

# یک رویکرد نظریه‌ی بازی برای قیمت‌گذاری دو محصول جانشین با وجود قیمت مشخص یک محصول مکمل اصلی

مرتضی راستی بزرگی (دانشیار)

دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۷ (دوره ۱، شماره ۱/۲، ص. ۱۳-۲۰)

در این نوشتار، قیمت‌گذاری دو محصول جانشین با وجود یک محصول مکمل اصلی برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته و قیمت‌های تعادلی نش معرفی شده است. پس از به دست آوردن قیمت‌های تعادلی، توابع تقاضای دو محصول جانشین و مکمل اصلی به همراه توابع سود هر تولیدکننده در نقطه‌ی تعادلی آورده شده است. پس از مقایسه‌ی قیمت‌ها، تقاضاها و سودهای تعادلی تحلیل‌هایی در خصوص اثر پارامترهای مهم بر قیمت‌ها، تقاضاها و توابع سود تعادلی ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که قیمت‌های تعادلی کالاهای مکمل در مقایسه با قیمت محصول اصلی می‌تواند کمتر یا بیشتر باشد؛ آستانه‌ی تغییر جهت این رابطه آورده شده است. تحلیل‌های پارامتری نشان می‌دهد که افزایش قیمت محصول اصلی، سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی را با یک آهنگ کاهش می‌دهد و در نهایت کاهش می‌دهد؛ آستانه‌ی این تغییر نیز محاسبه شده است.

واژگان کلیدی: قیمت‌گذاری، کالاهای مکمل و جانشین، نظریه‌ی بازی.

rasti@cc.iut.ac.ir

## ۱. مقدمه

یکی از موضوعات مهمی که اغلب شرکت‌های تولیدی/خدماتی با آن مواجه هستند موضوع قیمت‌گذاری<sup>۱</sup> است. قیمت‌گذاری یکی از ارکان اصلی یک طرح بازاریابی<sup>۲</sup> و همچنین، یکی از مباحث مهم اقتصاد خرد<sup>۳</sup> و یکی از جنبه‌های اساسی مدل‌سازی مالی<sup>۴</sup> است؛ به همین دلیل، در تحقیقات، موضوع قیمت‌گذاری مورد توجه تعداد زیادی از محققان و پژوهشگران در حوزه‌های مختلف قرار گرفته است. از طرف دیگر باید توجه شود که اصولاً در دنیای مشتری محور امروز، وجود رقابت در همه‌ی حوزه‌های تولیدی و غیرتولیدی شهود و بروز زیادی دارد که حوزه‌ی قیمت‌گذاری نیز از این قاعده مستثنی نیست؛ بنابراین، یکی از مهم‌ترین چالش‌های حوزه‌ی قیمت‌گذاری، تعیین قیمت‌ها با وجود تصمیمات قیمتی رقباست.

از طرف دیگر، نظریه‌ی بازی<sup>۵</sup> به بررسی مسائلی می‌پردازد که چند عامل<sup>۶</sup> یا بازیکن<sup>۷</sup> در پی تصمیماتی هستند تا مطلوبیت<sup>۸</sup> یا عایدی<sup>۹</sup> خود را بیشینه<sup>۱۰</sup> کنند به طوری که تصمیمات هر عامل بر تابع مطلوبیت سایر عامل‌ها تأثیرگذار باشد. نظریه‌ی بازی یکی از موضوعات جذاب برای محققان برای انجام پژوهش‌هاست. نظریه‌ی بازی در تجارت، اقتصاد، سیاست، جامعه‌شناسی، جنگ، فتاوری اطلاعات و ارتباطات، فلسفه، روان‌شناسی، زیست‌شناسی و بسیاری از علوم نظری و اجتماعی کاربرد دارد و استفاده از آن روزه‌به‌روز در حال گسترش است. همان‌طور که اشاره شد، موضوع قیمت‌گذاری معمولاً در محیط با وجود رقبا

شاید بتوان گفت یکی از مهم‌ترین موضوعات مورد بررسی در زمینه‌ی مسائل مقدار تولید و قیمت‌گذاری، مدل‌های کورنو<sup>۱۱</sup> و برترند<sup>۱۲</sup> هستند که محور بسیاری از تحقیقات قرار گرفته‌اند. مثلاً، موضوع قیمت‌گذاری یک محصول با وجود محصول مشابه جایگزین یا جانشین<sup>۱۳</sup> یا محصول مکمل<sup>۱۴</sup> به صورت جداگانه در یک پژوهش توسط سینگ و ویز<sup>۱۵</sup> بررسی شده است. همچنین تحقیقات زیادی در زمینه‌ی قیمت‌گذاری یک محصول در زنجیره‌ی تأمین صورت گرفته است که در ادامه به آنها اشاره می‌شود. اما، بررسی‌ها نشان می‌دهد قیمت‌گذاری یک محصول با وجود هم‌زمان یک محصول جانشین و یک محصول مکمل تاکنون در تحقیقات پیشین بررسی نشده است. واضح است که در دنیای واقعی، محصولات معمولاً دارای کالاهای مکمل جانشین به‌طور هم‌زمان هستند. مسئله‌ی مورد بررسی در این پژوهش، قیمت‌گذاری دو محصول جانشین است که هر یک از آنها مکمل یک محصول اصلی هستند. دو محصول مکمل مورد نظر جانشین یکدیگر محسوب می‌شوند. این مسئله کاربردهای زیادی در دنیای واقعی دارد. مثلاً قیمت‌گذاری بنزین و گاز به عنوان کالاهای جانشین یکدیگر برای خودرو که محصول اصلی آنها محسوب می‌شود؛ یا قیمت‌گذاری مواد و خودکار (دو محصول جانشین) که محصول اصلی مکمل آن دفتر است. یا یک گوشی همراه که می‌تواند دو نوع سیم‌کارت داشته باشد. قیمت‌گذاری قند و شکر

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۴/۳۰، اصلاحیه ۱۳۹۵/۱۱/۶، پذیرش ۱۳۹۶/۲/۱۲.

DOI: 10.24200/J65.2018.20054

در بخش ۲ تعریف مسئله آورده شده است. در بخش ۳ مسئله فرمول‌بندی شده است. تعادل نش قیمت‌های دو محصول جانشین مکمل محصول اصلی در بخش ۴ محاسبه شده است. بخش ۵، به بررسی روابط بین متغیرهای تعادلی و تحلیل نتایج می‌پردازد. بخش ۶ به حل و بررسی یک مثال عددی می‌پردازد و در نهایت در بخش ۷، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آورده شده است.

## ۲. تعریف مسئله

سه تولیدکننده ( $i = 0, 1, 2$ ) را در نظر بگیرید. تولیدکننده‌ی شماره صفر محصول اصلی را تولید می‌کند. کالاهای تولیدکنندگان یک و دو جانشین یکدیگر هستند به طوری که هر یک به تنهایی مکمل محصول صفر هستند. برای این مسئله مثال‌های دنیای واقعی زیادی وجود دارد که در بخش مقدمه به برخی از آنها اشاره شد. واضح است که تقاضای هر محصول به قیمت هر سه محصول وابسته است؛ بنابراین، در این مقاله برای هر تولیدکننده تابع تقاضایی در نظر گرفته شده است که متأثر از قیمت محصول خود و قیمت دو محصول دیگر است. قیمت محصول اصلی (محصول شماره صفر) مشخص است و دو تولیدکننده دیگر بر اساس قیمت محصول اصلی محصول خود را قیمت‌گذاری می‌کنند. مشابه پژوهش‌های موجود در پیشینه‌ی موضوع (مانند مراجع [۱۹] تا [۲۰]) تابع تقاضای محصولات به صورت خطی فرض شده است. همه‌ی اطلاعات در مورد پارامترها و رفتار توابع تقاضا برای همه‌ی تولیدکنندگان شناخته شده است (بازی با اطلاعات کامل).

### ۱.۲. علائم

علائم استفاده شده در این مقاله عبارت‌اند از:

اندیس‌ها

$i$  اندیس تولیدکننده ( $i = 0, 1, 2$ )

پارامترها

$\alpha_i$  سهم بازار تولیدکننده  $i$

( $i = 0, 1, 2$ )

$\beta$  کشسانی تقاضای هر محصول ناشی از تغییر قیمت محصول خود<sup>۱۶</sup>

$\gamma$  کشسانی تقاضای هر محصول ناشی از تغییر قیمت محصول دیگر محصولات<sup>۱۷</sup>

$p_0$  قیمت فروش محصول اصلی

متغیرهای تصمیم

$P_i$  قیمت فروش محصول  $i$  ( $i = 1, 2$ )

توابع تقاضا و سود

$D_i$  تقاضای محصول  $i$  ( $i = 0, 1, 2$ )

$\pi_i$  تابع سود تولیدکننده  $i$  ( $i = 0, 1, 2$ )

علامت‌های اختصاری (اندیس بالا)

$N$  بازی نش

### ۲.۲. فرضیات

فرضیات در نظر گرفته شده در این مقاله عبارت‌اند از:

۱. همه‌ی قیمت‌ها مثبت هستند ( $P_i > 0, i = 0, 1, 2$ ).

۲. همه‌ی توابع تقاضا غیرمنفی هستند ( $D_i > 0, i = 0, 1, 2$ ).

(دو محصول جانشین یکدیگر) برای یک نوشیدنی (محصول مکمل اصلی) مثالی دیگر برای مسئله‌ی مورد بررسی در این پژوهش است. برای تقاضای پایه‌ی این نوع محصولات دو فرض قابل بررسی است.

۱. مجموع پایه‌ی بازار محصولات جانشین مکمل محصول اصلی برابر پایه‌ی بازار محصول اصلی باشد.

۲. مجموع پایه‌ی بازار محصولات جانشین مکمل محصول اصلی برابر پایه‌ی بازار محصول اصلی نباشد.

در مدل‌سازی و حل این مسئله فرض اول در نظر گرفته شده است. در ادامه پژوهش‌های پیشین مرتبط با موضوع مسئله‌ی قیمت‌گذاری به اختصار بیان می‌شود. یو و همکاران<sup>[۲]</sup> مسئله‌ی قیمت‌گذاری دو محصول مکمل با تقاضای وابسته به قیمت هر دو محصول<sup>۱۴</sup> را که توسط دو کارخانه‌ی متفاوت تولید می‌شوند، تحت مدل نش بررسی کرده‌اند. آنها در مسئله‌ی خود محصول اصلی را در نظر نگرفته‌اند. هزارخانی و کویباک<sup>[۵]</sup> مسئله‌ی تعیین قیمت انتقال<sup>۱۵</sup> یک محصول مشترک دو کارخانه تحت تقاضای احتمالی را بررسی کرده‌اند. آنها از یک مدل نش برای تحلیل مسئله استفاده کرده و پس از بررسی همکاری در بازی، یک مدل چانه‌زنی نش توسعه یافته برای تقسیم سود حاصل از همکاری ارائه داده‌اند. شائو و جی<sup>[۶]</sup> تصمیمات قیمت‌گذاری دو محصول جانشین با تقاضای وابسته به قیمت نهایی هر دو محصول را در یک سیستم مونتاژ بر طبق سفارش با بازی‌های نش و متمرکز بررسی کرده‌اند. مسئله‌ی قیمت‌گذاری در زنجیره‌ی تأمین نیز مورد بررسی قرار گرفته است. جیا و هو<sup>[۷]</sup> تصمیمات قیمت‌گذاری و سفارش‌دهی را در یک زنجیره‌ی تأمین شامل یک تأمین‌کننده و یک خرده‌فروش و برای یک محصول بررسی کرده‌اند. زائو و یانگ<sup>[۸]</sup> مدل قیمت‌گذاری و خدمت‌دهی را در دو زنجیره‌ی تأمین رقیب با محصولات جانشین با در نظر گرفتن تابع تقاضای غیرقطعی با استفاده از بازی استکلبرگ بررسی کردند. آی و همکاران<sup>[۹]</sup> با استفاده از بازی نش رقابت میان دو زنجیره‌ی تأمین شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش را برای محصولات جانشین بررسی کردند. چوی<sup>[۱۰]</sup> اثرات ساختار قدرت را بر تصمیمات تولیدکننده برای فروش از طریق خرده‌فروش بررسی کرده است. ارتک و گریفین<sup>[۱۱]</sup> اثر ساختار قدرت بر قیمت و سود را در یک زنجیره‌ی تأمین دو مرحله‌ی بررسی و حساسیت قیمت بازار را در مسئله‌ی خود تحلیل کرده‌اند. ژانگ و همکاران<sup>[۱۲]</sup> تأثیر میزان جانشینی محصولات و ساختار قدرت موجود در کانال توزیع را بر تصمیمات قیمت‌گذاری یک زنجیره تأمین با کانال توزیع دوگانه بررسی کرده‌اند. آنها دریافتند که تعادل بازی نش عمودی و بدون ساختار قدرت یک‌طرفه برای کل زنجیره تأمین بهترین ساختار قدرت ممکن است. ژائو و همکاران<sup>[۱۳]</sup> مسئله‌ی قیمت‌گذاری دو محصول جانشین در یک زنجیره‌ی تأمین شامل دو تولیدکننده و یک خرده‌فروش مشترک را با بازی‌های برترند و تباری در شرایط فازی بررسی کردند. با بررسی انجام شده به نظر می‌رسد مسئله‌ی قیمت‌گذاری دو محصول جانشین با وجود یک محصول مکمل اصلی تاکنون مطرح و بررسی نشده است. اخیراً نیز جعفری و همکاران<sup>[۱۴]</sup> و نیز اسماعیلی و همکاران<sup>[۱۵]</sup> مسئله‌ی قیمت‌گذاری را به ترتیب در زنجیره‌ی تأمین‌های دوسطحی و سه‌سطحی بررسی کرده‌اند. همچنین، مسئله‌ی قیمت‌گذاری در زنجیره‌ی تأمین با در نظر گرفتن تصمیمات مرتبط با موجودی توسط زارعی و همکاران<sup>[۱۶]</sup> بررسی شده است. فرخی و راستی بزرگی<sup>[۱۷]</sup> نیز مسئله‌ی قیمت‌گذاری در یک زنجیره‌ی تأمین دوسطحی را با در نظر گرفتن رقابت تولیدکنندگان در تصاحب بازار در سیستم تولید بر اساس سفارش بررسی کردند. تصمیمات مربوط به حمل‌ونقل در زنجیره‌ی تأمین نیز توسط داداشی و همکاران<sup>[۱۸]</sup> بررسی شده است.

#### ۴. تعادل نش

در این بخش تعادل نش مربوط به متغیرهای تصمیم یعنی قیمت‌های دو محصول جانشین آورده می‌شود. تعادل نش بر مبنای تصمیم‌گیری هم‌زمان یا به عبارت دقیق‌تر بدون اطلاع از تصمیم رقیب محاسبه می‌شود. بدین منظور فرض می‌شود دو تولیدکننده‌ی محصول‌های جانشین یکدیگر دارای قدرت هم‌سطح هستند. برای به دست آوردن تعادل نش مسئله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{cases} \max_{p_i} \pi_i(p_0, p_1, p_2) \\ i = 1, 2 \\ s.t. D_i > 0 \end{cases} \quad (8)$$

##### لم ۱. بررسی تقعر توابع سود

$\pi$  برای  $i = 1, 2$  نسبت به  $P_i$  مقعر است.

اثبات: با توجه به این که  $-2\beta < 0, i = 1, 2$ ؛ بنابراین، توابع سود نسبت به قیمت‌ها مقعر هستند. □

##### قضیه ۱. قیمت‌های تعادلی نش

قیمت‌های محصولات جانشین محصول مکمل اصلی در تعادل نش بازی عبارت‌اند از:

$$p_i^N = \frac{2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{2-i} - \beta(2\beta + \gamma)p_0}{4\beta^2 - \gamma^2} \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

اثبات:

با توجه به لم ۱، توابع بهترین پاسخ<sup>۱۸</sup> از حل دستگاه مرتبه‌ی اول توابع سود تولیدکنندگان به دست می‌آید؛ دستگاه مرتبه‌ی اول توابع سود تولیدکنندگان محصولات جانشین به صورت یک دستگاه دو رابطه و دو مجهولی عبارت است از:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\alpha_1 - p_0\beta + p_2\gamma}{2\beta} \\ p_2 = \frac{\alpha_2 - p_0\beta + p_1\gamma}{2\beta} \end{cases} \quad (10)$$

با حل این دستگاه مرتبه‌ی اول، قیمت‌های تعادلی به دست می‌آیند. □

با توجه به فرض یک، قیمت‌ها باید مثبت باشند؛ بنابراین با در نظر گرفتن سایر فرضیات مربوط به روابط بین پارامترها و همچنین  $P_i^N > 0, i = 1, 2$  داریم:

$$2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{2-i} > \beta(2\beta + \gamma)p_0 \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

که می‌توان با بازنویسی آن به صورت رابطه‌ی شرط شدنی بودن جواب‌ها را مطابق رابطه‌ی مذکور در محاسبات آتی لحاظ کرد.

با جایگذاری قیمت‌های تعادلی (رابطه‌ی ۹) در توابع تقاضا (روابط ۴ و ۵) و توابع سود (روابط ۶ و ۷) نتایج زیر به دست می‌آید.

##### نتیجه ۱. تقاضاها و سودهای تعادلی

توابع تقاضای محصول اصلی و محصولات جانشین مکمل محصول اصلی و همچنین توابع سود در نقطه‌ی تعادل نش به ترتیب عبارت‌اند از:

$$p_0 < \frac{2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{2-i}}{\beta(2\beta + \gamma)} \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

$$D_i^N = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta - 2(\beta - \gamma)^2 p_0}{2\beta - \gamma} \quad (13)$$

۳. تولیدکنندگان ظرفیت لازم برای پاسخ به تقاضا را دارند (پژوهش‌های مشابه با این فرض [۲۲، ۲۱]).

۴. کشسانی تقاضا به محصول خود بیشتر از کشسانی تقاضا به دو محصول دیگر است ( $\beta > \gamma$ ). (این فرض تقریباً در تمام پژوهش‌ها در نظر گرفته می‌شود مثلاً مراجع [۲۳، ۲۲]).

۵. کشسانی تقاضا متأثر از قیمت دو محصول مکمل یکسان است (پژوهش‌های مشابه با این فرض عبارت‌اند از [۲۴، ۲۵]).

۶. اگر در اثر افزایش یک واحد قیمت محصول یک (دو)  $\beta$  واحد از تقاضای همان محصول کم و  $\gamma$  واحد به تقاضای محصول دو (یک) افزوده شود،  $\beta - \gamma$  تعداد مشتریانی است که از استفاده‌ی محصول اصلی منصرف می‌شوند. بنابراین، با افزایش یک واحد قیمت محصول یک یا دو، تقاضای محصول اصلی به اندازه‌ی  $\beta - \gamma$  کاهش می‌یابد (کشسانی قیمت کالاها یک و دو بر روی تقاضای محصول اصلی).

۷. در اثر افزایش یک واحد محصول یک،  $\beta - \gamma$  نفر از خرید منصرف می‌شوند؛ همچنین در اثر افزایش یک واحد محصول دو  $\beta - \gamma$  نفر از خرید منصرف می‌شوند؛ بنابراین، با توجه به این نکته در اینجا فرض می‌شود در اثر افزایش یک واحد محصول اصلی  $2(\beta - \gamma)$  نفر از خرید محصول محصول اصلی منصرف می‌شوند.

۸. تقاضای پایه‌ی محصول اصلی برابر مجموع تقاضاهای پایه‌ی محصولات جانشین مکمل محصول اصلی ( $\alpha_1 + \alpha_2$ ) است (این فرض برای کل تابع تقاضا در نظر گرفته نشده است). در صورتی که برای دو محصول جانشین مکمل یک کالای اصلی این فرض صادق نباشد به راحتی می‌توان مسئله را با در نظر گرفتن  $\alpha_2$  به جای  $\alpha_1 + \alpha_2$ ، گسترش داد.

۹. هزینه‌های تولید محصولات ناچیز فرض می‌شود.

#### ۳. فرمول‌بندی مسئله

با توجه به تعریف مسئله و فرضیات ارائه شده، تابع تقاضای سه محصول به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$D_0 = (\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\beta - \gamma)p_0 - (\beta - \gamma)p_1 - (\beta - \gamma)p_2 \quad (1)$$

$$D_1 = \alpha_1 - \beta(p_0 + p_1) + \gamma p_2 \quad (2)$$

$$D_2 = \alpha_2 - \beta(p_0 + p_2) + \gamma p_1 \quad (3)$$

که می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$D_0 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta - \gamma)(2p_0 + p_1 + p_2) \quad (4)$$

$$D_i = \alpha_i - \beta(p_0 + p_i) + \gamma p_{2-i} \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

همچنین توابع سود سه تولیدکننده عبارت‌اند از:

$$\pi_0 = ((\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta - \gamma)(2p_0 + p_1 + p_2)) p_0 \quad (6)$$

$$\pi_i = (\alpha_i - \beta(p_0 + p_i) + \gamma p_{2-i}) p_i \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

برای مسئله‌ی مطرح شده در این مقاله، روابط زیر بین قیمت محصول اصلی با قیمت‌های تعادلی هر یک از کالاهای مکمل برقرار است:

$$p_i^N \geq p_0, p_0 < \frac{\gamma\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i}}{\beta\gamma + \beta\gamma - \gamma^2} \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

اثبات:

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۹ در رابطه‌ی  $p_i^N \geq P_0$  و ساده‌سازی، نتیجه فوق حاصل می‌شود. □

### تحلیل ۱.

نکته‌ی ۲ که از قضیه ۲ می‌توان برداشت کرد این است که در صورتی که قیمت محصول اصلی کمتر از مقدار  $\frac{\gamma\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i}}{\beta\gamma + \beta\gamma - \gamma^2}$  باشد یعنی به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، قیمت محصول مکمل آن در نقطه‌ی تعادل، بیشتر از قیمت محصول اصلی می‌شود و برعکس در صورتی که قیمت محصول اصلی بیشتر از مقدار  $\frac{\gamma\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i}}{\beta\gamma + \beta\gamma - \gamma^2}$  باشد، قیمت محصول مکمل آن در نقطه‌ی تعادل، کمتر از قیمت محصول اصلی می‌شود. سؤالی که در این جا مطرح می‌شود این است که آیا با افزایش قیمت محصول اصلی، قیمت‌های تعادلی کالاهای جانشین مکمل محصول اصلی کاهش می‌یابند یا افزایش؟ تقاضا و سودهای تعادلی چه تغییری می‌کنند؟ این موضوع در بخش ۲-۵ بررسی می‌شود.

### قضیه ۳. رابطه‌ی بین قیمت‌های تعادلی محصولات جانشین

برای مسئله‌ی مطرح شده در این مقاله، روابط زیر بین قیمت‌های تعادلی هر یک از کالاهای مکمل برقرار است:

$$p_i^N \leq p_{r-i}^N \quad \alpha_i \leq \alpha_{r-i} \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

اثبات:

مشابه اثبات قضیه ۲. □

### تحلیل ۲.

از قضیه‌ی ۳ می‌توان این گونه برداشت کرد که تولیدکننده‌ی که محصول مکمل آن، پایه‌ی بازار بزرگتری دارد، قیمت بالاتری برای محصول خود وضع می‌کند. به عبارت دیگر، تولیدکننده‌ی محصول مکمل با پایه‌ی بازار بزرگتر کنترل بیشتری در تنظیم قیمت‌ها دارد. بنابراین مطابق این قضیه هرچه پایه‌ی بازار کوچک‌تر باشد قیمت‌ها کاهش می‌یابند.

### قضیه ۴. رابطه‌ی بین تقاضاهای تعادلی

برای مسئله‌ی مطرح شده در این مقاله، روابط زیر بین توابع تقاضا در نقطه‌ی تعادل برقرار است:

$$D_i^N \geq D_i^N \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

$$D_i^N \geq D_{r-i}^N \quad \alpha_i \geq \alpha_{r-i} \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

اثبات:

با استفاده از روابط ۱۳ و ۱۴ نتیجه‌ی فوق سرراست است. □

### تحلیل ۳.

با توجه به فرضیات مسئله، واضح است که تقاضای محصول اصلی حداقل به اندازه‌ی تقاضای هر یک از محصولات مکمل است. بنابراین رابطه‌ی ۲۳ سرراست است. نکته‌ی ۲ که از رابطه‌ی ۲۴ استنباط می‌شود این است که محصولی که پایه‌ی بازار بزرگتری دارد در نقطه‌ی تعادل، تقاضای بیشتری هم دارد. بنابراین، پایه‌ی بازار کوچک‌تر منجر به تقاضای کمتری می‌شود.

$$D_i^N = \frac{\beta(2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i} - \beta(2\beta + \gamma)p_0)}{4\beta^2 - \gamma^2} \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

$$\pi_i^N = \frac{((\alpha_1 + \alpha_2)\beta - 2(\beta - \gamma)^2 p_0)p_0}{2\beta - \gamma} \quad (15)$$

$$\pi_i^N = \frac{\beta(2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i} - \beta(2\beta + \gamma)p_0)^2}{(\gamma^2 - 4\beta^2)^2} \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

### نکته ۱. شرط شدنی بودن

با توجه به فرض ۲، لازم است فرض مثبت بودن تقاضا یا به عبارت دیگر، شرط شدنی بودن جواب‌ها بررسی شود. بنابراین (منظور از علامت \* فرضیات مطرح شده در بخش ۲-۲ است):

$$D_i^N > 0 \rightarrow \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta - 2(\beta - \gamma)^2 p_0}{2\beta - \gamma} > 0 \rightarrow *(\beta > \gamma) (\alpha_1 + \alpha_2) > \frac{2(\beta - \gamma)^2 p_0}{\beta} \quad (17)$$

$$D_i^N > 0 \rightarrow \frac{\beta(2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i} - \beta(2\beta + \gamma)p_0)}{4\beta^2 - \gamma^2} > 0 \rightarrow *(\beta > \gamma) 2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i} > \beta(2\beta + \gamma)p_0 \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

همان‌طور که مشخص است روابط ۱۷ و ۱۸ معادل یکدیگر هستند که می‌توان آنها را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$p_0 < \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\beta - \gamma)^2} \quad (19)$$

$$p_0 < \frac{\gamma\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i}}{\beta(2\beta + \gamma)} \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

بنابراین، برای مسئله‌ی مطرح شده در این پژوهش شرایط شدنی بودن مندرج در روابط ۱۹ و ۲۰ باید بین پارامترهای مسئله برقرار باشد تا نقاط تعادلی معتبر باشند؛ در غیراین صورت، مسئله ساده می‌شود و کافی است شرایط مرزی بررسی شود.

## ۵. تحلیل روابط مربوط به قیمت‌ها، تقاضاها و سودهای تعادلی

در این بخش به بررسی روابط مربوط به قیمت‌های تعادلی و تقاضاها و همچنین توابع سود در نقطه‌ی تعادل نش می‌پردازیم (بخش ۵-۱)؛ همچنین، اثر قیمت محصول اصلی بر روی قیمت‌های تعادلی کالاهای جانشین مکمل در بخش ۲-۵ بررسی می‌شود. اثر قیمت محصول اصلی بر تقاضا و سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی در بخش ۳-۵ آورده می‌شود.

### ۱.۵. رابطه‌ی بین قیمت‌ها، تقاضاها و سود تولیدکنندگان در نقطه‌ی تعادل

با بررسی رابطه‌ی ۹، در مورد رابطه‌ی قیمت محصول اصلی با قیمت‌های تعادلی هر یک از کالاهای مکمل آن و همچنین رابطه‌ی بین قیمت‌های تعادلی کالاهای مکمل می‌توان قضاای زیر را استنتاج کرد.

قضیه ۲. رابطه‌ی بین قیمت‌های تعادلی کالاهای جانشین با محصول اصلی

همان‌طور که مشخص است سمت چپ این رابطه یک تابع درجه دو بر حسب  $P_0$  است که ضریب  $P_0^2$  منفی است؛ همچنین دلتای  $(\Delta = b^2 - 4ac)$  تابع درجه دوم سمت چپ نامعادله مثبت است زیرا  $(\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow 4\beta^2\alpha_1^2 < 16\beta^2\alpha_1\alpha_2)$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{\beta \left( \begin{array}{l} \beta(-4\beta^2 + 36\beta\gamma + \gamma^2)\alpha_1^2 + \\ 2\beta(8\beta^2 + 2\beta\gamma + 17\gamma^2)\alpha_1\alpha_2 + \\ (4\beta^2 + 8\beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + 8\gamma^2)\alpha_2^2 \end{array} \right)}{(-4\beta^2 + \gamma^2)^2} > 0.$$

بنابراین، فضای جواب بین دو ریشه‌ی آن، جواب این نامعادله است. رابطه‌ی مذکور دارای دو ریشه است که ریشه‌ی اول آن (پس از محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم و ساده‌سازی) عبارت است از:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\beta((8\beta^2 - \gamma^2)\alpha_1 + (4\beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2)\alpha_2)}{(2\beta + \gamma)(5\beta^2 - 10\beta^2\gamma + 8\beta\gamma^2 - 2\gamma^2)} - \sqrt{\frac{A}{B}} \right)$$

و ریشه‌ی دوم آن بزرگ‌تر از شرط شدنی  $\frac{2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2}{2\beta^2 + \beta\gamma}$  می‌شود؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود. □

همان‌طور که در تحلیل سه اشاره شد در صورتی که  $p_0 > \frac{2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2}{2\beta^2 + \beta\gamma}$  باشد سود تعادلی تولیدکننده‌ی محصول اصلی بزرگ‌تر از سود هر یک از محصولات مکمل می‌شود و در غیر این صورت، چنان‌چه شرایط مندرج در قضیه‌ی ۵ برقرار باشد، سود تعادلی تولیدکننده‌ی محصول اصلی بزرگ‌تر از سود هر یک از محصولات مکمل می‌شود.

#### قضیه ۶. رابطه‌ی بین سودهای تعادلی محصولات مکمل

برای مسئله‌ی مطرح شده در این مقاله، روابط زیر بین توابع سود در نقطه‌ی تعادل برقرار است:

$$\pi_i^N \geq \pi_{r-i}^N \quad \alpha_i \geq \alpha_{r-i} \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

اثبات:

با استفاده از روابط ۱۶ این نتیجه سراسر است. □

#### تحلیل ۴.

همان‌طور که در تحلیل ۳ اشاره شد محصول مکملی که پایه‌ی بازار بزرگ‌تری دارد سود تعادلی بیشتری دارد.

### ۲.۵. اثر قیمت محصول اصلی بر روی قیمت‌ها، مقدار تقاضا و توابع سود محصولات جانشین

با توجه به رابطه‌ی ۹ در قضیه‌ی ۱، افزایش قیمت محصول اصلی باعث کاهش قیمت محصولات تولیدکنندگان یک و دو می‌شود. از طرف دیگر طبق رابطه‌ی ۱۴ افزایش قیمت محصول اصلی باعث کاهش تقاضای محصولات یک و دو می‌شود. همچنین، از آنجایی که طبق رابطه‌ی ۲۰ برای هر تولیدکننده  $(i = 1, 2)$ :  $2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i} < \beta(2\beta + \gamma)p_0$  (به عبارت دیگر اگر قیمت محصول اصلی به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد) می‌توان نتیجه گرفت با توجه به رابطه‌ی (۱۶)، افزایش قیمت محصول اصلی باعث کاهش سود تولیدکنندگان یک و دو می‌شود. کاهش سود تولیدکنندگان ناشی از کاهش قیمت تعادلی و همچنین کاهش تقاضای منطقی است.

همچنین، از مجموع قضایای ۲ و ۴ برداشت می‌شود که در صورتی که قیمت محصول پایه بزرگ باشد (به عبارت دقیق‌تر اگر  $p_0 > \frac{2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2}{2\beta^2 + \beta\gamma}$ ) سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی بیشتر از هر یک از تولیدکنندگان محصولات مکمل می‌شود؛ اما در غیراین صورت اگر قیمت محصول اصلی به اندازه‌ی کافی پایین باشد  $(p_0 < \frac{2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2}{2\beta^2 + \beta\gamma})$  با استفاده از دو قضیه‌ی مذکور نمی‌توان اظهار نظری کرد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که به طور کلی به دست آوردن یک رابطه‌ی صریح بین روابط سود نقاط تعادلی در مورد تولیدکننده‌ی محصول اصلی و سایر تولیدکنندگان ممکن نیست. اما در یک حالت می‌توان تابع سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی را با محصول مکمل مقایسه کرد که در قضیه‌ی ۵ به آن اشاره شده است.

همچنین، از مجموع قضایای ۴ و ۵ برداشت می‌شود که از بین تولیدکنندگان محصولات مکمل جانشین، تولیدکننده‌ی که پایه‌ی بازار بزرگ‌تری دارد سود تعادلی بیشتری نیز دارد؛ زیرا آن تولیدکننده هم قیمت تعادلی بالاتری دارد (قضیه ۴) و هم تقاضای بیشتر (قضیه ۵). این نتیجه با استفاده از روابط مربوط به سودهای تعادلی نیز قابل احصاست که در قضیه ۶ آورده شده است.

#### قضیه ۵. رابطه‌ی بین سودهای تعادلی محصول اصلی و محصول مکمل در شرایط خاص

برای مسئله‌ی مطرح شده در این مقاله، روابط زیر بین توابع سود در نقطه‌ی تعادل برقرار است:

$$\pi_i^N \geq \pi_{r-i}^N \quad \text{if } \alpha_1 < \alpha_2$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\beta((8\beta^2 - \gamma^2)\alpha_1 + (4\beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2)\alpha_2)}{(2\beta + \gamma)(5\beta^2 - 10\beta^2\gamma + 8\beta\gamma^2 - 2\gamma^2)} - \sqrt{\frac{A}{B}} \right) < p_0 < \frac{2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2}{2\beta^2 + \beta\gamma} \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

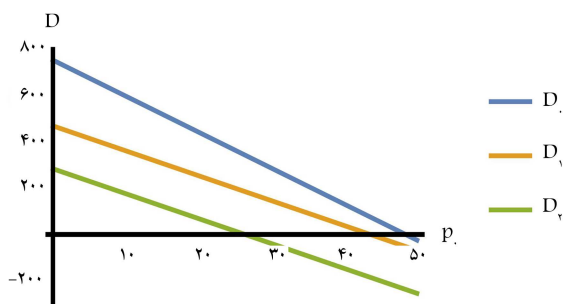
که در آن:

$$\begin{aligned} A &= \beta(-2\beta + \gamma)^2(\beta(-4\beta^2 + 36\beta\gamma + \gamma^2)\alpha_1^2 \\ &+ 2\beta(8\beta^2 + 2\beta\gamma + 17\gamma^2)\alpha_1\alpha_2 \\ &+ (4\beta^2 + 8\beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + 8\gamma^2)\alpha_2^2) \\ B &= (2\beta + \gamma)^2(5\beta^2 - 10\beta^2\gamma + 8\beta\gamma^2 - 2\gamma^2)^2 \end{aligned}$$

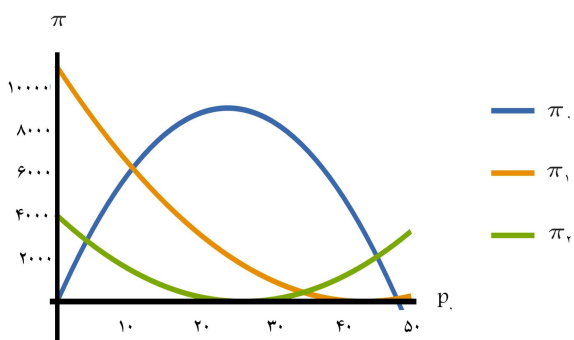
و  $\frac{2\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2}{2\beta^2 + \beta\gamma}$  همان شرط شدنی مندرج در رابطه‌ی (۲۰) است. اثبات:

با جای‌گذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در رابطه‌ی  $\pi_i^N \geq \pi_{r-i}^N$ :

$$\begin{aligned} &((\alpha_1 + \alpha_2)\beta - 2(\beta - \gamma)^2 p_0) / (2\beta - \gamma) \\ &\geq \frac{\beta(2\beta\alpha_i + \gamma\alpha_{r-i} - \beta(2\beta + \gamma)p_0)^2}{(\gamma^2 - 4\beta^2)^2} \\ &\rightarrow p_0^2 \left( -\frac{2(\beta - \gamma)^2}{2\beta - \gamma} - \frac{\beta^2(2\beta + \gamma)^2}{(-4\beta^2 + \gamma^2)^2} \right) \\ &+ p_0 \left( \frac{4\beta^2(2\beta + \gamma)\alpha_1}{(-4\beta^2 + \gamma^2)^2} + \frac{2\beta^2\gamma(2\beta + \gamma)\alpha_2}{(-4\beta^2 + \gamma^2)^2} \right) \\ &+ \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{2\beta - \gamma} - \frac{4\beta^2\alpha_1^2}{(-4\beta^2 + \gamma^2)^2} \\ &- \frac{4\beta^2\gamma\alpha_1\alpha_2}{(-4\beta^2 + \gamma^2)^2} - \frac{\beta\gamma^2\alpha_2^2}{(-4\beta^2 + \gamma^2)^2} \geq 0 \end{aligned}$$



شکل ۱. تابع تقاضا برای یک مثال عددی.



شکل ۲. تابع سود برای یک مثال عددی.

جدول ۱. نتیجه‌ی حل یک مثال عددی.

متغیرها	مقادیر	متغیرها	مقادیر
	۱۲٫۷۶	$P_1$	
	۳٫۴۵	$P_2$	
	۴۴۴٫۳۲	$D_0$	
$p_0 < ۲۶/۳۶$	۲۵۱٫۱۸	$D_1$	شرایط شدنی (روابط ۱۹ و ۲۰)
$p_0 < ۴۳/۶۰/۳۶$	۶۹٫۱۳	$D_2$	
$P_0 < ۲۴/۲۲/۳۶$	۸۸۸۶٫۵	$\pi_0$	
	۳۲۵۶٫۰	$\pi_1$	
	۲۳۹٫۰۱	$\pi_2$	

بیشتر سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی در قیمت حدود ۲۸ واحد پولی رخ می‌دهد. همچنین کمترین سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی جایی است که قیمت خیلی کم یا خیلی زیاد باشد. قیمت کم باعث از بین رفتن سود حاشیه‌ی و قیمت بالا باعث از بین رفتن تقاضا می‌شود. مطابق این شکل، رفتار سودآوری کالاها می‌تواند تقریباً برخلاف رفتار سودآوری تولیدکننده‌ی محصول مکمل است؛ بدین معنی که با کاهش قیمت محصول اصلی به دلیل افزایش تقاضا سود تولیدکنندگان محصولات مکمل افزایش می‌یابد؛ بنابراین، با افزایش قیمت محصول اصلی سود تولیدکنندگان محصولات مکمل کاهش می‌یابد؛ این روند تا رسیدن قیمت محصول اصلی به حد بالای خود (شرایط شدنی بودن) ادامه دارد.

شکل‌های ۳ تا ۵ اثر دو پارامتر مهم  $\beta$  و  $\gamma$  را بر سود تولیدکنندگان نشان می‌دهد؛ به منظور بررسی بهتر، شکل‌ها با نماهای مختلف آورده شده است. این شکل‌ها نشان می‌دهند که افزایش  $\beta$  منجر به کاهش سود هر سه تولیدکننده می‌شود؛ اما افزایش  $\gamma$  باعث افزایش سود تولیدکنندگان می‌شود. از آنجایی که  $\beta$  تعداد مشتریانی است

### ۳.۵. اثر قیمت محصول اصلی بر روی مقدار تقاضا و سود تعادلی تولیدکننده‌ی محصول اصلی

با توجه به رابطه‌ی ۹، افزایش قیمت محصول اصلی باعث کاهش تقاضای محصول اصلی در نقطه‌ی تعادل می‌شود. اما، با توجه به رابطه‌ی ۱۵ نمی‌توان اظهار نظر سریعی در مورد اثر افزایش قیمت محصول اصلی بر روی تابع سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی کرد. با انجام مشتق اول تابع سود محصول اصلی داریم:

$$\frac{\partial p_0 \pi_0^N}{\partial p_0} = \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2) - 4p_0(\beta - \gamma)^2}{2\beta - \gamma} \quad (27)$$

$$\begin{cases} > 0 & p_0 < \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\beta - \gamma)^2} \\ \leq 0 & p_0 \geq \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\beta - \gamma)^2} \end{cases}$$

بنابراین، اگر قیمت محصول اصلی به اندازه‌ی کافی پایین باشد (به عبارت دقیق‌تر  $p_0 < \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\beta - \gamma)^2}$ ) افزایش قیمت محصول اصلی باعث افزایش سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی می‌شود و در غیر این صورت (یعنی  $p_0 \geq \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\beta - \gamma)^2}$ ) افزایش قیمت محصول اصلی منجر به کاهش سود تولیدکننده‌ی مربوطه می‌شود (شرایط شدنی همواره باید برقرار باشند).

### ۶. نتایج عددی

در این بخش روابط مربوط به قیمت‌های تعادلی و تقاضاها و همچنین توابع سود در نقطه‌ی تعادل نش به‌طور عددی مورد بحث قرار می‌گیرد. برای این منظور مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha_1 = 900; \alpha_2 = 500; \beta = 20; \gamma = 3$$

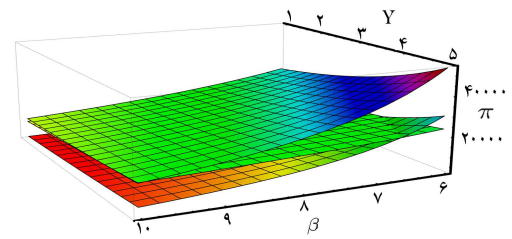
نتیجه‌ی حل این مثال عددی با روابط مندرج در بخش تعادل نش در جدول ۱ آمده است.

نمودار توابع تقاضا و سود هر یک از تولیدکنندگان مربوط به این مثال عددی در شکل‌های ۱ و ۲ آمده است. نقاطی از نمودار که تقاضا منفی است مربوط به عدم رعایت شرایط شدنی بودن مسئله (افزایش بیش از حد قیمت‌ها) است و صرفاً جنبه‌ی نمایشی دارد. همان‌طور که از شکل ۱ مشخص است با افزایش قیمت محصول اصلی تقاضای هر سه محصول کاهش می‌یابد. همچنین این شکل نشان می‌دهد که تقاضای محصول اصلی بیشتر از تقاضای هر یک از دو محصول دیگر و تقاضای محصول یک (محصولی که پایه‌ی بازار بزرگ‌تری دارد) بیشتر از محصول دو است. شرایط شدنی مندرج در جدول ۱ با شکل ۱ مطابقت دارد؛ به عبارت دیگر افزایش بیش از حد قیمت محصول اصلی تقاضای محصول مکمل دوم را منفی می‌کند. از شکل ۲ می‌توان برداشت کرد که در فضای شدنی سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی بیشتر از سود هر یک از دو تولیدکننده‌ی دیگر است اما آهنگ افزایش سود تعادلی تولیدکننده‌ی محصول اصلی با افزایش قیمت محصول اصلی کاهش می‌یابد. همچنین این شکل نشان می‌دهد که افزایش قیمت محصول اصلی اثر منفی بر سود تعادلی تولیدکنندگان محصولات مکمل دارد. دقت شود که تحلیل‌ها صرفاً برای فضای شدنی مورد بحث قرار می‌گیرد و ادامه‌ی رفتار توابع تقاضا و سود در خارج از فضای شدنی در شکل‌ها صرفاً جنبه‌ی نمایشی دارد. یکی از جنبه‌های استفاده از نمودار تحلیل حساسیت مطابق آنچه در شکل ۲ وجود دارد به دست آوردن بیشترین سود برای تولیدکننده‌ی محصول اصلی است. با توجه به شکل مذکور

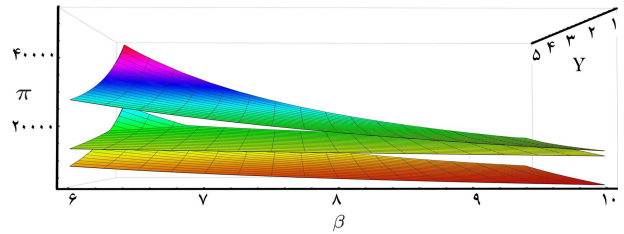
که از خرید یک کالا منصرف و  $\gamma$  تعداد مشتریانی است که به کالای دیگر مراجعه می‌کنند، این رفتار بدیهی و منطقی است.

## ۷. نتیجه‌گیری

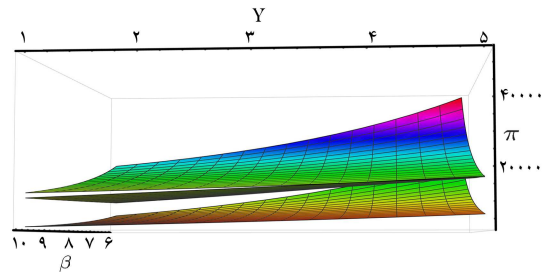
در این مقاله قیمت‌گذاری دو محصول جانشین که مکمل یک محصول اصلی هستند، مورد بررسی قرار گرفت. نقاط تعادلی قیمت‌ها، توابع تقاضا و سود آورده شد و علاوه بر مقایسه‌ی قیمت‌ها، تقاضاها و سودهای تعادلی تحلیل‌هایی به صورت پارامتریک بر روی برخی از پارامترهای مهم مسئله انجام شد. برخی از نتایج به دست آمده از حل مدل عبارت‌اند از: در صورتی که قیمت محصول اصلی کوچک باشد، قیمت محصول مکمل آن در نقطه‌ی تعادل بیشتر از قیمت محصول اصلی می‌شود و برعکس. تولیدکننده‌ی که محصول مکمل آن، پایه‌ی بازار بزرگ‌تری دارد، قیمت محصول خود را بیشتر تنظیم می‌کند. محصولی که پایه‌ی بازار بزرگ‌تری دارد در نقطه‌ی تعادل، تقاضای بیشتری هم دارد. در صورتی که قیمت محصول پایه بزرگ باشد سود تولیدکننده‌ی محصول اصلی بیشتر از هر یک از تولیدکنندگان محصولات مکمل می‌شود. همچنین افزایش قیمت محصول اصلی باعث کاهش سود تولیدکنندگان یک و دو می‌شود. این مسئله در آینده می‌تواند با افزایش تعداد کالاهای مکمل برای یک نوع محصول اصلی یا تعمیم ساختار آن به یک زنجیره‌ی تأمین با در نظر گرفتن خرده فروش‌ها علاوه بر تولیدکنندگان توسعه یابد. همچنین مسئله در حالت پویا بررسی شود (برای مثال مراجع [۲۷-۳۰]) همچنین به این مسئله موضوع سبز بودن کالاها نیز می‌تواند اضافه شود. از جمله کارهای آتی می‌تواند قیمت‌گذاری به همراه تبلیغات باشد. در نظر گرفتن سایر هزینه‌ها در توابع سود و همچنین در نظر گرفتن توابع تقاضای غیرخطی نیز می‌تواند به عنوان پیشنهاد برای کارهای آتی مطرح شود.



شکل ۳. تابع سود برای یک مثال عددی، نگاه یک.



شکل ۴. تابع سود برای یک مثال عددی، نگاه دو (اثر  $\beta$ ).



شکل ۵. تابع سود برای یک مثال عددی، نگاه سه (اثر  $\gamma$ ).

## پانویس‌ها

1. pricing
2. marketing plan
3. microeconomics
4. financial modeling
5. game theory
6. agent
7. player
8. utility
9. pay-off
10. maximum
11. nash equilibrium
12. substitute
13. complementary
14. price sensitive demand
15. transshipment prices
16. self-price elasticity
17. cross-price elasticity
18. best response

## منابع (References)

1. Cournot, A.-A., *Recherches Sur Les Principes Mathématiques, De La Théorie Des Richesses Par Augustin Cournot*: chez L. Hachette (1838).
2. Bertrand, J. Ibook review of *theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richessesj*, *Journal de Savants*, **67**, pp.1067-1082 (1883).
3. Singh, N. and Vives, X. "Price and quantity competition in a differentiated duopoly", *The RAND Journal of Economics*, **15**, pp. 546-554, (1984).
4. Yue, X., Mukhopadhyay, S. K. and Zhu, X. "A Bertrand model of pricing of complementary goods under information asymmetry", *Journal of Business Research*, **59**, pp. 1182-1192, DOI:10.1016/j.jbusres.2005.06.005 (2006).
5. Hezarkhani, B. and Kubiak, W. "A coordinating contract for transshipment in a two-company supply chain", *European Journal of Operational Research*, **207**, pp. 232-237, (2010).

6. Shao, X.F. and Ji, J.H. "Effects of sourcing structure on performance in a multiple-product assemble-to-order supply chain", *European Journal of Operational Research*, **192**, pp.981-1000, DOI: 10.1016/j.ejor.2007.10.014 (2009).
7. Lai, G., Debo, L. G. and Sycara, K. "Sharing inventory risk in supply chain: The implication of financial constraint", *Omega*, **37**, pp. 811-825, (2009).
8. Xiao, T. and Yang, D. "Price and service competition of supply chains with risk-averse retailers under demand uncertainty", *International Journal of Production Economics*, **114**, pp. 187-200, (2008).
9. Ai, X., Chen, J., Zhao, H. and Tang, X. "Competition among supply chains: Implications of full returns policy", *International Journal of Production Economics*, **139**, pp. 257-265, (2012).
10. Choi, S. C. "Price competition in a channel structure with a common retailer", *Marketing Science*, **10**, pp. 271-296, (1991).
11. Ertek, G. and Griffin, P. M. "Supplier-and buyer-driven channels in a two-stage supply chain", *IIE transactions*, **34**, pp. 691-700, (2002).
12. Zhang, R. Liu, B. and Wang, W. "Pricing decisions in a dual channels system with different power structures", *Economic Modelling*, **29**, pp. 523-533, (2012).
13. Zhao, J., Tang, W., Zhao, R. and et al. "Pricing decisions for substitutable products with a common retailer in fuzzy environments", *European Journal of Operational Research*, **216**, pp. 409-419, (2012).
14. Jafari H., Hejazi, S. R. and Rasti-Barzoki, M. "Pricing decisions in dual-channel supply chain including monopolistic manufacturer and duopolistic retailers: a game-theoretic approach", *Journal of Industry, Competition and Trade*, pp. 1-21, (2016).
15. Esmaeili, P., Rasti-Barzoki, M. and Hejazi, R. "Pricing and advertising decisions in a three-level supply chain with nash, stackelberg and cooperative games", *International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, **27**, pp. 43-59, (2016).
16. Zarei, J., Rasti-Barzoki, M. and Hejazi, S. R. "Coordination of pricing policies and cooperative advertising considering the costs of inventory in a two-level supply chain: A game-theoretic approach", *Sharif Industrial Engineering and Management*, **34**(1), pp.51-61, (In Persian) (2018).
17. Farrokhi, M. A. and Rasti-Barzoki, M. "Pricing in a two-echelon supply chain with manufacturers' competing to seizing the market in the make-to-order environment by using game theory", *Sharif Industrial Engineering and Management*, **3**, pp. 207-219, (In Persian) (2016).
18. Dadashi, M., Rasti-Barzoki, M. and Hejazi, S. R. "Pricing Decision in Centralized Carrier-Retailer Channel with Game Theory Approach", *Sharif Industrial Engineering and Management*, **34**(1), pp.3-15, (In Persian) (2018).
19. Pan, K., Lai, K. K., Leung, S. C. H. and et al. "Revenue-sharing versus wholesale price mechanisms under different channel power structures", *European Journal of Operational Research*, **203**, pp. 532-538, (2010).
20. Edirisinghe, N. C. P., Bichescu, B. and Shi, X. "Equilibrium analysis of supply chain structures under power imbalance", *European Journal of Operational Research*, **214**, pp. 568-578, (2011).
21. Ferrer, G. and Ketzenberg, M. E. "Value of information in remanufacturing complex products", *IIE transactions*, **36**, pp. 265-277, (2004).
22. Savaskan, R. C. and Van Wassenhove, L. N. "Reverse channel design: the case of competing retailers", *Management Science*, **52**, pp. 1-14, (2006).
23. Dan, B., Xu, G. and Liu, C. "Pricing policies in a dual-channel supply chain with retail services", *International Journal of Production Economics*, **139**, pp. 312-320 (2012).
24. Wei, J. Zhao, J. and Li, Y. "Pricing decisions for complementary products with firms' different market powers", *European Journal of Operational Research*, **224**, pp. 507-519, (2013).
25. Hua, G., Wang, S. and Cheng, T. C. E. "Price and lead time decisions in dual-channel supply chains", *European Journal of Operational Research*, **205**, pp. 113-126, (2010).
26. Huang, S., Yang, C. and Zhang X. "Pricing and production decisions in dual-channel supply chains with demand disruptions", *Computers & Industrial Engineering*, **62**, pp. 70-83, (2012).
27. Zhang, J. and Frazier, G. V. "Strategic alliance via co-opetition: Supply chain partnership with a competitor", *Decision Support Systems*, **51**, pp. 853-863, (2011).
28. Sayadi, M. K. and Makui, A. "Feedback Nash equilibrium for dynamic brand and channel advertising in dual channel supply chain", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **161**, pp. 1012-1021, DOI: 10.1007/s10957-013-0479-1 (2014).
29. Shalchi Tousi, M. A., Ghazanfari, M. and Makui, A. "A Model of Brand Competition for Durable Goods Supply Chains in a Dynamic Framework", *Journal of Industrial and Systems Engineering*, **7**, p. (In press), (2015).
30. Rahmani, A., Hejazi, S. R. and Rasti-Barzoki, M. "Feedback nash equilibrium for dynamic advertising and pricing in dual channel supply chain", *Sharif Scientific Journal*, **33**(1), pp.79-90 (2018).