

ارائه‌ی یک رهیافت تعیین توأم اندازه‌ی انباشته، قیمت‌گذاری و برنامه‌ی بازرسی آماری

مریم صفرنژاد (دانشجوی کارشناسی ارشد)

مجید امین نیری* (دانشیار)

دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌های مدیریت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

رضا قاسمی‌یقین (استادیار)

دانشکده مهندسی نساجی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۸ (دوره ۱-۳۵، شماره ۱/۲، ص. ۷۳-۸۵)

در این مقاله به توسعه‌ی مدل یکپارچه‌ی موجودی - بازرسی - بازاریابی در زنجیره‌ی عرضه یک فروشنده و یک خریدار پرداخته شده است. هدف این مقاله نزدیک‌تر کردن مدل‌های موجودی به مسائل دنیای واقعی از طریق در نظر گرفتن تقاضای وابسته به قیمت و فرض کیفیت ناقص برای محصولات است. سه سیاست بازرسی شامل بدون بازرسی، بازرسی 100% و نمونه‌گیری در نظر گرفته شده است و مقادیر بهینه‌ی اندازه‌ی انباشته، قیمت و سیاست بازرسی از طریق بیشینه کردن سود خرده‌فروش به ازای هر یک از این سیاست‌ها در حالت با جایگزینی و بدون جایگزینی اقلام معیوب محاسبه شده است. در پایان برای انجام تحلیل حساسیت پارامترهای اصلی، مطالعات عددی انجام شده است. نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد که تغییرات قیمت و سیاست بازرسی بر روی اتخاذ تصمیم بهینه‌ی اندازه‌ی انباشته اثرگذار است؛ همچنین تغییر پارامترهایی چون هزینه‌ی بازرسی و هزینه‌ی پذیرش بر روی سیاست بهینه‌ی بازرسی و تغییر پارامترهای موجودی فقط بر سیاست‌های سفارش دهی و قیمت‌گذاری تأثیرگذارند.

واژگان کلیدی: اندازه‌ی انباشته، برنامه‌ی بازرسی آماری، بهینه‌سازی غیرخطی، زنجیره‌ی تأمین دوسطحی، قیمت‌گذاری.

safarnezhad.m@aut.ac.ir
mjnayeri@aut.ac.ir
yaghin@aut.ac.ir

۱. مقدمه

مدل‌های موجودی دارای اهمیت ویژه‌ی در بخش‌های مختلف از قبیل کشاورزی و تجارت هستند؛ زیرا از طریق این مدل‌ها می‌توان به هزینه‌های پایین‌تر، فروش بیشتر و زمان پاسخ‌گویی کوتاه‌تر دست یافت.^[۱] اولین مدل موجودی توسط هریس^[۲] ارائه شد که بعدها به مدل مقدار سفارش اقتصادی^۱ شهرت یافت و هدف آن تعیین مقدار بهینه‌ی سفارش دهی از طریق کمینه کردن هزینه‌هاست. به منظور افزایش عملکرد زنجیره‌ی عرضه باید مسائل موجود در دنیای واقعی در مدل‌های موجودی در نظر گرفته شوند. یکی از مشکلات اصلی موجود در زنجیره‌ی عرضه وجود طیف وسیعی از تصمیم‌گیری‌ها و سیاست‌گذاری‌هاست. برای نمونه در گذشته قیمت به‌طور مجزا در بخش بازاریابی تعیین می‌شد و بخش عملیاتی و مدیران سیاست‌های کنترل موجودی را به‌منظور کمینه کردن هزینه‌ها تعیین می‌کردند؛ اما در بازار رقابتی امروز دیگر نمی‌توان به مدل‌های سنتی تکیه کرد.^[۳] یکی دیگر از فرض‌های غیرواقعی در مدل مقدار سفارش اقتصادی در نظر گرفتن کیفیت کامل برای تمام محصولات در یافتی از تولیدکننده

است؛ در حالی‌که در دنیای واقعی تمام تولیدکنندگان به دلایل مختلفی دارای اقلام معیوب هستند. در نتیجه، بهره‌گیری از یک برنامه‌ی بازرسی مناسب و لحاظ کردن هزینه‌های کیفی برای کشف اقلام معیوب در انباشته امری ضروری است. تصمیم‌های مربوط به تعیین اندازه‌ی انباشته و برنامه‌ی بازرسی به هم مرتبط و وابسته هستند و یکپارچه‌سازی این تصمیمات در مدل، منجر به تعیین هم‌زمان پارامترهای موجودی و بازرسی شده و صرفه‌ی اقتصادی در پی دارد. با توجه به این دلایل و برای عملکرد بهتر در زنجیره‌ی عرضه نیاز است تا تصمیم‌گیری‌ها به‌صورت یکپارچه بررسی شوند تا کالا به مقدار و قیمت مناسب و کیفیت مورد انتظار تولید و عرضه شود و سود کلی مورد انتظار بیشینه شود. در بخش دوم این مقاله خلاصه‌بی از مطالعاتی که تاکنون در زمینه‌ی مدل‌های موجودی تعیین اندازه‌ی انباشته و قیمت‌گذاری با فرض کیفیت ناقص انجام شده است، بررسی می‌شود. در بخش سوم پس از تعریف مسئله و بیان فرض‌ها و معرفی نمادهای به کار رفته، به مدل‌سازی مسئله پرداخته شده است. در بخش چهارم، فرایند حل مدل برای یافتن مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم‌گیری ارائه شده است. در بخش پنجم با ارائه‌ی چند مثال و انجام تحلیل حساسیت، تأثیر پارامترهای مرتبط با موجودی و بازرسی بر متغیرهای تصمیم و سود خرده‌فروش بررسی خواهد شد. در بخش پایانی نیز نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای مطالعات آتی ارائه شده است.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۸/۳، اصلاحیه ۱۳۹۷/۵/۲، پذیرش ۱۳۹۷/۶/۲۶.

DOI:10.24200/J65.2018.7326.1814

۲. مرور پیشینه

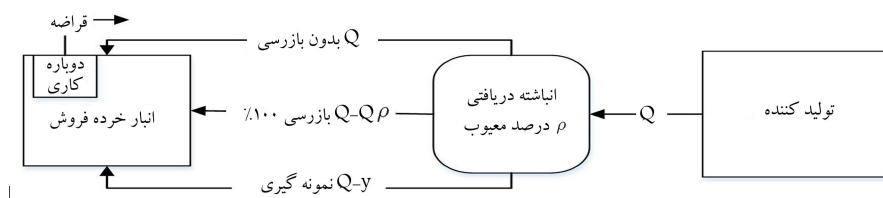
یکی از فرض‌های لازم در مدل مقدار سفارش اقتصادی این است که تمام اقلام تولید شده دارای کیفیت کامل هستند، اما این فرض به ندرت در دنیای واقعی امکان‌پذیر است. نخستین بار سلامه و جابر^[۴] فرض کیفیت ناقص اقلام تولیدی را به مدل مقدار سفارش اقتصادی اضافه کردند. بن دایا و همکاران^[۵] خریداری را در نظر گرفتند که دارای تقاضای ثابت است و از برخی انواع بازرسی مانند بدون بازرسی، بازرسی ۱۰۰ درصد و برنامه‌ی نمونه‌گیری استفاده می‌کند؛ آن‌ها در مدل خود فرض کردند که کسر اقلام معیوب انباشته از توزیع بتا پیروی می‌کند و اقلام معیوب پس از کشف با به‌سادگی دور ریخته می‌شوند یا با صرف هزینه‌ی دوباره‌کاری می‌شوند. از آنجایی‌که تقاضای ورودی به زنجیره با قیمت محصول رابطه‌ی عکس دارد، در نظر گرفتن فرض وابستگی تقاضا به قیمت منجر به نزدیک‌تر شدن مسئله به شرایط واقعی می‌شود. در صورت وارد کردن این فرض باید بهینه‌سازی از کمینه کردن هزینه‌ها، به بیشینه کردن سود تغییر کند. اولین مسئله از این نوع توسط ویتین^[۶] ارائه شد. او تقاضا را به صورت تابع خطی از قیمت وارد مدل مقدار سفارش اقتصادی کرد. شیخ سجادی و همکاران^[۷] مدل موجودی - تولید - بازاریابی را در یک زنجیره‌ی دوسطحی بررسی کردند. آن‌ها در مدل خود تقاضا را به صورت خطی وابسته به قیمت در نظر گرفتند. متغیرهای تصمیم‌گیری در این مدل مقدار سفارش دهی، تعداد تحویل‌ها و قیمت فروش است که از طریق بیشینه‌سازی تابع سود مورد انتظار مشترک به دست می‌آید. چیخرو و همکاران^[۸] مدل موجودی را با فرض کیفیت ناقص محصولات ارائه دادند، آن‌ها خرده‌فروشی را در نظر گرفتند که برای کنترل کیفیت انباشته‌ی دریافتی بازرسی نمونه‌گیری برای پذیرش را اجرا می‌کند، سپس اقلام معیوب کشف شده را با دو سناریو به تأمین‌کننده مرجوع می‌کند. در سناریوی اول اقلام معیوب بلافاصله بعد از بازرسی مرجوع می‌شوند. در حالت دوم خرده‌فروش با پرداخت هزینه‌ی نگهداری از اقلام معیوب نگهداری می‌کند و هم‌زمان با دریافت انباشته‌ی بعدی آن‌ها را به تأمین‌کننده مرجوع می‌کند. متغیرهای تصمیم‌گیری در این مدل مقدار بهینه‌ی اندازه‌ی انباشته و اندازه‌ی نمونه است. در حوزه‌ی تعیین مشترک سیاست‌های سفارش دهی و قیمت‌گذاری با در نظر گرفتن کالاهای معیوب، بزرگر و همکاران^[۹] مسئله‌ی تعیین مشترک اندازه‌ی انباشته و برنامه‌ی تحویل را در سیستم تصمیم‌گیری متمرکز و با فرض تولید با کیفیت ناقص و تقاضای وابسته به قیمت مطالعه کردند. در این مقاله فرض شده است که اقلام معیوب کشف شده از طریق بازرسی به فروشنده برگشت داده می‌شوند تا در قیمت پایین‌تر به فروش برسند. خطای بازرسی و تابع سرمایه‌گذاری لگاریتمی برای بهبود کیفیت محصولات نیز در نظر گرفته شده است. یو و هسو^[۱۰] مدل یکپارچه‌ی موجودی - تولید را با سیاست تحویل در اندازه‌های نابرابر بررسی کردند. آن‌ها فرض کردند که نرخ خرابی انباشته از توزیع یکپارچه پیروی می‌کند و پس از اجرای بازرسی ۱۰۰٪ اقلام معیوب انباشته فوراً به فروشنده مرجوع می‌شوند. طالعی‌زاده و همکاران^[۱۱] مدل موجودی - تولید غیر متمرکز را برای زنجیره‌ی عرضه‌ی سه سطحی شامل یک توزیع‌کننده، یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش برای زمانی که تقاضای هر یک از اعضا تابع عمومی از قیمت در نظر گرفته می‌شود، بررسی کردند. همچنین در این مقاله فرض شده درصدی از مواد اولیه تولیدکننده و درصدی از انباشته‌ی دریافتی توزیع‌کننده معیوب هستند؛ بنابراین، تمام انباشته فوراً بازرسی می‌شود و سه سناریو برای اقلام معیوب کشف شده در طی فرایند بازرسی در نظر گرفته می‌شود. در سناریوی اول تمام اقلام معیوب کشف شده در مواد اولیه دور ریخته می‌شود. در سناریوی دوم تمام اقلام معیوب جمع‌آوری شده توسط توزیع‌کننده دوباره‌کاری می‌شوند. در

سناریوی سوم اقلام معیوب از طرف توزیع‌کننده به خریدار خارجی فروخته می‌شود. متغیرهای تصمیم‌گیری در این مقاله مقدار سفارش دهی توزیع‌کننده و قیمت فروش برای هر سه عضو زنجیره (توزیع‌کننده، تولیدکننده و خرده‌فروش) است. نویسندگان نشان دادند که توابع سود مقعر است. سپس از رویکرد بازی استکلبرگ برای ارائه‌ی الگوریتمی برای تعیین جواب‌های بهینه استفاده کردند. هنگ‌فویو و همکاران^[۱۲] مدل یکپارچه‌ی موجودی - تولید را با فرض کیفیت ناقص با سیاست تحویل در اندازه‌های نابرابر بررسی کردند. در این مقاله نرخ خرابی احتمالی است و از توزیع یکپارچه پیروی می‌کند. برای کشف اقلام معیوب انباشته، بازرسی ۱۰۰ درصد اجرا می‌شود و محصولات معیوب فوراً به فروشنده مرجوع می‌شوند. متغیرهای تصمیم‌گیری در این مقاله تعداد و مقدار بهینه‌ی حمل‌ها در هر چرخه است. رضایی^[۱۳] مدل EOQ را با در نظر گرفتن کیفیت ناقص و برنامه‌ی نمونه‌گیری توسعه داد که در آن خریدار بر اساس نرخ خرابی نمونه در مورد اقدام بعدی تصمیم‌گیری می‌کند؛ بدین صورت که با توجه به نرخ خرابی انباشته، دو نقطه‌ی شکست تعیین می‌کند و در صورتی که نرخ خرابی کم‌تر از اولین نقطه‌ی شکست باشد، خریدار انباشته را بدون بازرسی می‌پذیرد. اگر نرخ خرابی بین نقطه‌ی شکست اول و دوم باشد، کل انباشته را مورد بازرسی ۱۰۰٪ قرار می‌دهد و در صورتی که نرخ خرابی بزرگ‌تر از نقطه‌ی شکست دوم باشد، کل انباشته رد می‌شود. جاهری و همکاران^[۱۴] نیز مدل مشترک تعیین اندازه‌ی انباشته اقتصادی را در زنجیره‌ی تأمین یک فروشنده - یک خریدار و یک محصول با در نظر گرفتن اقلام معیوب، خطای بازرسی، پس‌افت تقاضا و وابستگی تقاضا به قیمت فروش مطالعه کردند. در مدل آنها فرض شده است، خریدار کل انباشته‌ی دریافتی را بازرسی می‌کند و اقلامی که به عنوان معیوب دسته‌بندی شده‌اند، به علاوه‌ی اقلام معیوبی که توسط مشتری نهایی به خریدار برگشت داده شده‌اند، در انتهای فرایند بازرسی به فروشنده مرجوع می‌شوند و در بازار ثانویه با تخفیف به فروش می‌رسند. برای تعیین تصمیمات موجودی و قیمت‌گذاری از یک الگوریتم تکراری استفاده شد و نتایج حل نشان داد که قیمت فروش نسبت به تغییرات نرخ خرابی و احتمال خطای نوع اول حساس است. قاسمی‌یقین و همکاران^[۱۵] نیز الگوریتمی مبتنی بر تحلیل محدب برای حل مسئله‌ی قیمت‌گذاری و اندازه‌ی انباشته با در نظر گرفتن مفهوم مدیریت درآمد و تقاضای لوجیت ارائه کردند.

در جدول ۱ خلاصه‌ی از مطالعاتی که تاکنون بر روی مسائل تعیین اندازه‌ی انباشته با فرض کیفیت ناقص و قیمت‌گذاری انجام شده، ارائه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در تمام مدل‌هایی که تاکنون مطالعه شدند، محققان به صورت هم‌زمان به بررسی موضوع تعیین اندازه‌ی انباشته، قیمت و تعیین سیاست بهینه‌ی بازرسی در یک مدل نپرداخته‌اند. برای دسترسی به مدل‌هایی که بتوانند به صورت یک مدل جامع و کاربردی مبنای تصمیم‌گیری مدیران قرار گیرند، لازم است تا مسائل دنیای واقعی در مدل‌های موجودی لحاظ شود؛ بنابراین نوآوری این مقاله را می‌توان اولاً در اضافه کردن فرض کیفیت ناقص برای اقلام موجود در انباشته و اضافه کردن فرض حساسیت تقاضا نسبت به قیمت برای خرده‌فروش دانست؛ همچنین از آنجایی که اقلام معیوب در انباشته وجود دارند به‌کارگیری برنامه‌ی بازرسی برای کشف این اقلام معیوب و بررسی تأثیرات تصمیم‌های موجودی - بازرسی و قیمت‌گذاری بر یکدیگر نوآوری دیگر این مقاله محسوب می‌شود. در نهایت توسعه‌ی الگوریتمی جدید برای حل مدل غیرخطی حاصل شده و به دست آوردن مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم‌گیری و ارائه‌ی مثال‌های عددی برای بررسی عملکرد الگوریتم پیشنهادی سهم اصلی این مقاله است.

جدول ۱. خلاصه‌ی پیشینه‌ی مدل‌های موجودی با فرض کیفیت ناقص و قیمت‌گذاری.

| نویسندگان | اندازه‌ی انباشته | قیمت‌گذاری | برنامه‌ی بازرسی | روش حل | توضیحات |
|--------------|------------------|------------|-----------------|---|---|
| [۲] | ✓ | | | دقیق | تعیین اندازه انباشته از طریق حداقل سازی هزینه‌ها |
| [۴] | ✓ | | ✓ | دقیق | کسر مشخصی معیوب در انباشته وجود دارد. بازرسی ۱۰۰ درصد اجرا شده و اقلام معیوب به‌صورت یک بسته در انتهای فرایند بازرسی به فروش می‌رسند. |
| [۵] | ✓ | | ✓ | الگوریتم ابتکاری بر مبنای تحلیل ویژگی‌های ریاضی مدل | کسر اقلام معیوب انباشته از توزیع بتا پیروی می‌کند. سیاست‌های بازرسی شامل بدون بازرسی، بازرسی ۱۰۰ درصد و نمونه‌گیری برای پذیرش است. سیاست بهینه‌ی بازرسی آن سیاستی است که منجر به حداقل هزینه شود. اقلام معیوب یا جایگزین می‌شوند یا دور ریخته می‌شوند. |
| [۶] | ✓ | ✓ | | دقیق | تعیین مقدار بهینه‌ی اندازه‌ی انباشته و قیمت از طریق بهینه‌سازی سود مورد انتظار |
| [۷] | ✓ | ✓ | | الگوریتم ابتکاری بر مبنای تحلیل ویژگی‌های ریاضی مدل | تقاضا به‌صورت خطی وابسته به قیمت در نظر گرفته می‌شود تعداد تحویل‌ها، قیمت فروش و مقدار سفارش‌دهی متغیرهای تصمیم‌گیری هستند. |
| [۱۱] | ✓ | ✓ | | الگوریتم ابتکاری بر اساس بازی استاک‌کلیرگ | نرخ خرابی احتمالی و از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند. بازرسی ۱۰۰ درصد اجرا می‌شود و اقلام معیوب در مواد اولیه با قیمت پایین‌تر به فروش می‌رسند. اقلام معیوب در انباشته توزیع‌کننده یا دوباره‌کاری می‌شوند یا به خریدار خارجی فروخته می‌شوند. |
| [۱۲] | ✓ | | ✓ | الگوریتم ابتکاری بر اساس روش نقاط درونی اولیه - دوگان | نرخ خرابی احتمالی و از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند. بازرسی ۱۰۰ درصد اجرا می‌شود و محصولات معیوب فوراً مرجوع می‌شوند. |
| [۱۵] | ✓ | ✓ | | حد پایین و بهینه‌سازی ازدحام ذرات | کمبود غیرمجاز زنجیره‌ی تأمین دوسطحی سیاست تحویل نیز به‌عنوان متغیر تصمیم‌گیری تعیین می‌شود. |
| مدل پیشنهادی | ✓ | ✓ | ✓ | الگوریتم ابتکاری بر مبنای تحلیل ویژگی‌های ریاضی مدل | تقاضا یک‌بار به‌صورت خطی و یک‌بار به‌صورت نمایی وابسته به قیمت است. نرخ خرابی احتمالی است و از توزیع بتا پیروی می‌کند. سیاست بازرسی شامل بدون بازرسی، بازرسی ۱۰۰ درصد و نمونه‌گیری است. اقلام معیوب یا به سادگی دور ریخته می‌شوند یا با صرف هزینه دوباره‌کاری می‌شوند. |



شکل ۱. رفتار موجودی در زنجیره‌ی عرضه‌ی یک فروشنده - یک خریدار.

۳. تعریف مسئله

زنجیره‌ی تأمین مورد بررسی در این مقاله شامل یک فروشنده و یک خریدار است. در این مقاله فرض شده است که فرایند تولید دارای کسر تصادفی از اقلام معیوب (ρ) است که از توزیع شناخته شده‌ی بتا پیروی می‌کند. سیاست‌های بازرسی شامل: بدون بازرسی، بازرسی 100% درصد و برنامه‌ی بازرسی آماری است.

بدین صورت که نمونه‌ی به اندازه‌ی n از انباشته برداشته می‌شود و در صورتی که تعداد اقلام معیوب در نمونه (y) کم‌تر از یا مساوی با عدد پذیرش باشد، انباشته پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت انباشته رد می‌شود. در صورتی که بازرسی موفقیت‌آمیز نباشد و تعداد اقلام معیوب نمونه بزرگ‌تر از عدد پذیرش باشد، خرده‌فروش باقی انباشته ($Q - n$) را به هزینه‌ی تأمین‌کننده (فروشنده) مرجوع و تقاضای یک انباشته‌ی سالم می‌کند. در نهایت سیاست بهینه‌ی بازرسی آن سیاستی است که منجر به سود بیشتری شود. جریان موجودی در این زنجیره‌ی تأمین در شکل ۱ نشان داده شده است. در این مقاله با لحاظ کردن ریسک تولیدکننده و سطح کیفیت پذیرفتنی^۲ طرح نمونه‌گیری تعیین شده است که برای هر دو طرف منصفانه باشد. ریسک تولیدکننده احتمال رد شدن یک انباشته‌ی قابل قبول است، که با α نشان داده شده و رابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$1 - \alpha = \sum_{y=0}^c \frac{n!}{(n-c)!} \rho^c (1-\rho)^{n-c} \quad (1)$$

سطح کیفیت پذیرفتنی توسط مصرف‌کننده تعیین می‌شود و بیشینه‌ی اقلام معیوبی است که برای نمونه‌گیری به‌منظور پذیرش می‌تواند رضایت‌بخش تلقی شود. وقتی ریسک تولیدکننده و سطح کیفیت پذیرفتنی مربوط به آن معلوم باشد، می‌توان یک طرح نمونه‌گیری با استفاده از رابطه‌ی زیر تعیین کرد:

$$n = \frac{p'_{1-\alpha}}{AQL} \quad (2)$$

۱.۳. نمادگذاری و فرض‌ها

به‌منظور بررسی مدل یکپارچه‌ی موجودی و بازرسی فرض‌ها و نمادهایی به شرح زیر در نظر گرفته شده است:

۱. توابع تقاضا توابعی کاهشی از قیمت فروش و به دو صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$D(P) = ap^{-b} \quad a > 0, b > 1$$

$$D = (a - bp) \quad a > 0, b > 0$$

۲. نسبت خرابی انباشته ρ از توزیع بتا پیروی می‌کند؛ بنابراین، تعداد اقلام معیوب در نمونه (y) دارای توزیع فوق هندسی است:

$$p_r(y|\rho) = \frac{\binom{\rho Q}{y} \binom{Q - \rho Q}{n - y}}{\binom{Q}{n}}$$

$$0 \leq y \leq \min\{\rho Q, n\}$$

$$E(y|\rho) = n\rho$$

$$E(y) = \int_0^1 E(y|\rho)g(\rho)d\rho = nE(\rho)$$

۳. اقلام نامنتطبی یا همگی جایگزین یا همگی دور ریخته می‌شوند.

۴. به دلیل شرایط رقابتی، کمبود در سیستم غیرمجاز در نظر گرفته شده است.

۱.۱.۳. نمادگذاری

ρ : متوسط کسر اقلام نامنتطبی در انباشته، متغیر تصادفی؛

A : هزینه ثابت سفارش‌دهی؛

h : هزینه نگهداری؛

c_i : هزینه بازرسی؛

c_r : هزینه دوباره‌کاری یا جایگزینی اقلام معیوب؛

c_d : هزینه پذیرش یک قلم جنس معیوب؛

y : تعداد اقلام معیوب در نمونه، متغیر تصادفی؛

$D(p)$: نرخ تقاضا در واحد زمان؛

$Z(Q, p, n, c)$: تابع سود مورد انتظار؛

R : درآمد حاصل از فروش.

۲.۱.۳. متغیرهای تصمیم‌گیری

Q : اندازه‌ی انباشته؛

n : اندازه‌ی نمونه؛

c : عدد پذیرش؛

p : قیمت فروش.

۲.۳. مدل‌سازی با فرض تقاضای خطی بدون جایگزینی

در پژوهش‌های پیشین مدل‌های متنوعی برای مشخص کردن تابع تقاضای وابسته به قیمت ارائه شده‌اند. تقاضای خطی به علت سادگی در تخمین پارامترها و سادگی در تفسیر نتایج به‌طور گسترده‌ی در مقالات مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین کشش تقاضا در حالت خطی به مقدار قیمت بستگی دارد و همیشه نسبت به قیمت نزولی و مقعر است.^[۱۶] در این تابع تقاضایی که به صورت خطی وابسته به قیمت است، بررسی می‌شود. درآمد حاصل از فروش برای هر دو حالت بدون جایگزینی

و با جایگزینی ارقام معیوب به شرح زیر است:

$$R = p.D(p)$$

تابع سود به صورت تفاضل درآمد از مجموع هزینه‌ها ارائه شده است.

الف) بدون بازرسی: هزینه‌ها در این قسمت شامل هزینه سفارش دهی، هزینه نگهداری و هزینه پذیرش ارقام معیوب است.

$$z(Q, p) = (a - bp)p - \frac{(a - bp)A}{Q} - \frac{hQ}{2} - (c_d(a - bp)E(\rho)) \quad (3)$$

ب) بازرسی ۱۰۰ درصد: در این قسمت هزینه‌ها شامل هزینه نگهداری، سفارش دهی و هزینه بازرسی کل انباشته است. همچنین از آنجایی که ارقام معیوب انباشته پس از بازرسی ۱۰۰ درصد دور ریخته می‌شوند، مقدار موجودی به $E(Q - Q\rho)$ تقلیل می‌یابد.

$$z(Q, p) = (a - bp)p - \frac{(a - bp)A}{Q(1 - E(\rho))} - \frac{hQ(1 - E(\rho))}{2} - \frac{(a - bp)c_i}{(1 - E(\rho))} \quad (4)$$

ج) نمونه‌گیری: هزینه‌های کیفی در این قسمت شامل هزینه بازرسی نمونه به اندازه n و هزینه پذیرش ارقام معیوبی است که در طی فرایند بازرسی پیدا نشده‌اند. ارقام معیوبی که در طی بازرسی کشف و دور ریخته می‌شوند، متجر به کاهش موجودی به مقدار $E(Q - y)$ می‌شوند.

$$z(Q, p, n) = (a - bp)p - \frac{(a - bp)A}{Q - nE(\rho)} - \frac{h(Q - nE(\rho))}{2} - \frac{(a - bp)}{Q - nE(\rho)}(nc_i + c_d(Q\rho - nE(\rho))) \quad (5)$$

۳.۳. مدل‌سازی با فرض تقاضای خطی با جایگزینی

الف) بدون بازرسی: هزینه‌ها در این قسمت شامل هزینه سفارش دهی، هزینه نگهداری و هزینه پذیرش ارقام معیوب انباشته است.

$$z(Q, p) = (a - bp)p - \frac{(a - bp)A}{Q} - \frac{hQ}{2} - (c_d(a - bp)E(\rho)) \quad (6)$$

ب) بازرسی ۱۰۰ درصد: در این بخش هزینه دوباره‌کاری ارقام معیوب کشف شده در طی فرایند بازرسی نیز افزوده می‌شود.

$$z(Q, p) = (a - bp)p - \frac{(a - bp)A}{Q} - \frac{hQ}{2} - (a - bp)(c_i - c_r\rho) \quad (7)$$

ج) نمونه‌گیری: در این حالت هزینه دوباره‌کاری ارقام معیوب کشف شده در طی فرایند بازرسی نیز افزوده می‌شود.

$$z(Q, p, n) = (a - bp)p - \frac{(a - bp)A}{Q} - \frac{hQ}{2} - \frac{(a - bp)}{Q}(nc_i + c_d(Q\rho - nE(\rho)) + c_r nE(\rho)) \quad (8)$$

۴.۳. مدل‌سازی با فرض تقاضای نمایی بدون جایگزینی

در بسیاری از موارد استفاده از تابع تقاضای خطی با واقعیت مطابقت ندارد؛ زیرا در این حالت ملزم به داشتن حد بالای متناهی برای قیمت هستیم. مدل ایزو-الاستیک^۳ برای تقاضا به تابع کشش ثابت نیز معروف است که در آن کشش قیمتی تقاضا همیشه ثابت و برابر $-b$ است. در این بخش مدل با فرض تابع تقاضایی که به صورت نمایی وابسته به قیمت است، بررسی شده است.

الف) بدون بازرسی: هزینه‌ها در این قسمت شامل هزینه سفارش دهی، نگهداری و پذیرش ارقام معیوب انباشته است.

$$z(Q, p) = p(ap^{-b}) - \frac{A(ap^{-b})}{Q} - \frac{hQ}{2} - c_d(ap^{-b})E(\rho) \quad (9)$$

ب) بازرسی ۱۰۰ درصد: هزینه‌های کیفی در این حالت شامل هزینه بازرسی کل انباشته و دوباره‌کاری ارقام معیوب آن است:

$$z(Q, p) = (ap^{-b})p - \frac{ap^{-b}A}{Q(1 - E(\rho))} - \frac{hQ(1 - E(\rho))}{2} - \frac{ap^{-b}c_i}{1 - E(\rho)} \quad (10)$$

ج) نمونه‌گیری: هزینه‌های کیفی در این قسمت شامل هزینه بازرسی نمونه به اندازه n و هزینه پذیرش ارقام معیوبی است که طی فرایند بازرسی پیدا نشده‌اند.

$$z(Q, p, n) = (ap^{-b})p - \frac{ap^{-b}A}{(Q - nE(\rho))} - \frac{h(Q - nE(\rho))}{2} - \frac{ap^{-b}}{(Q - nE(\rho))}(nc_i + c_d(QE(\rho) - nE(\rho))) \quad (11)$$

۵.۳. مدل‌سازی با فرض تقاضای نمایی با جایگزینی

در این بخش ارقام معیوب کشف شده در طی بازرسی، با صرف هزینه‌ی دوباره‌کاری می‌شوند.

الف) بدون بازرسی: هزینه‌ها در این قسمت شامل هزینه سفارش دهی، نگهداری و پذیرش ارقام معیوب انباشته است.

$$z(Q, p) = p(ap^{-b}) - \frac{A(ap^{-b})}{Q} - \frac{hQ}{2} - c_d(ap^{-b})E(\rho) \quad (12)$$

ب) بازرسی ۱۰۰ درصد: هزینه‌های کیفی در این حالت شامل هزینه بازرسی کل انباشته و دوباره‌کاری ارقام معیوب آن است.

$$z(Q, p) = p(ap^{-b}) - \frac{A(ap^{-b})}{Q} - \frac{hQ}{2} - (ap^{-b})(c_i + c_r E(\rho)) \quad (13)$$

ج) نمونه‌گیری: در این بخش علاوه بر هزینه‌های نمونه‌گیری در حالت بدون جایگزینی، هزینه‌ی دوباره‌کاری اقلام معیوب کشف شده در طی فرایند بازرسی نیز افزوده می‌شود.

$$z(Q, p, n) = (ap^{-b})p - \frac{(ap^{-b})A}{Q} - \frac{hQ}{2} - \frac{(ap^{-b})}{Q}(nc_i + c_d(QE(\rho)) - nE(\rho)) + c_r nE(\rho) \quad (14)$$

مخرج کسر به نسبت صورت بسیار بزرگ‌تر است؛ سمت راست کوچک‌تر از یک است و مقدار اندازه‌ی انباشته حداقل یک است. در نتیجه شرط بالا همواره برقرار است و تابع سود اکیداً مقعر است (برای مشاهده‌ی اثبات تقعر سایر توابع سود به پیوست مراجعه شود). اکنون می‌توان مقادیر Q^* و p^* را به ازای مقادیر مشخص (n, c) از طریق حل معادلات زیر برای هر دو حالت تقاضای خطی و نمایی به دست آورد:

$$Q^* = \frac{\partial z(Q, p, n, c)}{\partial Q} = 0 \quad (15)$$

$$p^* = \frac{\partial z(Q, p, n, c)}{\partial p} = 0 \quad (16)$$

با توجه به این‌که مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم به یکدیگر وابسته‌اند، به منظور به دست آوردن جواب بهینه برای متغیرهای تصمیم‌گیری، الگوریتم زیر بر اساس ویژگی‌های ریاضی مدل پیشنهاد شده است:

گام ۱. قرار دهید $n = 1$ و $z(Q, p, n, c)^{opt} = -\infty$

گام ۲. به ازای n موجود گام‌های ۳ تا ۷ را اجرا کنید.

گام ۳. از آنجایی‌که مقادیر p و Q به یکدیگر وابسته‌اند، با مقدار p_1 شروع کنید و آن را برابر حداقل هزینه‌ها قرار دهید، مقدار Q_1 را از طریق معادله‌ی ۱۵ به دست آورید.

گام ۴. با جایگذاری مقدار Q_1 در معادله‌ی ۱۶ مقدار p را محاسبه کنید و آن را p_2 بنامید.

گام ۵. سپس مقدار p_2 را در معادلات مربوط به اندازه‌ی انباشته جایگذاری کنید و Q_2 را به دست آورید.

گام ۶. گام‌های ۳ تا ۶ را آن قدر ادامه دهید تا دیگر تغییر زیادی در مقادیر p و Q مشاهده نشود و آن‌ها را p^* و Q^* بنامید.

گام ۷. مقدار سود را به ازای p^* و Q^* محاسبه کنید و آن را $z_2(Q^*, p^*, n)$ بنامید.

گام ۸. اگر $z_2(Q^*, p^*, n) > z^{opt}(Q, p, n)$ است، قرار دهید $z_2(Q^*, p^*, n) = z^{opt}(Q, p, n)$ و $Q^*, n^* = n z^{opt} = z_2$ بروید.

گام ۹. قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۲ بروید و این کار را تا زمانی‌که $Q^* < 10\%$ است ادامه دهید.

گام ۱۰. جواب فعلی بهینه است؛ توقف کنید و مقدار c را با توجه به n^* و سطح کیفیت قابل قبول خریدار و ریسک تولیدکننده با استفاده از جدول توزیع تجمعی پواسون به دست آورید. (فرض می‌شود که فرایند تولید تحت کنترل دوجمله‌یی است. همچنین هنگامی که $n \rightarrow \infty$ توزیع پواسون یک تقریب عالی از توزیع دوجمله‌یی محسوب می‌شود).^[۱۸]

گام ۱۱. الگوریتم را برای هر سه سیاست بدون بازرسی، بازرسی 100% درصد و نمونه‌گیری اجرا کنید و سپس مقادیر به دست آمده را با یکدیگر مقایسه کنید؛ در نهایت جواب بهینه سیاستی است که منجر به سود کل بیشتری برای زنجیره‌ی عرضه می‌شود. در شکل ۲ گام‌های الگوریتم پیشنهادی به صورت نمادین نشان داده شده است.

۵. مطالعه‌ی عددی

هدف این بخش بررسی رفتار مدل و روش حل و انجام تحلیل حساسیت بر روی برخی پارامترهای با اهمیت مدل است. مقادیر p^* و Q^* به ترتیب نشان‌دهنده‌ی

۴. تحلیل خواص ریاضی مدل و روش حل پیشنهادی

به منظور ارائه‌ی الگوریتمی که مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم را پیدا کند، ابتدا ویژگی‌های ریاضی و شرایط بهینگی مدل‌های غیرخطی که در بخش ۳ ارائه شدند با توجه به قضیه‌ی زیر بررسی شده است.

قضیه ۱: (شرط لازم بهینگی) شرط لازم برای آن‌که نقطه‌ی x^* یک نقطه‌ی فرینه (اکسترمم) تابع $f(x)$ باشد آن است که $\nabla f(x^*) = 0$. شرط کافی بهینگی برای آن‌که نقطه‌ی x^* یک نقطه‌ی فرینه‌ی $f(x)$ باشد آن است که ماتریس هسین محاسبه شده در x^* به صورت زیر باشد:

- اگر ماتریس هسین در نقطه‌ی x^* منفی معین باشد، نقطه‌ی x^* یک نقطه‌ی بیشینه‌ی مطلق است.

- اگر ماتریس هسین در نقطه‌ی x^* مثبت معین باشد، نقطه‌ی x^* یک نقطه‌ی کمینه‌ی مطلق است.

مسئله‌یی را که ناحیه‌ی شدنی محدب و توابع هدف محدب (کمینه‌سازی) یا مقعر (بیشینه‌سازی) باشند، برنامه‌ریزی محدب^۱ می‌نامند. در این مسائل نقطه‌ی بهینه‌ی به دست آمده بهینه‌ی عمومی است.^[۱۷] از آنجایی که تمام مدل‌های ارائه شده از نوع بیشینه‌سازی و بدون محدودیت هستند، کافی است تا تقعر توابع هدف ثابت شود. در نتیجه طبق قضیه‌ی ۱ تقعر توابع ثابت شده است و سپس مقدار بهینه‌ی متغیرهای تصمیم‌گیری از طریق برابر صفر قرار دادن مشتقات مرتبه اول نسبت به هر یک از متغیرها به دست آورده شده است. می‌توان نشان داد که توابع سود در حالت بدون بازرسی و بازرسی 100% درصد نسبت به p و Q مقعر هستند. همچنین برای حالت نمونه‌گیری نیز با فرض مقادیر مشخص برای (n, c) ثابت می‌شود که مسئله از نوع برنامه‌ریزی محدب است. در این قسمت تحلیل تحدب برای تابع سود در حالت بدون بازرسی برای تقاضای خطی بررسی شده است و ثابت شده است که ماتریس هسین مربوط به تابع سود $z(Q, p)$ منفی معین^۵ است.

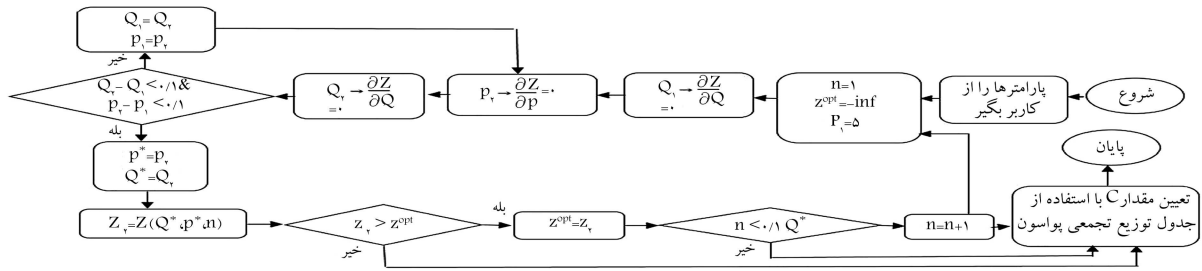
$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z_1(Q, p)}{\partial Q^2} = \frac{-2A(a-bp)}{Q^3} < 0$$

$$|H| = \frac{-Ab(Ab - 4Q(a-bp))}{Q^4}$$

در این حالت اگر $|H|$ مثبت باشد، تابع سود مقعر است؛ بنابراین شرط تقعر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q > \frac{Ab}{4(a-bp)}$$



شکل ۲. نمایش الگوریتم ارائه شده در بخش ۴.

جدول ۲. نتایج مدل مشترک موجودی - بازرسی با جایگزینی - تقاضای خطی.

| سیاست بازرسی | z^* | c | n | Q^* | p^* |
|-----------------|----------------------|-----|-----|-----------|-----------|
| بدون بازرسی | $1/2346 \times 10^7$ | | | ۸۹۱,۶۹۹۶ | ۵۰۳,۰۴۴۹ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | $1/2371 \times 10^7$ | | | ۸۹۲,۱۴۸۱ | ۵۰۳,۵۴۴۸ |
| نمونه‌گیری | ۱۲۳۴۲۸۷۳,۷۸۰۷۶ | ۵ | ۱۵۲ | ۱۵۱۸,۴۶۱۵ | ۵۰۳,۰۷۶۳۹ |

جدول ۳. نتایج تحلیل حساسیت مدل مشترک موجودی - بازرسی با جایگزینی - تقاضای خطی.

| پارامتر | P^* | Q^* | n | c | z^* | سیاست بهینه‌ی بازرسی |
|-----------|-------|----------------------|-----|-----|----------------------|----------------------|
| c_d | ۱۵ | ۸۹۳,۰۴۴۴ | | | $1/2421 \times 10^7$ | بدون بازرسی |
| | ۳۰ | ۸۹۲,۱۴۸۱ | | | $1/2371 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۵۰ | ۲۲۲,۴۸۳۴ | ۲۵ | ۲ | ۱۲۲۴۹۸۴۲,۸۸۵۳ | نمونه‌گیری |
| | ۱۰۰ | ۸۹۲,۱۴۸۱ | | | $1/2371 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| h | ۵ | ۸۹۲,۱۴۸۱ | | | $1/2371 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۲۰ | ۵۴۰,۰۴۴۶ | | | $1/2366 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۶۰ | ۲۵۷,۵۱۲۴ | | | $1/2360 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| $E(\rho)$ | ۰,۲ | ۸۹۴,۱۱۸۸ | | | $1/2360 \times 10^7$ | بدون بازرسی |
| | ۰,۲ | ۸۹۲,۱۴۸۱ | | | $1/2371 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۰,۵ | ۸۹۲,۸۲۰۴ | | | $1/2408 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| c_i | ۱,۵ | ۸۹۲,۱۶۳۵ | | | $1/2483 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۶ | ۸۹۲,۱۴۸۱ | | | $1/2371 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۳۰ | ۸۹۱,۶۹۹۶ | | | $1/2346 \times 10^7$ | بدون بازرسی |
| A | ۸۰ | ۸۹۲,۱۴۸۱ | | | $1/2371 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۱۵۰ | $1/2216 \times 10^7$ | | | $1/2369 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| | ۳۰۰ | $1/7276 \times 10^7$ | | | $1/2367 \times 10^7$ | بازرسی ۱۰۰ درصد |

$c_d = 30, c_i = 6, c_r = 5, \alpha = 7.5$

$AQL = 0.02, \rho = \text{beta}(1, 4)$

در جدول ۲ نتایج حل مدل با جایگزینی و تقاضای خطی با استفاده از روش پیشنهادی مقاله ارائه شده است. تحلیل حساسیت پارامترهای اصلی بر روی مدل با جایگزینی در حالت تقاضای خطی وابسته به قیمت، به شرح جدول ۳ است.

در جدول ۴ نتایج حل مدل مشترک موجودی - بازرسی برای حالت بدون

قیمت و مقدار سفارش دهی بهینه هستند و z^* مقدار بهینه سود را نشان می‌دهد. به دلیل نبود اطلاعات لازم و مسئله‌ی که کاملاً مشابه مسئله‌ی موجود در مقاله باشد، مقادیر پارامترها در مثال‌ها با توجه به مقالات موجود در پیشینه شامل مقالات [۱۹ و ۵] تخمین زده شده‌اند.

مثال ۱- مقادیر پارامترها به شرح زیر است:

$D(p) = 5 \times 10^7 - 50p, A = 80, h = 5$

جدول ۴. نتایج مدل مشترک موجودی - بازرسی بدون جایگزینی - تقاضای خطی.

| سیاست بازرسی | p^* | Q^* | n | c | z^* |
|-----------------|----------|----------------------|-----|-----|----------------------|
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۰۴۴۹ | ۸۹۱,۶۹۹۶ | | | $1/2346 \times 10^7$ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۵۰۳,۷۹۴۹ | $1/1138 \times 10^3$ | | | $1/2309 \times 10^7$ |
| نمونه‌گیری | ۵۰۳,۰۸۵۰ | ۱۷۲۵,۲۳۷۳ | ۱۷۳ | ۶ | $12342,14,1050$ |

جدول ۵. نتایج تحلیل حساسیت مدل مشترک موجودی - بازرسی با جایگزینی - تقاضای خطی.

| سیاست بهینه‌ی بازرسی | P^* | Q^* | n | c | z^* | پارامتر |
|----------------------|----------|----------------------|-----|-----|----------------------|---------------|
| بدون بازرسی | ۵۰۱,۵۴۵۸ | ۸۹۳,۰۴۴۴ | | | $1/2421 \times 10^7$ | ۱۵ |
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۰۴۴۹ | ۸۹۱,۶۹۹۶ | | | $1/2346 \times 10^7$ | ۳۰ c_d |
| نمونه‌گیری | ۵۰۵,۰۱۵۸ | ۳۲۱,۶۳۷۶ | ۳۵ | ۲ | $12249526,646$ | ۵۰ |
| بدن بازرسی | ۵۰۳,۰۴۴۹ | ۸۹۱,۶۹۹۶ | | | $1/2346 \times 10^7$ | ۵ |
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۰۸۹۷ | ۴۴۵,۸۲۹۷ | | | $1/2342 \times 10^7$ | ۲۰ h |
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۱۵۵۴ | ۲۵۷,۳۸۲۹ | | | $1/2335 \times 10^7$ | ۶۰ |
| بدون بازرسی | ۵۰۰,۳۴۴۷ | ۸۹۴,۱۱۸۸ | | | $1/2481 \times 10^7$ | ۰,۰۲ |
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۰۴۴۹ | ۸۹۱,۶۹۹۶ | | | $1/2346 \times 10^7$ | ۰,۲ $E(\rho)$ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۵۰۳,۰۳۵۵ | $1/778 \times 10^3$ | | | $1/2197 \times 10^7$ | ۰,۵ |
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۰۳۵۵ | ۷۰۴,۹۵۷۱ | | | $1/2347 \times 10^7$ | ۵۰ |
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۰۴۴۹ | ۸۹۱,۶۹۹۶ | | | $1/2346 \times 10^7$ | ۸۰ A |
| بدون بازرسی | ۵۰۳,۰۶۱۴ | $1/2210 \times 10^3$ | | | $1/2344 \times 10^7$ | ۱۵۰ |

جدول ۶. نتایج مدل مشترک موجودی - بازرسی با جایگزینی - تقاضای نمایی.

| سیاست بازرسی | p^* | Q^* | n | c | z^* |
|-----------------|---------|---------|-----|-----|-----------|
| بدون بازرسی | ۲۲,۳۶۲۹ | ۵۵,۰۰۸۲ | | | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۲۳,۰۶۵۳ | ۵۵,۷۴۷۰ | | | ۱۲۵۳,۷۵۷۴ |
| نمونه‌گیری | ۲۲,۴۰۱۴ | ۵۵,۳۴۵۶ | ۶ | ۲ | ۱۲۷۰,۵۲۲۴ |

$$D(p) = 10000p^{-1/5}, \quad c_d = 30, \quad c_r = 6, \quad c_i = 5$$

$$A = 80, \quad \rho = \text{beta}(1, 4), \quad \text{AQL} = 0,10, \quad \alpha = 0,5$$

در جدول ۶ نتایج مربوط به حل مدل مشترک موجودی - بازرسی برای حالتی که اقلام معیوب کشف شده طی فرایند بازرسی دوباره‌کاری می‌شوند، ارائه شده است. با توجه به توابع سود در این حالت بازرسی نکردن بهترین گزینه است. در جدول ۷ تحلیل حساسیت پارامترهای موجودی - بازرسی بر روی مدل پیشنهادی در حالت با جایگزینی و برای تقاضایی که به صورت نمایی وابسته به قیمت است، نشان داده شده است.

جایگزینی و تقاضای خطی آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این حالت بازرسی نکردن انباشته سودآورتر است. مقادیر Q^* و p^* به ترتیب ۸۹۱,۶۹۹۶ و ۵۰۳,۰۴۴۹ است. بعد از سیاست بدون بازرسی، اولویت بعدی برنامه‌ی بازرسی نمونه‌گیری است که از طریق برداشتن ۱۷۳ نمونه برای کل انباشته تصمیم‌گیری می‌شود. در جدول ۵ تحلیل حساسیت پارامترهای اصلی بر روی مدل مشترک موجودی - بازرسی وقتی اقلام معیوب کشف شده، طی بازرسی دور ریخته می‌شوند، ارائه شده است. مثال ۲ - مقادیر پارامترها برای حل مدل در حالت تقاضای نمایی به شرح زیر است:

جدول ۷. نتایج تحلیل حساسیت مدل مشترک موجودی - بازرسی با جایگزینی - تقاضای نمایی.

| سیاست بهینه‌ی بازرسی | z^* | c | n | Q^* | P^* | پارامتر |
|----------------------|-----------|-----|-----|----------|-----------|---------------|
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۱۵ |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۳۰ c_d |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۱۲۵۳,۷۵۷۴ | | | ۵۳,۷۴۷۰ | ۲۳,۰۶۵۳ | ۵۰ |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۵ |
| بدون بازرسی | ۱۰۲۰,۲۱۲۸ | | | ۴۴۶,۰۵۴۰ | ۵۰,۲,۵۸۹۷ | ۲۰ h |
| بدون بازرسی | ۸۸۰,۸۸۵۶ | | | ۱۵,۲۸۶۱ | ۳۳,۷۰۰۴ | ۳۵ |
| بدون بازرسی | ۳۳۹۰,۵۸۲۵ | | | ۲۶۹,۲۰۰ | ۲,۶۹۱۵ | ۰,۲ |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۰,۲ $E(\rho)$ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۱۱۱۸,۴۱۵۸ | | | ۴۴,۸۶۱۱ | ۲۹,۳۴۹۸ | ۰,۵ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۱۸۰۷,۶۵۳۱ | | | ۹۶,۳۵۶۲ | ۱۰,۵۹۰۷ | ۱,۵ |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۵ c_i |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۲۵ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۲۰۱۴,۵۰۷۷ | | | ۱۱۴,۷۳۱۳ | ۸,۳۹۱۸ | ۳ |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۶ c_r |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۳۰ |

جدول ۸. نتایج مدل مشترک موجودی - بازرسی بدون جایگزینی - تقاضای نمایی.

| z^* | c | n | Q^* | p^* | سیاست بازرسی |
|-----------|-----|-----|----------|---------|-----------------|
| ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | بدون بازرسی |
| ۱۲۴۹,۲۶۹۴ | | | ۶۶,۸۰۳۰ | ۲۳,۲۴۰۸ | بازرسی ۱۰۰ درصد |
| ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | ۲ | ۶ | ۵۶,۲۱۰۷ | ۲۲,۳۶۱۶ | نمونه‌گیری |

انباشته‌ی دریافتی بازرسی ۱۰۰ درصد می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که مقادیر c_d و c_i بر روی سیاست بازرسی و مقادیر A و h و متوسط معیوب‌ها بر سیاست سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری تأثیرگذارند. زمانی که تقاضای نمایی است دوباره‌کاری اقلام معیوب منجر به اتخاذ سیاست بدون بازرسی می‌شود و زمانی که سیاست دور ریختن اقلام معیوب اجرا شود، از برنامه‌ی بازرسی نمونه‌گیری استفاده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رفت، با افزایش هزینه‌ی بازرسی و کاهش هزینه‌ی پذیرش اقلام معیوب پذیرفتن انباشته بدون اجرای بازرسی سودآورتر است و هنگامی که درصد اقلام معیوب و هزینه‌ی پذیرش به نسبت هزینه‌ی بازرسی بالاتر است، بهتر است از برنامه‌ی بازرسی نمونه‌گیری یا بازرسی ۱۰۰ درصد استفاده شود. به علاوه با توجه به نتایج گزارش شده در جدول‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ مشاهده شد که قیمت فروش در حالت بازرسی نمونه‌گیری نسبت به دو سیاست دیگر بالاتر است که این موضوع بیان‌گر اثر انتخاب نوع بازرسی بر

در این قسمت نتایج برای زمانی که اقلام معیوب کشف شده، دور ریخته می‌شوند و تقاضا به صورت نمایی وابسته به قیمت است، ارائه شده است (جدول ۸). در این حالت سود حاصل از نمونه‌گیری و بازرسی نکردن یکسان شده است؛ اما مقدار سفارش‌دهی در حالت نمونه‌گیری بیشتر و قیمت آن کم‌تر است. همچنین فقط با بررسی شش نمونه می‌توان در مورد انباشته قضاوت کرد. در جدول ۹ تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای اصلی موجودی - بازرسی انجام شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در حالت بدون جایگزینی و تقاضای نمایی، سیاست نمونه‌برداری بیشتر از سایر سیاست‌ها به‌عنوان سیاست بهینه انتخاب شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود وقتی تقاضای نمایی وابسته به قیمت است، سیاست بهینه‌ی بازرسی غالباً نمونه‌گیری است؛ در حالی که اگر تقاضای خطی در نظر گرفته شود

جدول ۹. نتایج تحلیل حساسیت مدل مشترک موجودی - بازرسی بدون جایگزینی - تقاضای نمای.

| سیاست بهینه‌ی بازرسی | z^* | c | n | Q^* | P^* | پارامتر |
|----------------------|-----------|-----|-----|----------|---------|---------------|
| بدون بازرسی | ۱۷۲۶,۸۰۵۲ | | | ۸۹,۵۳۱۴ | ۱۱,۶۸۰۶ | ۱۵ |
| نمونه‌گیری | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | ۲ | ۶ | ۵۶,۲۰۲۴ | ۲۲,۳۶۳۴ | ۳۰ c_d |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۱۲۴۹,۲۶۹۴ | | | ۶۶,۸۰۳۰ | ۲۳,۲۴۰۸ | ۵۰ |
| نمونه‌گیری | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | ۲ | ۶ | ۵۶,۲۰۲۴ | ۲۲,۳۶۳۴ | ۵ |
| نمونه‌گیری | ۱۰۲۰,۲۱۲۵ | ۱ | ۳ | ۲۳,۵۲۳۳ | ۲۸,۴۶۹۶ | ۲۰ h |
| نمونه‌گیری | ۷۲۸,۷۴۳۴ | ۱ | ۲ | ۱۰,۲۰۳۴ | ۴۲,۴۸۱۰ | ۶۰ |
| بدون بازرسی | ۳۳۹,۵۸۲۵ | | | ۲۶۹,۲۰۰۳ | ۲,۶۹۱۵ | ۰,۲ |
| نمونه‌گیری | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | ۲ | ۶ | ۵۶,۲۰۲۴ | ۲۲,۳۶۳۴ | ۰,۲ $E(\rho)$ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۱۰۱۱,۲۷۳۹ | | | ۷۶,۵۴۹۰ | ۳۶,۲۷۰۴ | ۰,۵ |
| نمونه‌گیری | ۱۳۳,۸۷۵۸ | ۲ | ۵ | ۴۶,۰۵۱۰ | ۲۱,۳۲۹۵ | ۵۰ |
| نمونه‌گیری | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | ۲ | ۶ | ۵۶,۲۱۰۷ | ۲۲,۳۶۱۶ | ۸۰ A |
| نمونه‌گیری | ۱۱۷۳,۸۴۸۵ | ۲ | ۸ | ۷۲,۲۰۴۸ | ۲۴,۳۷۳۴ | ۱۵۰ |
| بازرسی ۱۰۰ درصد | ۲۱۱۴,۵۶۵۷ | | | ۱۵۵,۱۰۶۵ | ۷,۵۵۹۱ | ۱,۵ |
| نمونه‌گیری | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | ۲ | ۶ | ۵۶,۲۰۲۴ | ۲۲,۳۶۳۴ | ۵ c_i |
| بدون بازرسی | ۱۲۷۲,۲۳۵۱ | | | ۵۵,۰۰۸۲ | ۲۲,۳۶۲۹ | ۲۵ |

همان‌طور که در جدول ۱۰ مشاهده می‌شود، جواب‌های حاصل از الگوریتم پیشنهادی با نتایج حاصل از حل مدل با حل‌کننده‌ی BARON برای مدل‌ها در سیاست بدون بازرسی و بازرسی ۱۰۰ درصد یکسان است، که نشان‌دهنده‌ی دقت و صحت الگوریتم پیشنهادی است. همچنین جواب‌های به دست آمده از طریق الگوریتم ارائه شده برای مدل در سیاست نمونه‌گیری نسبت به جواب‌های نرم‌افزار گمز بهتر است و در برخی موارد حل‌کننده‌ی BARON نمی‌تواند به جواب بهینه همگرا شود که این موضوع نشان‌دهنده‌ی برتری الگوریتم پیشنهادی است.

۶. نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای مطالعات آتی

در این مقاله مدل یکپارچه موجودی بازرسی با در نظر گرفتن دو حالت بدون جایگذاری و با جایگذاری اقلام معیوب کشف شده در حین فرایند بازرسی برای زمانی که تقاضا به صورت نمایی و خطی وابسته به قیمت است، ارائه شد. سیاست بازرسی شامل بدون بازرسی، بازرسی ۱۰۰ درصد و برنامه‌ی نمونه‌گیری آماری است. مقدار اندازه‌ی انباشته، قیمت و سیاست بازرسی به‌عنوان متغیرهای تصمیم‌گیری در مدل تعیین شدند. بر اساس تحلیل تحذب انجام شده، الگوریتمی برای یافتن

سیاست قیمت‌گذاری است. به‌علاوه از آن‌جایی که تقاضا و قیمت با یکدیگر رابطه‌ی معکوس دارند، بنابراین نتیجه می‌شود تقاضای زنجیره در سیاست نمونه‌گیری نسبت به دو حالت دیگر کم‌تر است. همچنین مقدار سفارش‌دهی در حالت بدون بازرسی نسبت به دو سیاست بازرسی ۱۰۰٪ و نمونه‌گیری کم‌تر است که این موضوع نیز نشان‌دهنده‌ی وابستگی سیاست سفارش‌دهی و انتخاب برنامه‌ی بازرسی به یکدیگر است. در نتیجه ضروری است تا تصمیمات سفارش‌دهی، قیمت‌گذاری و انتخاب سیاست بازرسی به‌صورت یکپارچه در مدل لحاظ و بررسی شوند.

برای بررسی درستی و اعتبار الگوریتم پیشنهادی جواب‌های حاصل از حل مدل در حالت تقاضای خطی و بدون جایگزینی با استفاده از نرم‌افزار بهینه‌سازی گمز با جواب‌های به دست آمده از طریق الگوریتم پیشنهادی مقایسه شده‌اند. با توجه به این‌که مدل‌های ریاضی ارائه شده از نوع برنامه‌ریزی غیرخطی بدون محدودیت هستند، از حل‌کننده‌ی BARON به‌منظور حل مدل و یافتن مقادیر بهینه‌ی متغیرها استفاده شده است. بدین منظور ۱۰ مسئله‌ی آزمایشی، به‌صورت تصادفی با استفاده از داده‌های موجود در پیشینه تولید و حل شده است. در جدول ۱۰ نتایج مقایسه‌ی جواب‌ها برای مسئله‌ی تعیین هم‌زمان سیاست سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری با سه سیاست بازرسی شامل بدون بازرسی، بازرسی ۱۰۰ درصد و نمونه‌گیری گزارش شده است.

جدول ۱۰. مقایسه‌ی نتایج الگوریتم پیشنهادی و نرم‌افزار گمز.

| مسئله آزمایشی | الگوریتم پیشنهادی | گمز | سیاست بازرسی | جواب برتر |
|---------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------------------|
| مسئله ۱ | $۱/۲۳۴۶ \times ۱۰^۷$ | $۱/۲۳۴۶ \times ۱۰^۷$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۱/۲۳۰۹ \times ۱۰^۷$ | $۱/۲۳۰۹ \times ۱۰^۷$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۱/۲۳۴۲ \times ۱۰^۷$ | غیر موجه | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |
| مسئله ۲ | $۲/۴۷۴۳ \times ۱۰^۷$ | $۲/۴۷۴۳ \times ۱۰^۶$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۲/۴۸۱۶ \times ۱۰^۶$ | $۲/۴۸۱۶ \times ۱۰^۶$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۲/۴۷۴۷ \times ۱۰^۶$ | غیر موجه | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |
| مسئله ۳ | $۳/۹۲۴۳ \times ۱۰^۶$ | $۳/۹۲۴۳ \times ۱۰^۶$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۳/۹۴۲۱ \times ۱۰^۶$ | $۳/۹۴۲۱ \times ۱۰^۶$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۳/۹۲۴۹ \times ۱۰^۶$ | $۳/۰۹۳۹ \times ۱۰^۶$ | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |
| مسئله ۴ | $۸/۹۶۳۷ \times ۱۰^۷$ | $۸/۹۶۳۷ \times ۱۰^۷$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۸/۹۸۶۸ \times ۱۰^۷$ | $۸/۹۸۶۸ \times ۱۰^۷$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۸/۹۶۳۹ \times ۱۰^۷$ | $۶/۲۸۴۴ \times ۱۰^۷$ | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |
| مسئله ۵ | $۴/۹۷۵۸ \times ۱۰^۴$ | $۴/۹۷۵۸ \times ۱۰^۴$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۴/۹۷۴۸ \times ۱۰^۴$ | $۴/۹۷۴۸ \times ۱۰^۴$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۴/۹۷۶۰ \times ۱۰^۴$ | غیر موجه | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |
| مسئله ۶ | $۵/۶۰۶۱ \times ۱۰^۶$ | $۵/۶۰۶۱ \times ۱۰^۶$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۵/۶۱۷۷ \times ۱۰^۶$ | $۵/۶۱۷۷ \times ۱۰^۶$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۵/۶۰۹۶ \times ۱۰^۶$ | $۵/۶۰۷۱ \times ۱۰^۶$ | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |
| مسئله ۷ | $۶/۶۳۴۷ \times ۱۰^۶$ | $۶/۶۳۴۷ \times ۱۰^۶$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۶/۶۵۶۸ \times ۱۰^۶$ | $۶/۶۵۶۸ \times ۱۰^۶$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۶/۶۳۶۸ \times ۱۰^۶$ | $۶/۶۳۶۸ \times ۱۰^۶$ | نمونه‌گیری | یکسان |
| مسئله ۸ | $۱/۹۵۲۷ \times ۱۰^۷$ | $۱/۹۵۲۷ \times ۱۰^۷$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۲/۰۲۰۹ \times ۱۰^۷$ | $۲/۰۲۰۹ \times ۱۰^۷$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۱/۹۵۳۶ \times ۱۰^۷$ | $۱/۹۵۳۴ \times ۱۰^۷$ | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |
| مسئله ۹ | $۳/۱۰۹۴ \times ۱۰^۷$ | $۳/۱۰۹۴ \times ۱۰^۷$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۳/۱۱۸۱ \times ۱۰^۷$ | $۳/۱۱۸۱ \times ۱۰^۷$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۳/۱۰۹۸ \times ۱۰^۷$ | $۳/۱۰۹۸ \times ۱۰^۷$ | نمونه‌گیری | یکسان |
| مسئله ۱۰ | $۳/۹۸۸۴ \times ۱۰^۷$ | $۳/۹۸۸۴ \times ۱۰^۷$ | بدون بازرسی | یکسان |
| | $۳/۹۹۲۸ \times ۱۰^۶$ | $۳/۹۹۲۸ \times ۱۰^۶$ | بازرسی ۱۰۰ درصد | یکسان |
| | $۳/۹۹۲۸ \times ۱۰^۶$ | $۳/۹۸۸۷ \times ۱۰^۶$ | نمونه‌گیری | الگوریتم پیشنهادی |

در مدل‌سازی مسئله در نظر گرفته شوند. موارد متعددی برای توسعه‌ی مدل ارائه شده وجود دارد که از آن جمله می‌توان به مواردی نظیر بررسی تابع تقاضای احتمالی و در نظر گرفتن اهداف مؤثر دیگر بر سودآوری زنجیره‌ی تأمین مانند سطح خدمت اشاره کرد. به علاوه در نظر گرفتن عوامل تأثیرگذار بر مقدار سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری مانند زمان تحویل منجر می‌شود تا مدل ارائه شده به واقعیت نزدیک‌تر شود.

مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم‌گیری ارائه شد و در نهایت مطالعات عددی برای انجام تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای مهم صورت گرفت و نتایج تحلیل حساسیت نشان داد که تغییر پارامترهای مربوط به بازرسی بر روی سیاست بهینه‌ی بازرسی و سیاست سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری تأثیرگذارند. همچنین نتایج حل نشان داد که سیاست بازرسی ۱۰۰ درصد و بدون بازرسی نیز در برخی موارد به‌عنوان سیاست بهینه انتخاب می‌شوند؛ بنابراین لازم است هر سه سیاست بازرسی

پانوشتها

1. economic order quantity
2. acceptable quality level
3. Iso-elastic
4. convex programming
5. negative semi-definite (NSD)

منابع (References)

1. Taleizadeh, A.A. and Dehkordi, N.Z. "Economic order quantity with partial backordering and sampling inspection", *Journal of Industrial Engineering International*, **13**(3), pp. 331-345 (2017).
2. Harris, F.W. "How many parts to make at once", *Factory, the Magazine of Management*, **10**(2), pp. 135-136 (1913).
3. Yang, P.C. "Pricing strategy for deteriorating items using quantity discount when demand is price sensitive", *European Journal of Operational Research*, **157**(2), pp. 389-397 (2004).
4. Salameh, M. K. and Jaber, M. Y. "Economic production quantity model for items with imperfect quality", *International Journal of Production Economics*, **64**(1-3), pp. 59-64 (2000).
5. Ben-Daya, M., Noman, S.M. and Hariga, M. "Integrated inventory control and inspection policies with deterministic demand", *Computers & Operations Research*, **33**(6), pp. 1625-1638 (2006).
6. Whitin, T.M. "Inventory control and price theory", *Management Science*, **2**(1), pp. 61-68 (1955).
7. Sajadieh, M.S. and Jokar, M.R.A. "Optimizing shipment, ordering and pricing policies in a two-stage supply chain with price-sensitive demand", *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, **45**(4), pp. 564-571 (2009).
8. Cheikhrouhou, N., Sarkar, B., Ganguly, B. and et al. "Optimization of sample size and order size in an inventory model with quality inspection and return of defective items", *Annals of Operations Research*, pp. 1-23 (2017).
9. Barzegar Astanjin, M. and Sajadieh, M.S. "Integrated production-Inventory model with price-dependent demand, imperfect quality, and investment in quality and inspection", *AUT Journal of Modeling and Simulation*, **49**(1), pp. 43-56 (2017).
10. Yu, H.F. and Hsu, W.K. "An integrated inventory model with immediate return for defective items under unequal-sized shipments", *Journal of Industrial and Production Engineering*, **34**(1), pp. 70-77 (2017).
11. Taleizadeh, A.A., Noori-daryan, M. and Tavakkoli-Moghaddam, R. "Pricing and ordering decisions in a supply chain with imperfect quality items and inspection under buyback of defective items", *International Journal of Production Research*, **53**(15), pp. 4553-4582 (2015).
12. Yu, H.F. and Hsu, W.K. "An integrated inventory model with immediate return for defective items under unequal-sized shipments", *Journal of Industrial and Production Engineering*, **34**(1), pp. 70-77 (2017).
13. Rezaei, J. "Economic order quantity and sampling inspection plans for imperfect items", *Computers & Industrial Engineering*, **96**, pp. 1-7 (2016).
14. Jauhari, W.A., Sulistyanto, R. and Laksono, P.W. "Coordinating a two-level supply chain with defective items, inspection errors and price-sensitive demand", *Songklanakarinn Journal of Science & Technology*, **40**(1), pp.135-145 (2018).
15. Ghasemy Yaghin, R., Fatemi Ghomi, S.M.T. and Torabi, S.A. "Enhanced joint pricing and lotsizing problem in a two-echelon supply chain with logit demand function", *International Journal of Production Research*, **52**(17), pp. 4967-4983 (2014).
16. Huang, J., Leng, M. and Parlar, M. "Demand functions in decision modeling: a comprehensive survey and research directions", *Decision Sciences*, **44**(3), pp. 557-609 (2013).
17. Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. and Sherali, H.D., *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons (2011).
18. Forbes, C., Evans, M., Hastings, N. and et al., *Statistical Distributions*, John Wiley & Sons (2011).
19. Rad, M.A., Khoshalhan, F. and Setak, M. "Optimal pricing and ordering policies for a two-layer supply chain with imperfect quality items under two inspection scenarios", *Caspian Journal of Applied Sciences Research*, **1**(13), pp.133-144 (2012).

بازرسی ۱۰۰ درصد: مدل مشترک موجودی بازرسی - با جایگزینی - تقاضای خطی: جواب‌ها در این حالت مشابه قسمت الف در متن است.

نمونه‌گیری: مدل مشترک موجودی بازرسی - با جایگزینی - تقاضای خطی

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z(Q, p)}{\partial p^2} = -2b < 0$$

در این حالت ثابت می‌شود که تابع نسبت به p مقعر است. بنابراین، در این حالت در الگوریتم مربوطه برای یافتن مقادیر بهینه p و Q از مقدار اولیه $Q_1 = 1$ شروع می‌کنیم.

بازرسی ۱۰۰ درصد: مدل مشترک موجودی بازرسی بدون جایگزینی - تقاضای خطی

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z_1(Q, p)}{\partial Q^2} = \frac{-2A(a - bp)}{Q^2(1 - E(\rho))} < 0$$

$$|H| = \frac{-Ab(Ab - 2aQ + 2aE(\rho)Q + 2bpQ - 2bE(\rho)pQ)}{Q^2(1 - E(\rho))^2}$$

در صورتی که شرط زیر برقرار باشد، تابع سود مقعر است:

$$Q > \frac{Ab}{2(a - bp)(1 - E(\rho))}$$

در این حالت مخارج بزرگ‌تر از صورت و در نتیجه سمت راست، کوچک‌تر از یک است؛ بنابراین ثابت می‌شود که تابع در این حالت نسبت به p و Q مقعر است.

نمونه‌گیری: مدل مشترک موجودی بازرسی بدون جایگزینی - تقاضای خطی: در این جا نیز مشابه حالت نمونه‌گیری با جایگزینی ثابت می‌شود که تابع نسبت به P مقعر است.

پیوست ۲:

بدون بازرسی: مدل مشترک موجودی بازرسی و قیمت‌گذاری با جایگزینی - تقاضای نمایی

$$\frac{\partial^2 z_1(Q, r)}{\partial Q^2} = \frac{-2aA}{p^b Q^r} < 0$$

بازرسی ۱۰۰ درصد: مدل مشترک موجودی بازرسی و قیمت‌گذاری با جایگزینی - تقاضای نمایی

$$\frac{\partial^2 z_1(Q, r)}{\partial Q^2} = \frac{-2Aa}{p^b Q^r} < 0$$

نمونه‌گیری: مدل مشترک موجودی بازرسی و قیمت‌گذاری با جایگزینی - تقاضای نمایی

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z_1(Q, p)}{\partial p^2} = \frac{abp(b+1)}{p^{b+2}} - \frac{2ab}{p^{b+1}} - \frac{ab(b+1)(nc_i + c_d(Q\rho - n\rho) + c_r n\rho)}{Qp^{b+2}} - \frac{Aab(b+1)}{Qp^{b+2}} < 0$$

$$abpQ(b-1) < -[ab(b+1)(nc_i + c_d(Q\rho - n\rho) + c_r n\rho) + A]$$