Original Article

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۸)
دوره‌ی ۱-۳۵، شماره‌ی ۲/۱، ص. ۱۹-۲۹

بهینه‌سازی فواصل بازرسی در افق زمانی محدود برای یک سیستم دومؤلفه‌یی با دو نوع خرابی

حمید مؤکدی (دانشجوی دکتری)
سید محمد سید حسینی * (استاد)
کامران شهانقی (دانشیار)
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

در این مقاله، یک سیستم دومؤلفه‌یی بررسی می‌شود. خرابی مؤلفه‌ی اول پنهان است؛ یعنی باعث توقف سیستم نمی‌شود. ولی هزینه‌های عملیاتی را افزایش می‌دهد. مؤلفه‌ی دوم دارای سه وضعیت است: سالم، معیوب و خراب. وضعیت خراب، آشکار و باعث توقف سیستم می‌شود. وقوع عیب و خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم باعث ایجاد شوک روی مؤلفه‌ی اول می‌شود و نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد. سیستم طبق سیاست بازرسی دوره‌یی برای شناسایی خرابی‌های پنهان و عیب‌ها، بازرسی می‌شود. مؤلفه‌ی اول به محض توقف سیستم نیز به صورت فرصت‌طلبانه بازرسی می‌شود. هدف، یافتن فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه است که هزینه‌ی کل را در یک افق زمانی محدود کمینه کند. ابتدا، مدل بازرسی به صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود. سپس، به دلیل پیچیدگی محاسبات عددی، یک الگوریتم شبیه‌سازی برای محاسبه‌ی هزینه‌ی کل ارائه می‌شود. برای تشریح روش پیشنهادی، یک مثال عددی برای سیستمِ تامینِ توانِ مصرفی در پست توزیع برق ارائه شده است.

واژگان کلیدی: سیستم دومؤلفه‌یی، فاصله‌ی بازرسی بهینه، بازرسی فرصت‌طلبانه، خرابی پنهان، خرابی‌آشکار دومرحله‌یی.

hamid_moakedi@ind.iust.ac.ir
seyedhosseini@iust.ac.ir
shahanaghi@iust.ac.ir

۱. مقدمه

بازرسی‌های دوره‌یی یکی از راهبردهای مؤثر نگهداری و تعمیرات است که در حال حاضر در صنعت استفاده می‌شود. هدف از بازرسی، تعیینِ وضعیت دستگاه و در نتیجه، انجام اقدامات لازم برای نگهداری و تعمیرات آن است.[۱] به طور کلی، دو مدل بازرسی در پیشینه‌ی موضوع ارائه شده است. مدل اول، مربوط به سیستمی است که خرابی‌هایش فقط با انجام بازرسی، شناسایی می‌شوند؛ یعنی خرابی‌های سیستم، پنهان (یا نرم) هستند و باعث توقف سیستم نمی‌شوند.[۲] مدل دوم، مدلِ زمانِ تأخیر است که طبق آن، فرایند خرابی به صورت دومرحله‌یی تعریف می‌شود. مرحله‌ی اول، فاصله‌ی زمانی بین وضعیت سالم تا نقطه‌ی وقوع عیب است و مرحله‌ی دوم، فاصله‌ی زمانی بین نقطه‌ی وقوع عیب تا نقطه‌یی است که خرابی آشکار رخ می‌دهد و باعث توقف سیستم می‌شود. بنابراین، بین وضعیت معیوب و وضعیت خراب، فرصتی برای انجام بازرسی برای شناسایی و تعمیر عیب وجود دارد.[۳] این دو مدل پایه، اولین بار، به ترتیب توسط بارلو و همکاران[۴] و کریستر[۵] مطرح و سپس توسعه‌های متعددی از آنها توسط پژوهشگران ارائه شده است. برای مرور بیشتر رجوع کنید به[۳ و۶-۱۰].

بیشتر مدل‌های بازرسی توسعه یافته، روی سیستم‌های یک مؤلفه‌یی متمرکز شده‌اند؛ ولی در دنیای واقعی بیشتر سیستم‌ها از چندمؤلفه تشکیل شده‌اند. این امر موجب شده است تا در دهه‌های اخیر، تمایل پژوهشگران به ارائه‌ی مدل‌های بازرسی و نگهداری و تعمیرات برای سیستم‌های چندمؤلفه‌یی افزایش یابد. برای مرور بیشتر رجوع کنید به[۱۱-۱۶] از طرف دیگر، هر چند در دنیای واقعی، زمان کاری بیشتر سیستم‌ها، محدود است، اما به دلیل دشواربودنِ مدل‌سازی در افق زمانی محدود، بیشتر پژوهش‌های انجام شده، افق زمانی را نامحدود در نظرگرفته‌اند.[۱۷] بنابراین، ما در ادامه، مدل‌سازی فواصل بازرسی برای سیستم‌های چندمؤلفه‌یی در افق زمانی را بررسی می‌کنیم.

مدل‌سازی فواصل بازرسی برای سیستم‌های چندمؤلفه‌یی با خرابی‌های پنهان در افق زمانی محدود توسط برخی از محققان انجام شده است. تقی‌پور و همکاران[۱۸] و تقی‌پور و بنجویک[۱۹] مدل‌های بازرسی دوره‌یی را برای یک سیستم چندمؤلفه‌یی با خرابی‌های پنهان (خرابی‌های نرم) و خرابی‌های آشکار یک‌مرحله‌یی (خرابی‌های سخت) ارائه کرده‌اند. تقی‌پور و بنجویک[۲۰]، در توسعه‌یی از کارشان، فرض کرده‌اند که مؤلفه‌ها با خرابی‌های نرم علاوه بر بازرسی دوره‌یی، در زمان‌های وقوع خرابی‌های سخت نیز بازرسی می‌شوند. تقی‌پور و بنجویک[۲۱]، در توسعه‌ی دیگری از کارشان فرض کرده‌اند که مؤلفه‌ها با خرابی‌های سخت نیز به صورت دوره‌یی بازرسی می‌شوند

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۵/۱۵، اصلاحیه ۱۳۹۷/۲/۲۴، پذیرش ۱۳۹۷/۳/۳۰.
DOI:10.24200/J65.2018.7268.1781

و در صورت لزوم، تعویض پیشگیرانه می‌شوند. بابیشین و تقی‌پور[۲۲] یک سیاست بازرسی و نگهداری و تعمیرات را برای یک سیستم چندمؤلفه‌یی با خرابی‌های نرم و سخت ارائه کرده‌اند.

مدل‌سازی فواصل بازرسی برای سیستم‌های چندمؤلفه‌یی با خرابی‌های آشکار دومرحله‌یی نیز توسط برخی دیگر از پژوهشگران انجام شده است؛ ولی همه‌ی آنها افق زمانی نامحدود را در نظر گرفته‌اند. ونگ و کریستر[۲۳] یک سیاست بازرسی ـ تعویض را برای یک سیستم چندمؤلفه‌یی ارائه کرده‌اند. اسکارف و کاوالنته[۲۴] یک سیاست ترکیبی بازرسی و تعویض گروهی را برای یک سیستم چندمؤلفه‌یی با عمر ناهمگن پیشنهاد کرده‌اند. ونگ و همکاران[۲۵] و ونگ و بنجویک[۲۶] یک سیستم چندمؤلفه‌یی با چند حالت خرابی را در نظر گرفته‌اند که در آن برخلاف پژوهش‌های مشابه قبلی، ابتدا هر مؤلفه و هر حالت خرابی به صورت جداگانه مدل‌سازی شده و سپس با هم ترکیب شده‌اند.

در بسیاری از سیستم‌های چندمؤلفه‌یی، خرابی یک مؤلفه ممکن است باعث افزایش نرخ خرابی یا افزایش فرسودگی سایر مؤلفه‌ها شود (وابستگی خرابی یا وابستگی ناشی از شوک). در[۱۳]، انواع وابستگی بین مؤلفه‌ها در سیستم‌های چندمؤلفه‌یی مرور شده است. لای و چن[۲۷] یک مدل تعویض اقتصادی را برای یک سیستم دومؤلفه‌یی با وابستگی خرابی ارائه کرده‌اند. شئو و همکاران[۲۸ و ۲۹] یک سیاست تعویض بهینه را برای یک سیستم دومؤلفه‌یی در معرض وقوع شوک و وابستگی خرابی پیشنهاد کرده‌اند. گلمکانی و موکدی[۳۰] و گائو و جی[۳۱] سیاست‌های بازرسی را برای یک سیستم دومؤلفه‌یی با وابستگی خرابیِ بین مؤلفه‌ها ارائه کرده‌اند. در[۳۰]، خرابی یک مؤلفه، از نوع پنهان و خرابی مؤلفه‌ی دیگر، از نوع آشکار یک‌مرحله‌یی است. اما در[۳۱]، مؤلفه‌ها در معرض وقوع خرابی‌های آشکار یک‌مرحله‌یی یا دومرحله‌یی هستند. در این مقاله، ما یک سیستم دومؤلفه‌یی با خرابی‌های پنهان و آشکار دومرحله‌یی را در نظر می‌گیریم که در آن وقوع هر عیب و هر خرابی آشکار، نرخ وقوع خرابی پنهان را افزایش می‌دهد.

هر چند به منظور مدل‌سازی فواصل بازرسی برای سیستم‌های یک‌مؤلفه‌یی از سیاست بازرسی بر اساس عمر استفاده می‌شود که از لحاظ مدل‌سازی نیز ساده‌تر است[۳]، اما معمولاً مؤلفه‌های یک سیستم چندمؤلفه‌یی به صورت بلوکی (گروهی) بازرسی می‌شوند. زیرا برنامه‌ریزی بازرسی‌ها بر اساس عمر انفرادی مؤلفه‌ها، غیراقتصادی یا غیرممکن است.[۲۶] قابل توجه است که استفاده از سیاست نگهداری و تعمیراتِ فرصت‌طلبانه در سیستم‌های چندمؤلفه‌یی نیز سودمند است. بر اساس این سیاست، با هر بار توقف یا خرابی سیستم، فرصتی برای نگهداری و تعمیرات مؤلفه‌ها، فراهم می‌شود.[۱۴] در حال حاضر، تمایل پژوهشگران به استفاده از این سیاست رو به افزایش است. برای مثال، رجوع کنید به[۳۲-۳۵] بنابراین، ما در این مقاله، سیاست بازرسی بلوکی (گروهی) و فرصت‌طلبانه را در نظر می‌گیریم.

ایده‌ی اصلی این مقاله از مشاهدات صنعتی گرفته شده است. واضح است که در یک سیستم چندمؤلفه‌یی، خرابی‌های پنهان و آشکار دومرحله‌یی ممکن است به صورت هم‌زمان وجود داشته باشد. بر اساس دانسته‌های ما، تاکنون، این وضعیت در پیشینه‌ی موضوع بررسی نشده است. در مرتبط‌ترین پژوهش در این زمینه، گلمکانی و موکدی[۳۰]، یک سیستمِ تأمینِ توانِ مصرفی در پست توزیع برق را در نظر گرفته‌اند که از دومؤلفه‌ی بانک خازنی (مؤلفه‌ی اول) و ترانس (مؤلفه‌ی دوم) تشکیل شده است. نویسندگان فرض کرده‌اند که خرابی بانک خازنی از نوع پنهان و خرابی ترانس از نوع آشکار یک‌مرحله‌یی است. آنها با این فرض که ترانس بازرسی نمی‌شود، فاصله‌ی بازرسی بهینه را فقط برای بانک خازنی به دست آورده‌اند. اما در دنیای واقعی، خرابی ترانس بر اساس مدل زمان تأخیر رخ می‌دهد که وقوع هر عیب و هر خرابی آشکار ترانس باعث ایجاد شوک روی بانک خازنی می‌شود و نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد. بنابراین، سیستم باید در فواصل زمانی معینی به منظور شناسایی خرابی‌های پنهان بانک خازنی و عیب‌های ترانس بازرسی شود. علاوه بر این، در این مقاله فرض می‌کنیم که بانک خازنی در زمان‌های وقوع خرابی آشکار ترانس نیز به صورت فرصت‌طلبانه بازرسی می‌شود. همچنین، ما دو نوع اقدام نگهداری و تعمیرات را برای مؤلفه‌های سیستم در نظر می‌گیریم: تعمیر جزئی و تعویض. در[۳۰]، هیچ یک از این فرضیات واقعی در نظر گرفته نشده است. هدف، یافتن فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه است که هزینه‌ی کل را در یک افق زمانی محدود کمینه کند.

در ادامه و در بخش ۲، تعریف مسئله، فرضیات و نمادهای مورد نیاز به تفصیل مطرح می‌شود. در بخش ۳، مدل بازرسی به صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود. در بخش ۴، الگوریتم شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای محاسبه‌ی متوسط هزینه‌ی کل سیستم ارائه خواهد شد. در بخش ۵، یک مثال عددی کاربردی به همراه تحلیل حساسیت برای تشریح بیشتر مدل پیشنهادی مطرح می‌شود. نهایتاً، در بخش ۶، نتیجه‌گیری و زمینه‌های آتی تحقیق در این حوزه آورده می‌شود.

۲. تعریف مسئله

۱.۲. نمادهای مورد نیاز

T: طول افق برنامه‌ریزی؛

n: تعداد بازرسی‌های دوره‌یی در چرخه‌ی T؛

τ: فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی؛

$r_k(x)$ و $\bar{r_k}(x)$: به ترتیب، احتمال تعمیر جزئی و تعویض مؤلفه‌ی k ام $(k = ۱, ۲)$ با عمر $x \geq ۰$، $\bar{r_k}(x) = ۱ - r_k(x)$؛

C_{PI} و C_{OI}: به ترتیب هزینه‌ی هر بازرسی دوره‌یی و هر بازرسی فرصت‌طلبانه؛

C_D^H: هزینه‌ی جریمه‌ی زمان از کار افتادگی به علت خرابی پنهان (هزینه‌ی تأخیر در شناسایی خرابی پنهان مؤلفه‌ی اول به ازای هر واحد زمانی سپری شده از وقوع خرابی پنهان تا شناسایی آن در زمان بازرسی)؛

C_M^H، C_M^D و C_M^R: به ترتیب، هزینه‌ی هر تعمیر جزئی به علت خرابی پنهان، عیب و خرابی آشکار؛

C_R^H، C_R^D و C_R^R: به ترتیب، هزینه‌ی هر تعویض به علت خرابی پنهان، عیب و خرابی آشکار؛

$E[C^T]$: متوسط هزینه‌ی کل سیستم در چرخه‌ی T؛

C_{PI}^T: هزینه‌ی کل بازرسی‌های دوره‌یی؛

$E[C_{OI}^T]$: متوسط هزینه‌ی بازرسی فرصت‌طلبانه؛

$E[C_{DH}^T]$: متوسط هزینه‌ی زمانه از کار افتادگی به علت خرابی پنهان؛

$E[C_{CMH}^T]$: متوسط هزینه‌ی نگهداری و تعمیرات اصلاحی به علت خرابی پنهان؛

$E[C_{PMD}^T]$: متوسط هزینه‌ی نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به علت عیب؛

$E[C_{CMR}^T]$: متوسط هزینه‌ی نگهداری و تعمیرات اصلاحی به علت خرابی آشکار.

۲.۲. فرضیات مدل

۱. یک سیستم دومؤلفه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد که در آن خرابی مؤلفه‌ی اول از نوع پنهان و خرابی مؤلفه‌ی دوم از نوع آشکار دومرحله‌یی است.

۲. خرابی پنهان باعث توقف سیستم نمی‌شود؛ اما هزینه‌های عملیاتی سیستم را افزایش می‌دهد.

۳. خرابی پنهان فقط با انجام بازرسی قابل شناسایی است.

۴. یک زمانِ تأخیر بین وقوع خرابی پنهان و شناسایی آن در زمان بازرسی وجود دارد. تأخیر بیشتر در شناسایی خرابی پنهان (یعنی زمان از کار افتادگی بیشتر مؤلفه‌ی اول)، هزینه‌ی بیشتری را به سیستم تحمیل می‌کند.

۵. مؤلفه‌ی دوم دارای سه وضعیت است: سالم، معیوب و خراب.

۶. وضعیت معیوب فقط با انجام بازرسی قابل شناسایی است؛ اما وضعیت خراب باعث توقف سیستم می‌شود و خود را آشکار می‌کند.

۷. وقوع هر عیب و هر خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم باعث ایجاد شوک روی مؤلفه‌ی اول می‌شود و نرخ خرابی آن را به ترتیب به میزان p_D و p_R درصد افزایش می‌دهد.

۸. یک توزیع وایبل برای زمان وقوع خرابی‌های پنهان مؤلفه‌ی اول و همچنین دو توزیع وایبل دیگر برای مؤلفه‌ی دوم (یکی برای زمان وقوع عیب‌ها و دیگری برای زمان وقوع خرابی‌های آشکار) در نظر گرفته می‌شود.

۹. سیستم طبق سیاست بازرسی دوره‌یی در زمان‌های برنامه‌ریزی شده‌ی $k\tau$، ($k = 1, 2, ..., n$)، به منظور شناسایی خرابی‌های پنهان مؤلفه‌ی اول و عیب‌های مؤلفه‌ی دوم، در افق زمانی محدود T بازرسی می‌شود. بنابراین، $T = n\tau$ یا $T = (n-1)\tau + \sigma$، جایی که $\sigma < \tau$. علاوه بر این، مؤلفه‌ی اول نیز به محض وقوع خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم به صورت فرصت‌طلبانه بازرسی می‌شود (شکل ۱).

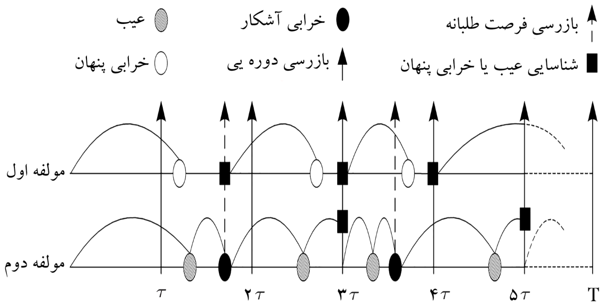
۱۰. مؤلفه‌ی اول در صورت شناسایی خرابی پنهان در زمان بازرسی، فوراً تعمیر جزئی یا تعویض می‌شود.

۱۱. مؤلفه‌ی دوم در صورت شناسایی عیب در زمان بازرسی یا در صورت وقوع خرابی آشکار، فوراً تعمیر جزئی یا تعویض می‌شود.

۱۲. احتمال تعمیر جزئی هر مؤلفه تابعی نزولی از عمر آن است، یعنی با افزایش عمر هر مؤلفه، احتمال تعمیر جزئی آن، کاهش و احتمال تعویض آن، افزایش می‌یابد.

۱۳. از زمان بازرسی، تعمیر و تعویض مؤلفه‌ها صرف نظر می‌شود.

۱۴. هزینه‌ی کل سیستم شامل هزینه‌های بازرسی دوره‌یی و فرصت‌طلبانه، هزینه‌های زمان از کار افتادگی به دلیل خرابی‌های پنهان و همچنین، هزینه‌های تعمیر جزئی و تعویض به دلیل خرابی‌های پنهان، عیب‌ها و خرابی‌های آشکار است. هدف، یافتن فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه، τ^*، است به گونه‌یی که متوسط هزینه‌ی کل سیستم در چرخه‌ی T کمینه شود.



شکل ۱. سیاست بازرسی سیستم در چرخه‌ی T.

۳. مدل پیشنهادی

در این بخش، یک مدل بازرسی ارائه می‌شود که در آن هزینه‌ی کل سیستم به عنوان تابعی از فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی محاسبه می‌شود.

فرض کنید X_O و Z_O به ترتیب بیانگر عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی اول و دوم باشد. همچنین، فرض کنید $N_D(\nu)$ و $N_R(\nu)$ به ترتیب بیانگر تعداد شوک‌های ناشی از وقوع عیب و خرابی آشکار در زمان ν باشد. بنابراین، متوسط هزینه‌ی کل سیستم در چرخه‌ی T، $E[C^T]$، به شرط $X_o = t$، $Z_o = \theta$، $N_D(O) = i$ و $N_R(O) = j$ برابر است با

$$
\begin{aligned}
E[C^T] &= \underbrace{n \times C_{PI}}_{C^T_{PI}} + \underbrace{C_{OI} \times O_n(\tau, t, \theta, i, j)}_{E[C^T_{OI}]} \\
&+ \underbrace{C^H_D \times [T - U^H_n(\tau, t, \theta, i, j)]}_{E[C^T_{DH}]} \\
&+ \underbrace{C^H_M \times M^H_n(\tau, t, \theta, i, j) + C^H_R \times R^H_n(\tau, t, \theta, i, j)}_{E[C^T_{CMH}]} \\
&+ \underbrace{C^D_M \times M^D_n(\tau, t, \theta, i, j) + C^D_R \times R^D_n(\tau, t, \theta, i, j)}_{E[C^T_{PMD}]} \\
&+ \underbrace{C^R_M \times M^R_n(\tau, t, \theta, i, j) + C^R_R \times R^R_n(\tau, t, \theta, i, j).}_{E[C^T_{CMR}]}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

در رابطه‌ی بالا، $O_n(\tau, t, \theta, i, j)$ بیانگر متوسط تعداد بازرسی فرصت‌طلبانه و $U^H_n(\tau, t, \theta, i, j)$ بیانگر متوسط مدت زمان سالم بودن مؤلفه‌ی اول است. $M^H_n(\tau, t, \theta, i, j)$، $M^D_n(\tau, t, \theta, i, j)$ و $M^R_n(\tau, t, \theta, i, j)$ به ترتیب بیانگر متوسط تعداد تعمیر جزئی به دلیل خرابی پنهان، عیب و خرابی آشکار است. $R^H_n(\tau, t, \theta, i, j)$، $R^D_H(\tau, t, \theta, i, j)$ و $R^R_n(\tau, t, \theta, i, j)$ به ترتیب بیانگر متوسط تعداد تعویض به دلیل خرابی پنهان، عیب و خرابی آشکار است.

همان طور که در رابطه‌ی ۱ دیده می‌شود، برای محاسبه‌ی متوسط هزینه‌ی کل سیستم، ابتدا لازم است مقادیر متوسط مورد نیاز محاسبه شود. برای توضیح چگونگی محاسبه‌ی این مقادیر، فرض کنید فقط یک بازه‌ی بازرسی دوره‌یی به طول σ وجود دارد، یعنی $n = 1$ و $T = \sigma$. به عبارت دیگر، سیستم به طور برنامه‌ریزی شده در زمان σ بازرسی می‌شود و مؤلفه‌ی اول نیز در صورت وقوع خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم در بازه‌ی $[O, \sigma]$ به صورت فرصت‌طلبانه بازرسی می‌شود.

اگر متغیر تصادفی U، بیانگر زمان تصادفی تا نقطه‌ی وقوع عیب و متغیر تصادفی H، بیانگر زمان تأخیر بین نقطه‌ی وقوع عیب تا نقطه‌ی وقوع خرابی آشکار باشد، آنگاه متغیر تصادفی $Z = U + H$ بیانگر زمان وقوع خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم خواهد بود. فرض کنید $Z_1 = \min\{Z, \sigma\}$، $U_1 \min\{U, \sigma\}$ و $H_1 = Z_1 - U_1$ باشد. بنابراین، تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال Z_1 به شرط $Z_0 = \theta$ برابر است با

$$
\begin{aligned}
F_{Z_1}(z|\theta) &= P(Z_1 \leq z | Z_0 = \theta) \\
&= P(0 < U_1 \leq z, 0 < H_1 \leq z - U_1 | Z_0 = \theta) \\
&= \int_0^z \int_0^{z-u} f_{U_1, H_1}(u, h|\theta) dh du = \int_0^z \int_0^{z-u} f_{U_1}(u|\theta) f_{H_1}(h|\theta) dh du
\end{aligned}
$$

$$= \int_{0}^{z} f_{U_1}(u|\theta)F_{H_1}(z-u|\theta)du, 0 \le z < \sigma, \tag{۲}$$

$$f_{Z_1}(z|\theta) = \frac{\partial}{\partial z}F_{z_1}(z|\theta)$$

$$= \int_{0}^{z} f_{U_1}(u|\theta)f_{H_1}(z-u|\theta)du, 0 \le z < \sigma. \tag{۳}$$

اگر با استفاده از فرض ۸، $\lambda_D(\nu) = (\beta_D/\eta_D)(\nu/\eta_D)^{\beta_D - 1}$ بیانگر نرخ وقوع عیب مؤلفه‌ی دوم در زمان ν باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال U_1 به شرط $Z_0 = \theta$ برابر است با

$$F_{U_1}(u|\theta) = P(U_1 \le u|Z_0 = \theta)$$

$$= \begin{cases} 1 - exp\Big(-\int_{\theta}^{\theta+u}\lambda_D(\nu)d\nu\Big), & 0 \le u < \sigma, \\ 1 & u \ge \sigma, \end{cases} \tag{۴}$$

$$f_{U_1}(u|\theta) = \frac{\partial}{\partial u}F_{U_1}(u|\theta)$$

$$= \lambda_D(\theta+u)\exp\left(-\int_{\theta}^{\theta+u}\lambda_D(v)dv\right), \quad 0 \le u < \sigma. \tag{۵}$$

بنابراین، طبق رابطه‌ی ۴، احتمال اینکه مؤلفه‌ی دوم تا انتهای بازه‌ی $[0,\sigma]$ سالم باقی بماند، به شرط $Z_0 = \theta$، برابر است با

$$P_{U_1}(\sigma|\theta) = P(U_1 = \sigma|Z_0 = \theta) = \exp\left(-\int_{\theta}^{\theta+\sigma}\lambda_D(v)dv\right). \tag{۶}$$

اگر با استفاده از فرض ۸، $\lambda_R(\nu) = (\beta_R/\eta_R)(\nu/\eta_R)^{\beta_R - 1}$ بیانگر نرخ وقوع خرابی مؤلفه‌ی دوم در ν واحد زمان پس از وقوع عیب باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال H_1 به شرط $Z_0 = \theta$ برابر است با

$$F_{H_1}(h|\theta) = P(H_1 \le h|Z_0 = \theta)$$

$$= \begin{cases} 1 - exp\Big(-\int_{\theta}^{\theta+h}\lambda_R(\nu)d\nu\Big), & 0 \le h < \sigma - u, \\ 1, & h \ge \sigma - u, \end{cases} \tag{۷}$$

$$f_{H_1}(h|\theta) = \frac{\partial}{\partial h}F_{H_1}(h|\theta)$$

$$= \lambda_R(\theta+h)\exp\left(-\int_{\theta}^{\theta+h}\lambda_R(v)dv\right), \quad 0 \le h < \sigma - u. \tag{۸}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی ۷، احتمال این‌که مؤلفه‌ی دوم تا انتهای بازه‌ی $[0,\sigma]$ در وضعیت معیوب باقی بماند و خراب نشود، به شرط $Z_0 = \theta$، برابر است با

$$PH_1(\sigma - u|\theta) = P(H_1 = \sigma - u|Z_0 = \theta)$$

$$= exp\Big(-\int_{\theta}^{\theta+\sigma-u}\lambda_R(v)dv\Big). \tag{۹}$$

از آن‌جا که وقوع هر عیب و هر خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم، به ترتیب، نرخ خرابی پنهان مؤلفه‌ی اول را به میزان p_D و p_R درصد افزایش می‌دهد، نرخ وقوع خرابی پنهان در زمان ν به شرط $N_{D(\nu)=a}$ و $N_R(\nu) = b$ برابر است با

$$\lambda_H(v|a,b) = \lambda_H(v|N_D(v) = a, N_R(v) = b)$$

$$= (1+p_D)^a(1+p_R)^b\lambda_H(v|0,0), \tag{۱۰}$$

جایی که طبق فرض ۸، $\lambda_H(\nu|o,o) = (\beta_H/\eta_H)(\nu/\eta_H)^{\beta_H - 1}$ بیانگر نرخ وقوع خرابی پنهان است، به شرطی که مؤلفه‌ی دوم تا زمان ν سالم باقی بماند.

فرض کنید متغیر تصادفی X بیانگر زمان وقوع خرابی پنهان مؤلفه‌ی اول باشد. همچنین، فرض کنید $X_{1=\min\{X,Z_1\}}$. در نتیجه، $0 \le Z_1 \le X_1$. بنابراین، تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال X_1 به شرط $X_{o=t}$، $N_{D(x)} = i$ و $N_R(x) = j$ برابر است با

$$F_{X_1}(x|t,i,j)$$

$$= P(X_1 \le x|X_0 = t, N_D(x) = i, N_R(x) = j)$$

$$= \begin{cases} 1 - exp\Big(-\int_{t}^{t+x}\lambda_H(\nu|i,j)d\nu\Big), & O \le x < z, \\ 1, & x \ge z, \end{cases} \tag{۱۱}$$

$$f_{X_1}(x|t,i,j) = \frac{\partial}{\partial x}F_{X_1}(x|t,i,j)$$

$$= \lambda_H(t+x|i,j)\exp(-\int_{t}^{t+x}\lambda_H(v|i,j)dv), \quad 0 \le x < z. \tag{۱۲}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی ۱۱، احتمال این‌که مؤلفه‌ی اول تا زمان z سالم بماند، به شرط $X_0 = t$، $N_D(z) = i$ و $N_R(z) = j$ ، برابر است با

$$P_{X_1}(z|t,i,j)$$

$$= P(X_1 = z|X_0 = t, N_D(z) = i, N_R(z) = j)$$

$$= exp\Big(-\int_{t}^{t+z}\lambda_H(v|i,j)dv\Big). \tag{۱۳}$$

فرض کنید متغیر تصادفی V، معرف هر یک از متغیرهای تصادفی مورد نیازی باشد که باید متوسط آنها در رابطه‌ی ۱ محاسبه شود؛ یعنی تعداد بازرسی فرصت‌طلبانه، تعداد تعمیر جزئی، تعداد تعویض، یا مدت زمان سالم بودن. همچنین، فرض کنید $G_1(\sigma,t,\theta,i,j)$ بیانگر متوسط متغیر تصادفی V در بازه‌ی $[O,\sigma]$ به شرط $X_0 = t$، $Z_0 = \theta$، $N_D(O) = i$ و $N_R(O) = j$ باشد. به منظور محاسبه‌ی $G_1(\sigma,t,\theta,i,j)$، تابع جایبان $\varphi(X_1, I_1, U_1, Z_1, I_2)$ را در نظر بگیرید که بسته به نوع متغیر تصادفی V مقادیر متفاوتی را به صورت زیر اختیار می‌کند جایی که I_k بیانگر نوع اقدام نگهداری و تعمیرات انجام شده روی مؤلفه‌ی kام $(k = 1,2)$ است ($I_k = 0$، $I_k = 1$ و $I_k = 2$ به ترتیب بیانگر تعمیر جزئی، تعویض و بدون اقدام است).

– برای محاسبه‌ی تعداد بازرسی فرصت‌طلبانه‌ی مؤلفه‌ی اول (V_{OI}):

$$\varphi(X_1, I_1U_1, Z_1, I_2) = \begin{cases} 1, & Z_1 < \sigma, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

– برای محاسبه‌ی تعداد تعمیر جزئی به دلیل خرابی پنهان(V_M^H):

$$\varphi(X_1, I_1U_1, Z_1, I_2) = \begin{cases} 1, & I_1 = 0 \text{ و } X_1 < Z_1, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ــ برای محاسبه‌ی تعداد تعویض به دلیل خرابی پنهان (V_R^H):

$$\varphi(X_1, I_1 U_1, Z_1, I_2) = \begin{cases} 1, & I_1 = 1 \text{ و } X_1 < Z_1, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ــ برای محاسبه‌ی مدت زمان سالم ماندن مؤلفه‌ی اول(V_U^H) :

$$\varphi(X_1, I_1 U_1, Z_1, I_2) = X_1$$

ــ برای محاسبه‌ی تعداد تعمیر جزئی به دلیل عیب (V_M^D):

$$\varphi(X_1, I_1 U_1, Z_1, I_2) = \begin{cases} 1, & I_2 = 0 \text{ و } U_1 < Z_1 = \sigma, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ــ برای محاسبه‌ی تعداد تعویض به دلیل عیب (V_R^D):

$$\varphi(X_1, I_1 U_1, Z_1, I_2) = \begin{cases} 1, & I_2 = 1 \text{ و } U_1 < Z_1 = \sigma, \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ــ برای محاسبه‌ی تعداد تعمیر جزئی به دلیل خرابی آشکار (V_M^R):

$$\varphi(X_1, I_1 U_1, Z_1, I_2) = \begin{cases} 1, & I_2 = 0 \text{ و } U_1 < Z_1, \sigma \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ــ برای محاسبه‌ی تعداد تعویض به دلیل خرابی آشکار (V_R^R):

$$\varphi(X_1, I_1 U_1, Z_1, I_2) = \begin{cases} 1, & I_2 = 1 \text{ و } U_1 < Z_1, \sigma \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

با توجه به دو وضعیتی بودن مؤلفه‌ی اول (سالم و خراب) و سه‌وضعیتی بودن مؤلفه‌ی دوم (سالم، معیوب و خراب)، شش حالت زیر می‌تواند در بازه‌ی $[O, \sigma]$ اتفاق بیافتد (شکل ۲). بنابراین،

$$G_1(\sigma, t, \theta, i, j) = \sum_{k=1}^{8} G_1{}^{Casek}(\sigma, t, , i, j). \tag{۱۴}$$

حالت ۱- مؤلفه‌ی دوم خراب می‌شود و باعث توقف سیستم می‌شود. مؤلفه‌ی اول قبل یا بعد از وقوع عیب مؤلفه‌ی دوم خراب می‌شود. به محض توقف سیستم، مؤلفه‌ی دوم تعمیر جزئی یا تعویض می‌شود و مؤلفه‌ی اول به صورت فرصت‌طلبانه بازرسی می‌شود. در بازرسی فرصت‌طلبانه، مؤلفه‌ی اول تعمیر جزئی یا تعویض می‌شود. در نتیجه، $V^{[o,\sigma]} = \varphi(u + x, I_1 u, z, I_2) + V^{[z,\sigma]}$، یا $V^{[o,\sigma]} = \varphi(x, I_1, u, z, I_2) + V^{[z,\sigma]}$ جایی‌که $I_1 \in \{o, 1\}$ و $I_2 \in \{o, 1\}$. رابطه‌ی ۱۵ را ببینید.

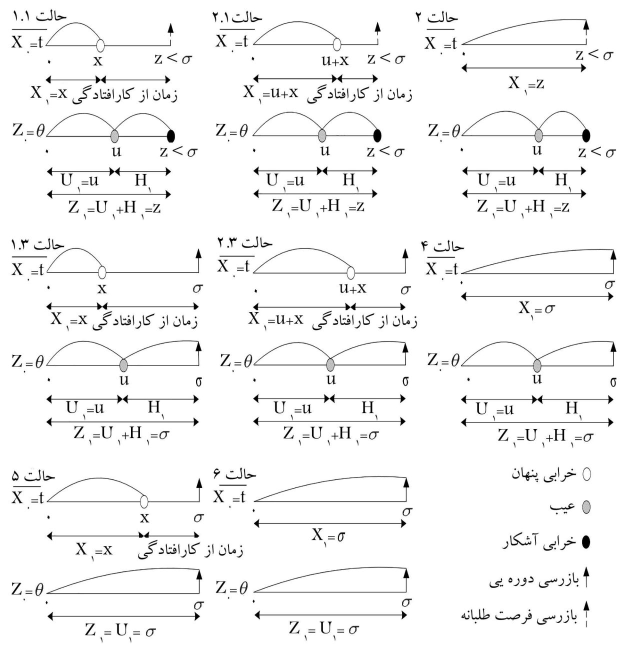
حالت ۲- مؤلفه‌ی دوم خراب می‌شود و باعث توقف سیستم می‌شود. مؤلفه‌ی اول تا این لحظه سالم باقی می‌ماند. به محض توقف سیستم، مؤلفه‌ی اول به صورت فرصت‌طلبانه بازرسی می‌شود. بنابراین، هیچ اقدامی روی مؤلفه‌ی اول انجام نمی‌شود ولی مؤلفه‌ی دوم تعمیر جزئی یا تعویض می‌شود. در نتیجه، $V^{[\circ,\sigma]} = \varphi(z, I_1, u, z, I_2) + V^{[z,\sigma]}$ جایی که $I_1 = 2$ و $I_2 \in \{o, 1\}$. رابطه‌ی ۱۶ را ببینید.

$$\begin{aligned} G_1^{Case1}(\sigma, t, \theta, i, j) = {} & \int_0^\sigma \int_0^z \int_0^u \\ & \left\{ \begin{array}{c} [\varphi(x, 0, u, z, 0) + G_1(\sigma - z, t + x, \theta + z, i + 1, j + 1)] r_1(t + x) r_2(\theta + z) + \\ [\varphi(x, 1, u, z, 0) + G_1(\sigma - z, 0, \theta + z, 0, 0)] \overline{r}_1(t + x) r_2(\theta + z) + \\ [\varphi(x, 0, u, z, 1) + G_1(\sigma - z, t + x, 0, i + 1, j + 1)] r_1(t + x) \overline{r}_2(\theta + z) + \\ [\varphi(x, 1, u, z, 1) + G_1(\sigma - z, 0, 0, 0, 0)] \overline{r}_1(t + x) \overline{r}_2(\theta + z) \end{array} \right\} \begin{pmatrix} f_{X_1}(x|t, i, j) \\ f_{U_1}(u|\theta) \\ f_{H_1}(z - u|\theta) \end{pmatrix} dx\,du\,dz \\ & + \int_0^\sigma \int_0^z \int_0^{z-u} \left\{ \begin{array}{c} [\varphi(u + x, 0, u, z, 0) + G_1(\sigma - z, t + u + x, \theta + z, i + 1, j + 1)] r_1(t + u + x) r_2(\theta + z) + \\ [\varphi(u + x, 1, u, z, 0) + G_1(\sigma - z, 0, \theta + z, 0, 0)] \overline{r}_1(t + u + x) r_2(\theta + z) + \\ [\varphi(u + x, 0, u, z, 1) + G_1(\sigma - z, t + u + x, 0, i + 1, j + 1)] r_1(t + u + x) \overline{r_2}(\theta + z) + \\ [\varphi(u + x, 1, u, z, 1) + G_1(\sigma - z, 0, 0, 0, 0)] \overline{r}_1(t + u + x) \overline{r}_2(\theta + z) \end{array} \right\} \begin{pmatrix} P_{X_1}(u|t, i, j) \\ f_{X_1}(x|t + u, i + 1, j) \\ f_{U_1}(u|\theta) \\ f_{H_1}(z - u|\theta) \end{pmatrix} dx\,du\,dz. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$\begin{aligned} G_1^{Case2}(\sigma, t, \theta, i, j) &= \int_O^\sigma \int_O^z \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} [\varphi(z, 2, u, z, 0) + G_1(\sigma - z, t + z, \theta + z, i + 1, j + 1)] r_2(\theta + z) + \\ [\varphi(z, 2, u, z, 1) + G_1(\sigma - z, t + z, 0, i + 1, j + 1)] \overline{r}_2(\theta + z) \end{array} \right\} \\ P_{X_1}(u|t, i, j) P_{X_1}(z - u|t + u, i + 1, j) f_{U_1}(u|\theta) f_{H_1}(z - u|\theta) \end{array} \right) du\,dz \\ G_1^{Case3}(\sigma, t, \theta, i, j) &= \int_O^\sigma \int_o^u \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \varphi(x, 0, u, \sigma, 0) r_1(t + x) r_2(\theta + \sigma) + \varphi(x, 1, u, \sigma, 0) \overline{r}_1(t + x) r_2(\theta + \sigma) + \\ \varphi(x, 0, u, \sigma, 1) r_1(t + x) \overline{r}_2(\theta + \sigma) + \varphi(x, 1, u, \sigma, 1) \overline{r}_1(t + x) \overline{r}_2(\theta + \sigma) \end{array} \right\} \\ f_{X_1}(x|t, i, j) f_{U_1}(u|\theta) P_{H_1}(\sigma - u|\theta) \end{array} \right) dx\,du \end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$+\int_{O}^{\sigma}\int_{O}^{\sigma-u}\left(\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}\varphi(u+x,0,u,\sigma,0)r_1(t+u+x)r_2(\theta+\sigma)+\varphi(u+x,1,u,\sigma,o)\overline{r}_1(t+u+x)r_2(\theta+\sigma)+\\ \varphi(u+x,0,u,\sigma,1)r_1(t+u+x)\overline{r}_2(\theta+\sigma)+\varphi(u+x,1,u,\sigma,1)\overline{r}_1(t+u+x)\overline{r}_2(\theta+\sigma)\end{array}\right\}\\ P_{X_1}(u|t,i,j)f_{X_1}(x|t+u,i+1,j)f_{U_1}(u|\theta)P_{H_1}(\sigma-u|\theta)\end{array}\right)dxdu. \quad (17)$$

$$G_1^{Case4}(\sigma,t,\theta,i,j)=\int_{O}^{\sigma}=\left(\begin{array}{c}\left\{\varphi(\sigma,2,u,\sigma,0)r_2(\theta+\sigma)+\varphi(\sigma,2,u,\sigma,1)\overline{r}_2(\theta+\sigma)\right\}\\ P_{X_1}(u|t,i,j)P_{X_1}(\sigma-u|t+u,i+1,j)f_{U_1}(u|\theta)P_{H_1}(\sigma-u|\theta)\end{array}\right)du \quad (18)$$



شکل ۲. حالات مختلف سیستم در بازه‌ی بازرسی $[0,\sigma]$.

حالت ۳- مؤلفه‌ی دوم معیوب می‌شود ولی خراب نمی‌شود. مؤلفه‌ی اول قبل یا بعد از وقوع عیب مؤلفه‌ی دوم خراب می‌شود. بنابراین، در زمان بازرسی دوره‌یی، مؤلفه‌های سیستم تعمیر جزئی یا تعویض می‌شوند. در نتیجه، $V^{[0,\sigma]}=\varphi(x,I_1 u,\sigma,I_2)$ یا $V^{[o,\sigma]}=\varphi=(u+x,I_1,u,\sigma,I_2)$ جایی که $I_1\in\{0,1\}$ و $I_2\in\{0,1\}$. رابطه‌ی ۱۷ را ببینید.

حالت ۴- مؤلفه‌ی دوم معیوب می‌شود ولی خراب نمی‌شود. مؤلفه‌ی اول سالم باقی می‌ماند. بنابراین، در زمان بازرسی دوره‌یی، هیچ اقدامی روی مؤلفه‌ی اول انجام نمی‌شود ولی مؤلفه‌ی دوم تعمیر جزئی یا تعویض می‌شود. در نتیجه، $V^{[0,\sigma]}=\varphi(\sigma,I_1,u,\sigma,I_2)$ ، جایی که $I_1=2$ و $I_2\in\{0,1\}$. رابطه‌ی ۱۸ را ببینید.

حالت ۵- مؤلفه‌ی دوم سالم باقی می‌ماند و مؤلفه‌ی اول خراب می‌شود. بنابراین، در زمان بازرسی دوره‌یی، مؤلفه‌ی اول تعمیر جزئی یا تعویض می‌شود ولی هیچ اقدامی روی مؤلفه‌ی دوم انجام نمی‌شود. در نتیجه، $V^{[O,\sigma]}=\varphi(x,I_1\sigma,\sigma,I_2)$ جایی که $I_1=\in\{0,1\}$ و $I_2=2$. رابطه‌ی ۱۹ را ببینید.

حالت ۶- هر دو مؤلفه سالم باقی می‌مانند. بنابراین، در زمان بازرسی دوره‌یی، هیچ اقدامی روی مؤلفه‌های سیستم انجام نمی‌شود. در نتیجه، $V^{[0,\sigma]}=\varphi(\sigma,2,\sigma,\sigma,2)$ رابطه‌ی ۲۰ را ببینید.

$$G_1^{Case5}(\sigma,t,\theta,i,j)=\int_{O}^{\sigma}\{\varphi(x,0,\sigma,\sigma,2)r_1(t+x)+\varphi(x,1,\sigma,\sigma,2)\overline{r}_1(t+x)\}f_{X_1}(x|t,i,j)P_{U_1}(\sigma|\theta)dx. \quad (19)$$

$$G_1^{Case6}(\sigma,t,\theta,i,j)=\varphi(\sigma,2,\sigma,\sigma,2)P_{X_1}(\sigma|t,i,j)P_{U_1}(\sigma|\theta). \quad (20)$$

در رابطه‌ی ۲۱ متوسط مقدار V برای n بازرسی دوره‌یی توسعه داده شده و یک رابطه‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $G_n(\sigma,t,\theta,i,j)$ آورده شده است. محاسبه‌ی مقادیر متوسط مورد نیاز از طریق این رابطه‌ی بازگشتی، از لحاظ محاسباتی پیچیده است؛ زیرا شامل انتگرال‌های چندگانه است که باید به صورت عددی، از طریق گسسته‌سازی و حل سیستم معادلات به دست آورده شود.[۲۰و۲۱] بنابراین، در بخش بعدی، یک الگوریتم شبیه‌سازی برای محاسبه‌ی G_n آورده می‌شود. با محاسبه‌ی مقادیر G_n از طریق شبیه‌سازی، متوسط هزینه‌ی کل سیستم با استفاده از رابطه‌ی ۱ محاسبه می‌شود. به منظوریافتن فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه، باید متوسط هزینه‌ی کل سیستم به ازای مقادیر مختلفِ τ محاسبه شود تا مشخص شود به ازای کدام یک از آنها، متوسط هزینه‌ی کل کمینه می‌شود.

۴. الگوریتم شبیه‌سازی مونت‌کارلو

در این بخش، با توجه به شش حالتی که قبلاً اشاره شد، یک الگوریتم شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای محاسبه‌ی G_n ارائه می‌شود. شکل ۳ فلوچارت الگوریتم را نشان می‌دهد. پارامترهای ورودی عبارت اند از: عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ها (θ,t)، پارامترهای نرخ وقوع عیب و خرابی‌های پنهان و آشکار $(p_R,p_D,\eta_R,\beta_R,\eta_D,\beta_D,\eta_H,\beta_H)$، طول افق برنامه‌ریزی (T) و فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی (τ).

اگر عمر فعلی مؤلفه‌ی دوم برابر با Ag_2 باشد، آنگاه با استفاده از فرض ۸ رابطه‌ی ۴، زمان وقوع عیب (یعنی T_D) طبق رابطه‌ی زیر تولید می‌شود. پارامتر Ψ،

$$
\begin{gathered}
G_n(\sigma,t,\theta,i,j)=\underbrace{\begin{gathered}\int_O^{\sigma}\int_O^{z}\int_O^{u}\left\{\begin{matrix}[\varphi(x,0,u,z,0)+G_n(\sigma-z,t+x,\theta+z,i+1,j+1)]r_1(t+x)r_2(\theta+z)+\\ [\varphi(x,1,u,z,0)+G_n(\sigma-z,0,\theta+z,0,0)]\overline{r}_1(t+x)r_2(\theta+z)+\\ [\varphi(x,0,u,z,1)+G_n(\sigma-z,t+x,0,i+1,j+1)]r_1(t+x)\overline{r}_2(\theta+z)+\\ [\varphi(x,1,u,z,1)+G_n(\sigma-z,0,0,0,0)]\overline{r}_1(t+x)\overline{r}_2(\theta+z)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}f_{X_1}(x|t,i,j)\\ f_{U_1}(u|\theta)\\ f_{H_1}(z-u|\theta)\end{pmatrix}dxdudz+\\
\int_O^{\sigma}\int_O^{z}\int_O^{z-u}\left\{\begin{matrix}[\varphi(u+x,0,u,z,0)+G_n(\sigma-z,t+u+x,\theta+z,i+1,j+1)]r_1(t+u+x)r_2(\theta+z)+\\ [\varphi(u+x,1,u,z,0)+G_n(\sigma-z,0,\theta+z,0,0)]\overline{r}_1(t+u+x)r_2(\theta+z)+\\ [\varphi(u+x,0,u,z,1)+G_n(\sigma-z,t+u+x,0,i+1,j+1)]r_1(t+u+x)\overline{r}_2(\theta+z)+\\ [\varphi(u+x,1,u,z,1)+G_n(\sigma-z,0,0,0,0)]\overline{r}_1(t+u+x)\overline{r}_2(\theta+z)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}P_{X_1}(u|t,i,j)\\ f_{X_1}(x|t+u,i+1,j)\\ f_{U_1}(u|\theta)\\ f_{H_1}(z-u|\theta)\end{pmatrix}dxdudz\end{gathered}}_{\text{حالت اول}}\\
\underbrace{+\int_O^{\sigma}\int_O^{z}\left\{\begin{matrix}[\varphi(z,2,u,z,0)+G_n(\sigma-z,t+z,\theta+z,i+1,j+1)]r_2(\theta+z)+\\ [\varphi(z,2,u,z,1)+G_n(\sigma-z,t+z,0,i+1,j+1)]\overline{r}_2(\theta+z)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}P_{X_1}(u|t,i,j)P_{X_1}(z-u|t+u,i+1,j)\\ f_{U_1}(u|\theta)f_{H_1}(z-u|\theta)\end{pmatrix}dudz+}_{\text{حالت دوم}}\\
\underbrace{\begin{gathered}+\int_O^{\sigma}\int_O^{z}\left\{\begin{matrix}[\varphi(x,0,u,\sigma,0)+G_{n-1}(\tau,t+x,\theta+\sigma,i+1,j)]r_1(t+x)r_2(\theta+\sigma)+\\ [\varphi(x,1,u,\sigma,0)+G_{n-1}(\tau,0,\theta+\sigma,0,0)]\overline{r}_1(t+x)r_2(\theta+\sigma)+\\ [\varphi(x,0,u,\sigma,1)+G_{n-1}(\tau,t+x,0,i+1,j)]r_1(t+x)\overline{r}_2(\theta+\sigma)+\\ [\varphi(x,1,u,\sigma,1)+G_{n-1}(\tau,0,0,0,0)]\overline{r}_1(t+x)\overline{r}_2(\theta+\sigma)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}f_{X_1}(x|t,i,j)\\ f_{U_1}(u|\theta)\\ P_{H_1}(\sigma-u|\theta)\end{pmatrix}dxdu+\\
\int_O^{\sigma}\int_O^{\sigma-u}\left\{\begin{matrix}[\varphi(u+x,0,u,\sigma,0)+G_{n-1}(\tau,t+u+x,\theta+\sigma,i+1,j)]r_1(t+u+x)r_2(\theta+\sigma)+\\ [\varphi(u+x,1,u,\sigma,0)+G_{n-1}(\tau,0,\theta+\sigma,0,0)]\overline{r}_1(t+u+x)r_2(\theta+\sigma)+\\ [\varphi(u+x,0,u,\sigma,1)+G_{n-1}(\tau,t+u+x,0,i+1,j)]r_1(t+u+x)\overline{r}_2(\theta+\sigma)+\\ [\varphi(u+x,1,u,\sigma,1)+G_{n-1}(\tau,0,0,0,0)]\overline{r}_1(t+u+x)\overline{r}_2(\theta+\sigma)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}P_{X_1}(u|t,i,j)\\ f_{x_1}(x|t+u,i+1,j)\\ f_{U_1}(u|\theta)\\ P_{H_1}(\sigma-u|\theta)\end{pmatrix}dxdu\end{gathered}}_{\text{حالت سوم}}\\
\underbrace{+\int_O^{\sigma}\left\{\begin{matrix}[\varphi(\sigma,2,u,\sigma,0)+G_{n-1}(\tau,t+\sigma,\theta+\sigma,i+1,j)]r_2(\theta+\sigma)+\\ [\varphi(\sigma,2,u,\sigma,1)+G_{n-1}(\tau,t+\sigma,0,i+1,j)]\overline{r}_2(\theta+\sigma)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}P_{x_1}(u|t,i,j)P_{x_1}(\sigma-u|t+u,i+1,j)\\ f_{U_1}(u|\theta)P_{H_1}(\sigma-u|\theta)\end{pmatrix}du}_{\text{حالت چهارم}}\\
\underbrace{+\int_O^{\sigma}\left\{\begin{matrix}[\varphi(x,0,\sigma,\sigma,2)+G_{n-1}(\tau,t+x,\theta+\sigma,i,j)]r_1(t+x)+\\ [\varphi(x,1,\sigma,\sigma,2)+G_{n-1}(\tau,0,\theta+\sigma,0,0)]\overline{r}_1(t+x)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}f_{X_1}(x|t,i,j)\\ P_{U_1}(\sigma|\theta)\end{pmatrix}dx}_{\text{حالت پنجم}}\\
\underbrace{+[\varphi(\sigma,2,\sigma,\sigma,2)+G_{n-1}(\tau,t+\sigma,\theta+\sigma,i,j)]P_{X_1}(\sigma|t,i,j)P_{U_1}(\sigma|\theta).}_{\text{حالت ششم}}
\end{gathered}
\tag{21}
$$

یک عدد تصادفی بین و صفر و یک از توزیع یکنواخت است.

$$T_D=\eta_D((Ag_2/\eta_D)^{\beta_D}-\log(\Psi))^{1/\beta_D}-Ag_2. \tag{22}$$

سپس، با استفاده از فرض ۸ و رابطه‌ی ۷، زمان وقوع خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم (یعنی T_R) طبق رابطه‌ی زیر تولید می‌شود:

$$T_R=T_D+\eta_R((Ag_2/\eta_R)^{\beta_R}-\log(\Psi))^{1/\beta_R}-Ag_2. \tag{23}$$

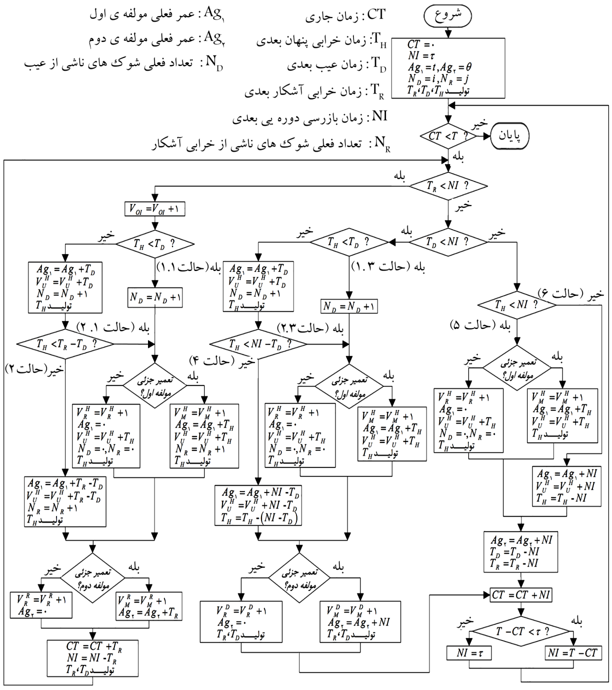
اگر عمر فعلی مؤلفه‌ی اول برابر با Ag_1 و تعداد شوک‌های ناشی از وقوع عیب و خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم به ترتیب برابر با N_D و N_R باشد، آن‌گاه با استفاده از فرض ۸ و رابطه‌ی ۱۱، زمان وقوع خرابی پنهان (T_H) طبق رابطه‌ی زیر تولید می‌شود:

$$T_H=\eta_H\left(\left(\frac{Ag_1}{\eta_H}\right)^{\beta_H}-\frac{\log(\Psi)}{(1+p_D)^{N_D}(1+p_R)^{N_R}}\right)^{1/\beta_H}-Ag_1. \tag{24}$$

در هر بار از اجرای این الگوریتم، مقدار متغیر تصادفی V در چرخه‌ی T محاسبه می‌شود. نهایتاً، پس از اجرای الگوریتم به تعداد کافی، میانگین مقادیر به دست آمده تخمینی برای متوسط متغیر تصادفی V (یعنی G_n) در نظر گرفته می‌شود.

۵. مثال عددی و تحلیل حساسیت

سیستمِ تأمین توان مصرفی در پست توزیع برق را در نظر بگیرید که از دو مؤلفه‌ی بانک خازنی (مؤلفه‌ی اول) و ترانس (مؤلفه‌ی دوم) تشکیل شده است (رجوع کنید



شکل ۳. فلوچارت شبیه‌سازی.

جدول ۱. پارامترهای مسئله.

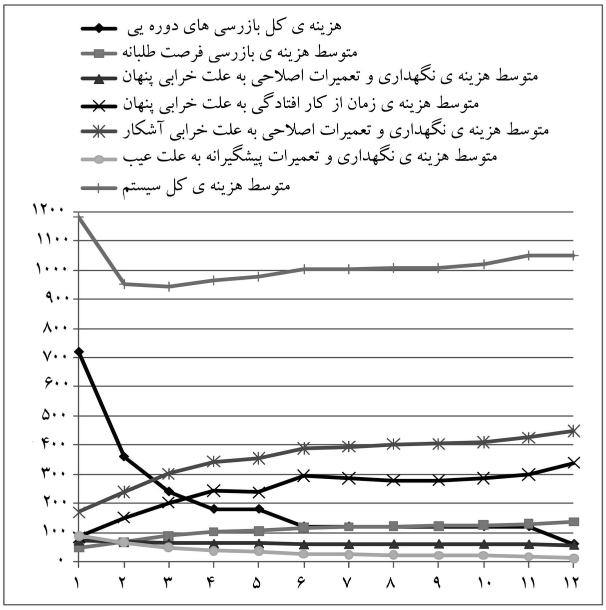
β_H	۱٫۸	p_D	٪۲۰	C_{PI}	۶۰	C_M^D	۱۵
η_H	۱۰	p_R	٪۲۰	C_{OI}	۶۰	C_R^D	۶۰
β_D	۲٫۱	a_1	۰٫۹	C_M^H	۲۵	C_M^R	۷۵
η_D	۴٫۶	b_1	۰٫۰۹۱۲	C_R^H	۷۵	C_M^R	۳۰۰
β_R	۲٫۵	a_2	۰٫۵	C_D^H	۱۲۰		
η_R	۲٫۲	b_2	۰٫۰۳۷۱				

به پاراگراف قبل از آخر مقدمه). هدف، تعیین فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه، τ^*، است به گونه‌یی که متوسط هزینه‌ی کل سیستم در چرخه‌ی T کمینه می‌شود.

فرض می‌شود که حداقلِ طول فاصله‌ی بازرسی برابر با یک ماه و افق برنامه‌ریزی، یک‌ساله است ($T = ۱۲$). همچنین، فرض می‌شود که سیستم از وضعیت نو شروع به کار می‌کند ($t = ۰$، $\theta = ۰$، $i = ۰$ و $j = ۰$) و $r_x(x) = a_k \quad exp(-b_k x)$. پارامترهای نرخ وقوع عیب و خرابی‌های پنهان و آشکار، پارامترهای $r_k(x)$ و پارامترهای هزینه ($\times ۱۰۰\$$) در جدول ۱ آورده شده است.

برای به دست آوردن τ^* لازم است تا متوسط هزینه‌ی کل سیستم، $E[C^T]$، به ازای مقادیر مختلف $\tau = ۱, ۲, ۳, ..., ۱۲$ محاسبه شود تا کمینه‌ی آن تعیین شود. به این منظور، ابتدا مقادیر $G_n(\tau, ۰, ۰, ۰, ۰)$ به ازای مقادیر مختلف $\tau = ۱, ۲, ۳, ..., ۱۲$ با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی با ۱۰۰۰۰ اجرا محاسبه می‌شود. سپس، به ازای مقادیر مختلف $\tau = ۱, ۲, ۳, ..., ۱۲$، $E[C^T]$ با استفاده از رابطه‌ی ۱ محاسبه می‌شود. نتایج در جدول ۲ و شکل ۴ آورده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه برابر با ۳ ماه به دست آمده است. با این راهبرد بازرسی، $E[C^T] = ۹۴۴/۴۸۲۵$ در کمترین مقدار خود خواهد بود، یعنی ۹۴/۴۴۸/۲۵$ در سال.

همان طوری که در جدول ۲ و شکل ۴ مشاهده می‌شود، با افزایش طول فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی (کاهش تعداد بازرسی‌های دوره‌یی)،



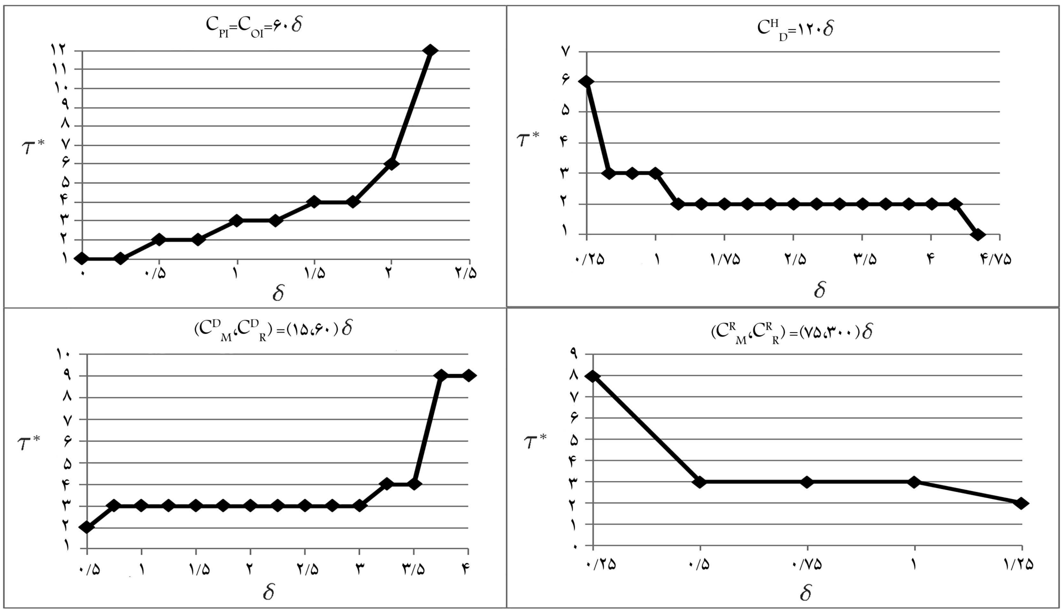
شکل ۴. هزینه‌ها ($\times ۱۰۰\$$) به ازای $\tau = ۱, ۲, ۳, ..., ۱۲$.

- هزینه‌های بازرسی دوره‌یی کاهش می‌یابد؛
- خرابی‌های پنهان، دیرتر شناسایی می‌شوند. بنابراین، تعداد کمتری از آنها در زمان‌های بازرسی شناسایی می‌شوند و زمان‌های از کار افتادگی افزایش می‌یابد. این امر باعث افزایش هزینه‌های جریمه‌ی زمان از کار افتادگی و کاهش هزینه‌های نگهداری و تعمیرات اصلاحی به علت خرابی‌های پنهان می‌شود؛
- احتمال تبدیل عیب‌های بالقوه‌ی به خرابی آشکار افزایش می‌یابد. بنابراین، تعداد بیشتری از عیب‌های بالقوه تبدیل به خرابی آشکار می‌شوند و تعداد کمتری از آنها در زمان بازرسی شناسایی می‌شوند. این امر باعث کاهش هزینه‌های نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به علت عیب‌های بالقوه و افزایش هزینه‌های نگهداری و تعمیرات اصلاحی به علت خرابی‌های آشکار می‌شود. همچنین، هزینه‌های بازرسی فرصت‌طلبانه افزایش می‌یابد.

بدیهی است که هزینه‌ی بازرسی، هزینه‌ی جریمه‌ی زمان از کار افتادگی و هزینه‌ی تعمیر جزئی و تعویض نقش تعیین‌کننده‌یی را در تعیین فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه دارند. برای بررسی این موضوع، با تغییر این مقادیر، مثال عددی مجدداً حل شده است و نتایج در شکل ۵ آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که اگر هزینه‌ی بازرسی برابر با صفر باشد، فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌های دوره‌یی برابر با کمترین مقدار خود یعنی یک ماه می‌شود. با افزایش هزینه‌ی بازرسی، همان طور که انتظار می‌رفت، بازرسی دوره‌یی با فواصل بیشتر توسط مدل پیشنهاد می‌شود. هزینه‌ی جریمه‌ی زمان از کار افتادگی بیشتر باعث کوتاه‌تر شدن فاصله‌ی بازرسی می‌شود؛ زیرا بازرسی دوره‌یی با فواصل کوتاه‌تر باعث شناسایی به هنگام‌تر خرابی‌های پنهان می‌شود. با افزایش هزینه‌ی تعمیر جزئی و تعویض به دلیل عیب، فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بلندتر می‌شود؛ زیرا هر چه این هزینه‌ها بیشتر افزایش یابند و به هزینه‌های تعمیر جزئی و تعویض به علت وقوع خرابی، بیشتر همگرا شوند، تمایل به انجام بازرسی برای شناسایی عیب‌های بالقوه کاهش می‌یابد. افزایش هزینه‌ی تعمیر جزئی و تعویض به دلیل خرابی آشکار منجر به بازرسی دوره‌یی با فواصل کوتاه‌تر می‌شود؛ زیرا فواصل بازرسی کوتاه‌تر باعث شناسایی به هنگام‌تر عیب‌های بالقوه می‌شود و در نتیجه تعداد کمتری از آنها به خرابی آشکار تبدیل می‌شوند.

جدول ۲. هزینه‌ها (۱۰۰$×) به ازای ۱۲ ,... ,۳ ,۲ ,۱ = τ.

τ	C^T_{PI}	$E[C^T_{OI}]$	$E[C^T_{CMH}]$	$E[C^T_{DH}]$	$E[C^T_{PMD}]$	$E[C^T_{CMR}]$	$E[C^T]$
۱	۷۲۰	۴۸٫۳۳۶۰	۷۱٫۷۹۷۵	۸۴٫۱۶۶۷	۸۷٫۵۴۴۵	۱۶۹٫۵۶۷۵	۱۱۸٫۴۱۲۲
۲	۳۶۰	۶۸٫۷۱۲۰	۶۶٫۶۹۵۰	۱۵۰٫۷۳۴۴	۶۵٫۶۰۷۰	۲۳۸٫۸۶۷۵	۹۵۰٫۶۱۵۹
۳	۲۴۰	۸۸٫۱۸۲۰	۶۳٫۳۲۰۰	۲۰۲٫۳۳۹۰	۴۸٫۶۲۴۰	۳۰۲٫۰۱۷۵	۹۴۴٫۴۸۲۵
۴	۱۸۰	۱۰۱٫۶۴۶۰	۶۱٫۸۹۲۵	۲۴۲٫۷۶۹۷	۳۷٫۳۴۱۰	۳۴۳٫۵۵۲۵	۹۶۷٫۲۰۱۷
۵	۱۸۰	۱۰۵٫۸۵۸۰	۶۲٫۸۱۲۵	۲۳۷٫۴۴۰۹	۳۵٫۰۱۳۰	۳۵۵٫۰۰۵۰	۹۷۶٫۱۲۹۴
۶	۱۲۰	۱۱۶٫۴۸۴۰	۵۸٫۷۸۵۰	۲۹۴٫۸۳۹۵	۲۵٫۱۷۱۵	۳۸۸٫۹۲۰۰	۱۰۰۴٫۲۰۰۰
۷	۱۲۰	۱۱۸٫۸۸۴۰	۵۹٫۹۱۷۵	۲۸۶٫۲۹۷۰	۲۴٫۱۷۱۰	۳۹۴٫۴۱۷۵	۱۰۰۳٫۶۸۷۰
۸	۱۲۰	۱۲۱٫۳۲۶۰	۶۰٫۹۲۲۵	۲۷۹٫۴۹۸۷	۲۲٫۳۰۲۰	۴۰۲٫۳۵۲۵	۱۰۰۶٫۴۰۱۷
۹	۱۲۰	۱۲۲٫۳۸۸۰	۶۱٫۶۳۷۵	۲۷۸٫۷۳۳۲	۲۱٫۶۰۱۵	۴۰۳٫۵۶۷۵	۱۰۰۷٫۹۲۷۷
۱۰	۱۲۰	۱۲۴٫۵۴۸۰	۶۰٫۷۷۷۵	۲۸۵٫۴۴۵۸	۲۰٫۸۷۸۵	۴۱۰٫۴۷۵۰	۱۰۲۲٫۱۲۴۸
۱۱	۱۲۰	۱۲۹٫۴۲۰۰	۶۰٫۲۰۵۰	۲۹۸٫۱۳۶۶	۱۷٫۲۸۴۵	۴۲۵٫۶۷۷۵	۱۰۵۰٫۷۲۳۶
۱۲	۶۰	۱۳۶٫۷۷۰۰	۵۷٫۴۳۲۵	۳۳۹٫۰۴۶۵	۱۰٫۷۹۲۵	۴۴۷٫۵۷۷۵	۱۰۵۱٫۶۱۹۰



شکل ۵. تحلیل حساسیت پارامترهای هزینه.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، تعیین فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه برای یک سیستم دومؤلفه‌یی با خرابی‌های پنهان و آشکار دومرحله‌یی مطالعه شد. خرابی مؤلفه‌ی اول از نوع پنهان است؛ یعنی باعث توقف سیستم نمی‌شود و فقط با بازرسی قابل شناسایی است ولی تأخیر در شناسایی آن، باعث افزایش هزینه‌های عملیاتی سیستم می‌شود. خرابی مؤلفه‌ی دوم، آشکار دومرحله‌یی است؛ یعنی مؤلفه‌ی دوم دارای سه وضعیت است: سالم، معیوب و خراب. وضعیت معیوب فقط با بازرسی شناسایی می‌شود ولی وضعیت خراب آشکار می‌شود و باعث توقف سیستم می‌شود. وقوع هر عیب و هر خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم باعث ایجاد شوک روی مؤلفه‌ی اول می‌شود و نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد. سیستم طبق سیاست بازرسی دوره‌یی به منظور شناسایی خرابی‌های پنهان و عیب‌های بالقوه، بازرسی می‌شود. علاوه بر این، مؤلفه‌ی اول به محض توقف سیستم (یعنی به محض وقوع خرابی آشکار مؤلفه‌ی دوم) نیز به صورت فرصت‌طلبانه بازرسی می‌شود.

هزینه‌ی کل سیستم شامل هزینه‌های بازرسی دوره‌یی و فرصت‌طلبانه، هزینه‌های زمان از کار افتادگی به دلیل خرابی‌های پنهان و همچنین هزینه‌های تعمیر جزئی و تعویض به دلیل خرابی‌های پنهان، عیب‌های بالقوه و خرابی‌های آشکار است. بازرسی سیستم با تواتر زیاد، از طرفی باعث افزایش هزینه‌های بازرسی دوره‌یی و هزینه‌های تعمیر و تعویض به دلیل خرابی‌های پنهان و عیب‌های بالقوه می‌شود. از طرف دیگر، موجب شناسایی به هنگام‌تر خرابی‌های پنهان و عیب‌های بالقوه‌می‌شود و از وقوع خرابی‌های آشکار جلوگیری می‌کند. در نتیجه، هزینه‌های جریمه‌ی زمان از کار افتادگی به دلیل خرابی‌های پنهان، هزینه‌های تعمیر و تعویض به دلیل وقوع

خرابی آشکار و هزینه‌های بازرسی فرصت‌طلبانه کاهش می‌یابد. بنابراین، بین تعداد بازرسی‌های دوره‌یی (فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی) و هزینه‌ی کل سیستم، توانی وجود دارد. هدف، یافتن فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی بهینه است به گونه‌یی که هزینه‌ی کل سیستم در یک افق زمانی محدود کمینه شود.

در روش پیشنهادی، ابتدا یک مدل ریاضی برای محاسبه‌ی هزینه‌ی کل بر حسب فاصله‌ی بازرسی دوره‌یی ارائه شد. سپس، به علت پیچیدگی محاسبات عددی، یک الگوریتم شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای حل مدل ارائه شد. نهایتاً، با محاسبه‌ی هزینه‌ی کل سیستم به ازای فواصل بازرسی مختلف، فاصله‌ی بهینه تعیین شد.

یک موضوع جذاب برای تحقیق آتی، بهینه‌سازی هم‌زمان فاصله‌ی بازرسی و اقدامات نگهداری و تعمیرات است. مدل ارائه شده را می‌توان با درنظرگرفتن وابستگی بین خرابی‌های داخلی و شوک‌های خارجی نیز توسعه داد. همچنین، می‌توان فواصل بازرسی غیردوره‌یی را نیز در نظر گرفت.[۳۶] علاوه بر این، می‌توان مدل پیشنهادی را برای سیستم‌های چندمؤلفه‌یی که در آنها خرابی بیش از یک مؤلفه از نوع پنهان یا آشکار دومرحله‌یی است، تعمیم داد.

منابع (References)

1. Wang, W. "An inspection model based on a three-stage failure process", *Reliability Engineering & System Safety*, **96**, pp. 838-848 (2011).

2. Taghipour, S., Banjevic, D. and Jardine, A.K.S. "Reliability analysis of maintenance data for complex medical devices",*Quality and Reliability Engineering International*, **27**, pp. 71-84 (2011).

3. Wang, W. "An overview of the recent advances in delay-time-based maintenance modeling", *Reliability Engineering & System Safety*, **106**, pp. 165-178 (2012).

4. Barlow, R.E., Hunter, L.C. and Proschan, F. "Optimum checking procedures", *Journal of the society for industrial and applied mathematics*, **11**, pp. 1078-1095 (1963).

5. Christer, A. "Innovative decision making", *Proceedings of the NATO Conference on the Role and Effectiveness of Theories of Decision in Practice, Hodder & Stoughton*, pp. 368-377 (1976).

6. Christer, A., *A review of delay time analysis for modelling plant maintenance*. In Stochastic models in reliability and maintenance, S. Osaki, Ed., pp. 89-123, Springer (2002).

7. Nakagawa, T. Maintenance theory of reliability, Springer Science & Business Media (2006).

8. Nakagawa, T., *Advanced reliability models and maintenance policies, Springer Science & Business Media* (2008).

9. Wang, W., *Delay time modeling, In Complex system maintenance handbook, D.N.P. Murthy and A.K.S. Kobbacy*, Eds., pp. 345-370, Springer (2008).

10. Wang, W., *Delay time modeling for optimized inspection intervals of production plant*, -In Handbook of Maintenance Management and Engineering, M. Ben-Daya, S.O.D Abdul Raouf, J. Knezevic and D. Ait-Kadi, Eds., pp. 479-498, Springer (2009).

11. Cho, D.I. and Parlar, M. "A survey of maintenance models for multi-unit systems", *European Journal of Operational Research*, 51, pp. 1-23 (1991).

12. Dekker, R., Wildeman, R.E. and Van der Duyn Schouten, F.A. "A review of multi-component maintenance models with economic dependence", *Mathematical methods of operations research*, **45**, pp. 411-435 (1997).

13. Nicolai, R.P. and Dekker, R. "Optimal maintenance of multi-component systems: a review", *In Complex system maintenance handbook, D.N.P. Murthy and A.K.S. Kobbacy*, Eds., pp. 263-286, Springer (2008).

14. Nowakowski, T. and Werbińka, S. "On problems of multicomponent system maintenance modeling", *International Journal of Automation and Computing*, **6**, pp. 364-378 (2009).

15. Thomas, L. "A survey of maintenance and replacement models for maintainability and reliability of multi-item systems", *Reliability Engineering*, **16**, pp. 297-309 (1986).

16. Wang, H. "A survey of maintenance policies of deteriorating systems",*European journal of operational research*, **139**, pp. 469-489 (2002).

17. Nakagawa, T. and Mizutani, S. "A summary of maintenance policies for a finite interval", *Reliability Engineering & System Safety*, **94**, pp. 89-96 (2009).

18. Taghipour, S., Banjevic, D. and Jardine, A.K.S. "Periodic inspection optimization model for a complex repairable system", *Reliability Engineering & System Safety*, **95**, pp. 944-952 (2010).

19. Taghipour, S. and Banjevic, D. "Periodic inspection optimization models for a repairable system subject to hidden failures", *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, pp. 275-285 (2011).

20. Taghipour, S. and Banjevic, D. "Optimum inspection interval for a system under periodic and opportunistic inspections", *IIE Transactions*, **44**, pp. 932-948 (2012).

21. Taghipour, S. and Banjevic, D. "Optimal inspection of a complex system subject to periodic and opportunistic inspections and preventive replacements", *European Journal of Operational Research*, **220**, pp. 649-660 (2012).

22. Babishin, V. and Taghipour, S. "Optimal maintenance policy for multicomponent systems with periodic and opportunistic inspections and preventive replacements",

Applied Mathematical Modelling, **40**, pp. 10480-10505 (2016).

23. Wang, W. and Christer, A. "Solution algorithms for a nonhomogeneous multi-component inspection model", *Computers & Operations Research*, **30**, pp. 19-34 (2003).
24. Scarf, P.A. and Cavalcante, C.A. "Hybrid block replacement and inspection policies for a multi-component system with heterogeneous component lives", *European Journal of Operational Research*, **206**, pp. 384-394 (2010).
25. Wang. W., Banjevic, D. and Pecht, M. "A multi-component and multi-failure mode inspection model based on the delay time concept", *Reliability Engineering & System Safety*, **95**, pp. 912-920 (2010).
26. Wang, W. and Banjevic, D. "Ergodicity of forward times of the renewal process in a block-based inspection model using the delay time concept", *Reliability Engineering & System Safety*, **100**, pp. 1-7 (2012).
27. Lai, M-T. and Chen, Y-C. "Optimal periodic replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction", *The international journal of advanced manufacturing technology*, **29**, pp. 367-371 (2006).
28. Sheu, S-H., Liu, T-H., Zhang, Z.G. and et al. "Extended optimal replacement policy for a two-unit system with shock damage interaction", *IEEE Transactions on Reliability*, **64**, pp. 998-1014 (2015).
29. Sheu, S-H., Sung, C-K., Hsu, T-S. and et al. "Age replacement policy for a two-unit system subject to non-homogeneous pure birth shocks", *Applied Mathematical Modelling*, **37**, pp. 7027-7036 (2013).
30. Golmakani, H.R. and Moakedi, H. "Periodic inspection optimization model for a two-component repairable system with failure interaction", *Computers & Industrial Engineering*, **63**, pp. 540-545 (2012).
31. Gao, Q. and Ge, Y. "Maintenance interval decision models for a system with failure interaction", *Journal of Manufacturing Systems*, **36**, pp. 109-114 (2015).
32. Cavalcante, C.A. and Lopes, R.S. "Multi-criteria model to support the definition of opportunistic maintenance policy: A study in a cogeneration system", *Energy*, **80**, pp. 32-40 (2015).
33. Iung, B., Do, P., Levrat, E. and et al. "Opportunistic maintenance based on multi-dependent components of manufacturing system", *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, **65**, pp. 401-404 (2016).
34. Salari, N. and Makis, V. "Optimal preventive and opportunistic maintenance policy for a two-unit system", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **89**, pp. 665-673 (2017).
35. Zhang, X. and Zeng, J. "A general modeling method for opportunistic maintenance modeling of multi-unit systems", *Reliability Engineering & System Safety*, **140**, pp. 176-190 (2015).
36. Golmakani, H.R. and Moakedi, H. "Optimization of periodic and non-periodic inspection intervals for a multi-component repairable system with failure interaction", *Sharif Industrial Engineering and Management Journal*, **29**(2), pp. 41-51 (In Persian) (2014).