ی ۱۰، می‌توان گفت با افزایش/کاهش کشسانی تقاضای محصولات مکمل نسبت به قیمت اصلی، سطح تبلیغات تعادلی تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر تبلیغات تعادلی محصول اصلی تابعی از کشسانی تقاضای محصولات مکمل نسبت به قیمت اصلی نیست؛ در حالی که مطابق نتیجه‌ی قبل، سطح تبلیغات تعادلی تابعی از قیمت محصول اصلی است.

این بخش از تحلیل حساسیت را می‌توان این‌گونه جمع‌بندی کرد که پایه‌ی بازار و کشسانی تقاضای محصولات مکمل نسبت به قیمت محصول اصلی مقدار تبلیغات تعادلی را تغییر نمی‌دهند. همچنین، کشسانی تقاضای محصولات مکمل ناشی از تغییرات قیمت محصول خودی بر روی مقدار تبلیغات اثر منفی و کشسانی تقاضای محصولات مکمل ناشی از تغییرات قیمت محصول مکمل دیگر اثر مثبت بر روی مقدار تبلیغات دارد.

۶. نتایج عددی

در این بخش روابط مربوط به قیمت‌های تعادلی و تقاضاها و همچنین توابع سود در نقطه‌ی تعادل استکلیبرگ - برترند به‌طور عددی مورد بحث قرار می‌گیرد. برای این منظور مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha_1 = 7000;$$

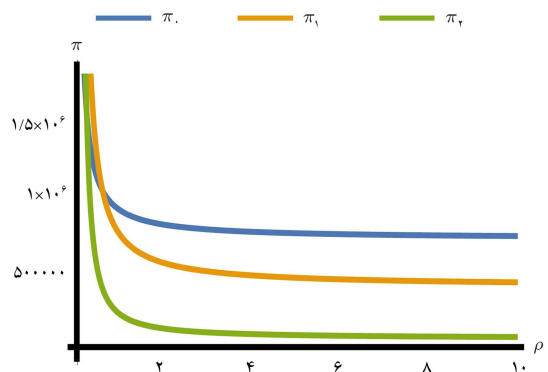
$$\alpha_2 = 4000;$$

$$\beta = 11;$$

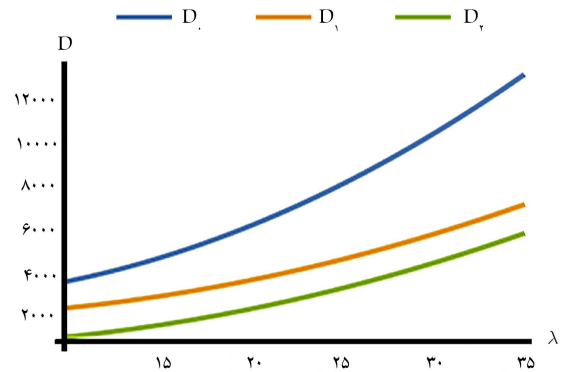
$$\gamma = 3;$$

$$\theta = 12;$$

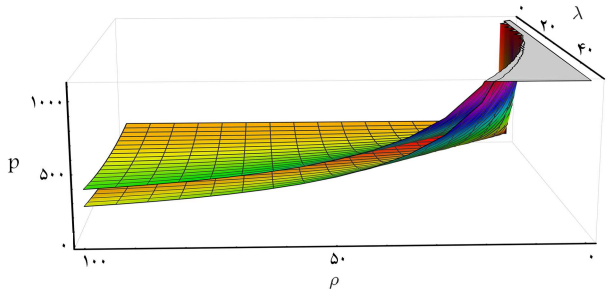
$$\rho = 20;$$



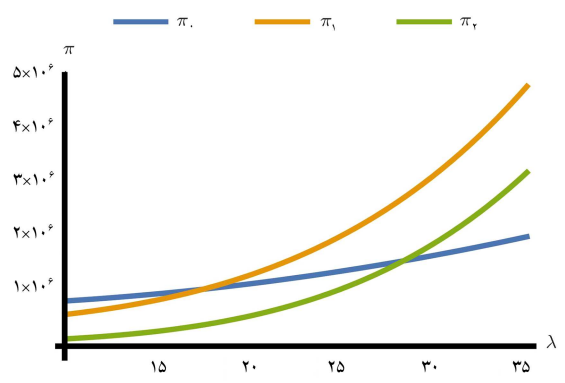
شکل ۶. حساسیت سودهای تعادلی نسبت به ρ برای یک مثال عددی.



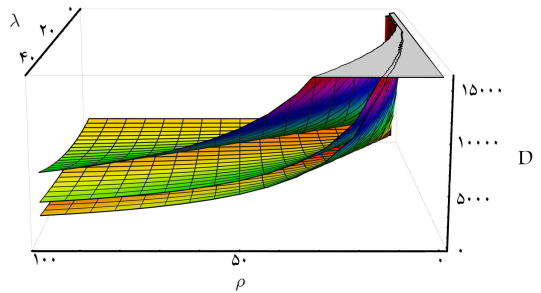
شکل ۲. حساسیت تقاضاهای تعادلی نسبت به λ برای یک مثال عددی.



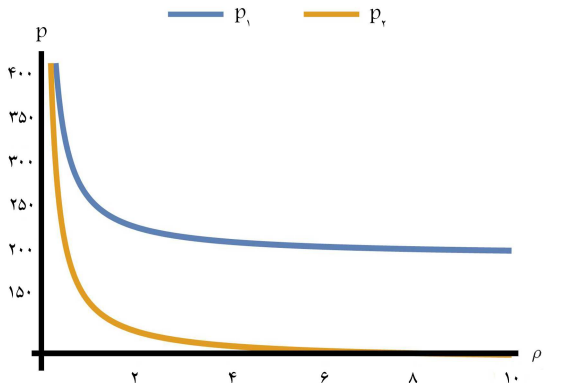
شکل ۷. اثر دو پارامتر مهم λ و ρ به‌طور هم‌زمان بر قیمت‌های تعادلی.



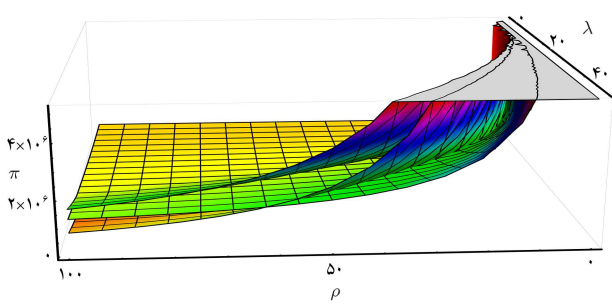
شکل ۳. حساسیت سودهای تعادلی نسبت به λ برای یک مثال عددی.



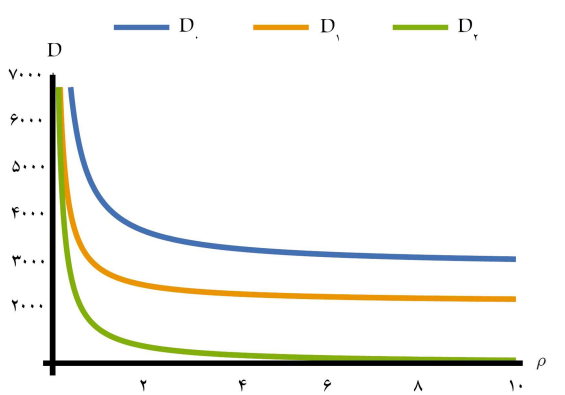
شکل ۸. اثر دو پارامتر مهم λ و ρ به‌طور هم‌زمان بر تقاضاهای تعادلی.



شکل ۴. حساسیت قیمت‌های تعادلی نسبت به ρ برای یک مثال عددی.

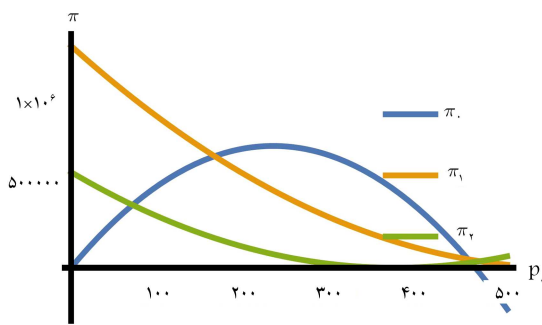


شکل ۹. اثر دو پارامتر مهم λ و ρ به‌طور هم‌زمان بر سودهای تعادلی.



شکل ۵. حساسیت تقاضاهای تعادلی نسبت به ρ برای یک مثال عددی.

می‌باید. افزایش بیش از حد ρ تأثیر چندانی در جواب‌های تعادلی ندارد. اثر هم‌زمان دو پارامتر λ و ρ بر جواب‌های تعادلی در شکل‌های ۷ تا ۹ آمده است. این دو پارامتر مربوط به ضریب اثر تبلیغات در تابع تقاضا و تابع سود است. به عبارت دیگر این دو پارامتر به ترتیب نشان می‌دهند که تبلیغات با چه ضریبی باعث افزایش تقاضا و با چه ضریبی باعث افزایش هزینه‌ی تبلیغات می‌شوند. همان‌طور که از

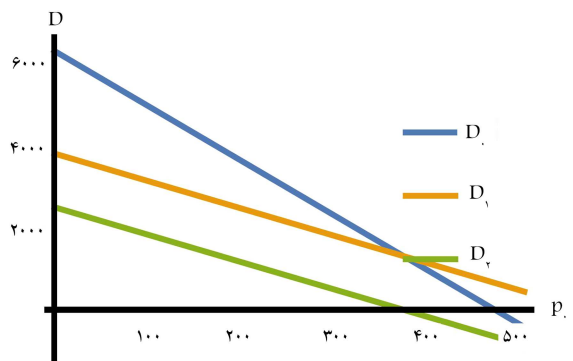


شکل ۱۲. حساسیت سودهای تعادلی نسبت به p^0 برای یک مثال عددی.

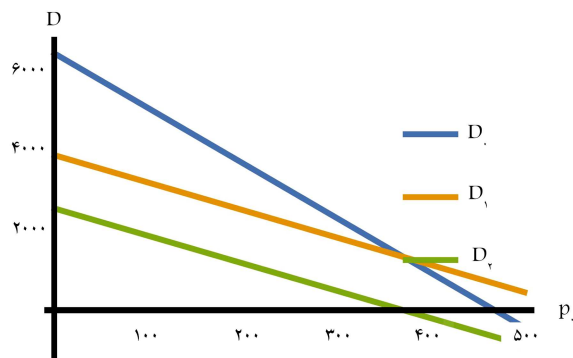
است با افزایش p قیمت‌های تعادلی محصولات جانشین کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش p ، تقاضاهای هر سه محصول کاهش می‌یابد. اما همان‌طور که شکل ۱۲ نشان می‌دهد سود تعادلی تولیدکنندگان محصول مکمل محصول اصلی کاهش و سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی ابتدا افزایش و سپس (به دلیل کاهش تقاضا) کاهش می‌یابد.

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله تعیین سطح تبلیغات محصول اصلی و قیمت‌گذاری دو محصول جانشین که مکمل یک محصول اصلی هستند، برای اولین بار بررسی شد. نقاط تعادلی قیمت‌ها، توابع تقاضا و سود آورده شد و تحلیل حساسیت سطح تبلیغات به صورت پارامتریک انجام شد. بر اساس نتایج تحلیلی به دست آمده پایه‌ی بازار محصولات مکمل، بر روی تبلیغات تعادلی محصول اصلی بی‌اثر است. همچنین کشسانی تقاضای محصولات مکمل نسبت به قیمت محصول (β) بر روی مقدار تبلیغات تعادلی محصول اصلی اثر منفی و کشسانی تقاضای محصولات مکمل نسبت به قیمت محصول رقیب (γ) بر روی آن اثر مثبت دارد. نتایج عددی نیز نشان می‌دهد پایه‌ی بازار و ضریب اثر تبلیغات روی مقدار تقاضا، دارای اثر مثبت بر روی جواب‌های تعادلی (قیمت، تقاضا و سود) هستند و ضریب هزینه‌ی تبلیغات دارای اثر منفی بر روی قیمت، تقاضا و سودهای تعادلی است. این مسئله در آینده می‌تواند با افزایش تعداد کالاها مکمل برای یک نوع محصول اصلی یا تعمیم ساختار آن به یک زنجیره‌ی تأمین نظیر در نظر گرفتن خرده‌فروشان علاوه بر تولیدکنندگان توسعه یابد. همچنین مسئله می‌تواند در حالت پویا بررسی شود (برای مثال [۳۰-۳۲]).



شکل ۱۰. حساسیت قیمت‌های تعادلی نسبت به p برای یک مثال عددی.



شکل ۱۱. حساسیت تقاضاهای تعادلی نسبت به p برای یک مثال عددی.

شکل‌ها نیز مشخص است افزایش ضریب اثر تبلیغات روی مقدار تقاضا و همچنین کاهش ضریب هزینه‌ی اثر تبلیغات منجر به افزایش قیمت، تقاضا و سودهای تعادلی می‌شود. بر اساس رفتارهای قابل مشاهده در شکل‌های مذکور، بیشترین مقدار قیمت، تقاضا، و سودهای تعادلی مربوط به بیشترین مقدار ضریب اثر تبلیغات روی تقاضا و کمترین مقدار ضریب هزینه‌ی اثر تبلیغات است. بدیهی است که هرچه برنامه‌های تبلیغاتی مؤثرتر (افزایش λ) و هزینه‌ی انجام تبلیغات کمتر باشد (کاهش ρ) میزان کارایی تبلیغات افزایش می‌یابد. مطابق نتایج به دست آمده افزایش کارایی تبلیغات منجر به افزایش قیمت‌ها، تقاضاها و سودهای تعادلی برای هر سه تولیدکننده می‌شود.

نمودار حساسیت قیمت‌های تعادلی محصولات جانشین و همچنین تقاضاها و سودهای تعادلی هر یک از تولیدکنندگان مربوط به این مثال عددی نسبت به p^0 در شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ آورده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص

منابع (References)

پانویس‌ها

1. pricing
2. advertising
3. game theory
4. agent
5. substitute
6. complementary
7. price sensitive demand

1. Rasti-Barzoki, M. "Pricing for two substitute products with specified price of one main complementary product: a game-theoretic approach", IEand management, (Under press).
2. Cournot, A.-A. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot: chez L. Hachette (1838).

3. Bertrand, J., “iBook review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richessesj”, *Journal de Savants*, **67** (1883).
4. Singh, N. and Vives, X. “Price and quantity competition in a differentiated duopoly”, *The RAND Journal of Economics*, **15**(4), pp. 546-554 (1984).
5. Shao, X.F. and Ji, J.H. “Effects of sourcing structure on performance in a multiple-product assemble-to-order supply chain”, *European Journal of Operational Research*, **192**, pp. 981-1000 (2009).
6. Yue, X., Mukhopadhyay, S.K. and Zhu, X. “A Bertrand model of pricing of complementary goods under information asymmetry”, *Journal of Business Research*, **59**, pp. 1182-1192 (2006).
7. Lai, G., Debo, L.G. and Sycara, K. “Sharing inventory risk in supply chain: the implication of financial constraint”, *Omega*, **37**, pp. 811-825 (2009).
8. Choi, S. C. “Price competition in a channel structure with a common retailer”, *Marketing Science*, **10**, pp. 271-296 (1991).
9. Ai, X., Chen, J., Zhao, H. and et al. “Competition among supply chains: implications of full returns policy”, *International Journal of Production Economics*, **139**, pp. 257-265 (2012).
10. Xiao, T. and Yang, D. “Price and service competition of supply chains with risk-averse retailers under demand uncertainty”, *International Journal of Production Economics*, **114**, pp. 187-200 (2008).
11. Ertek, G. and Griffin, P.M. “Supplier-and buyer-driven channels in a two-stage supply chain”, *IIE Transactions*, **34**, pp. 691-700 (2002).
12. Zhang, R., Liu, B. and Wang, W. “Pricing decisions in a dual channels system with different power structures”, *Economic Modelling*, **29**, pp. 523-533 (2012).
13. Jørgensen, S. and Zaccour, G. “A differential game of retailer promotions”, *Automatica*, **39**, pp. 1145-1155 (2003).
14. Huang, Z. and Li, S. X. “Co-op advertising models in manufacturer-retailer supply chains: a game theory approach”, *European Journal of Operational Research*, **135**, pp. 527-544 (2001).
15. Yue, J., Austin, J., Wang, M.-C. and et al. “Coordination of cooperative advertising in a two-level supply chain when manufacturer offers discount”, *European Journal of Operational Research*, **168**, pp. 65-85 (2006).
16. Szmerekovsky, J.G. and Zhang, J. “Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer”, *European Journal of Operational Research*, **192**, pp. 904-917 (2009).
17. Xie, J. and Wei, J.C. “Coordinating advertising and pricing in a manufacturer-retailer channel”, *European Journal of Operational Research*, **97**, pp. 785-791 (2009).
18. Xie, J. and Neyret, A. “Co-op advertising and pricing models in manufacturer-retailer supply chains”, *Computers & Industrial Engineering*, **56**, pp. 1375-1385 (2009).
19. He, X., Prasad, A. and Sethi, S.P. “Cooperative advertising and pricing in a dynamic stochastic supply chain: feedback stackelberg strategies”, *Production and Operations Management*, **18**, pp. 78-94 (2009).
20. SeyedEsfahani, M.M., Biazaran, M. and Gharakhani, M. “A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer-retailer supply chains”, *European Journal of Operational Research*, **211**, pp. 263-273 (2011).
21. Pan, K., Lai, K.K., Leung, S.C.H. and et al. “Revenue-sharing versus wholesale price mechanisms under different channel power structures”, *European Journal of Operational Research*, **203**, pp 532-538 (2010).
22. Edirisinghe, N.C.P., Bichescu, B. and Shi, X. “Equilibrium analysis of supply chain structures under power imbalance”, *European Journal of Operational Research*, **214**, pp. 568-578 (2011).
23. Ferrer, G. and Ketzenberg, M.E. “Value of information in remanufacturing complex products”, *IIE transactions*, **36**, pp. 265-277 (2004).
24. Savaskan, R.C. and Van Wassenhove, L.N. “Reverse channel design: the case of competing retailers”, *Management Science*, **52**, pp. 1-14 (2006).
25. Dan, B., Xu, G. and Liu, C. “Pricing policies in a dual-channel supply chain with retail services”, *International Journal of Production Economics*, **139**, pp. 312-320 (2012).
26. Wei, J., Zhao, J. and Li, Y. “Pricing decisions for complementary products with firms’ different market powers”, *European Journal of Operational Research*, **224**, pp. 507-519 (2013).
27. Hua, G., Wang, S. and Cheng, T.C.E. “Price and lead time decisions in dual-channel supply chains”, *European Journal of Operational Research*, **205**, pp. 113-126 (2010).
28. Huang, S., Yang, C. and Zhang, X. “Pricing and production decisions in dual-channel supply chains with demand disruptions”, *Computers & Industrial Engineering*, **62**, pp. 70-83 (2012).
29. Karray, S. and Sigué, S.P. “A game-theoretic model for co-promotions: choosing a complementary versus an independent product ally”, *Omega*, **54**, pp. 84-100 (2015).
30. Zhang, J. and Frazier, G.V. “Strategic alliance via co-opetition: supply chain partnership with a competitor”, *Decision Support Systems*, **51**, pp. 853-863 (2011).
31. Sayadi, M.K. and Makui, A. “Feedback nash equilibrium for dynamic brand and channel advertising in dual channel supply chain”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **161**, pp. 1012-1021 (2014).
32. Shalchi Tousi, M.A., Ghazanfari, M. and Makui, A. “A Model of brand competition for durable goods supply chains in a dynamic framework”, *Journal of Industrial and Systems Engineering*, **8**(1), pp.61-85 (2015).