مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۸)
دوره‌ی ۱-۳۵، شماره‌ی ۱/۱، ص. ۱۳۵-۱۴۷

Original Article

تصمیمات قیمت‌گذاری و دوره‌ی گارانتی برای محصولات جایگزین با در نظر گرفتن راهبردهای همکاری و عدم همکاری شرکت‌ها

مهدی تقی‌پور (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب
عطاالله طالعی زاده* (استادیار)
دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده فنی، دانشگاه تهران

در این مقاله تصمیمات قیمت‌گذاری و دوره‌ی گارانتی برای دو محصول جایگزین در یک زنجیره‌ی تأمین با یک خرده فروش مشترک و دو تولیدکننده‌ی رقابتی در نظر گرفته شده است. هدف، تحلیل اثرات راهبردهای مختلف رقابتی و ساختارهای قدرت مختلف اعضای کانال بر تصمیمات قیمت‌گذاری مطلوب است. پنج مدل غیرمتمرکز در بازی استکلبرگ و نش با در نظر گرفتن راهبردهای همکاری/غیرهمکاری تولیدکنندگان و قدرت قراردادهای شرکت‌ها ایجاد شد. شکل‌های مختلف تصمیم‌گیری متعادل شناخته شد. از طریق مقایسات و تحلیل‌های نظام‌مند، برخی بینش‌های ارزشمند مدیریتی و اثرات راهبردهای مختلف تصمیم‌گیری در تولیدکنندگان و قدرت بازار در مدل‌های مختلف بررسی و مشخص شد که خرده‌فروش وقتی به عنوان یک رهبر باشد، دارای سود بالاتری است و همه‌ی اعضای این شبکه، به ویژه مصرف‌کنندگان، به دنبال قیمت‌های پایین‌تر در خرده فروشی، دوره‌ی گارانتی طولانی‌تر، و سود بیشترند که این امر نیازمند اتخاذ همکاری تولیدکنندگان خواهد بود.

واژگان کلیدی: قیمت‌گذاری، تصمیم‌گیری دوره‌ی گارانتی، محصولات جایگزین، نظریه‌ی بازی‌ها.

farzad_tg@yahoo.com
taleizadeh@ut.ac.ir

۱. مقدمه

امروزه در بازار، قیمت به عنوان یک عامل تعیین‌کننده برای بقا و بهره‌وری یک شرکت محسوب می‌شود. تولیدکنندگان و خرده‌فروشان با کاهش قیمت سعی در فریب مشتریان و افزایش فروش دارند. علاوه‌بر قیمت، شرکت‌های زیادی نیز با هدف بهبود خدمات و گارانتی و بالا بردن کیفیت سعی در شکل‌گیری یک نام تجاری قابل اطمینان دارند. گارانتی به عنوان یک شیوه‌ی ارزیابی محبوب برای تشویق تقاضا در بازار محسوب می‌شود که با کاهش خطرات احتمالی ممکن برای مشتریان و افزایش مسئولیت‌پذیری شرکت‌های تولید کننده یک عامل کلیدی و مهم در بقای این شرکت‌هاست.[۱و۲] شرکت‌ها مسئولیت اجتماعی و زیست‌محیطی با توجه به دوره‌ی گارانتی دارند. اگر تولیدکننده[۱] قول تعمیر محصولات را در طول یک دوره‌ی زمانی مشخص به مصرف‌کننده بدهد و اطمینان از مدت زمان کارکرد آن را برای مشتریان حاصل نماید، این امر می‌تواند نقش مهمی را در تعیین کل هزینه‌ی محصول ایفا کند.[۳] سیاست گارانتی رضایت‌بخش، قطعاً باعث افزایش تمایل مصرف‌کنندگان برای خرید محصولات به نفع پایداری و بقای کسب و کار شرکت می‌شود. از این رو شرکت‌ها باید در ایجاد اطمینان طولانی مدت به مشتریان با هم رقابت کنند. با این حال، یک شرکت باید تعادلی بین سرمایه‌گذاری و بهره‌وری ناشی از دادن ضمانت به مشتریان برقرار کند تا بتواند هزینه‌های مربوط به دوره‌ی گارانتی را متقبل شود.

امروزه، رایج است که یک خرده‌فروش به خرده‌فروشی محصولات مختلف با جایگزینی تهیه‌ی اقلام از تولیدکنندگان مختلف بپردازد. مثلاً وال‌مارت نشان‌های تجاری جایگزین از موادشوینده مانند نام‌های تجاری یونیلور (Surf, Wisk) و نام‌های تجاری P&G (Tide, Gain, Cheer) را به فروش می‌رساند. اگر چه تولیدکنندگان می‌توانند محصولات جایگزین را در بسیاری از سطوح به خرده‌فروش مشترک[۲] عرضه کنند، رقابت قیمت بین تولیدکنندگان اجتناب‌ناپذیر و حیاتی است.[۴]

مقدار قابل توجهی از تحقیقات در مورد محصولات جایگزین زنجیره‌ی تأمین انجام شده است (مثلاً[۵-۸]) تعداد زیادی از آنها بر مشکلات تولید/موجودی مشترک و قیمت‌گذاری متمرکز شده‌اند. برای بررسی‌های مرتبط به[۹و۱۰] مراجعه شود. در

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۴/۲۸، اصلاحیه ۱۳۹۶/۷/۱۸، پذیرش ۱۳۹۶/۸/۹.
DOI:10.24200/J65.2019.7180.1737

برخی از مطالعات اخیر، برای مثال[۱۱] یک مدل پایه با تقاضای قطعی برای بررسی چگونگی تعیین مقدار سفارش یک خرده‌فروش و قیمت خرده‌فروشی دو محصول جایگزین به‌طور مشترک تحت راهبردهای قیمت‌گذاری ثابت و متغیر ارائه شده است.[۷] مسئله‌ی متمرکز موجودی پسرک روزنامه فروش را با دو محصول جایگزین که تقاضاهای آنها همبستگی منفی دارند، حل کرده است.[۵] یک دوره‌ی مشترک مشکل قیمت‌گذاری و تهیه‌ی دو محصول جایگزین یک‌طرفه را در نظر گرفته است.[۱۲] یک مدل موجودی دو محصول متمرکز با جایگزینی کامل را در نظر گرفته است. محققان این مقاله ثابت کردند که کل عملکرد سود مورد انتظار مقعر و عبارات تحلیلی از سطح مطلوب موجودی مشتق شده است.[۱۳] راهبرد موجودی یک خرده‌فروش برای دو محصول، که جایگزین هستند و موجودی وابسته به تقاضا است، مطالعه کرده است. برخی از مقاله‌های دیگر، هماهنگی کانال از محصولات جایگزین زنجیره‌ی تأمین را مورد مطالعه قرار داده‌اند. مثلاً [۳و۱۲-۱۶]

مطالعاتی در قیمت‌گذاری محصولات جایگزین صورت گرفته است. مثلاً[۴و۱۷-۱۹] دو تولیدکننده با استفاده از دو خریدار مشترک را که با یکدیگر رقابت قیمتی دارند، در نظر گرفته است.[۲۰] دو تولیدکننده و دو خرده‌فروش مشترک را برای تصمیمات قیمت‌گذاری در نظر گرفته است و نشان می‌دهد که با وجود اثر رقابتی در هر دو خرده‌فروش و تولیدکننده سطح توزیع تأثیر قابل توجهی بر قیمت‌ها می‌گذارد.[۱۹] قیمت‌گذاری پویا را برای دو محصول (یکی جدید و دیگری تعمیر شده‌ی سایر محصولات است) در نظر گرفته است. آنها تصور می‌کنند که تقاضا در بازار وابسته به قیمت و تا حدی بین محصولات جدید و تعمیرشده جایگزین است.[۴] رقابت بین دو تأمین‌کننده‌ی همراه در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی که در آن هر عرضه‌کننده یک نوع از دو محصول جایگزین را به خریداران متعدد ارائه می‌دهد، مورد مطالعه قرار داده است.[۲۱] مشکل قیمت‌گذاری محصولات جایگزین در زنجیره‌ی تأمین فازی دوسطحی را بررسی کرده است.[۲۲] ساختارهای قدرت مختلف در یک زنجیره‌ی تأمین با دو تولیدکننده با فروش محصولات جایگزین از طریق یک خرده‌فروش مشترک را تجزیه و تحلیل کرده است و تولیدکنندگان استکلبرگ،[۳] خرده‌فروشان استکلبرگ و مدل‌های قیمت‌گذاری عمودی نش[۴] را ارائه داده است.

در یک کانال بازاریابی، هر دو تولیدکننده و خرده‌فروش باید دارای «قدرت»،[۲۳] به معنای « تصمیم‌گیری » باشند.[۲۴] ساختار قدرت‌های مختلف در زنجیره‌ی تأمین در دنیای واقعی ظاهر می‌شود. برای مثال، سازندگان قدرتمند مانند مایکروسافت و اینتل، بیش از نقش غالب اعضای پایین‌دست در برخی از زنجیره‌ها بازی می‌کنند. علاوه‌بر این، شرکت‌های در سطح مشابه از زنجیره‌ی تأمین ممکن است تصمیم‌گیری‌های خود را به عنوان حرکت راهبردی در زمان در نظر بگیرند، که به ساختارهای قدرت مختلف بین آنها منجر خواهد شد. یک مثال دنیای واقعی تسکو است که به پیروی از وال مارت به بازار مواد غذایی هند وارد شد.[۲۵]

مدت زمان گارانتی و عمر محصول با توجه به دلایل ذکرشده در بالا اخیراً بسیار مورد توجه قرارگرفته است.[۲۶] یک مدل تغییرات عمر محصول را برای گارانتی در نظر گرفت که شامل حداقل تعمیر و همچنین برنامه‌های در نظرگرفته شده برای جایگزینی محصول است.[۲۷] عملکرد هزینه‌ی روغن بیودیزل نخل در تایلند را با سوخت دیزلی با توجه به اثرات جانبی آنها مقایسه کرده است. در این تحقیق هزینه‌های مربوط به حفاظت زیست‌محیطی و اجتماعی و همچنین هزینه‌های مربوط به چرخه‌ی تولید سوخت بیودیزل به‌عنوان هزینه‌های خارجی در نظرگرفته شده است.[۲۸] یک قرارداد خدمات تعمیر و نگهداری ویژه برای نوع خاصی از خرابی محصولات که معایب آنها فقط توسط گروه خاصی از بازرسان شناسایی می‌شود، در نظر گرفته است.[۲۹و۳۰] مسائل مربوط به راهبردهای قیمت‌گذاری تولیدکننده را در زنجیره‌ی تأمین محصولات برای مصرف‌کنندگان که شامل یک تولیدکننده و دو رهبر رقابتی است، بررسی کرده است. بحث قدرت‌های مختلف در اعضای زنجیره‌ی تأمین و تأثیر همکاری و عدم همکاری[۵] در[۳۱-۳۳] ارائه شده است. در مطالعه‌ی حاضر، یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی با دو تولیدکننده‌ی رقابتی و یک خرده‌فروش مشترک در نظر گرفته شده است. سفارش‌های خرده‌فروش مشترک، دو محصول جایگزین از دو تولیدکننده است که آنها را در همان بازار به فروش می‌رساند و تولیدکنندگان محصولاتشان را با گارانتی به فروش می‌رسانند که گارانتی محصولات در میزان سفارش خرده‌فروش تأثیر دارد به‌صورتی که هر چه قیمت محصول کمتر و دوره‌ی گارانتی طولانی‌تر باشد، تمایل خرده‌فروش به خرید آن محصول بیشتر است. خرده‌فروش قیمت فروش به بازار و دو تولیدکننده قیمت عمده‌فروشی به خرده‌فروش را تعیین می‌کنند.

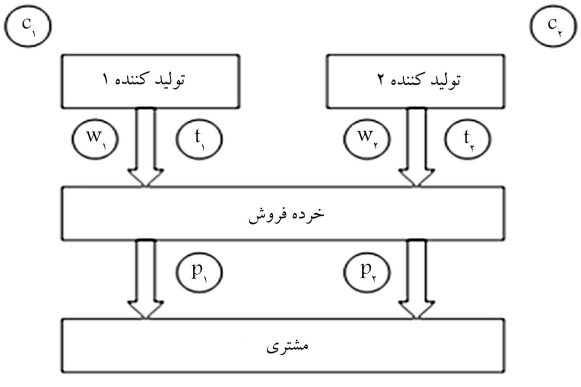
در ادامه در بخش ۲ تابع تقاضای حساس به قیمت و دوره‌ی گارانتی و توابع سود اعضای زنجیره‌ی تأمین، در بخش ۳ مثال عددی، و در بخش ۴ تحلیل حساسیت به ازای مقادیر مختلف پارامترها و در بخش ۵ نتایج و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی ارائه شده است.

۲. بیان مسئله

همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، ما دو زنجیره‌ی تأمین را با سه عضو مستقل، ریسک خنثی و بیشینه‌سازی سود در تعامل با خرده‌فروش و دو تولیدکننده (تولیدکننده‌ی ۱ و تولیدکننده‌ی ۲) در نظرگرفته‌ایم. تولیدکننده‌ی ۱ تولید محصول ۱ با قیمت واحد c_1 و قیمت فروش به خرده فروش w_1 را بر عهده دارد (در مورد تولیدکننده‌ی ۲ نیز این‌گونه است). سپس خرده‌فروش کالای ۱ یا ۲ را با قیمت p_1 و p_2 به مصرف‌کنندگان می‌فروشد. فرض می‌کنیم که محصولات ۱ و ۲ به لحاظ عملکرد جایگزین یکدیگرند (به عنوان مثال مارگارین و کره، چای و قهوه، قند و شکر، و غیره) و تمام فعالیت‌ها در یک دوره‌ی واحد اتفاق می‌افتد.

پارامترها و متغیرهای تصمیم:

- α_i: تقاضای اولیه از محصول i؛
- p_i: قیمت واحد فروشی از محصول i، که متغیر تصمیم‌گیری خرده‌فروش است؛
- t_i: دوره‌ی گارانتی محصول i، که متغیر تصمیم‌گیری تولیدکننده است؛
- η_i: ضرایب گارانتی بازده سرمایه‌گذاری محصول i؛



شکل ۱. زنجیره‌ی تأمین با دو تولیدکننده و یک خرده‌فروش مشترک.

- w_i: قیمت واحد عمده‌فروشی از محصول i، که متغیر تصمیم‌گیری تولیدکننده است؛
- c_i: هزینه‌ی تولید واحد از محصول i؛
- β_p: حساسیت تقاضای محصول به قیمت خرده‌فروشی خود؛
- γ_p: حساسیت تقاضای یک محصول به قیمت خرده‌فروشی محصول جایگزین آن، $\beta_p > \gamma_p$؛
- β_t: حساسیت تقاضای محصول به دوره‌ی گارانتی خود؛
- γ_t: حساسیت تقاضای محصول به دوره‌ی گارانتی محصول جایگزین آن، $\beta_t > \gamma_t$؛
- D_i: تقاضا برای محصول i.

به‌منظور داشتن یک مدل تحلیلی و برای دست‌یابی به شناخت واضح‌تر به این مسائل فرض می‌کنیم که تقاضای مصرف‌کننده به صورت خطی وابسته به دو عامل قیمت خرده‌فروش و دوره‌ی گارانتی ارائه شده توسط تولیدکنندگان است. در این زمینه ما تأثیر خدمات خرده‌فروش بر تقاضای مصرف‌کنندگان را نادیده گرفته‌ایم. تفاوت در شناخت مصرف‌کنندگان برای تهیه‌ی یک محصول به دوره‌ی گارانتی بستگی دارد. همچنین فرض می‌کنیم که میزان بازگشت پول سرمایه‌گذاری شده توسط تولیدکننده در طول دوره‌ی گارانتی به دلیل هزینه‌های زیاد، کم است. این کاهش بازگشت دوره‌ی گارانتی را می‌توان با فرم‌های درجه دوم هزینه‌های گارانتی به دست آورد. در مدل حاضر، فرض می‌کنیم که هزینه‌ی ارائه‌ی خدمات گارانتی در دوره‌ی t_1، برای محصول i، $i = 1, 2$، $\frac{\eta_i t_i^2}{2}$ است و η_1 و η_2 (عوامل هزینه‌ی گارانتی) متفاوت از هزینه‌های نسبی تولیدکنندگان در اجرای دوره‌ی گارانتی‌اند. تابع خطی تقاضا که برای محصول i استفاده می‌شود و بیان‌کننده‌ی همان مقدار سفارش خرده‌فروش می‌باشد، عبارت است از:

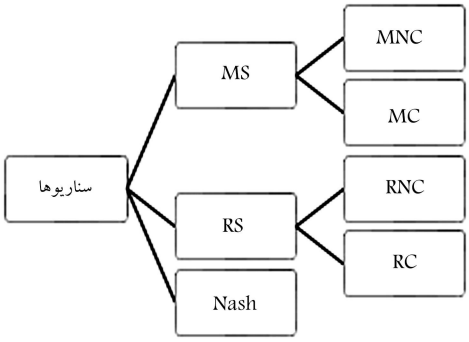
$$D_i = \alpha_i - \beta_p p_i + \gamma_p p_j + \beta_t t_i - \gamma_t t_j; \quad i = 1, 2;\ j = 3 - 1 \qquad (1)$$

که در آن α_i نشان‌دهنده‌ی تقاضای اولیه، β_p نشان‌دهنده‌ی حساسیت قیمتی محصول i به تقاضا، γ_p نشان‌دهنده‌ی حساسیت قیمتی محصول i به تقاضا در مقابل قیمت محصول j است. توضیح مشابه را می‌توان برای پارامترهای مربوط به گارانتی β_t و γ_t ارائه کرد. مدل می‌تواند در مواردی که دو تولیدکننده β_t و γ_t متفاوتی دارند، گسترش یابد. اثرات متفاوت بین حساسیت دوره‌ی گارانتی مشتریان برای دو محصول را می‌توان از طریق ضرایب بازده سرمایه‌گذاری در دوره‌ی گارانتی η_1 و η_2 بررسی کرد.

فرض: پارامترهای α_i، β_p، β_t، γ_p و γ_t همگی نامنفی‌اند و همین‌طور $\beta_p > \gamma_p$ و $\beta_t > \gamma_t$. $\beta_p > \gamma_p$ نشان می‌دهد که تقاضا برای محصول i باید به تغییرات قیمت خود p_i از تغییرات در قیمت فروش محصول جایگزین p_j حساس‌تر باشد. همچنین توضیحات مشابه در مورد $\beta_t > \gamma_t$ نیز صدق می‌کند. تابع سود دو تولیدکننده و خرده‌فروش به صورت زیر مدل‌سازی می‌شوند.

$$\pi_r = \sum_i (p_i - w_i) D_i \qquad (2)$$

$$\pi_{mi} = (w_i - c_i) D_i - \frac{\eta_i}{2} t_i^2 \quad i = 1, 2; j = 3 - i \qquad (3)$$



شکل ۲. پنج مدل غیرمتمرکز تصمیم‌گیری قیمت‌گذاری و مدت‌زمان گارانتی.

که در آن اندیس‌های r، m_1 و m_2 به ترتیب نشان‌گر خرده فروش و تولیدکننده‌ی ۱ و تولیدکننده‌ی ۲ هستند. دو تولیدکننده باید قیمت عمده‌فروشی خود را به همراه دوره‌ی گارانتی مدنظر قرار دهند و با توجه به زمینه‌ی همکاری با خرده‌فروشان سعی در دست‌یابی به سود بیشینه نمایند؛ این عملکرد باعث شکل‌گیری توازن بین ساختارهای هزینه و تقاضا خواهد شد. ما به تصمیم‌گیری‌های بهینه‌ی دو تولیدکننده در قیمت عمده‌فروشی و دوره‌ی گارانتی و تصمیم‌گیری‌های بهینه‌ی خرده‌فروش در زیرساختارهای قدرتی مختلف برخوردیم. یکی از آنها سناریوی تولیدکننده - رهبر استکلبرگ است که قدرت خرده‌فروش در مقایسه با تولیدکنندگان کمتر است و دو تولیدکننده به عنوان رهبران استکلبرگ و خرده‌فروش به عنوان پیرو استکلبرگ عمل می‌کنند، (سناریوی MS [6]). دیگری سناریوی خرده‌فروش - رهبر استکلبرگ است که در آن قدرت خرده‌فروش در مقایسه با تولیدکنندگان بیشتر است و خرده‌فروش به عنوان رهبر استکلبرگ و دو تولیدکننده به عنوان پیروان استکلبرگ عمل می‌کنند، (سناریوی RS [7]). در هر سناریو ما راهبرد تصمیم دو تولیدکننده را (همکاری و عدم همکاری) در نظر گرفته‌ایم. روش بازی نظری برای تجزیه و تحلیل مسئله‌ی تصمیم‌گیری استفاده و مسئله به‌صورت عقبگرد حل شده است. شکل ۲ این سناریوها را نشان می‌دهد.

۱.۲. مدل‌ها در سناریوی MS

در این بخش، ما فرض می‌کنیم که دو تولیدکننده به عنوان رهبران استکلبرگ و خرده‌فروش به عنوان پیرو استکلبرگ باهم همکاری دارند. ما دو مدل تصمیم‌گیری غیرمتمرکز را با در نظر گرفتن راهبردهای تصمیم‌گیری در دو تولیدکننده (همکاری و عدم همکاری) ایجاد کردیم.

۱.۱.۲. مدل MNC

در این مورد، فرض می‌کنیم که دو تولیدکننده به دنبال عملکرد عدم همکاری هستند و تصمیمات خود را به‌طور هم‌زمان می‌گیرند. دو تولیدکننده ابتدا قیمت عمده‌فروشی و دوره‌ی گارانتی خود را اعلام می‌کنند، خرده فروش با توجه به تصمیمات دو تولیدکننده اقدام به خرید محصولات جایگزین آنها می‌کند. مدل MNC به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \max\limits_{(w_1,t_1)} \pi_{m1}(w_1, t_1, p_1^*(w_1, t_1, w_2, t_2), p_2^*(w_1, t_1, w_2, t_2)) \\ \max\limits_{(w_2,t_2)} \pi_{m2}(w_2, t_2, p_1^*(w_1, t_1, w_2, t_2), p_2^*(w_1, t_1, w_2, t_2)) \\ \left\{ \max\limits_{(p_1,p_2)} \pi_r(p_1, p_2) \right. \end{cases}$$

در این مدل تابع سود دو تولیدکننده تابعی از دوره‌ی گارانتی، قیمت عمده‌فروشی و قیمت خرده‌فروشی است. طبیعتاً با توجه به جایگزین بودن دو کالا، قیمت هر دو بر روی تقاضای دو کالا تأثیر می‌گذارد و نهایتاً تابع سود دو تولیدکننده متأثر از قیمت خرده‌فروشی خواهد بود. همچنین تابع سود خرده‌فروش تابعی از قیمت خرده‌فروشی دو محصول است. با توجه به اهداف دو تولیدکننده، پاسخ توابع خرده‌فروشان را به شکل زیر نشان می‌دهیم:

قضیه ۱: در مدل MNC، تصمیمات w_1، t_1، w_2 و t_2 از طریق دو تولیدکننده شکل می‌گیرد، و قیمت‌های بهینه‌ی خرده‌فروشی نیز از روابط زیر به دست می‌آید:

$$p_1^*(w_1,t_1,w_2,t_2)=\frac{w_1}{2}+\frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_1+\frac{\beta_t\gamma_p-\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_2+\frac{\beta_p\alpha_1+\gamma_p\alpha_2}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)} \quad (4)$$

$$p_2^*(w_1,t_1,w_2,t_2)=\frac{w_2}{2}+\frac{\beta_t\gamma_p-\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_1+\frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_2+\frac{\beta_p\alpha_2+\gamma_p\alpha_1}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)} \quad (5)$$

اثبات: از رابطه‌ی ۳، اولین جزء مشتق شده از $\pi_r(p_1,p_2)$، p_1 و p_2 می‌باشند که در ادامه نشان داده شده‌اند:

$$\frac{\partial\pi_r(p_1,p_2)}{\partial p_1}=\alpha_1-2\beta_p p_1+2\gamma_p p_2+\beta_p w_1-\gamma_p w_2+\beta_t t_1-\gamma_t t_2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial\pi_r(p_1,p_2)}{\partial p_2}=\alpha_2-2\beta_p p_2+2\gamma_p p_1+\beta_p w_2-\gamma_p w_1+\beta_t t_2-\gamma_t t_1 \quad (7)$$

به‌منظور بررسی ماتریس هسین برای بهینگی، مشتقات جزئی مرتبه دوم به شرح زیر داده می‌شوند:

$$\frac{\partial^2\pi_r(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}=\frac{\partial^2\pi_r(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}=-2\beta_p \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2\pi_r(p_1,p_2)}{\partial p_1\partial p_2}=\frac{\partial^2\pi_r(p_1,p_2)}{\partial p_2\partial p_1}=2\gamma_p \quad (9)$$

یک ماتریس هسین از معادلات ۸ و ۹ مشخص و فرض کردیم که $\beta_p > \gamma_p$. بنابراین $\pi_r(p_1,p_2)$ مشترکاً در p_1 و p_2 قرار دارد. معادلات ۶ و ۷ را با صفر برابر دانسته و پس از حل آنها به‌طور هم‌زمان معادلات ۴ و ۵ را خواهیم داشت که با حل دو معادله دو مجهول قضیه‌ی ۱ ثابت می‌شود. داشتن اطلاعات در مورد تصمیمات مربوط به خرده‌فروش، و پس از آن استفاده از اطلاعات تولیدکنندگان، به‌طور هم‌زمان باعث بیشینه‌سازی سودمندی آنها خواهد شد.

قضیه ۲: در مدل MNC، قیمت عمده‌فروشی بهینه برای دو تولیدکننده (w_{mnc1}^*, w_{mnc2}^*) و دوره‌ی گارانتی بهینه (t_{mnc1}^*, t_{mnc2}^*) عبارت‌اند از:

$$t_{mnc1}^*=\frac{\beta_t\begin{bmatrix}(4\beta_p\eta_2+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(\alpha_1+\beta_p c_1)\\+(2\gamma_p\eta_2+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(\alpha_2+\beta_p c_2)\end{bmatrix}}{(4\beta_p\eta_1+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(4\beta_p\eta_2+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)-(2\gamma_p\eta_1+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(2\gamma_p\eta_2+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)} \quad (10)$$

$$t_{mnc2}^*=\frac{\beta_t\begin{bmatrix}(4\beta_p\eta_1+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(\alpha_2+\beta_p c_2)\\+(2\gamma_p\eta_1+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(\alpha_1+\beta_p c_1)\end{bmatrix}}{(4\beta_p\eta_2+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(4\beta_p\eta_1+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)-(2\gamma_p\eta_2+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(2\gamma_p\eta_1+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)} \quad (11)$$

$$w_{mnc1}^*=\frac{(2\eta_1+\beta_t)\begin{bmatrix}(4\beta_p\eta_2+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(\alpha_1+\beta_p c_1)\\+(2\gamma_p\eta_2+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(\alpha_2+\beta_p c_2)\end{bmatrix}}{(4\beta_p\eta_1+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(4\beta_p\eta_2+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)-(2\gamma_p\eta_2+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(2\gamma_p\eta_1+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)} \quad (12)$$

$$w_{mnc2}^*=\frac{(2\eta_1+\beta_t)\begin{bmatrix}(4\beta_p\eta_1+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(\alpha_2+\beta_p c_2)\\+(2\gamma_p\eta_1+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(\alpha_1+\beta_p c_1)\end{bmatrix}}{(4\beta_p\eta_2+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)(4\beta_p\eta_1+2\beta_p\beta_t-\beta_t^2)-(2\gamma_p\eta_1+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)(2\gamma_p\eta_2+\beta_t\gamma_p-\beta_t\gamma_t)} \quad (13)$$

اثبات: اثبات قضیه‌ی ۲، همانند دیگر اثبات‌های این مقاله با استفاده از قضیه ۱، قضیه ۳ ارائه دهنده‌ی یک قیمت خرده‌فروشی بهینه در MNC است.

قضیه ۳: در مدل MNC، قیمت بهینه‌ی خرده‌فروشی برای دو محصول از روابط زیر به دست می‌آید:

$$p_{mnc1}^*=\frac{w_{mnc1}^*}{2}+\frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mnc1}^*+\frac{\beta_t\gamma_p-\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mnc2}^*+\frac{\beta_p\alpha_1+\gamma_p\alpha_2}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)} \quad (14)$$

$$p_{mnc2}^*=\frac{w_{mnc2}^*}{2}+\frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mnc2}^*+\frac{\beta_t\gamma_p-\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mnc1}^*+\frac{\beta_p\alpha_2+\gamma_p\alpha_1}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)} \quad (15)$$

که w_{mnc1}^*، w_{mnc2}^*، t_{mnc1}^* و t_{mnc2}^* در قضیه‌ی ۲ وجود داشتند.

اثبات: از طریق قضیه‌ی ۱ و ۲ به دست می‌آید.

۲.۱.۲. مدل MC

در این مورد تصمیم‌گیری فرض می‌کنیم که دو تولیدکننده دارای وابستگی متقابل‌اند و برای بیشینه کردن سوددهی با یکدیگر همکاری دارند. از این‌رو کل سود حاصل بین دو تولیدکننده بسته به میزان قدرت مذاکره‌ی آنها تقسیم می‌شود. با این حال در این مقاله تمرکز بر روی تحلیل‌های مربوط به تصمیم‌های تولیدکنندگان در مواجه با مسائل مختلف است و به میزان قدرت مذاکره و چانه‌زنی پرداخته نمی‌شود. به‌علاوه در بخش ۴ می‌توانیم ببینیم که در یک قرارداد ساده هر تولیدکننده زمانی می‌تواند سود حاصل ازکالای خود را دریافت کند که محصول تولید شده با محصول جایگزین دارای پارامترهای متقارن باشد. وقتی دو تولیدکننده تصمیم به اتخاذ سیاست همکاری در راستای بیشینه‌سازی سود خود می‌گیرند، در این‌صورت مدل MC به‌صورت فرمول زیر قابل بررسی است:

$$\begin{cases}\max\limits_{(w_1,w_2,t_1,t_2)}\begin{pmatrix}\pi_{m1}(w_1,t_1,p_1^*(w_1,t_1,w_2,t_2),p_2^*(w_1,t_1,w_2,t_2))\\+\pi_{m2}(w_2,t_2,p_1^*(w_1,t_1,w_2,t_2),p_2^*(w_1,t_1,w_2,t_2))\end{pmatrix}\\ \max\limits_{(p_1,p_2)}\pi_r(p_1,p_2)\end{cases}$$

قضیه ۴: همانند قضیه‌ی ۱ تصمیمات w_1، t_1، w_2 و t_2 از طریق دو تولیدکننده شکل می‌گیرد و قیمت‌های بهینه‌ی خرده‌فروشی نیز از روابط زیر به دست می‌آید:

$$p_1^*(w_1,t_1,w_2,t_2)=\frac{w_1}{2}+\frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_1 + \frac{\beta_t\gamma_p\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_2+\frac{\beta_p\alpha_1+\gamma_p\alpha_2}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)} \quad (16)$$

$$p_2^*(w_1,t_1,w_2,t_2)=\frac{w_2}{2}+\frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_2 + \frac{\beta_t\gamma_p\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_1+\frac{\beta_p\alpha_2+\gamma_p\alpha_1}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)} \quad (17)$$

اثبات: این قضیه نیز همانند قضیه‌ی ۱ ثابت می‌شود. داشتن اطلاعات در مورد تصمیمات مشترک خرده‌فروشی و سپس استفاده از آن برای بیشینه کردن کل سود $\pi_{m1}+\pi_{m2}$ لازم است. بنابراین، باتوجه به قضیه‌ی ۴ نتیجه زیر مورد انتظار است.

قضیه ۵: در مدل MC، دو قیمت عمده‌فروش تولیدکنندگان (w_{mc1}^*, w_{mc2}^*) و قیمت خرده‌فروشی (t_{mc1}^*, t_{mc2}^*) به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$w_{mc1}^*=\frac{A_2A_6-A_3A_5}{A_2A_4-A_1A_5} \quad (18)$$

$$w_{mc2}^*=\frac{A_3A_4-A_1A_6}{A_2A_4-A_1A_5} \quad (19)$$

$$t_{mc2}^*=\frac{\beta_t(A_2A_6-A_3A_5)-\gamma_t(A_3A_4-A_1A_6)}{2\eta_1(A_2A_4-A_1A_5)} -\frac{\beta_tc_1-\gamma_tc_2}{2\eta_1} \quad (20)$$

$$t_{mc2}^*=\frac{\beta_t(A_3A_4-A_1A_6)-\gamma_t(A_2A_6-A_3A_5)}{2\eta_2(A_2A_4-A_1A_5)} -\frac{\beta_tc_2-\gamma_tc_1}{2\eta_2} \quad (21)$$

$$p_{mc1}^*=\frac{\beta_p\alpha_1+\gamma_p\alpha_2}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}+\frac{1}{2}w_{mc1}^* + \frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mc1}^*+\frac{\beta_t\gamma_p-\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mc2} \quad (22)$$

$$p_{mc2}^*=\frac{\beta_p\alpha_2+\gamma_p\alpha_1}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}+\frac{1}{2}w_{mc2}^* + \frac{\beta_t\gamma_p-\beta_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mc1}^*+\frac{\beta_p\beta_t-\gamma_p\gamma_t}{2(\beta_p^2-\gamma_p^2)}t_{mc2}^* \quad (23)$$

که در آن A_1، A_2، A_3، A_4، A_5 و A_6 ثابت‌هایی هستند که در پیوست قسمت (A − ۱) تا (A − ۶) معرفی شده‌اند.

قضیه ۶: قیمت‌های بهینه‌ی خرده‌فروشی در مدل MC همانند حالت قبل به دست می‌آید.

اثبات: از طریق قضیه‌های ۴ و ۵، قضیه ۶ به دست می‌آید.

۲.۲. مدل‌ها در سناریوی RS

در این بخش، فرض می‌کنیم که دو تولیدکننده پیرو باشند و خرده‌فروش رهبر باشد. دو مدل غیر متمرکز بر تصمیم‌گیری با در نظر گرفتن راهبردهای تولیدکنندگان (سیاست همکاری و عدم همکاری) تعریف کردیم.

۱.۲.۲. مدل RNC

ابتدا خرده‌فروش قیمت خود را برا ی دو محصول موجود اعلام می‌کند و سپس دو تولیدکننده با سیاست عدم همکاری و با اطلاع از قیمت خرده‌فروش تصمیمات خود را برای قیمت عمده‌فروشی و همچنین دوره‌ی گارانتی اتخاذ می‌کنند. این مدل به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{cases}\max\limits_{(p_1,p_2)} \pi_r(p_1,p_2,w_1^*(p_1,p_2),t_1^*(p_1,p_2),w_2^*(p_1,p_2),t_2^*(p_1,p_2)) \\ \begin{cases}\max\limits_{(w_1,t_1)} \pi_{m1}(w_1,t_1) \\ \max\limits_{(w_2,t_2)} \pi_{m2}(w_2,t_2)\end{cases}\end{cases}$$

بدون از دست دادن کلیت m_i را با محصول قیمت‌گذاری شده توسط خرده فروش جمع می‌کنیم، یعنی

$$p_i=w_i+m_i; \qquad where\ m_i>0, i=1,2 \quad (24)$$

قضیه ۷: در مدل RNC، تصمیمات p_1 و p_2 توسط خرده‌فروش گرفته می‌شود و قیمت بهینه‌ی عمده $(w_1^*(p_1,p_2), w_2^*(p_1,p_2))$ و همچنین دوره‌ی بهینه‌ی گارانتی $(t_1^*(p_1,p_2), t_2^*(p_1,p_2))$ برای تولیدکننده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$t_1^*(p_1,p_2)=B_1-B_2p_1-B_3p_2 \quad (25)$$

$$t_2^*(p_1,p_2)=B_4-B_5p_2-B_6p_1 \quad (26)$$

$$w_1^*(p_1,p_2)=B_7-B_8p_1-B_9p_2 \quad (27)$$

$$w_2^*(p_1,p_2)=B_{10}-B_{11}p_2-B_{12}p_1 \quad (28)$$

که B_1 تا B_{12} در پیوست قسمت‌های (B − ۱) تا (B − ۱۲) معرفی شده‌اند. داشتن اطلاعات در مورد تصمیمات دو تولیدکننده به همراه خرده‌فروش، می‌تواند برای دست‌یابی به بیشینه‌ی سودمندی $(\pi_r(p_1,p_2))$ مفید باشد. با استفاده از این نتایج به قضیه‌ی ۸ می‌رسیم.

قضیه ۸: در مدل RNC قیمت بهینه‌ی خرده‌فروشی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$p_{rnc1}^*=\frac{E_1E_5-E_2E_4}{E_2E_5-E_3^2} \quad (29)$$

$$p_{rnc2}^*=\frac{E_2E_4-E_1E_3}{E_2E_5-E_3^2} \quad (30)$$

که E_1، E_2، E_3، E_4 و E_5 در پیوست قسمت‌های (E − ۱) تا (E − ۵) تعریف شده‌اند. با استفاده از قضیه‌های ۷ و ۸، قضیه‌ی ۹ در مورد قیمت‌های عمده‌فروشی بهینه و دوره‌های گارانتی بهینه برای دو تولیدکننده در مدل RNC به‌دست می‌آید.

قضیه ۹: در مدل RNC قیمت‌های عمده‌فروشی بهینه (w_{rnc1}^*, w_{rnc2}^*) و دوره‌های گارانتی بهینه (t_{rnc1}^*, t_{rnc2}^*) برای دو تولیدکننده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$t_{rnc1}^*=B_1-\frac{B_2(E_1E_5-E_3E_4)}{E_2E_5-E_3^2}-\frac{B_3(E_2E_4-E_1E_3)}{E_2E_5-E_3^2} \quad (31)$$

$$t_{rnc2}^*=B_4-\frac{B_5(E_2E_4-E_1E_3)}{E_2E_5-E_3^2}-\frac{B_6(E_1E_5-E_3E_4)}{E_2E_5-E_3^2} \quad (32)$$

$$w_{rnc1}^*=B_7-\frac{B_8(E_1E_5-E_3E_4)}{E_2E_5-E_3^2}-\frac{B_9(E_2E_4-E_1E_3)}{E_2E_5-E_3^2} \quad (33)$$

$$w_{rnc2}^*=B_{10}-\frac{B_{11}(E_2E_4-E_1E_3)}{E_2E_5-E_3^2}-\frac{B_{12}(E_1E_5-E_3E_4)}{E_2E_5-E_3^2} \quad (34)$$

اثبات: از طریق قضایای ۷ و ۸ قضیه‌ی ۹ به دست می‌آید.

۲.۲.۲. مدل RC

ابتدا خرده‌فروش قیمت خود را برای دو محصول موجود اعلام می‌کند و سپس دو تولیدکننده با سیاست همکاری متقابل و با اطلاع از قیمت خرده‌فروش تصمیمات خود را برای قیمت عمده‌فروشی و همچنین دوره‌ی گارانتی اتخاذ می‌کنند. این مدل به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{cases} \max\limits_{(p_1,p_2)} \pi_r(p_1,p_2,w_1^*,t_1^*,w_2^*,t_2) \\ \max\limits_{(w_1,t_1,w_2,t_2)} (\pi_{m1}(w_1,t_1)+\pi_{m2}(w_2,t_2)) \end{cases}$$

قضیه ۱۰: در مدل RC تصمیمات p_1 و p_2 توسط خرده‌فروش گرفته می‌شود و قیمت بهینه‌ی عمده $(w_1^*(p_1,p_2), w_2^*(p_1p_2))$ و همچنین دوره‌ی بهینه‌ی گارانتی $(t_1^*(p_1,p_2), t_2^*(p_1,p_2))$ برای تولیدکننده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$t_1^*(p_1,p_2) = F_6 + F_7 p_1 + F_8 p_2 \quad (۳۵)$$

$$t_2^*(p_1,p_2) = F_9 + F_{10} p_1 + F_{11} p_2 \quad (۳۶)$$

$$w_1^*(p_1,p_2) = \frac{F_2F_5 - F_3F_4}{F_2^2 - F_1F_3} + \frac{(F_3\beta_p + F_2\gamma_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_1 - \frac{(F_3\gamma_p + F_2\beta_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_2 \quad (۳۷)$$

$$w_2^*(p_1,p_2) = \frac{F_2F_4 - F_1F_5}{F_2^2 - F_1F_3} - \frac{(F_1\gamma_p + F_2\beta_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_1 + \frac{(F_1\beta_p + F_2\gamma_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_2 \quad (۳۸)$$

که F_1 تا F_{11} در پیوست قسمت‌های $(\mathrm{F}-1)$ تا $(\mathrm{F}-11)$ معرفی شده‌اند.

داشتن اطلاعات در مورد تصمیمات دو تولیدکننده به همراه خرده‌فروش می‌تواند برای دست‌یابی به بیشینه‌ی سود مفید باشد. بنابراین با استفاده از این نتایج قضیه ۱۱ را داریم.

قضیه ۱۱: در مدل RC قیمت‌های بهینه‌ی خرده‌فروشی از طریق روابط زیر به دست می‌آید:

$$p_{rc1}^* = \frac{G_3G_4 - G_1G_6}{G_2G_6 - G_3G_5} \quad (۳۹)$$

$$p_{rc2}^* = \frac{G_1G_5 - G_2G_4}{G_2G_6 - G_3G_5} \quad (۴۰)$$

که G_1، G_2، G_3، G_4، G_5 و G_6 در پیوست قسمت‌های $(\mathrm{G}-1)$ تا $(\mathrm{G}-6)$ تعریف شده‌اند.

قضیه ۱۲: در مدل RC قیمت بهینه‌ی عمده (w_{rc1}^*, w_{rc2}^*) و همچنین دوره‌ی بهینه‌ی گارانتی (t_{rc1}^*, t_{rc2}^*) برای تولیدکننده به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آید:

$$t_{rc1}^* = F_6 + F_7 p_{rc1}^* + F_8 p_{rc2}^* \quad (۴۱)$$

$$t_{rc2}^* = F_9 + F_{10} p_{rc1}^* + F_{11} p_{rc2}^* \quad (۴۲)$$

$$w_{rc1}^* = \frac{F_2F_5 - F_3F_4}{F_2^2 - F_1F_3} + \frac{(F_3\beta_p + F_2\gamma_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_{rc1}^* - \frac{(F_3\gamma_p + F_2\beta_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_{rc2}^* \quad (۴۳)$$

$$w_{rc2}^* = \frac{F_2F_4 - F_1F_5}{F_2^2 - F_1F_3} - \frac{(F_1\gamma_p + F_2\beta_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_{rc1}^* + \frac{(F_1\beta_p + F_2\gamma_p)\eta_1\eta_2}{F_2^2 - F_1F_3} p_{rc2}^* \quad (۴۴)$$

که p_{rc2}^*, p_{rc1}^* در قضیه‌ی ۱۱ شناسایی شد.

اثبات: از قضایای ۱۰ و ۱۱ به دست می‌آید.

۳.۲. مدل تصمیم‌گیری نش (مدل NG)

هنگامی که دو تولیدکننده و خرده‌فروش، دارای قدرت یکسانی در بازار هستند، تصمیم‌گیری‌های آنها به صورت مستقل اما هم‌زمان انجام می‌شود. از آن‌جا که تولیدکننده نمی‌تواند بیشتر از خرده‌فروش بر بازار حاکم شود، تصمیمات آن در چهارچوب قیمت خرده‌فروشی قرار می‌گیرد. از سوی دیگر، خرده‌فروش باید تصمیمات مربوط به قیمت خرده‌فروشی را در قیمت عمده‌فروشی و دوره‌ی گارانتی لحاظ کند. این وضعیت به نام بازی نش و راه حل موجود برای این سازوکار به نام تعادل نش شناخته می‌شود. برای تعیین تعادل نش از مدل NG استفاده می‌شود، به شرح زیر:

$$\begin{cases} \max\limits_{(p_1,p_2)} \pi_r(p_1,p_2) \\ \max\limits_{(w_1,t_1)} \pi_{m1}(w_1,t_1) \\ \max\limits_{(w w_2,t_2)} \pi_{m2}(w_2,t_2) \end{cases}$$

در این مدل در حالت نش، تابع سود خرده‌فروش تابعی از قیمت خرده‌فروشی دو محصول و همچنین توابع سود دو تولیدکننده تابعی از قیمت عمده‌فروشی و دوره‌ی گارانتی است.

قضیه ۱۳: در مدل NG قیمت بهینه‌ی خرده‌فروشی (p_1^*, p_2^*)، دوره‌ی بهینه‌ی گارانتی (t_1^*, t_2^*) و قیمت بهینه‌ی عمده‌فروشی (w_1^*, w_2^*) به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$p_1^* = \frac{N_1 - N_2}{N_5 - N_6} \quad (۴۵)$$

$$p_2^* = \frac{N_3 - N_4}{N_5 - N_6} \quad (۴۶)$$

$$t_1^* = B_1 - \frac{(N_1 - N_2)B_2}{N_5 - N_6} - \frac{(N_3 - N_4)B_3}{N_5 - N_6} \quad (۴۷)$$

$$t_2^* = B_4 - \frac{(N_1 - N_2)B_5}{N_5 - N_6} - \frac{(N_3 - N_4)B_6}{N_5 - N_6} \quad (۴۸)$$

$$w_{n1}^* = B_7 - \frac{(N_1 - N_2)B_8}{N_5 - N_6} - \frac{(N_3 - N_4)B_9}{N_5 - N_6} \quad (۴۹)$$

$$w_{n2}^* = B_{10} - \frac{(N_1 - N_2)B_{11}}{N_5 - N_6} - \frac{(N_3 - N_4)B_{12}}{N_5 - N_6} \quad (۵۰)$$

که N_1، N_2، N_3، N_4، N_5 و N_6 در پیوست قسمت‌های $(\mathrm{N}-1)$ تا $(\mathrm{N}-6)$ تعریف شده‌اند.

اثبات: تصمیمات بهینه‌ی مربوط به خرده‌فروشی در روابط ۴ و ۵ برای قیمت‌های عمده‌فروشی (w_1, w_2) و دوره‌ی گارانتی (t_1, t_2) فرمول‌بندی شده است. از سوی دیگر تصمیمات بهینه‌ی تولیدکنندگان در روابط ۲۵ تا ۲۸ برای قیمت‌های خرده‌فروشی (p_1, p_2) آمده است. با توجه به حل معادلات ۴ و ۵ و ۲۵-۲۸ قضیه‌ی ۱۳ ثابت می‌شود.

۳. مثال عددی

در این بخش، یک شیوه‌ی خاص از پارامترهای موجود در مدل بالا را با در نظرگرفتن برابری آنها بررسی می‌کنیم به گونه‌یی که $\alpha_1 = \alpha_2$، $c_1 = c_2$ و $\eta_1 = \eta_2$ را خواهیم

جدول ۱. تصمیم‌گیری بهینه از اعضای کانال تحت سناریوهای تصمیم متفاوت.

	$t1$	$t2$	$p1$	$p2$	$w1$	$w2$
MNC	۹۷/۹۱	۹۷/۹۱	۱۲۹۳/۷۲	۱۲۹۳/۷۲	۴۸۹/۵۳	۴۸۹/۵۳
MC	۸۵/۶۵	۸۵/۶۵	۱۵۷۱/۷۴	۱۵۷۱/۷۴	۱۰۵۷/۸۳	۱۰۵۷/۸۳
RNC	۱۲۳/۱۳	۱۲۳/۱۳	۱۲۶۱/۲۵	۱۲۶۱/۲۵	۲۷۶/۲۵	۲۷۶/۲۶
RC	۱۱۷/۶۵	۱۱۷/۶۵	۱۴۶۱/۷۳	۱۴۶۱/۷۳	۶۷۵/۹۳	۶۷۵/۹۳
NG	۱۳۱/۳۳	۱۳۱/۳۳	۱۲۱۲/۰۰	۱۲۱۲/۰۰	۲۹۲/۶۷	۲۹۲/۶۷

جدول ۲. بیشینه‌ی سود از کل سیستم و هر شرکت تحت سناریوهای تصمیم متفاوت.

	$\pi m1$	$\pi m2$	πr	$\pi m1+\pi m2+\pi r$
MNC	۳۴۰۷۹/۴۲	۳۴۰۷۹/۴۲	۱۲۹۳۴۳/۰۴	۱۹۷۵۰۱/۸۸
MC	۵۰۶۲۰/۴۳	۵۰۶۲۰/۴۳	۵۲۸۲۱/۳۲	۱۵۴۰۶۲/۱۹
RNC	۱۶۶۷۵/۷۴	۱۶۶۷۵/۷۴	۱۶۹۷۸۹/۳۸	۲۰۳۱۴۰/۸۶
RC	۳۸۲۱۵/۱۶	۳۸۲۱۵/۱۶	۱۰۳۰۸۵/۶۷	۱۷۹۵۱۵/۹۸
NG	۱۸۹۷۳/۲۹	۱۸۹۷۳/۲۹	۱۶۹۰۳۴/۷۶	۲۰۶۹۸۱/۳۳

داشت. دلیل یکسان کردن مقادیر پارامترهای محصولات جایگزین، ایجاد اطمینان از مقایسه‌ی مدل‌های تصمیم‌گیری و به دست آوردن یک مفهوم مدیریتی است. همان‌طورکه[۳۵،۳۴] بیان کردند، عدم تقارن بین دو محصول، مشکلاتی را در مقایسه‌ی تصمیمات موجود در مدل‌ها به وجود می‌آورد. بنابراین، با ساختار پارامتریک ساده شده می‌توان اثرات راهبردهای مختلف تصمیم‌گیری در تولیدکنندگان و قدرت بازار را در مدل‌های مختلف مقایسه کرد. در این بخش یک مثال عددی برای مقایسه‌ی تصمیمات بهینه در پنج مدل و بررسی بیشینه‌ی سود آورده می‌شود که نهایتاً به استنتاج برخی مفاهیم مدیریتی می‌انجامد. برخی از مقادیر پیش‌فرض از این پارامترها عبارت‌اند از:

$$\alpha_1=\alpha_2=200,\ c_1=c_2=30,\ \eta_1=\eta_2=0/6,$$
$$\beta_p=0/35,\ \gamma_p=0/25,\ \beta_t=0/3,\ \gamma_t=0/2$$

نتایج متناظر در جدول ۱ و ۲ نشان داده شده است. دو محصول جایگزین از نظر قیمت عمده‌فروشی، قیمت خرده‌فروشی، سود و دوره‌ی گارانتی در مدل MNC با هم برابر هستند. زیرا تولیدکنندگان قدرت یکسانی در عرصه‌ی بازار دارند و راهبرد یکسانی را در زمینه‌ی قیمت اخذ می‌کنند. همچنین نتایج مشابهی در مدل‌های RNC، MC، RC و NG نیز به دست آمد. این امر به این دلیل است که دو محصول متقارن هستند.

قیمت‌های خرده‌فروشی در مدل MNC با RNC برابر نیست؛ یعنی، خرده‌فروش می‌تواند برخی از قیمت‌های بهینه‌ی خرده‌فروشی را برای دو محصول فراهم کند. این امر زمانی اتفاق می‌افتد که دو تولیدکننده عملکرد همکاری را اتخاذ کرده باشند و همین‌طور خدمات ضمانتی را برای محصول خود در نظر نگیرند.

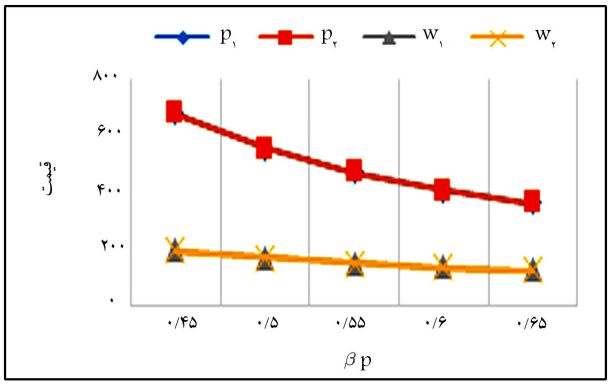
۴. تجزیه و تحلیل حساسیت

از آن‌جا که نتایج تحلیلی این مقاله پیچیده هستند، در این بخش، تجزیه و تحلیل حساسیت در برخی از پارامترهای کلیدی صورت گرفته است. این مقایسات و تجزیه و تحلیل‌ها بر اساس برخی از بینش‌های مدیریتی انجام گرفته است. نمودارهای ۱ تا ۶ ارائه دهنده‌ی تغییرات قیمت‌های عمده‌فروشی، خرده‌فروشی، دوره‌ی گارانتی و بیشینه‌ی سوددهی با پارامتر β_p در مدل‌های RNC و RC می‌باشند. که مقادیر پیش‌فرض

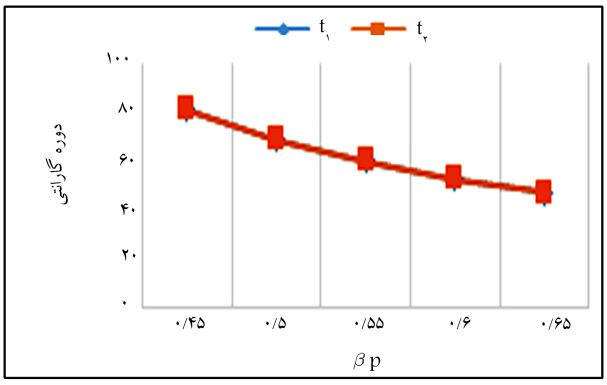
$$\alpha_1=\alpha_2=200,\ c_1=c_2=30,\ \eta_1=\eta_2=0/6,$$
$$\gamma_p=0/25,\ \beta_t=0/3,\ \gamma_t=0/2,$$
$$\beta_p\in\{0/45,0/50,0/55,0/60,0/65\}$$

هستند.

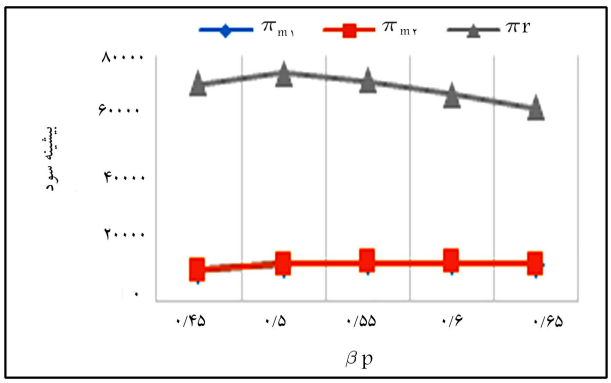
نمودارهای ۷ تا ۱۲ ارائه دهنده‌ی تغییرات قیمت‌های عمده‌فروشی، خرده‌فروشی، دوره‌ی گارانتی و بیشینه‌ی سوددهی با پارامتر β_t در مدل‌های RNC و RC می‌باشند.



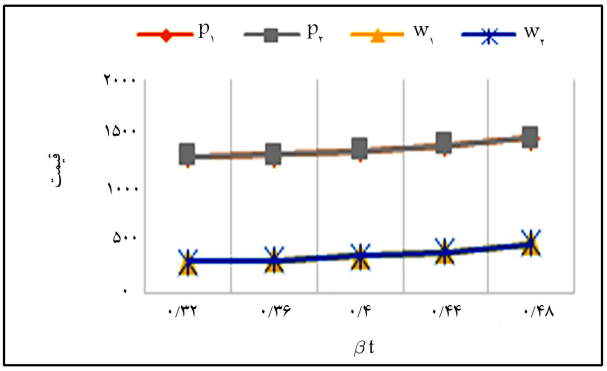
نمودار ۱. تغییرات قیمت مطلوب با β_p در مدل RNC.



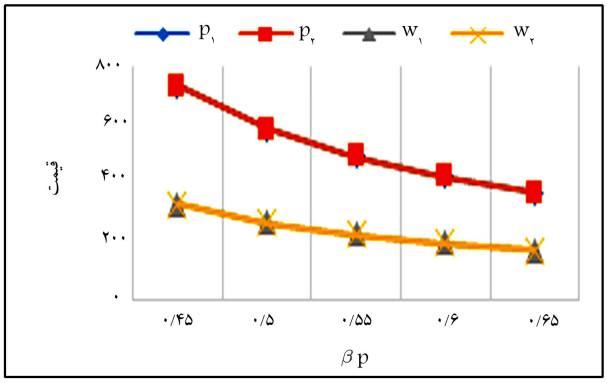
نمودار ۲. تغییرات دوره‌ی گارانتی بهینه با β_p در مدل RNC.



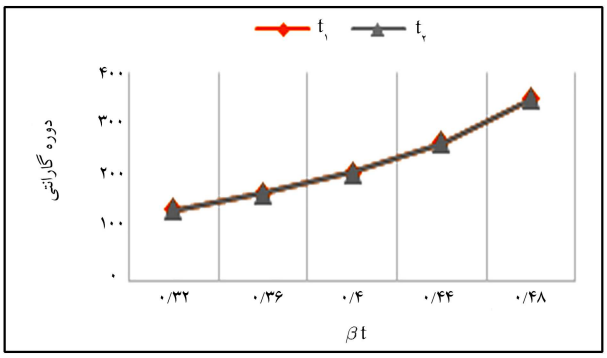
نمودار ۳. تغییرات بیشینه‌ی سود با β_p در مدل RNC.



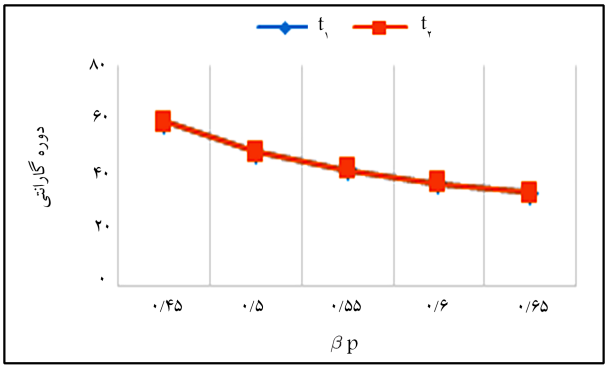
نمودار ۷. تغییرات قیمت مطلوب با β_t در مدل RNC.



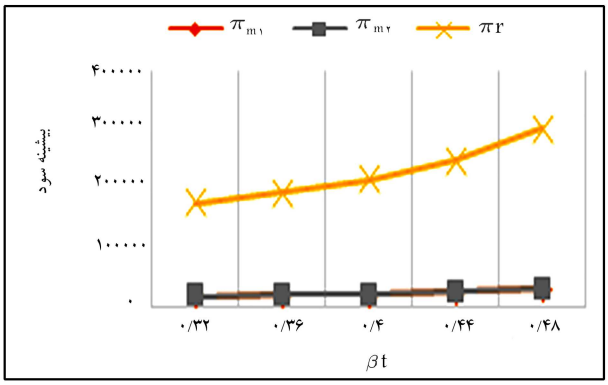
نمودار ۴. تغییرات قیمت مطلوب با β_p در مدل RC.



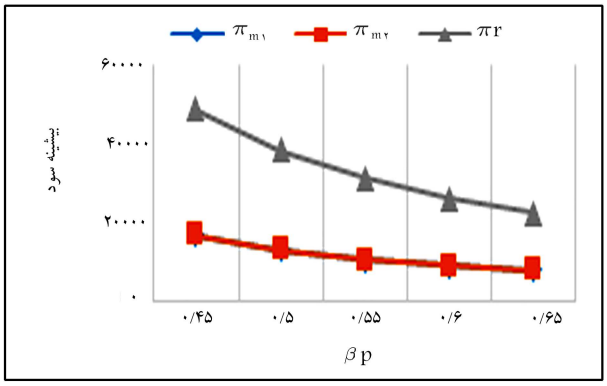
نمودار ۸. تغییرات دوره‌ی گارانتی بهینه با β_t در مدل RNC.



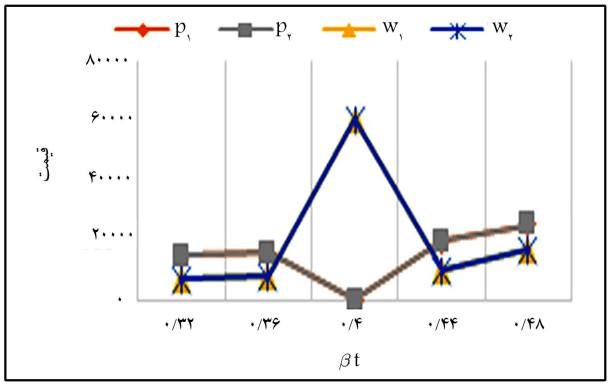
نمودار ۵. تغییرات دوره‌ی گارانتی بهینه با β_p در مدل RC.



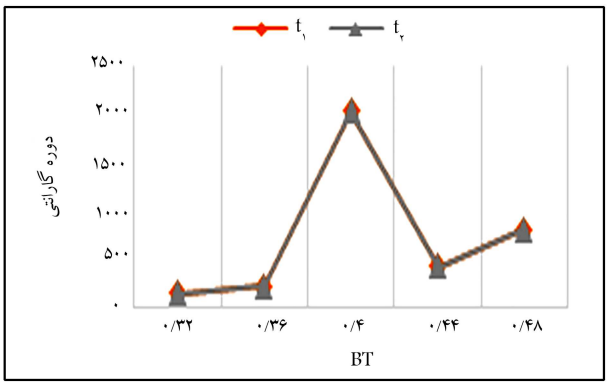
نمودار ۹. تغییرات بیشینه‌ی سود با β_t در مدل RNC.



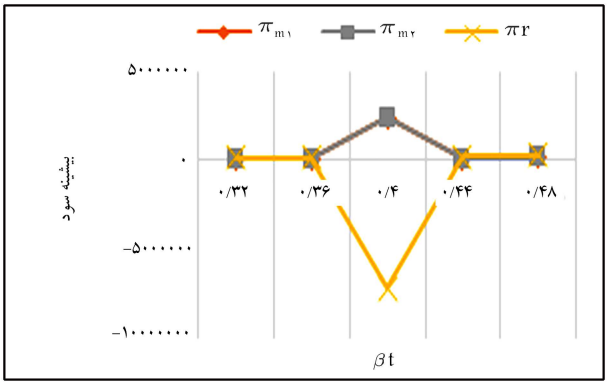
نمودار ۶. تغییرات بیشینه‌ی سود با β_p در مدل RC.



نمودار ۱۰. تغییرات قیمت مطلوب با β_t در مدلRC.



نمودار ۱۱. تغییرات دوره‌ی گارانتی بهینه با β_t در مدلRC.



نمودار ۱۲. تغییرات بیشینه‌ی سود با β_t در مدل RC.

مقادیر

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ۲۰۰,\ c_1 = c_2 = ۳۰,\ \eta_1 = \eta_2 = ۰/۶,$$
$$\beta_p = ۰/۳۵, \gamma_t = ۰/۲,\ \gamma_p = ۰/۲,$$
$$\beta_t \in \{۰/۳۲, ۰/۳۶, ۰/۴۰, ۰/۴۴, ۰/۴۸\}$$

نمودارهای ۱۳ تا ۱۸ ارائه‌دهنده‌ی تغییرات قیمت‌های عمده‌فروشی، خرده‌فروشی، دوره‌ی گارانتی و بیشینه‌ی سوددهی با پارامتر η_1 در مدل‌های RNC و RC می‌باشند.

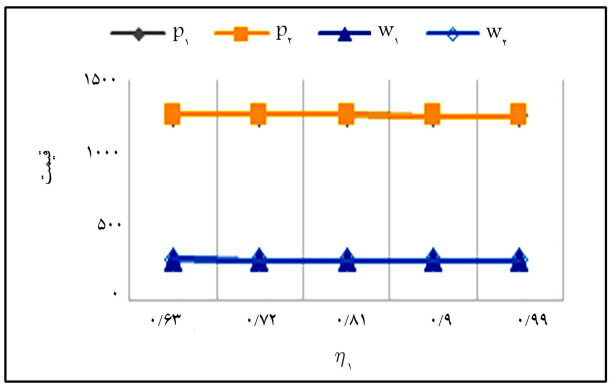
پارامترها

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ۲۰۰,\ c_1 = c_2 = ۳۰,\ \beta_p = ۰/۳۵,$$
$$\gamma_p = ۰/۲۵, \gamma_t = ۰/۲\ \beta_t = ۰/۳,$$
$$\eta_1 = \eta_2, \eta_1 \in \{۰/۶۳, ۰/۷۲, ۰/۸۱, ۰/۹۰, ۰/۹۹\}$$

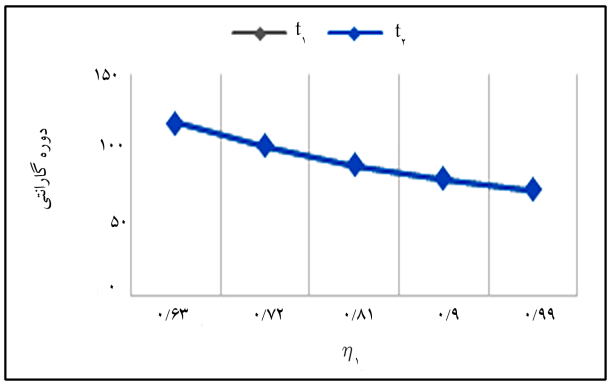
هستند.

دو محصول جایگزین در مدل NG دارای کمترین قیمت خرده‌فروشی بودند. این امر نشان می‌دهد که قدرت یکسان بین تولیدکنندگان و خرده‌فروش می‌تواند باعث کاهش قیمت بهینه‌ی خرده‌فروشی در دو محصول شود، که این امر به ارتباط بین تولیدکنندگان و خرده‌فروش وابسته است.

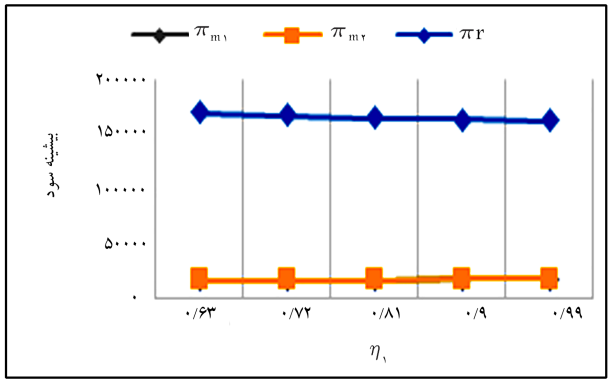
دو محصول جایگزین در مدل MC دارای کمترین دوره‌ی گارانتی هستند. دوره‌ی گارانتی برای تولیدکنندگانی که به عنوان رهبر هستند پایین‌تر از تولیدکنندگانی است که به عنوان پیرو در زنجیره‌ی تأمین در نظرگرفته می‌شوند. به‌طورکلی بهترین



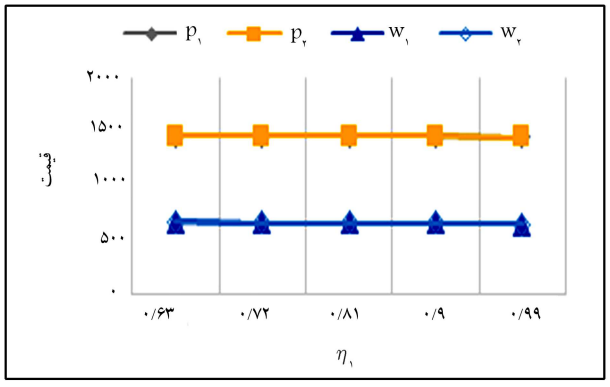
نمودار ۱۳. تغییرات قیمت مطلوب با η_1 در مدل RNC.



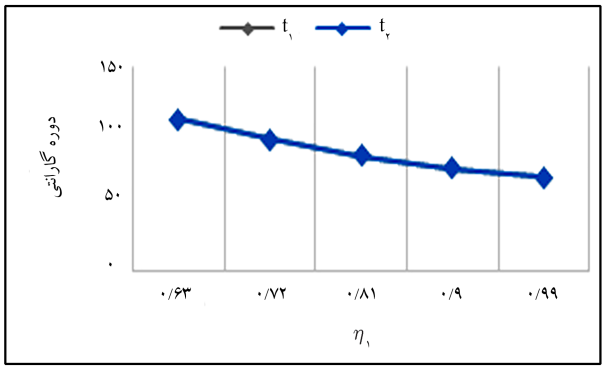
نمودار ۱۴. تغییرات دوره‌ی گارانتی بهینه با η_1 در مدل RNC.



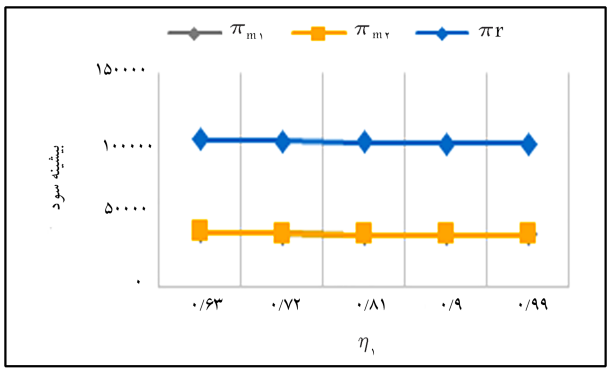
نمودار ۱۵. تغییرات بیشینه‌ی سود با η_1 در مدل RNC.



نمودار ۱۶. تغییرات قیمت مطلوب با η_1 در مدل RC.



نمودار ۱۷. تغییرات دوره‌ی گارانتی بهینه با η_1 در مدل RC.



نمودار ۱۸. تغییرات بیشینه‌ی سود با η_1 در مدل RC.

انتخاب برای مشتریان، دست‌یابی به دوره‌ی گارانتی بیشتر به همراه وجود همکاری بین دو تولیدکننده است.

تقاضا برای دو محصول در مدل NG دارای مقدار بالایی بود؛ این نشان می‌دهد که سیاست‌های همکاری و عدم همکاری برای دو تولیدکننده به اندازه‌ی قدرت یکسان آنها با خرده‌فروش تأثیرگذار نیست و با کاهش میزان تقاضای مشتریان همراه خواهد بود.

سود کل زنجیره در مدل بیشتر از سایر مدل‌هاست، پس سود مدل از بقیه بیشتر است. در واقع رقابت بین اعضای زنجیره و دوره‌ی گارانتی بیشتر، منجر به رضایت مشتریان و افزایش تقاضا و در نهایت افزایش سود می‌شود.

سود تولیدکنندگان برای هر محصول در مدل‌های MC و RC بالاتر است. این موضوع نشان می‌دهد که راهبرد همکاری بین تولیدکنندگان دارای میانگین سوددهی بالاتری است.

سود خرده‌فروش برای هر محصول در مدل RNC بالاتر است. این نشان می‌دهد که خرده‌فروشی که به عنوان رهبر در زنجیره‌ی تأمین قرار دارد دارای میانگین سوددهی بالاتری است که این امر بستگی به راهبرد قیمت‌گذاری تولیدکنندگان دارد و رقابت و عدم همکاری بین تولیدکنندگان منجر به سود بیشتر خرده‌فروش می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی

ما به بررسی تصمیم‌گیری قیمت و مدت گارانتی برای دو محصول جایگزین از دو تولیدکننده در یک زنجیره‌ی تأمین پرداختیم. به‌طور خاص پنج مدل تصمیم‌گیری قیمت و مدت زمان گارانتی با در نظرگرفتن رهبری بین دو تولیدکننده و راهبرد آنها در مورد همکاری و عدم همکاری معرفی کردیم. سپس به مقایسه‌ی بیشینه‌ی سود بهینه در زنجیره‌ی تأمین برای اعضای زنجیره با استفاده از مطالعات عددی پرداختیم. چند نکته در مورد این بررسی شایان ذکر است: اول اینکه این مقاله توابع قیمت - گارانتی - تقاضا را به‌صورت خطی مورد بررسی قرار داده است. دوم این‌که رقابت در سطح خرده‌فروشی در مدل‌ها در نظرگرفته نشده است.

برای پیشنهادهای تحقیقات آتی، می‌توان توابع را غیرخطی در نظر گرفت یا خرده‌فروش را دو تا در نظرگرفت و بین آنها نیز رقابت در نظرگرفت یا زنجیره‌ی تأمین را سه‌سطحی در نظر گرفت. در این مطالعه مشخص شد که بدون توجه به اتخاذ راهبرد تولیدکنندگان و خرده‌فروش، تصمیم‌گیری در مورد استفاده از مدل‌های غیرمتمرکز مشکل‌تر می‌شود. بنابراین در نظرگرفتن این مهم برای پیش‌برد بررسی‌های مربوط به مدل‌های تصمیم‌گیری حائز اهمیت است.

پانوشت‌ها

1. manufacturer
2. common retailer
3. Stackelberg
4. Nash game
5. cooperation and noncooperation
6. manufacturer-leader Stackelberg (MS) scenario
7. retailer-leader stackelberg (RS) scenario

منابع (References)

1. Ahi, P. and Searcy, S. “A comparative literature analysis of definitions for green and sustainable supply chain management”, *J. Clean. Prod*, **52**, pp. 329-341 (2013).
2. Van Marrewijk, M. “Concepts and definitions of CSR and corporate sustainability: between agency and communion”, *J. Bus. Ethics*, **44**(2), pp. 95-105 (2003).
3. Wu, C., Chou, C. and Huang, C. “Optimal price, war-

ranty length and production rate for free replacement policy in the static demand market", *Omega*, **37**, pp. 29-39 (2009).

4. Xia, Y. "Competitive strategies and market segmentation for suppliers with substitutable products", *Eur. J. Oper. Res*, **210**, pp. 194-203 (2011).
5. Karakul, M. and Chan, L. "Analytical and managerial implications of integrating product substitutability in the joint pricing and procurement problem", *Eur. J. Oper. Res*, **190**, pp. 179-204 (2008).
6. Liu, W., Song, J. and Wu, C. "Impact of loss a version on the news vendor game with product substitution", *Int. J. Prod. Econ*, **141**, pp. 352-359 (2013).
7. Nagarajan, S. and Rajagopalan, S. "Inventory models for substitutable products: optimal policies and heuristics", *Manag. Sci*, **54**, pp. 1453-1466 (2008).
8. Zhang, J., Shou, B. and Chen, J. "Postponed product differentiation with demand information update", *Int. J. Prod. Econ*, **141**, pp. 529-540 (2013).
9. Chan, L., Shen, Z., Simchi-Levi, D. and et al., *Coordination of Pricing and Inventory Decisions: a Survey and Classification*, In:Simchi-Levi, D., Wu, S. D., Shen, Z. J. M. (Eds.), Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the E-Business Era. Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 335-392 (2004).
10. Yano, C. and Gilbert, S., *Coordinated Pricing and Procurement Decisions: a Review*, In: Chakravarty, A., Eliashberg, J. (Eds.), Managing Business Interfaces: Marketing, Engineering and Manufacturing Perspectives. Kluwer Academic Publishers, pp. 65-103 (Chapter3) (2003).
11. Tang, C. and Yin, R. "Joint ordering and pricing strategies for managing substitutable products", *Prod. Oper. Manag*, **16**(1), pp. 138-153 (2007).
12. Pasternack, B. and Drezner, Z. "Optimal inventory policies for substitutable commodities with stochastic demand", *Nav. Res. Logist*, **38**, pp. 221-240 (1991).
13. Stavrulaki, E. "Inventory decisions for substitutable products with stock- dependent demand", *Int. J. Prod. Econ*, **129**, pp. 65-78 (2011).
14. Yao, Z., Leung, S. and Lai, K. "Manufacturer's revenue-sharing contract and retail competition", *Eur. J. Oper. Res*, **186**, pp. 637-651 (2008).
15. Hsieh, C. and Wu, C. "Coordinated decisions for substitutable products in a common retailer supply chain", *Eur. J. Oper. Res*, **196**, pp. 273-288 (2009).
16. Sinha, S. and Sarmah, S. "Coordination and price competition in a duopoly common retailer supply chain", *Comput. Ind. Eng*, **59**, pp. 280-295 (2010).
17. Choi, S. "Price competition in a duopoly common retailer channel", *J. Retail*, **72**(2), pp. 117-134. (1996).
18. Li, B., Zhou, Y., Li, J. and et al. "Contract choice game of supply chain competition at both manufacturer and retailer levels", *Int. J. Prod. Econ*, **143**, pp. 188-197 (2013).
19. Chen, J. and Chang, C. "Dynamic pricing for new and remanufactured products in a closed-loop supply chain", *Int. J. Prod. Econ*, **146**, pp. 153-160 (2013).
20. Trivedi, M. "Distribution channels: an extension of exclusive retailer ship", *Manag. Sci*, **44**(7), pp. 896-909 (1998).
21. Zhao, J., Tang, W., Zhao, R. and et al. "Pricing decisions for substitutable products with a common retailer in fuzzy environments", *Eur. J. Oper. Res*, **216**(2), pp. 409-419 (2012).
22. Choi, S. "Price competition in a channel structure with common retailer", *Mark. Sci*, **10**(4), pp. 271-296 (1991).
23. EI-Ansary, A.L. and Stern, L.W. "Power measurement in the distribution channel", *J. Market. Res*, **9**(1), pp. 47-52 (1972).
24. Pan, K., Lai, K.K., Leung, S.C.H. and et al. "Revenue-sharing versus wholesale price mechanisms under different channel power structures", *Eur. J. Oper. Res*, **203**(2), pp. 532-538 (2010).
25. Wu, C., Chen, C. and Hsieh, C. "Competitive pricing decisions in a two-echelon supply chain with horizontal and vertical competition", *Int. J. Prod. Econ*, **135**(1), pp. 265-274 (2012).
26. Chien, Y. "A general age-replacement model with minimal repair under renewing free replacement warranty", *Eur. J. Oper. Res*, **186**, pp. 1046-1058 (2008).
27. Silalertruksa, T., Bonnet, S. and Gheewala, S. "Life cycle costing and externalities of palm oil biodiesel in Thailand", *J. Clean. Prod*, **28**, pp. 225-232 (2012).
28. Darghouth, M. and Chelbi, A. "A profit assessment model for equipment in section and replacement under renewing free replacement warranty policy", *Int. J. Prod. Econ*, **135**(2), pp. 899-906 (2012).
29. Mashoko, L., Mbohwa, C. and Thomas, V. "Life cycle inventory of electricity cogeneration from bagasse in the South African sugar industry", *J. Clean. Prod*, **39**, pp. 42-49 (2013).
30. Chen, X., Li, L. and Zhou, M. "Manufacturer's pricing strategy for supply chain with warranty period-dependent demand", *Omega*, **40**(6), pp. 807-816 (2012).
31. Boulding, W. and Kirmani, A. "A consumer-side experimental examination of signaling theory: do consumers perceive warranties as signals of quality", *J. Consum. Res*, **20**, pp. 111-123 (1993).
32. Wei, J., Zhao, J. and Li, Y. "Price and warranty period decisions for complementary products with horizontal

firms' cooperation/noncooperation strategies", *J. Clean. Prod*, **105**, pp. 86-102 (2015).

33. Zhao, J, Wei, J. and Li, Y. "Pricing decisions for substitutable products in a two-echelon supply chain with firms' different channel powers", *Int. J. Prod. Econ*, **153**, pp. 243-252 (2014).

34. Tsay, A. and Agrawal, N. "Channel dynamics under price and service competition", *Manuf. Serv. Oper. Manag*, **2**(4), pp. 372-391 (2000).

35. Mishra, B. and Raghunathan, S. "Retail-vs. vendor-managed inventory and brand competition", *Manag. Sci*, **50**(4), pp. 445-457 (2004).

پیوست

$$A_1 = 2\beta_p - \frac{\beta_t^2}{2\eta_1} - \frac{\gamma_t^2}{2\eta_2} \quad \text{(A-1)}$$

$$A_2 = -2\gamma_p + \frac{\beta_t\gamma_t}{2\eta_1} + \frac{\beta_t\gamma_t}{2\eta_2} \quad \text{(A-2)}$$

$$A_3 = \alpha_1 + \beta_p c_1 - \gamma_p c_2 - \frac{\beta_t(\beta_t c_1 - \gamma_t c_2)}{2\eta_1} + \frac{\gamma_t(\beta_t c_2 - \gamma_t c_1)}{2\eta_2} \quad \text{(A-3)}$$

$$A_4 = -2\gamma_p + \frac{\beta_t\gamma_t}{2\eta_1} + \frac{\beta_t\gamma_t}{2\eta_2} \quad \text{(A-4)}$$

$$A_5 = 2\beta_p - \frac{\gamma_t^2}{2\eta_1} - \frac{\beta_t^2}{2\eta_2} \quad \text{(A-5)}$$

$$A_6 = \alpha_2 + \beta_p c_2 - \gamma_p c_1 + \frac{\gamma_t(\beta_t c_1 - \gamma_t c_2)}{2\eta_1} - \frac{\beta_t(\beta_t c_2 - \gamma_t c_1)}{2\eta_2} \quad \text{(A-6)}$$

$$B_1 = \frac{\alpha_1\beta_t(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \alpha_2\beta_t^2\gamma_t}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-1)}$$

$$B_2 = \frac{\beta_p\beta_t(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) + \beta_t^2\gamma_p\gamma_t}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-2)}$$

$$B_3 = \frac{\beta_t\gamma_p(\beta_t^2 - \beta_p\eta_2) - \beta_p\beta_t^2\gamma_t}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-3)}$$

$$B_4 = \frac{\alpha_2\beta_t(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2) - \alpha_1\beta_t^2\gamma_t}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-4)}$$

$$B_5 = \frac{\beta_p\beta_t(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2) + \beta_t^2\gamma_p\gamma_t}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-5)}$$

$$B_6 = \frac{\beta_t\gamma_p(\beta_t^2 - \beta_p\eta_1) - \beta_p\beta_t^2\gamma_t}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-6)}$$

$$B_7 = c_1 + \frac{\eta_1(\alpha_1\beta_p\eta_2 - \alpha_1\beta_t^2 - \alpha_2\beta_t\gamma_t)}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-7)}$$

$$B_8 = \frac{\eta_1(\beta_p^2\eta_2 - \beta_p\beta_t^2 + \beta_t\gamma_p\gamma_t)}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-8)}$$

$$B_9 = \frac{\eta_1(\beta_t^2\gamma_p - \beta_p\gamma_p\eta_2 - \beta_p\beta_t\gamma_t)}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-9)}$$

$$B_{10} = c_2 + \frac{\eta_2(\alpha_2\beta_p\eta_1 - \alpha_2\beta_t^2 - \alpha_2\beta_t\gamma_t)}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-10)}$$

$$B_{11} = \frac{\eta_2(\beta_p^2\eta_1 - \beta_p\beta_t^2 + \beta_t\gamma_p\gamma_t)}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-11)}$$

$$B_{12} = \frac{\eta_2(\beta_t^2\gamma_p - \beta_p\gamma_p\eta_1 - \beta_p\beta_t\gamma_t)}{(\beta_p\eta_1 - \beta_t^2)(\beta_p\eta_2 - \beta_t^2) - \beta_t^2\gamma_t^2} \quad \text{(B-12)}$$

$$E_1 = (1 + B_8)(\alpha_1 + \beta_t B_1 - \gamma_t B_4) + B_{12}(\alpha_2 + \beta_t B_4 - \gamma_t B_1) + B_{10}(-\gamma_p + \beta_t B_6 - \gamma_t B_2) + B_7(\beta_p + \beta_t B_2 - \gamma_t B_6) \quad \text{(E-1)}$$

$$E_2 = 2(1 + B_8)(\beta_p + \beta_t B_2 - \gamma_t B_6) + 2B_{12}(-\gamma_p + \beta_t B_6 - \gamma_t B_2) \quad \text{(E-2)}$$

$$E_3 = (1 + B_8)(-\gamma_p + \beta_t B_3 - \gamma_t B_5) + B_{12}(\beta_p + \beta_t B_5 - \gamma_t B_3) + B_9(\beta_p + \beta_t B_2 - \gamma_t B_6) + (1 + B_{11})(-\gamma_p + \beta_t B_6 - \gamma_t B_2) \quad \text{(E-3)}$$

$$E_4 = B_9(\alpha_1 + \beta_t B_1 - \gamma_t B_4) + B_7(-\gamma_p + \beta_t B_3 - \gamma_t B_5) + (1 + B_{11})(\alpha_2 + \beta_t B_4 - \gamma_t B_1) + B_{10}(\beta_p + \beta_t B_5 - \gamma_t B_3) \quad \text{(E-4)}$$

$$E_5 = 2B_9(-\gamma_p + \beta_t B_3 - \gamma_t B_5) + 2(1 + B_{11})(\beta_p + \beta_t B_5 - \gamma_t B_3) \quad \text{(E-5)}$$

$$F_1 = \frac{\gamma_t^2}{\eta_2} + \frac{\beta_t^2}{\eta_1} - \beta_p \quad \text{(F-1)}$$

$$F_2 = \gamma_p - \frac{\beta_t\gamma_t}{\eta_1} - \frac{\beta_t\gamma_t}{\eta_2} \quad \text{(F-2)}$$

$$F_3 = \frac{\gamma_t^2}{\eta_1} + \frac{\beta_t^2}{\eta_2} - \beta_p \quad \text{(F-3)}$$

$$F_4 = \frac{\beta_t(F_2\beta_p + F_2\gamma_P) + \gamma_t(F_2\beta_p + F_1\gamma_P)}{\eta_1(F_1F_3 - F_2^2)} \quad \text{(F-4)}$$

$$F_5 = \frac{\beta_t(F_2\beta_p + F_2\gamma_P) + \gamma_t(F_1\beta_p + F_2\gamma_P)}{\eta_1(F_1F_3 - F_2^2)} \quad \text{(F-5)}$$

$$F_6 = \frac{\beta_t[F_3(F_1c_1 - \alpha_1) - F_2(F_2c_1 - \alpha_2)] - \gamma_t[F_1(F_2c_2 - \alpha_2) - F_2(F_2c_2 - \alpha_1)]}{\eta_1(F_1F_3 - F_2^2)} - \frac{\gamma_t c_2 - \beta_t c_1}{\eta_1} \quad \text{(F-6)}$$

$$F_7 = \frac{\gamma_t(F_2\beta_p + F_2\gamma_P) + \beta_t(F_2\beta_p + F_1\gamma_P)}{\eta_2(F_1F_3 - F_2^2)} \quad \text{(F-7)}$$

$$-(F_{9}\beta_t - F_{6}\gamma_t + \alpha_{2})\frac{F_{2}\beta_p + F_{1}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}} \quad \text{(G-3)}$$

$$G_{4} = 2\left(1 - \frac{(F_{1}\beta_p + F_{2}\gamma_p)}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}\right)(F_{8}\beta_t + F_{5}\gamma_t - \beta_p)$$
$$+(\gamma_p - F_{5}\beta_t - F_{8}\gamma_t)\frac{2(F_{4}\beta_p + F_{3}\gamma_p)}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}} \quad \text{(G-4)}$$

$$G_{5} = \left(\frac{F_{4}\beta_p + F_{1}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}} - 1\right)(F_{9}\beta_t - F_{6}\gamma_t + \alpha_{2})$$
$$+(F_{8}\beta_t + F_{5}\gamma_t - \beta_p)\frac{F_{1}(F_{1}c_{2} - \alpha_{2}) - F_{2}(F_{2}c_{2} - \alpha_{1})}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}$$
$$-\frac{F_{3}(F_{2}c_{2} - \alpha_{1}) - F_{2}(F_{2}c_{1} - \alpha_{2})}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}(F_{5}\beta_t + F_{8}\gamma_t - \gamma_p)$$
$$-(F_{6}\beta_t - F_{9}\gamma_t + \alpha_{1})\frac{F_{2}\beta_p + F_{3}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}} \quad \text{(G-5)}$$

$$N_{1} = (B_{7} + 2H_{1}B_{1} + 2H_{2}B_{4} + 2H_{3})$$
$$(2 + B_{11} + 2H_{1}B_{5} + 2H_{2}B_{2}) \quad \text{(N-1)}$$

$$N_{2} = (B_{9} + 2H_{1}B_{3} + 2H_{2}B_{5})$$
$$(B_{10} + 2H_{1}B_{4} + 2H_{2}B_{1} + 2H_{4}) \quad \text{(N-2)}$$

$$N_{3} = (B_{10} + 2H_{1}B_{4} + 2H_{2}B_{1} + 2H_{4})$$
$$(2 + B_{8} + 2H_{1}B_{2} + 2H_{2}B_{6}) \quad \text{(N-3)}$$

$$N_{4} = (B_{7} + 2H_{1}B_{1} + 2H_{2}B_{4} + 2H_{3})$$
$$(B_{12} + 2H_{1}B_{6} + 2H_{2}B_{2}) \quad \text{(N-4)}$$

$$N_{5} = (2 + B_{8} + 2H_{1}B_{2} + 2H_{2}B_{6})$$
$$(2 + B_{11} + 2H_{1}B_{5} + 2H_{2}B_{3}) \quad \text{(N-5)}$$

$$N_{6} = (B_{9} + 2H_{1}B_{3} + 2H_{2}B_{5})$$
$$(B_{12} + 2H_{1}B_{6} + 2H_{2}B_{2}) \quad \text{(N-6)}$$

$$F_{8} = \frac{\gamma_t(F_{2}\beta_p + F_{3}\gamma_P) + \beta_t(F_{1}\beta_p + F_{2}\gamma_P)}{\eta_{2}(F_{1}F_{3} - F_{2}^{2})} \quad \text{(F-8)}$$
$$\beta_t[F_{1}(F_{1}c_{2} - \alpha_{2}) - F_{2}(F_{2}c_{2} - \alpha_{1})]$$

$$F_{9} = \frac{-\gamma_t[F_{3}(F_{2}c_{2} - \alpha_{1}) - F_{2}(F_{2}c_{1} - \alpha_{2})]}{\eta_{2}(F_{1}F_{3} - F_{2}^{2})}$$
$$-\frac{\gamma_t c_{1} - \beta_t c_{2}}{\eta_{2}} \quad \text{(F-9)}$$

$$H_{1} = \frac{\beta_p\beta_t - \gamma_P\gamma_t}{2(\beta_P^{2} - \gamma_P^{2})} \quad \text{(H-1)}$$

$$H_{2} = \frac{\beta_t\gamma_P - \beta_p\gamma_t}{2\beta_P^{2} - \gamma_P^{2})} \quad \text{(H-2)}$$

$$H_{3} = \frac{\alpha_{1}\beta_p + \alpha_{2}\gamma_P}{2(\beta_P^{2} - \gamma_P^{2})} \quad \text{(H-3)}$$

$$H_{4} = \frac{\alpha_{2}\beta_p + \alpha_{1}\gamma_P}{2(\beta_P^{2} - \gamma_P^{2})} \quad \text{(H-4)}$$

$$G_{1} = 2\left(1 - \frac{(F_{4}\beta_p + F_{2}\gamma_p)}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}\right)(F_{4}\beta_t + F_{7}\gamma_t - \beta_p)$$
$$+(\gamma_p - F_{7}\beta_t - F_{4}\gamma_t)\frac{2(F_{2}\beta_p + F_{1}\gamma_p)}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}} \quad \text{(G-1)}$$

$$G_{2} = (1 - \frac{F_{3}\beta_p + F_{2}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}})(\gamma_p - F_{8}\gamma_t - F_{5}\beta_t)$$
$$+\left(1 - \frac{F_{1}\beta_p + F_{2}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}\right)(\gamma_p - F_{4}\gamma_t - F_{7}\beta_t)$$
$$+\frac{F_{2}\beta_p + F_{1}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}(F_{8}\beta_t + F_{5}\gamma_t - \beta_p)$$
$$+\frac{F_{2}\beta_p + F_{3}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}(F_{4}\beta_t + F_{7}\gamma_t - \beta_p) \quad \text{(G-2)}$$

$$G_{3} = \left(\frac{F_{3}\beta_p + F_{2}\gamma_p}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}} - 1\right)(F_{6}\beta_t - F_{9}\gamma_t + \alpha_{1})$$
$$-(F_{7}\beta_t + F_{4}\gamma_t - \gamma_p)\frac{F_{1}(F_{1}c_{2} - \alpha_{2}) - F_{2}(F_{2}c_{2} - \alpha_{1})}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}$$
$$+\frac{F_{3}(F_{2}c_{2} - \alpha_{1}) - F_{2}(F_{2}c_{1} - \alpha_{2})}{F_{1}F_{3} - F_{2}^{2}}(F_{4}\beta_t + F_{7}\gamma_t - \beta_p)$$