مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۹)
دوره‌ی ۱-۳۶، شماره‌ی ۱/۱، ص. ۱۹-۲۸

Original Article

طراحی نمودارهای کنترل مبتنی بر باقی‌مانده‌ها برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فرایندهای تولید کوتاه‌مدت

سید بابك خلیلی دیلمی (کارشناس ارشد)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه پیام نور، مرکز تهران شمال
امیرحسین امیری* (دانشیار)
پیمان خسروی (کارشناس ارشد)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد

گاهی مشخصه‌های کیفی به‌صورت رابطه‌یی میان متغیرهای مستقل و پاسخ توصیف می‌شوند که محققان به آن پروفایل می‌گویند. همچنین در بسیاری از فرایندها، همانند فرایندهای تولید کوتاه‌مدت پارامترهای فرایند در مراحل اولیه از پیش معلوم نیست و نمونه‌های اولیه برای اجرای مرحله ۱ و تخمین پارامترهای فرایند در حالت تحت کنترل وجود ندارد. در این مقاله، نمودارهایی برای پایش مشخصه‌های کیفی فرایندهای تولید کوتاه‌مدت که توسط پروفایل‌های خطی ساده توصیف می‌شوند با رویکرد پایش میانگین و پراکندگی باقی‌مانده‌ها طراحی شده است که قادرند از همان مراحل ابتدایی فرایند را پایش کنند و هم‌زمان تخمین پارامترهای فرایند را نیز روزآمد کنند. عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی با عملکرد یکی ازروش‌های موجود در پیشینه از طریق شبیه‌سازی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که نمودارهای کنترل پیشنهادی از عملکرد مناسبی در کشف تغییرات متوسط و بزرگ بر حسب متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل برخوردار هستند.

واژگان کلیدی: نمودار کنترل، فرایندهای تولید کوتاه‌مدت، پایش فرایند، پروفایل خطی ساده، نمودار میانگین متحرک موزون نمایی.

khalilideilami@yahoo.com
amiri@shahed.ac.ir
p_khosravi70@yahoo.com

۱. مقدمه

کنترل آماری فرایند به‌طور گسترده برای پایش فرایندهای صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اکثر کاربردهای کنترل فرایند آماری، فرض می‌شود که عملکرد یک فرایند یا ویژگی یک محصول می‌تواند به وسیله‌ی توزیع یک مشخصه‌ی کیفی توصیف شود و به وسیله‌ی نمودارهای کنترلی تک‌متغیره کنترل شود یا در حالت کلی به وسیله‌ی توزیع چندین مشخصه‌ی کیفی توصیف و به وسیله‌ی نمودارهای کنترل چندمتغیره کنترل شود. در بسیاری از شرایط، کیفیت یک فرایند یا محصول به‌وسیله‌ی رابطه‌یی بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود که محققان این رابطه را پروفایل می‌نامند. درطول سالیان اخیر، پایش پروفایل‌ها و به‌ویژه پروفایل‌های خطی ساده مورد توجه بسیاری از محققان بوده است. در این پروفایل، یک رابطه‌ی خطی ساده بین یک متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل وجود دارد.

از طرفی، تحقیقات مرتبط با پایش پروفایل‌ها بر اساس تفکیک دو مرحله صورت می‌گیرد. روش‌های آماری مختلفی برای هریک از این دو مرحله مناسب هستند و برای هر یک نیز معیارهای آماری متفاوتی وجود دارد. در مرحله‌ی ۱ پروفایل‌های خطی ساده تاکنون تحقیقات زیادی صورت گرفته است. در مرحله‌ی ۱، مجموعه‌یی از داده‌ها از گذشته در دسترس است که هدف آن کسب اطلاعات در مورد پراکندگی فرایند در طول زمان، ارزیابی پایداری فرایند و برآورد پارامترهای فرایند در حالت تحت کنترل است. در روش‌های مربوط به این مرحله مقدار ثابتی برای احتمال خطای نوع ۱ منظور می‌شود و پس از محاسبه‌ی حدود کنترل، توان آزمون با اعمال جابه‌جایی (شیفت)های مختلف در پارامترهای مختلف محاسبه و از آن برای مقایسه‌ی عملکرد آماری نمودارهای کنترل استفاده می‌شود. اما هدف از مرحله ۲، کشف سریع جابه‌جایی و روند در پارامترهای فرایند بر اساس مقادیر طراحی شده در مرحله‌ی ۱ است. این موضوع معمولاً به‌وسیله‌ی معیار متوسط طول دنباله (ARL) [۱] اندازه‌گیری می‌شود. در پژوهش‌های پیشین، پایش پروفایل‌ها معمولاً بر اساس نوع پروفایل و نوع مرحله دسته‌بندی می‌شود. از جمله انواع مختلف پروفایل‌ها می‌توان به پروفایل‌های خطی ساده، خطی چندگانه و چندجمله‌یی اشاره کرد. از آن‌جایی که در این مقاله از همان مراحل ابتدایی پایش آغاز می‌شود، فقط به مرور پیشینه‌ی

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۷/۴/۱۷، اصلاحیه ۱۳۹۸/۳/۱۱، پذیرش ۱۳۹۸/۷/۷.
DOI:10.24200/J65.2019.51025.1884

پایش پروفایل‌ها در مرحله‌ی ۲ پرداخته شده است. در این راستا روش‌های متفاوتی برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در مرحله‌ی ۲ پیشنهاد شده است که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

کنگ و آلباین[۱] دو نمودار کنترل برای پایش پروفایل خطی ساده پیشنهاد دادند. کیم و همکاران[۲] سه نمودار EWMA [۲] را برای پایش پارامترهای پروفایل خطی ساده توسعه دادند. سقایی و همکاران[۳] با استفاده ازنمودار CUSUM [۳] پروفایل‌های خطی ساده را مورد پایش قرار دادند. خدمتی و نیاکی[۴] با استفاده از روش MaxEWMA پروفایل خطی ساده را در فرایندهای چندمرحله‌یی پایش کردند. کاظم‌زاده و همکاران[۵] روشی برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در شرایطی که اندازه‌ی نمونه متغیر است، ارائه کردند. سلیمانی و همکاران[۶] پروفایل‌های خطی ساده را در شرایط وجود خود همبستگی درون پروفایل‌ها پایش کردند. ژانگ و همکاران[۷] یک نمودار کنترل مبتنی‌بر نسبت درست‌نمایی را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده پیشنهاد کردند نیاکی و همکاران[۸] یک نمودار کنترل بر اساس آزمون خطی تعمیم‌یافته برای پایش ضرایب پروفایل خطی ساده و یک نمودار R به‌منظور پایش واریانس خطا پیشنهاد دادند. اکثر محققان در مطالعات پایش پروفایل‌ها، متغیرهای مستقل را مقادیر ثابت فرض می‌کنند؛ با این‌حال نورالسنا و همکاران[۹] متغیرهای مستقل را به‌صورت متغیرهای تصادفی در نظرگرفته‌اند و اثر این تصادفی بودن را روی پایش پروفایل‌های خطی ساده در مرحله‌ی ۲ بررسی کردند.

در حوزه‌ی پایش پروفایل‌های خطی چندگانه، امیری و همکاران[۱۰] یک روش ساده‌سازی پارامترهای پروفایل‌های خطی چندگانه را پیشنهاد دادند. سپس امیری و همکاران[۱۱] روش‌های تشخیصی در پروفایل‌های چندگانه‌ی چندمتغیره را ارائه کردند. قشقایی و امیری[۱۲] دو نمودارکنترل مجموع مربعات را برای پایش پروفایل‌های رگرسیون خطی چندگانه چندمتغیره در مرحله‌ی ۲ توسعه دادند. برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌یی نیزروش‌هایی ارائه شده است که می‌توان به مقاله‌ی کاظم‌زاده و همکاران[۱۳] اشاره کرد که روشی را برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌یی در مرحله‌ی ۲ با در نظر گرفتن فرایند خود همبسته ارائه کردند.

از طرفی، گاهی اوقات در رویه‌های پایش فرایندهای صنعتی امکان اجرای مرحله‌ی ۱ به دلیل هزینه داشتن یا سختی نمونه‌گیری یا زمان‌بر بودن نمونه‌گیری وجود ندارد. یکی از بهترین مثال‌ها برای این نوع از فرایندها، فرایندهای موقتی و کوتاه مدت است که در آنها نمونه‌ی کافی برای اجرای مرحله‌ی ۱ و تخمین پارامترها وجود ندارد. در چنین شرایطی محققان به فکر طراحی نمودارهایی افتادند که برای پایش فرایند نیازی به نمونه‌های اولیه‌ی زیادی نداشته باشند. در فرایندهای تولید کوتاه مدت از آن‌جایی که پارامترهای فرایند ناشناخته هستند و نمونه‌های کافی برای تخمین پارامترها در دسترس نیست، از نمودارهای کنترل خود آغازکننده برای پایش استفاده می‌شود. از آن‌جایی که در این فرایندها زمان پی بردن به وجود تغییرات کوچک مد نظر است، باید از نمودارهایی استفاده کرد که سرعت لازم را برای کشف تغییرات در زمان کوتاه داشته باشند. به نوعی می‌توان پیشینه را در این حوزه در به کارگیری دو نوع نمودار EWMA و CUSUM همراه با رویکردها و آماره‌های متناسب با شرایط تولید کوتاه‌مدت دسته‌بندی کرد. در ادامه روش‌ها و نمودارهایی که تاکنون در این راستا ارائه شده‌اند، معرفی شده است. اولین بارهاوکینز[۱۴] یک نمودارکنترل خود آغازکننده CUSUM برای پایش میانگین و واریانس ارائه کرد. در این مقاله دو نمودارکنترل CUSUM ارائه شد که یکی برای پایش میانگین و دیگری برای پایش واریانس طراحی شده بود. پس از آن کوسنبری[۱۵] آماره‌ی Q را برای پایش فرایندهای موقتی توسعه داد که این آماره بر اساس معلوم بودن یا نبودن میانگین و واریانس فرایند در چهار حالت بررسی شده است. سپس زانتک[۱۶] یک نمودار CUSUM برای پایش فرایندهای موقتی طراحی کرد. سالیوان و همکاران[۱۷] یک نمودارکنترل خود آغازکننده ارائه کردند که از انحراف هر بردار مشاهده شده نسبت به میانگین تمام مشاهدات قبلی برای پایش فرایند استفاده و آماره‌های مربوط در قالب نمودارهای کنترل چند متغیره مانند T^2 هتلینگ و MEWMA استفاده می‌کند. سپس کوسنبری[۱۸] مطالعه‌یی بر روی قوانین حساس‌سازی و تأثیر آنها بر عملکرد آماره‌ی Q انجام داد که در این مطالعه، قانون حساس‌سازی ۴ نمونه از ۵ نمونه‌ی متوالی خارج از حدود هشدار یک انحراف معیار به عنوان مناسب‌ترین قانون برای عملکرد رضایت‌بخش نمودارهای تلفیقی EWMA-Q و CUSUM-Q شناخته شد. برای پایش پروفایل‌های خطی نیز نمودارهای کنترل خود آغازکننده توسعه داده شده است که در ادامه به مرور آنها پرداخته می‌شود. زو و همکاران[۱۹] یک نمودار کنترل خود آغازکننده برای پایش پروفایل خطی ساده بر پایه‌ی باقی‌مانده‌های بازگشتی پیشنهاد کردند. همچنین امیری و همکاران[۲۰] یک نمودارکنترل خود آغازکننده‌ی Max-CUSUM را برای پایش هم‌زمان پارامترهای پروفایل‌های خطی ساده توسعه دادند. تسانگ و همکاران[۲۱] یک نمودار پایش خود آغازکننده را برای کشف هم‌زمان تغییرات در واریانس و ضرایب رگرسیون در پروفایل‌های خطی با توزیع نامشخص خطا پیشنهاد کردند. خسروی و امیری[۲۲] سه نمودارکنترل خود آغازکننده را برای پایش پروفایل‌های رگرسیون لجستیک پیشنهاد کردند. این نمودارها، پروفایل‌های مذکور را که بیان‌گر ارتباط بین یک متغیر پاسخ با توزیع بینم و متغیرهای مستقل‌اند، پایش می‌کنند.

در مقاله‌ی پیش رو، رویکرد جدیدی برای پایش فرایندهای تولید کوتاه‌مدت که مشخصه‌ی کیفی در آنها به‌صورت یک پروفایل خطی ساده است، ارائه شده است. در رویکرد پیشنهادی باقی‌مانده‌های پروفایل خطی ساده در طول زمان و از همان ابتدای شروع فرایند مورد پایش قرار می‌گیرند. باقی‌مانده‌ها در واقع اختلاف‌های بین خط مرجع و پروفایل‌های نمونه هستند. اگر این باقی‌مانده‌ها خیلی بزرگ شوند، می‌توان با در نظر گرفتن معیارهایی نتیجه گرفت که فرایند خارج از کنترل است. پس از میانگین و پراکندگی باقی‌مانده‌ها به‌عنوان معیاری برای ارائه‌ی روش و نمودار کنترلی مربوط بهره گرفته شده است. روش‌ها و نمودارهای پیشنهادی در این رویکرد از عملکرد مناسبی برخوردارند. ویژگی روش‌های پیشنهادی این مقاله آن است که آماره‌ها و نمودارهای جدیدی ارائه شده است که می‌توانند به‌طور مؤثر و کارا تغییرات کوچک در پارامترهای پروفایل را به سرعت کشف کنند. در ضمن جایگاه روش‌های پیشنهادی این مقاله در ادبیات پایش پروفایل‌ها در حوزه‌ی پایش پروفایل‌های خطی ساده است و بر مبنای پایش میانگین و پراکندگی باقی‌مانده‌ها طراحی شده است. این مقاله در حوزه‌ی توسعه‌ی نمودارهای کنترل خود آغازکننده در پایش پروفایل‌ها و مبتنی‌بر نمودارکنترل EWMA است.

در ادامه‌ی مقاله‌ی حاضر، در بخش دوم به معرفی پروفایل‌های خطی ساده پرداخته شده است. در بخش سوم روش‌ها و نمودارهای پیشنهادی مقاله آورده شده است. بخش چهارم عملکرد روش‌ها و مقایسات مربوط را نشان می‌دهد و در نهایت در بخش آخر نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای تحقیقات آتی ارائه شده است.

۲. پروفایل‌های خطی ساده

فرض کنید jامین نمونه‌یی که در طول زمان از فرایند گرفته می‌شود، به‌صورت (x_i, y_{ij}) نمایش داده شود. i تعداد مشاهدات در هر نمونه‌ی j است. در این‌صورت

در حالت تحت کنترل بودن فرایند، رابطه‌ی میان x_i و y_{ij} با یک رابطه‌ی رگرسیونی به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$y_{ij} = A_0 + A_1 x_i + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, ..., n, \quad (1)$$

که ε_{ij}ها متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 هستند که مستقل و هم‌توزیع (i.i.d) هستند. متغیر مستقل x_i به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ در پروفایل خطی ساده مقادیر ثابتی را اتخاذ می‌کند. پارامترهای مدل پروفایل خطی ساده A_0، A_1 و σ^2 در نمونه‌ی jام با مشاهدات $i = 1, 2, \ldots, n$ در نمونه‌ی مذکور، با بهره جستن از برآوردکننده‌های نااریب زیر تخمین زده می‌شوند.

$$a_{1j} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx}}, \quad (2)$$

$$a_{0j} = \bar{y}_j - a_{1j}\bar{x}, \quad (3)$$

$$MSE_j = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - a_{1j}x_i - a_{0j})^2, \quad (4)$$

که در این روابط $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$، $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$، $\bar{y}_j = (1/n)\sum_{i=1}^{n} y_{ij}$ و $S_{xy}(j) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_{ij}$ هستند. واضح است که هر چه تعداد نمونه‌های تحت کنترل بیشتر باشد، تخمین‌های مربوط به پارامترها دقیق‌تر خواهد بود.

۳. روش‌های پیشنهادی

در این بخش دو آماره برای پایش میانگین باقی‌مانده‌ها و یک آماره برای پایش انحراف معیار باقی‌مانده‌ها ارائه شده است که از ترکیب هرکدام از آماره‌های پایش میانگین با آماره‌ی پایش انحراف معیار، دو نمودار کنترل برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فرایندهای تولید کوتاه‌مدت ارائه شده است. در ادامه روش‌های پیشنهادی با ارائه‌ی آماره‌های مذکور تشریح می‌شوند.

۱.۳. آماره‌ی Q برای پایش میانگین باقی‌مانده‌ها

بردار $\boldsymbol{e_j} = (e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{nj})$؛ $j = 1, 2, 3, \ldots$ را به عنوان مجموعه‌ی باقی‌مانده‌ها با اندازه‌ی n در نظر بگیرید. منظور از باقی‌مانده تفاوت میان مقدار مشاهده شده‌ی متغیر پاسخ و مقدار پیش‌بینی شده‌ی آن است که در رابطه‌ی ۵ آمده است. توزیع باقی‌مانده‌ها نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 است.

$$e_{ij} = y_{ij} - a_{0j} - a_{1j}x_i \;\; ; \; i = 1, 2, ..., n \;\; , \;\; j = 1, 2, 3.... \quad (5)$$

که در آن a_{0j}، a_{1j} به ترتیب تخمین‌های پارامترهای A_0، A_1 رابطه‌ی پروفایل مندرج در رابطه‌ی ۱ هستند. برای به‌کارگیری روش پیشنهادی به میانگین باقی‌مانده‌ها نیاز است که این میانگین به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\bar{e}_j = (1/n)\sum_{i=1}^{n} e_{ij}. \quad (6)$$

میانگین باقی‌مانده‌ها $(\bar{e}_j)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2/n است. در نتیجه مقادیر $\bar{e}_j\sqrt{n}$ از توزیع $N(0, \sigma^2)$ پیروی می‌کنند. از آن‌جایی‌که در این حالت میانگین معلوم و واریانس نامعلوم است، مقدار آماره‌ی Q که توسط کوسنبیری[۱۵] پیشنهاد شده است بر اساس مقدار میانگین باقی‌مانده‌ها در هر نمونه به‌صورت رابطه‌ی ۷ بازنویسی می‌شود:

$$Q_j = \Phi^{-1}\left[G_{j-1}\left(\frac{\bar{e}_j\sqrt{n} - 0}{S_{0,m-1}}\right)\right], \quad (7)$$

که در این رابطه:
$\Phi^{-1}(.)$: معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است؛
$G_{j-1}(.)$: تابع توزیع تجمعی t با $j-1$ درجه آزادی است.
در نتیجه آماره‌ی Q دارای توزیع نرمال استاندارد است، همچنین در این رابطه:

$$S^2_{0,m-1} = (\frac{1}{j-1})\sum_{j=1}^{m-1}(\bar{e}_j\sqrt{n} - 0)^2 \quad ; j = 2, 3, \ldots \quad (8)$$

به‌منظور افزایش حساسیت روش پیشنهادی به تغییرات کوچک فرایند در طول زمان از ترکیب آماره‌ی Q با آماره‌ی EWMA استفاده می‌شود که آماره‌ی نهایی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Z_j = \lambda Q_j + (1-\lambda)Z_{j-1}. \quad (9)$$

که مقدار حدود کنترل آماره به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$UCL = L_{\bar{e}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad ; \quad LCL = -UCL \quad (10)$$

که $0 < \gamma < 1$ ضریب هموارسازی است و مقدار $L_{\bar{e}}$ با استفاده از شبیه‌سازی به‌گونه‌یی محاسبه می‌شود که‌یک مقدار ARL تحت کنترل از پیش تعیین شده به دست آید.

۲.۳. آماره‌ی T برای پایش میانگین باقی‌مانده‌ها

مشابه روش آماره‌ی Q، بردار $\boldsymbol{e_j} = (e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{nj})$؛ $j = 1, 2, 3, \ldots$ را به‌عنوان مجموعه‌ی باقی‌مانده‌ها با اندازه‌ی n در نظر بگیرید. e_{ij} دارای توزیع $N(0, \sigma^2)$ است که بر همین اساس $\bar{e}_j$ دارای توزیع $N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ خواهد بود. در نتیجه مجموعه‌ی $(\bar{e}_1\sqrt{n}, \bar{e}_2\sqrt{n}, \bar{e}_3\sqrt{n}\ldots)$ از توزیع $N(0, \sigma^2)$ پیروی می‌کند. حال فرض کنید که آماره‌ی T_j به‌صورت $T_j = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_j - \mu)}{S_j}$ تعریف شود که از توزیع t_{n-1} پیروی می‌کند؛ در این‌صورت آماره‌ی نهایی روش T برای پایش میانگین باقی‌مانده‌ها به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$T_j = \frac{\sqrt{n}\bar{e}_j}{S_{\bar{e}_j}} \sim t_{n-1}, \quad (11)$$

که مقدار میانگین و واریانس T_j به‌ترتیب برابر با صفر و $\frac{n-1}{n-3}$ است. نحوه‌ی رسیدن به رابطه‌ی ۱۱ در پیوست الف ارائه شده است. همچنین به‌منظور افزایش حساسیت روش پیشنهادی به تغییرات کوچک فرایند در طول زمان از ترکیب آماره‌ی T با آماره‌ی EWMA استفاده می‌شود که آماره‌ی نهایی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Z_j = \lambda T_j + (1-\lambda)Z_{j-1}. \quad (12)$$

پس بر همین اساس حدود کنترل این روش به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$UCL = L_T\sqrt{\frac{\lambda(n-1)}{(2-\lambda)(n-3)}}; \; n \geq 4 \; ; \; LCL = -UCL \quad (13)$$

۳.۳. نمودار پایش پراکندگی باقی‌مانده‌ها

برای کنترل و پایش پراکندگی باقی‌مانده‌ها از شاخص پراکندگی باقی‌مانده‌ها یا مقدار میانگین مربع خطاها (MSE) استفاده می‌شود که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MSE_j = (\frac{1}{n-2})\sum_{i=1}^{n} e_{ij}^2. \qquad (14)$$

در ادامه لازم است تا توزیع MSE_j مشخص شود که اثبات آن در پیوست ب آمده است. پس بر اساس محاسبات صورت گرفته MSE_j دارای توزیع $Gamma(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2\sigma^2})$ است. حال مقدار MSE_j را در آماره‌یی به نام Q_j قرار می‌دهیم که رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$Q_j = \Phi^{-1}\left[G_j\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} e_{ij}^2}{n-2}\right)\right], \qquad (15)$$

که در آن Φ^{-1} معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و G_j تابع توزیع تجمعی گاما برای نمونه‌ی jام با پارامترهای $n \geq 3$، $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\lambda' = \frac{n-2}{2\sigma^2}$ است. از آن‌جایی که واریانس σ^2 در فرایندهای تولید کوتاه‌مدت مشخص نیست، برای محاسبه‌ی λ' باید آن را تخمین زد؛ رابطه‌ی زیر برای تخمین σ^2 پیشنهاد می‌شود:

$$\hat{\sigma}^2 = \overline{MSE}_{j-1} = (1/j-1)\sum_{k=1}^{j-1} MSE_k \quad ; j = 2, 3, \ldots \qquad (16)$$

در نتیجه مقدار $\overline{MSE}_{j-1}$ به‌جای σ^2 در رابطه‌ی مربوط به پارامتر $\lambda' = \frac{n-2}{2\sigma^2}$ جایگذاری می‌شود و توزیع MSE_j به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ است:

$$MSE_j \sim Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2 \times \overline{MSE}_{j-1}}\right). \qquad (17)$$

حال می‌توان به‌منظور افزایش حساسیت روش پیشنهادی به تغییرات کوچک فرایند در طول زمان از ترکیب آماره‌ی Q با آماره‌ی EWMA به‌صورت زیر استفاده کرد:

$$Z_j = \lambda Q_j + (1-\lambda) Z_{j-1} \qquad (18)$$

مقدار حدود کنترل آماره به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$UCL = L_{MSE}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad ; \quad LCL = -UCL \qquad (19)$$

که $0 < \lambda < 1$ ضریب هموارسازی است و مقدار L_{MSE} با استفاده از شبیه‌سازی به‌گونه‌یی محاسبه می‌شود که مقدار ARL تحت کنترل از پیش تعیین شده به دست آید.

به‌منظور پایش باقی‌مانده‌های پروفایل خطی ساده در فرایندهای تولید کوتاه مدت، نمودارهای کنترل پایش میانگین و نمودار کنترل پایش انحراف معیار با هم استفاده می‌شوند که حاصل این ترکیب، نمودارهای کنترل مجزا با نام‌های QMCC[4] و TMCC[5] است که به‌طور هم‌زمان میانگین و پراکندگی باقی‌مانده‌ها را پایش می‌کنند. نمودارهای مذکور در مطالعات شبیه‌سازی استفاده و ارزیابی شده‌اند.

جدول ۱. مقادیرثابت (L) حدود کنترل نمودارها به ازای $ARL_0 = 200$.

$n = 4$	QMCC	TMCC
$L_\mu(L_{\bar{e}}, L_r)$	۲٫۹۵۴	۳٫۴۱۵
$L_\sigma(L_{MSE})$	۲٫۹۶۵	۲٫۹۶۵

۴. ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی

در این بخش عملکرد روش‌های پیشنهادی با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی ارزیابی می‌شود. معیار ارزیابی در این مطالعه ARL خارج از کنترل است. از آن‌جاکه عملکرد نمودارهای ارائه شده در این مطالعه به محل وقوع جابه‌جایی در فرایند (τ) وابسته است، تحلیل حساسیتی روی محل وقوع جابه‌جایی در فرایند صورت گرفته است. پروفایلی که برای اجرای مطالعات شبیه‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است، مشابه مدل پروفایل خطی ساده به کارگرفته شده در مقاله کنگ و آلباین[1] است. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی این مثال به مقاله کنگ و آلباین[1] مراجعه نمایید. مدل پروفایل موردنظر به‌صورت $y_{ij} = 3 + 2x_i + \varepsilon_{ij}$ است که همان‌طور که پیش‌تر هم گفته شد ε_{ij} یک متغیر تصادفی نرمال مستقل با توزیع هم‌سان (i.i.d) است که میانگین صفر و واریانس σ^2 دارد. متغیر مستقل مقادیر ۲، ۴، ۶ و ۸ را اتخاذ می‌کند. مقدار ARL تحت کنترل برای روش‌های پیشنهادی برابر ۲۰۰ است. در مطالعات شبیه‌سازی انجام شده در این مطالعه تعداد ۵ نمونه‌ی اولیه‌ی تحت کنترل در ابتدا در اختیار است. محل رخداد تغییر در فرایند مقادیر ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵ و ۵۰ است. همچنین مقدار ضریب هموارسازی در آماره‌های EWMA برابر با ۰٫۲ است. در جدول ۱ مقدار ضرایب نمودار کنترل که از طریق شبیه‌سازی محاسبه شده‌اند و در تنظیم حدود کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است. با این حدود کنترل متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل برای نمودارهای کنترل طراحی شده‌ی این مقاله برابر با ۲۰۰ است که مطالعات شبیه‌سازی بر پایه‌ی این حدود کنترل اجرا شده است. در جدول‌های ۲، ۳ و ۴ به ترتیب نتایج شبیه‌سازی مربوط به تغییرات در پارامتر عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار پروفایل خطی ساده بررسی شده‌اند. همچنین در جدول ۵ نتایج شبیه‌سازی مربوط به تغییرات هم‌زمان در پارامترهای عرض از مبدأ و انحراف معیار ارائه شده است. در این جداول علاوه‌بر مقایسه‌ی عملکرد روش‌های پیشنهادی، مقایسه با روش زو و همکاران[19] نیز انجام شده است که این روش در جداول ۲ تا ۵ با SS Chart نشان داده شده است. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی این روش به مقاله‌ی زو و همکاران[19] مراجعه کنید. در جداول این بخش، مقادیر جابه‌جایی‌های پارامترهای مربوط در ستون عمودی و مقادیر τهای مختلف (نقاط تغییر) در سطر افقی ذکر شده و مقادیر ARL خارج از کنترل همان اعداد داخل جدول هستند که برای نمودار رقیب (نمودار SS) و نمودارهای پیشنهادی QMCC و TMCC مقایسه شده‌اند. در ابتدا متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل (ARL) برای نمودارهای مذکور معادل ۲۰۰ تعیین شده و سپس مقادیر ARL خارج از کنترل (ARL_1) برای این نمودارها محاسبه شده‌اند. مقادیر ARL خارج از کنترل در جداول مربوط در حقیقت متوسط تعداد نقاطی (نمونه‌هایی) را نشان می‌دهد که بعد از ایجاد تغییر در پارامتر مربوط در نمونه τاُم باید روی نمودار رسم شوند تا یک نقطه (نمونه) خارج از حدود کنترل بیفتد (کشف شود) هر نموداری که ARL_1 کمتری داشته باشد، یعنی سریع‌تر تغییر در پارامتر مربوط را تشخیص داده است و نمودار بهتری محسوب می‌شود. هر جا در جداول مقادیر عددی به‌صورت پررنگ نمایش داده شده‌اند، بیانگر عملکرد بهتر نمودار مربوط در آن شرایط است. مثلاً در جدول ۲ در شرایط تغییر در پارامتر عرض از مبدأ به اندازه‌ی ۰٫۲ و نقطه‌ی تغییر ۱۰،

جدول ۲. مقادیر خارج از کنترل **ARL** با تغییر در پارامتر عرض از مبدأ از A_0 به $A_0 + \delta_0\sigma$ و به ازای نقاط تغییر مختلف.

δ_0	نمودارهای کنترل	$\tau = 5$	$\tau = 10$	$\tau = 15$	$\tau = 20$	$\tau = 25$	$\tau = 50$
۰٫۲	QMCC	۱۹۶٫۹۵۷۳	۱۸۸٫۹۵۱۵	۱۸۶٫۶۸۳۱	۱۸۵٫۶۴۱۶	۱۷۷٫۰۹۲۷	۱۵۹٫۹۶۸۷
	TMCC	**۱۸۹٫۱۰۱۹**	**۱۸۴٫۱۷۱۸**	**۱۸۲٫۵۹۴۶**	۱۸۲٫۴۳۳۹	۱۷۷٫۹۴۰۲	۱۵۴٫۶۶۸۸
	SS Chart	۲۰۵٫۷۳۳۸	۱۹۵٫۰۱۸۸	۱۸۴٫۹۹۶۴	**۱۶۹٫۸۵۱۳**	**۱۶۴٫۹۴۵۷**	**۱۳۱٫۱۶۶۹**
۰٫۴	QMCC	۱۸۷٫۷۱۱۰	۱۵۲٫۷۵۳۳	۱۳۳٫۹۶۷۹	۱۱۵٫۹۸۷۴	۱۰۰٫۸۱۵۱	۵۰٫۷۴۵۳
	TMCC	**۱۶۴٫۳۳۲۱**	**۱۳۱٫۸۲۰۴**	۱۱۶٫۲۲۶۹	۹۹٫۸۹۱۷	۸۷٫۶۵۷۵	۴۴٫۴۹۸۲
	SS Chart	۱۷۵٫۶۷۲۰	۱۴۰٫۰۵۷۰	**۱۰۲٫۹۹۹۲**	**۸۰٫۴۰۱۸**	**۶۴٫۷۵۱۰**	**۲۹٫۰۴۱۷**
۰٫۶	QMCC	۱۷۱٫۳۷۷۳	۱۱۲٫۴۱۰۷	۷۵٫۸۹۳۹	۴۸٫۹۹۷۲	۳۴٫۳۸۳۵	۱۱٫۶۱۷۹
	TMCC	**۱۲۸٫۳۸۵۵**	۸۲٫۹۵۰۵	۵۶٫۰۸۳۰	۳۷٫۵۹۸۹	۲۷٫۰۲۱۴	۱۰٫۷۶۷۴
	SS Chart	۱۳۳٫۸۴۵۵	**۶۰٫۷۷۳۰**	**۳۳٫۶۱۹۶**	**۲۰٫۳۱۳۱**	**۱۵٫۳۸۴۰**	**۸٫۷۲۸۴**
۰٫۸	QMCC	۱۵۶٫۱۶۴۳	۷۰٫۷۰۵۸	۳۳٫۷۶۴۵	۱۶٫۴۱۹۳	۹٫۸۱۴۵	۵٫۶۰۲۹
	TMCC	۹۶٫۳۱۷۲	۴۳٫۶۲۰۱	۲۰٫۷۳۱۳	۱۱٫۹۲۱۳	۸٫۰۶۵۵	۵٫۶۱۸۵
	SS Chart	**۷۹٫۰۸۸۵**	**۲۱٫۸۲۹۵**	**۹٫۸۳۱۶**	**۶٫۷۹۴۹**	**۶٫۰۷۴۲**	**۵٫۰۶۲۷**
۱٫۰	QMCC	۱۴۷٫۶۳۶۱	۳۸٫۹۹۸۹	۱۲٫۲۱۵۰	۶٫۴۰۶۵	۴٫۷۵۴۶	۳٫۹۴۱۰
	TMCC	۷۰٫۵۸۰۶	۲۰٫۰۱۱۳	۸٫۶۴۷۲	۵٫۳۶۸۵	۴٫۶۲۱۷	۳٫۹۷۴۵
	SS Chart	**۳۹٫۷۶۷۵**	**۷٫۱۲۸۸**	**۴٫۶۳۹۰**	**۴٫۲۴۴۹**	**۴٫۰۳۶۲**	**۳٫۷۴۶۷**
۱٫۲	QMCC	۱۳۴٫۷۰۰۲	۲۲٫۳۲۷۲	۳٫۳۵۵۴	۳٫۶۲۳۹	۳٫۳۶۰۴	۳٫۰۸۹۵
	TMCC	۵۰٫۴۴۸۵	۹٫۸۸۷۲	۴٫۴۶۵۶	۳٫۷۰۰۱	۳٫۴۵۹۲	۳٫۱۴۶۴
	SS Chart	**۱۵٫۹۰۸۴**	**۳٫۹۹۹۵**	**۳٫۴۴۴۶**	**۳٫۲۵۴۷**	**۳٫۱۵۴۰**	**۲٫۹۸۳۱**
۱٫۴	QMCC	۱۱۵٫۹۰۶۴	۱۰٫۹۰۸۱	۳٫۳۱۷۱	۲٫۸۷۱۸	۲٫۷۳۰۰	۲٫۵۷۷۰
	TMCC	۳۳٫۰۵۸۴	۶۹۳۸۵	۳٫۲۲۵۴	۲٫۹۳۰۷	۲٫۸۱۶۹	۲٫۶۳۵۲
	SS Chart	**۵٫۴۱۵۱**	**۳٫۰۹۲۰**	۲٫۸۰۴۰	**۲٫۷۰۳۳**	**۲٫۶۳۸۹**	**۲٫۵۰۱۸**
۱٫۶	QMCC	۱۰۰٫۳۵۲۲	۵٫۶۸۵۷	۲٫۷۰۶۴	۲٫۳۵۶۵	**۲٫۳۲۶۴**	**۲٫۲۰۷۱**
	TMCC	۲۴٫۲۷۴۳	۳٫۵۲۵۱	۲٫۶۶۷۲	۲٫۴۸۹۶	۲٫۴۱۰۴	۲٫۲۷۲۶
	SS Chart	**۳٫۷۱۰۵**	**۲٫۵۹۹۵**	**۲٫۴۲۶۸**	**۲٫۳۴۴۹**	**۲٫۳۱۶۰**	**۲٫۲۱۲۹**
۱٫۸	QMCC	۷۸٫۲۹۴۵	۳٫۶۱۵۱	**۲٫۱۷۱۹**	**۲٫۰۷۸۴**	**۲٫۰۱۰۶**	**۱٫۹۴۵۵**
	TMCC	۱۵٫۱۹۱۱	۲٫۶۲۵۷	۲٫۲۵۰۲	۲٫۱۸۶۶	۲٫۱۰۸۸	۲٫۰۰۴۹
	SS Chart	**۲٫۸۹۸۲**	**۲٫۳۰۵۰**	۲٫۱۷۴۶	۲٫۰۸۴۷	۲٫۰۵۷۱	۱٫۹۹۳۸
۲	QMCC	۵۹٫۱۸۲۸	۲٫۲۰۱۶	**۱٫۸۵۶۵**	**۱٫۸۱۶۱**	**۱٫۷۹۶۸**	**۱٫۷۳۶۶**
	TMCC	۹٫۵۰۵۶	۲٫۲۶۲۸	۱٫۹۶۸۲	۱٫۸۲۰۸	۱٫۸۶۶۷	۱٫۸۰۷۰
	SS Chart	**۲٫۴۸۲۲**	**۲٫۰۹۰۰**	۱٫۹۷۱۴	۱٫۹۳۵۶	۱٫۸۹۰۷	۱٫۸۲۴۹

اعداد داخل جدول که بیانگر ARL خارج از کنترل هستند برای نمودارهای کنترل QMCC و TMCC و SS به ترتیب ۱۸۸٫۹۵۱۵ و ۱۸۴٫۱۷۱۸ و ۱۹۵٫۰۱۸۸ است که با توجه به این‌که عدد کمتر مربوط به نمودار TMCC است، به‌صورت پررنگ نمایش داده شده‌اند و به معنی عملکرد بهتر نمودار TMCC در کشف سریع‌تر تغییر در پارامتر نسبت به دو نمودار دیگر است. همچنین هر چه مقدار تغییرات بیشتری در پارامتر مدنظر قرار گیرد، نمودارهای مربوط با میزان ARL_1 (ARL خارج از کنترل) کمتری تغییرات را کشف می‌کنند و به عبارتی تغییرات را سریع‌تر کشف می‌کنند. از طرفی هر چقدر مقدار τها بزرگتر می‌شود ـ یعنی هر چه پس از رسم نمونه‌های

جدول ۳. مقادیر خارج ازکنترل **ARL** با تغییر در پارامتر شیب از مبدأ از A_1 به $A_1 + \delta_1\sigma$ و به ازای نقاط تغییر مختلف.

δ_1	نمودارهای کنترل	$\tau = 5$	$\tau = 10$	$\tau = 15$	$\tau = 20$	$\tau = 25$	$\tau = 50$
۰٫۰۲۵	QMCC	۱۹۹٫۲۳۶۴	۱۹۸٫۳۷۲۱	۱۹۸٫۳۶۶۴	۱۹۷٫۹۵۴۵	۱۹۷٫۵۱۴۴	۱۹۶٫۰۵۸۱
	TMCC	**۱۹۴٫۶۸۶۳**	**۱۹۳٫۸۷۲۳**	**۱۹۳٫۱۳۳۷**	**۱۹۲٫۹۲۶۸**	۱۹۲٫۴۸۹۷	۱۹۲٫۳۲۰۱
	SS Chart	۲۱۳٫۲۷۰۵	۲۰۴٫۳۷۲۸	۱۹۸٫۷۶۲۰	۱۹۷٫۶۵۲۳	**۱۸۷٫۶۵۰۹**	**۱۷۱٫۲۶۰۹**
۰٫۰۵	QMCC	۱۹۵٫۰۶۱۸	۱۸۳٫۴۷۴۴	۱۷۶٫۹۹۱۵	۱۶۹٫۸۴۰۷	۱۶۳٫۶۱۴۸	۱۳۰٫۹۲۷۱
	TMCC	**۱۸۳٫۰۹۸۸**	**۱۷۲٫۷۸۴۴**	**۱۶۸٫۸۲۳۲**	۱۶۲٫۲۴۲۰	۱۵۵٫۰۷۷۹	۱۲۴٫۰۳۲۷
	SS	۲۰۰٫۸۷۱۳	۱۸۸٫۴۰۷۶	۱۶۹٫۶۰۲۸	**۱۵۱٫۲۵۲۶**	**۱۳۶٫۴۴۹۷**	**۹۸٫۶۹۲۶**
۰٫۰۷۵	QMCC	۱۸۳٫۳۷۵۸	۱۵۶٫۸۳۸۷	۱۳۸٫۲۶۳۷	۱۲۳٫۲۲۱۴	۱۰۸٫۳۰۳۹	۶۰٫۰۷۴۶
	TMCC	**۱۶۵٫۳۸۲۶**	**۱۳۹٫۹۳۶۴**	۱۲۴٫۹۹۸۱	۱۱۰٫۰۱۲۲	۹۶٫۴۳۵۵	۵۲٫۹۵۷۹
	SS	۱۷۹٫۱۵۰۷	۱۴۱٫۹۰۵۴	**۱۱۶٫۷۲۷۷**	**۸۸٫۴۶۸۰**	**۷۴٫۷۲۸۳**	**۳۶٫۷۲۸۳**
۰٫۱	QMCC	۱۷۶٫۷۴۲۱	۱۲۶٫۹۱۰۳	۹۹٫۵۹۵۴	۷۵٫۲۷۴۰	۵۹٫۸۶۶۹	۲۳٫۳۰۰۵
	TMCC	**۱۴۶٫۳۲۱۴**	**۱۰۶٫۲۴۲۶**	۸۱٫۳۵۸۰	۶۱٫۹۹۴۶	۴۹٫۷۸۸۰	۲۰٫۲۵۰۹
	SS	۱۵۸٫۹۵۸۸	**۹۶٫۵۲۳۷**	**۶۵٫۰۸۶۶**	**۴۳٫۶۷۹۴**	**۳۰٫۱۵۵۱**	**۱۵٫۳۷۶۳**
۰٫۱۲۵	QMCC	۱۶۹٫۰۳۹۶	۱۰۴٫۷۵۸۱	۶۴٫۵۲۲۳	۴۱٫۱۸۷۶	۲۹٫۱۰۶۷	۱۰٫۲۲۱۶
	TMCC	۱۲۸٫۹۰۱۷	۷۵٫۴۹۵۹	۴۶٫۷۱۰۸	۳۱٫۸۹۴۹	۲۱٫۶۳۶۳	۹٫۴۸۶۹
	SS	**۱۲۶٫۷۲۲۰**	**۵۸٫۴۷۸۳**	**۲۹٫۸۱۹۰**	**۱۸٫۱۶۶۳**	**۱۲٫۶۳۳۵**	**۸٫۰۳۶۰**
۰٫۱۵	QMCC	۱۵۹٫۴۳۷۷	۷۴٫۲۳۲۵	۳۹٫۸۰۵۰	۲۰٫۰۲۵۷	۱۲٫۲۳۲۶	۶٫۲۷۵۶
	TMCC	۱۰۶٫۱۱۱۶	۵۰٫۰۰۴۵	۲۵٫۰۶۰۹	۱۴٫۶۹۵۰	۱۰٫۷۰۹۶	۶٫۳۰۹۳
	SS	**۹۴٫۱۷۹۲**	**۳۰٫۴۸۹۵**	**۱۳٫۱۰۷۳**	۸٫۳۱۳۳	**۶٫۹۶۹۲**	**۵٫۷۱۱۰**
۰٫۱۷۵	QMCC	۱۴۸٫۷۲۵۸	۵۴٫۵۳۸۹	۲۳٫۹۲۳۵	۱۰٫۳۸۹۶	۶٫۸۷۱۹	۴٫۸۰۲۱
	TMCC	**۸۹٫۴۱۴۱**	۳۲٫۳۰۳۱	۱۲٫۹۷۳۲	۷٫۹۱۸۶	۶٫۴۱۵۹	۴٫۷۹۷۸
	SS	**۷۰٫۲۲۳۵**	**۱۲٫۶۴۴۳**	**۶٫۷۴۴۵**	**۵٫۶۱۸۲**	**۵٫۰۱۱۳**	**۴٫۴۵۳۲**
۰٫۲	QMCC	۱۴۱٫۰۶۶۹	۳۹٫۲۳۶۱	۱۲٫۰۹۴۳	۶٫۱۶۲۵	۴٫۷۵۱۷	۳٫۸۵۰۱
	TMCC	**۶۸٫۷۶۳۲**	**۱۹٫۰۷۰۶**	**۸٫۰۷۸۱**	۴٫۹۹۰۶	۴٫۴۴۲۳	۳٫۹۳۵۹
	SS	**۴۳٫۸۰۹۸**	**۶٫۶۸۹۰**	**۴٫۶۲۰۵**	**۴٫۳۱۱۸**	**۳٫۹۷۷۰**	**۳٫۷۲۳۵**
۰٫۲۲۵	QMCC	۱۳۱٫۱۰۳۰	۲۳٫۶۲۶۸	۶٫۹۴۰۰	۴٫۱۰۳۷	۳٫۶۱۳۲	۳٫۲۸۸۲
	TMCC	**۵۴٫۲۴۹۷**	**۱۲٫۴۴۶۴**	**۵٫۲۴۳۳**	۴٫۰۰۱۲	۳٫۶۸۳۰	۳٫۳۱۸۹
	SS	**۲۲٫۲۱۸۵**	**۴٫۸۱۴۸**	**۳٫۸۱۳۸**	**۳٫۵۰۲۷**	**۳٫۴۳۱۲**	**۳٫۲۰۲۰**
۰٫۲۵	QMCC	۱۲۲٫۲۵۱۹	۱۵٫۶۴۴۲	۴٫۶۲۹۷	۳٫۲۴۵۵	۳٫۰۱۶۰	۲٫۸۴۳۸
	TMCC	**۳۹٫۳۲۵۲**	**۷٫۴۶۸۲**	**۳٫۹۲۲۶**	**۳٫۳۱۷۰**	**۳٫۱۴۶۳**	**۲٫۸۹۷۱**
	SS	**۱۲٫۵۹۸۰**	**۳٫۶۷۶۵**	**۳٫۲۶۵۳**	**۳٫۱۱۰۰**	**۲٫۹۸۰۵**	**۲٫۸۳۹۲**

بیشتری تغییر پارامتر رخ دهد به‌عبارت دیگر هر چه اطلاعات بیشتری از نمونه‌های اولیه در دسترس باشد یا تخمین بهتری از پارامترها در حالت تحت کنترل وجود داشته باشد - آنگاه ARL_1 کمتری برای کشف تغییر مربوط به دست می‌آید؛ یعنی، تغییرات سریع‌تر کشف می‌شوند. همچنین از آن‌جایی که نمودارهای کنترل پیشنهادی QMCC و TMCC هرکدام شامل نمودارهای پایش میانگین و انحراف استاندارد خطا هستند، از منظر کشف جابه‌جایی‌های مختلف می‌توان تحلیل‌های دیگری نیز انجام داد. مثلاً در جدول ۴ که تغییرات در انحراف استاندارد خطا مدنظر است، می‌توان ملاحظه کرد که با تغییر پارامتر به میزان ۲٫۲ و در نقاط تغییر ۵، ۱۵، ۱۰ و

جدول ۴. مقادیر خارج از کنترل **ARL** با تغییر در انحراف استاندارد از σ به $\gamma\sigma$ و به ازای نقاط تغییر مختلف.

γ	نمودارهای کنترل	$\tau = ۵$	$\tau = ۱۰$	$\tau = ۱۵$	$\tau = ۲۰$	$\tau = ۲۵$	$\tau = ۵۰$
	QMCC	۱۵۰٫۱۰۷۷	۱۲۰٫۷۹۰۲	۱۰۹٫۲۰۶۱	۹۷٫۶۶۵۱	۹۱٫۲۳۹۹	۶۵٫۲۰۳۳
۱٫۲	TMCC	۱۵۰٫۱۲۷۵	۱۲۱٫۴۴۸۰	۱۰۹٫۹۰۱۴	۹۸٫۵۶۴۴	۹۲٫۱۵۱۸	۶۵٫۸۳۸۰
	SS Chart	**۷۹٫۴۲۳۶**	**۷۲٫۰۴۵۸**	**۶۸٫۱۰۲۴**	**۶۵٫۳۶۹۰**	**۶۰٫۱۱۳۲**	**۴۸٫۵۴۶۶**
	QMCC	۹۰٫۱۴۹۵	۴۸٫۶۱۰۳	۳۱٫۹۶۹۳	۲۴٫۵۵۵۰	۱۹٫۶۶۷۲	۱۱٫۴۳۸۹
۱٫۴	TMCC	۹۱٫۵۹۹۲	۴۹٫۲۴۲۳	۳۲٫۸۸۰۸	۲۴٫۹۹۷۶	۲۰٫۰۱۳۰	۱۱٫۴۹۳۰
	SS Chart	**۳۴٫۳۷۵۰**	**۲۸٫۹۴۵۸**	۲۳٫۴۲۸۴	**۱۹٫۷۰۶۱**	**۱۸٫۱۲۵۸**	**۱۴٫۵۳۴۱**
	QMCC	۴۶٫۳۶۶۷	۱۵٫۶۷۴۴	**۹٫۷۷۹۷**	۶٫۹۱۴۵	۶٫۰۵۴۲	**۵٫۳۶۸۱**
۱٫۶	TMCC	۴۸٫۱۲۰۵	۱۶٫۳۶۸۱	۹٫۹۹۲۶	**۶٫۸۷۲۳**	۶٫۰۶۹۲	۵٫۳۹۲۹
	SS Chart	**۱۸٫۱۷۴۶**	**۱۲٫۸۰۳۰**	۱۰٫۵۶۰۴	۸٫۸۷۵۸	۸٫۲۰۹۲	۶٫۶۴۳۸
	QMCC	۲۱٫۹۴۸۷	۵٫۹۰۵۲	**۴٫۰۹۵۴**	**۳٫۸۷۸۶**	**۳٫۸۲۶۹**	**۳٫۷۷۷۳**
۱٫۸	TMCC	۲۲٫۵۷۵۱	**۵٫۶۶۶۴**	۴٫۱۵۸۹	۳٫۸۹۹۸	۳٫۸۳۰۰	۳٫۷۸۶۳
	SS Chart	**۱۱٫۱۱۳۶**	۷٫۳۱۶۸	۵٫۹۹۳۴	۵٫۴۹۵	۴٫۹۷۸۲	۴٫۲۶۵۹
	QMCC	۹٫۸۰۷۴	**۳٫۴۳۸۷**	**۳٫۰۲۹۷**	۲٫۹۵۲۵	۲٫۹۴۳۶	**۲٫۹۵۱۷**
۲	TMCC	۱۰٫۳۹۲۰	۳٫۴۶۴۳	۳٫۰۳۶۸	**۲٫۹۴۶۶**	**۲٫۹۴۱۲**	۲٫۹۶۶۹
	SS Chart	**۷٫۵۱۳۸**	۴٫۹۷۶۸	۴٫۱۳۶۰	۳٫۷۴۵۶	۳٫۶۱۲۶	۳٫۲۲۳۱
	QMCC	۵٫۶۸۴۶	۲٫۶۱۲۴	۲٫۴۲۵۰	۲٫۴۴۳۴	**۲٫۴۴۲۵**	**۲٫۴۸۷۸**
۲٫۲	TMCC	**۵٫۳۷۴۸**	**۲٫۶۱۰۵**	**۲٫۴۲۱۶**	**۲٫۴۴۲۶**	۲٫۴۵۱۸	۲٫۴۹۴۱
	SS Chart	۵٫۶۴۴۲	۳٫۶۶۸۰	۳٫۱۹۴۸	۲٫۹۷۹۷	۲٫۸۶۴۲	۲٫۶۳۳۳
	QMCC	۳٫۳۹۹۸	**۲٫۱۲۲۶**	۲٫۰۹۹۵	**۲٫۱۲۳۱**	**۲٫۱۱۹۹**	**۲٫۱۷۲۷**
۲٫۴	TMCC	**۳٫۳۸۷۷**	۲٫۱۳۲۵	**۲٫۰۹۹۳**	۲٫۱۳۲۵	۲٫۱۲۴۰	۲٫۱۸۰۸
	SS Chart	۴٫۴۴۶۲	۳٫۰۲۳۴	۲٫۶۱۶۲	۲٫۴۳۹۸	۲٫۳۸۳۶	۲٫۲۲۷۷
	QMCC	۲٫۴۱۷۷	۱٫۸۹۰۸	۱٫۸۵۹۶	۱٫۸۶۹۹	۱٫۸۹۵۵	**۱٫۹۲۵۱**
۲٫۶	TMCC	**۲٫۳۶۱۷**	۱٫۸۹۴۹	۱٫۸۶۶۹	۱٫۸۸۰۰	۱٫۹۰۶۸	۱٫۹۴۱۵
	SS Chart	۳٫۶۴۵۰	۲٫۵۷۰۴	۲٫۲۵۶۶	۲٫۱۲۴۲	۲٫۰۵۸۰	۱٫۹۲۰۳
	QMCC	۲٫۰۴۴۷	۱٫۷۱۲۸	۱٫۷۰۰۸	۱٫۷۴۸۱	۱٫۷۳۴۱	۱٫۷۹۰۵
۲٫۸	TMCC	**۲٫۰۲۷۴**	۱٫۷۲۷۷	۱٫۷۰۴۷	۱٫۷۵۲۳	۱٫۷۴۸۳	۱٫۷۸۸۷
	SS Chart	۳٫۱۱۲۲	۲٫۲۲۸۲	۱٫۹۹۴۲	۱٫۸۸۱۸	۱٫۸۳۶۲	**۱٫۷۵۱۳**
	QMCC	۱٫۸۴۱۳	۱٫۵۸۵۶	۱٫۵۷۱۸	۱٫۵۸۲۳	۱٫۶۲۳۲	**۱٫۶۴۷۶**
۳	TMCC	**۱٫۸۲۰۲**	۱٫۵۸۶۷	۱٫۵۸۰۲	۱٫۵۸۹۸	۱٫۶۲۹۷	۱٫۶۵۲۴
	SS Chart	۲٫۷۱۰۶	۱٫۹۷۴۲	۱٫۷۸۵۴	۱٫۶۹۹۸	۱٫۶۵۰۴	۱٫۶۰۱۲

۲۰ اعداد پررنگ شده‌ی نمودار TMCC در مقایسه با نمودار QMCC از عملکرد بهتری برخوردارند که با توجه به مشابه بودن نمودار پایش انحراف استاندارد خطا در هر دو نمودار QMCC و TMCC، عملکرد بهتر نمودار TMCC نسبت به نمودار QMCC ناشی از عملکرد بهتر نمودار کنترل T برای پایش میانگین باقی‌مانده‌ها نسبت به نمودار کنترل Q است. در ادامه، تحلیل جداول ۲ تا ۵ به تفکیک ارائه شده است.

نتایج شبیه‌سازی گزارش شده در جدول ۲ نشان می‌دهد که نمودار کنترل TMCCدر جابه‌جایی کوچک ۰٫۲ به ازای نقاط تغییر ۵ و ۱۰ و ۱۵ عملکرد

جدول ۵. مقادیر خارج از کنترل **ARL** با تغییر هم‌زمان در عرض از مبدأ از A_0 به $A_0 + \delta_0\sigma$ و انحراف استاندارد از σ به $\gamma\sigma$ به ازای $\tau = ۲۰$.

γ	نمودارهای کنترل	δ_0				
		۰٫۲	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۸	۱
۱٫۱	QMCC	۱۴۰٫۹۹۲۹	۸۳٫۱۸۲۶	۳۸٫۰۴۶۵	۱۳٫۳۴۷۴	۵٫۸۳۳۳
	TMCC	۱۳۷٫۸۹۹۱	۷۶٫۶۰۳۵	۲۹٫۵۸۱۷	۱۰٫۹۴۹۸	۵٫۰۷۰۲
	SS Chart	**۹۶٫۰۵۲۴**	**۴۷٫۸۸۰۰**	**۱۵٫۲۰۲۴**	**۶٫۶۱۱۶**	**۴٫۳۱۴۰**
۱٫۲	QMCC	۸۳٫۲۱۲۰	۵۲٫۲۷۸۵	۲۵٫۴۷۲۷	۱۰٫۲۹۱۲	۵٫۳۳۸۶
	TMCC	۸۱٫۵۴۹۱	۵۱٫۰۰۹۵	۲۰٫۸۲۱۷	۸٫۵۹۲۸	۴٫۷۵۳۲
	SS Chart	**۵۱٫۴۷۴۲**	**۲۸٫۴۶۴۴**	**۱۲٫۶۰۴۶**	**۶٫۳۴۷۴**	**۴٫۲۷۹۰**
۱٫۳	QMCC	۴۲٫۷۰۳۵	۲۸٫۶۹۱۹	۱۵٫۶۸۳۳	۷٫۲۵۰۲	۴٫۷۸۸۶
	TMCC	۴۴٫۰۹۲۳	۲۶٫۳۷۰۵	۱۲٫۶۰۲۴	۶٫۹۶۱۳	۴٫۲۸۶۷
	SS Chart	**۳۰٫۳۹۶۴**	**۱۹٫۰۲۸۸**	**۱۰٫۱۴۰۰**	**۵٫۹۷۷۲**	**۴٫۲۴۹۸**
۱٫۴	QMCC	۲۰٫۲۷۳۲	۱۴٫۹۹۹۹	۸٫۷۹۸۶	۵٫۴۶۲۶	**۳٫۷۹۸۹**
	TMCC	۲۰٫۵۹۲۷	۱۵٫۲۵۲۱	۸٫۹۱۵۴	۵٫۵۹۲۵	۳٫۸۵۹۵
	SS Chart	**۱۸٫۱۰۰۶**	**۱۲٫۹۳۲۸**	**۸٫۴۵۶۴**	۵٫۷۱۱۶	۴٫۱۵۹۸
۱٫۵	QMCC	۱۰٫۷۷۸۰	۸٫۴۳۲۲	۵٫۷۹۸۷	۴٫۵۱۵۵	۳٫۵۸۸۸
	TMCC	۱۰٫۳۸۵۱	۸٫۵۶۱۰	۶٫۰۴۹۴	**۴٫۴۳۷۵**	**۳٫۴۸۵۰**
	SS Chart	۱۱٫۶۰۸۸	۹٫۵۵۴۰	۶٫۹۴۸۶	۵٫۱۳۱۶	۴٫۰۲۱۲

بهتری را نسبت به نمودارهای QMCC و همچنین نمودار رقیب SS نشان می‌دهند. ولی در این جابه‌جایی برای نقاط تغییر ۲۰ و ۲۵ و ۵۰ نمودار SS نسبت به نمودارهای کنترل QMCC و TMCC عملکرد بهتری دارند. همچنین در جابه‌جایی کوچک ۰٫۴ نیز برای نقاط تغییر ۵ و ۱۰ عملکرد نمودارهای TMCC نسبت به سایر نمودارها مطلوب‌تر است. در جابه‌جایی‌های بزرگ ۱٫۸ و ۲ برای نقاط تغییر ۱۵ و ۲۰ و ۵۰ عملکرد نمودارهای QMCC نسبت به سایر نمودارها مطلوب‌تر است. همچنین برای جابه‌جایی‌های بزرگ و اندازه‌ی نقاط تغییر بزرگ‌تر از ۲۰ عملکرد نمودارهای QMCC و TMCC و SS نسبتاً یکسان است و از منظر کشف سریع جابه‌جایی‌های مربوط مناسب ارزیابی می‌شوند. نتایج گزارش شده در جدول ۳ نشان می‌دهد که در جابه‌جایی کوچک ۰٫۰۲۵ نمودارهای TMCC برای نقاط تغییر ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ عملکرد مناسب‌تری را نسبت به سایر نمودارها دارند. همچنین در جابه‌جایی کوچک ۰٫۰۵، TMCC برای نقاط تغییر ۵ و ۱۰ و ۱۵ عملکرد مؤثرتری دارد. عملکرد مؤثر اخیر در جابه‌جایی کوچک ۰٫۰۷۵ نیز مشهود است. همچنین در جابه‌جایی‌های بزرگ و به ازای نقاط تغییر (τ) بزرگ‌تر از ۲۰ عملکرد نمودارهای مورد مقایسه تقریباً یکسان است و از منظر سرعت کشف جابه‌جایی مؤثر ارزیابی می‌شوند. بر اساس نتایج شبیه‌سازی گزارش شده در جدول ۴ می‌توان دریافت که در جابه‌جایی‌های بزرگ ۲٫۴ و ۲٫۶ و ۲٫۸ و ۳ عملکرد نمودارهای QMCC نسبت به سایر نمودارها مطلوب‌تر است. در جابه‌جایی متوسط ۲٫۲ عملکرد نمودارهای TMCC نسبت به نمودارهای دیگر مطلوب‌تر ارزیابی می‌شود. البته در نقاط تغییر ۲۵ و ۵۰ در این جابه‌جایی نمودارهای QMCC برتری نسبتاً کوچکی را نسبت به سایر نمودارها نشان می‌دهد. به‌طور کلی عملکرد کلیه‌ی نمودارهای مذکور در جابه‌جایی‌های متوسط و بزرگ به‌ازای نقاط تغییر (τ) مختلف نسبتاً یکسان و از لحاظ سرعت کشف جابه‌جایی مطلوب ارزیابی می‌شوند.

جدول ۵ عملکرد نمودارهای پیشنهادی را در کشف تغییرات هم‌زمان در پارامترهای عرض از مبدأ و انحراف معیار به ازای نقطه‌ی تغییر ۲۰ ($\tau = ۲۰$) نشان می‌دهد. نتایج جدول ۵ حاکی از عملکرد مناسب روش‌های پیشنهادی در کشف تغییرات هم‌زمان است. در جابه‌جایی‌های بزرگ ۱٫۵ انحراف استاندارد و همچنین جابه‌جایی بزرگ ۰٫۸ و ۱ در عرض از مبدأ نمودارهای TMCC توانایی بهتری را در کشف جابه‌جایی از خود نشان می‌دهند. این توانایی برای جابه‌جایی مشابه در انحراف استاندارد و جابه‌جایی کوچک و متوسط ۰٫۴ و ۰٫۶ در عرض از مبدأ، برای نمودارهای QMCC مطلوب ارزیابی می‌شود. همچنین در جابه‌جایی بزرگ ۱٫۴ در انحراف استاندارد هم‌زمان با جابه‌جایی بزرگ ۰٫۸ و ۱ در عرض از مبدأ نمودارهای QMCC عملکرد مطلوب‌تر و مناسب‌تری را ارائه می‌کنند. به‌طور کلی برای جابه‌جایی‌های بزرگ هم‌زمان هر دو پارامتر انحراف استاندارد و عرض از مبدأ، عملکرد نمودارهای مذکور نسبتاً یکسان و از لحاظ سرعت کشف جابه‌جایی مطلوب ارزیابی می‌شوند.

به‌طورکلی نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که نمودارهای کنترل پیشنهادی از عملکرد مناسبی در کشف تغییرات متوسط و بزرگ بر حسب متوسط طول دنباله خارج از کنترل برخوردارند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای مطالعات آتی

در این مقاله، نمودارهای کنترل برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فرایندهای تولید کوتاه مدت طراحی شدند که قادر هستند از همان مراحل ابتدایی فرایند را پایش و هم‌زمان تخمین پارامترهای فرایند را نیز روزآمد کنند. در این مقاله نمودارهای کنترل

پیشنهادی با یکی از روش‌های موجود در پیشینه از طریق مطالعات شبیه‌سازی مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که نمودار کنترل پیشنهادی از عملکرد مناسبی در کشف جابه‌جایی‌های متوسط و بزرگ بر اساس متوسط طول دنباله (ARL) خارج از کنترل برخوردار است. همچنین تغییرات تعداد نمونه‌های تحت کنترل اولیه پیش از رخداد جابه‌جایی بررسی شد و این نتیجه حاصل شد که با افزایش نمونه‌های اولیه عملکرد نمودارها بهبود پیدا می‌کنند. از آن‌جایی که در این مطالعه باقی‌مانده‌های پروفایل‌های خطی ساده پایش شدند، در ادامه به‌عنوان زمینه‌ی مطالعاتی برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود که توسعه‌ی روش‌هایی برای پایش میانگین و پراکندگی باقی‌مانده‌ها در سایر انواع پروفایل‌ها شامل پروفایل‌های خطی چند متغیره، خطی چندگانه و چندجمله‌یی در فرایندهای تولید کوتاه‌مدت مورد توجه قرار گیرد. همچنین پایش پارامترهای پروفایل‌های خطی ساده در فرایندهای تولید کوتاه مدت می‌تواند زمینه‌ی مناسبی برای تحقیق آتی باشد.

پانوشت‌ها

1. average run length
2. exponentially weighted moving average
3. cumulative sum
4. Q-MSE control chart
5. T-MSE control chart

منابع (References)

1. Kang, L., Albin, S.L. "On-line monitoring when the process yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, **32**(4), pp. 418-426 (2000).
2. Kim, K., Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "On the monitoring of linear profiles", *Journal of QualityTechnology*, **35**(3), pp. 317-347 (2003).
3. Saghaei, A., Mehrjoo, M. and Amiri, A. "Monitoring simple linear profiles using cumulative sum control charts", *Amirkabir Journal of Science & Research-Mechanical Engineering*, **41**(2), pp. 73-82 (2010).
4. Khedmati, M. and Niaki, S.T.A. "Monitoring simple linear profiles in multistage processes by a MaxEWMA control chart", *Computers & Industrial Engineering*, **98**, pp. 125-143 (2016).
5. Kazemzadeh, R.B., Amiri, A. and Kouhestani, B. "Monitoring simple linear profiles using variable sample size schemes", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **86**(15), pp. 2923-2945 (2016).
6. Soleimani, P., Noorossana, R. and Amiri, A. "Simple linear profiles monitoring in the presence of within profile autocorrelation", *Computers & Industrial Engineering*, **57**(3), pp. 1015-1021 (2009).
7. Zhang, J., Li, Z. and Wang, Z. "Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles", *Computational Statistics & Data Analysis*, **53**(4), pp. 1440-1448 (2009).
8. Niaki, S.T.A., Abbasi, B. and Arkat, J. "A generalized linear statistical model approach to monitor profiles", *International Journal of Engineering Transactions A Basics*, **20**(3), pp. 233-242 (2007).
9. Noorossana, R., Fatemi, S.A. and Zerehsaz, Y. "Phase II monitoring of simple linear profiles with random explanatory variables" , *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **76**(5-8), pp. 779-787 (2015).
10. Amiri, A., Eyvazian, M., Zou, C. and et al. "A parameters reduction method for monitoring multiple linear regression profiles", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **58**(5-8), pp. 621-629 (2012).
11. Amiri, A., Saghaei, A., Mohseni, M. and et al. "Diagnosis aids in multivariate multiple linear regression profiles monitoring", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **43**(14), pp. 3057-3079 (2014).
12. Ghashghaei, R. and Amiri. A. "Sum of squares control charts for monitoring of multivariate multiple linear regression profiles in phase II", *Quality and Reliability Engineering International*, **33**, pp. 767-784 (2017).
13. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Phase II monitoring of autocorrelated polynomial profiles in AR(1) processes", *Scientia Iranica*, **17**(1), pp. 12-24 (2010).
14. Hawkins, D.M. "Self-starting CUSUM charts for location and scale", The Statistician, **36**(4), pp. 299-316 (1987).
15. Quesenberry, Charles, P. "SPC Q charts for start-up processes and short or long runs", *Journal of Quality Technology*, **23**(3), pp. 213-224 (1991).
16. Zantek, Paul, F. "Design of cumulative sum schemes for start-up processes and short runs", *Journal of Quality Technology*, **38**(4), pp. 365-375 (2006).
17. Sullivan, J.H. and Jones, L. A. "A self-starting control chart for multivariate individual observations", *Technometrics*, **44**(1), pp. 24-33 (2002).

18. Quesenberry, Charles P. "On properties of Q charts for variables", *Journal of Quality Technology*, **27**(3), pp. 184-203 (1995).

19. Zou, C., Zhou, C., Wang, Z. and et al. "A self-starting control chart for linear profiles", *Journal of Quality Technology*, **39**(4), pp. 364-375 (2007).

20. Amiri, A., Khosravi, P. and Ghashghaei, R. "A self-starting control chart for simultaneous monitoring of mean and variance of simple linear profiles", *International Journal of Engineering, Transactions C: Aspects*, **29**(9), pp. 1257-1266 (2016).

21. Tsung, F. and Xia, Z. "A computationally efficient self-starting scheme to monitor general linear profiles with abrupt changes", *Quality Technology & Quantitative Management*, **16**(3), pp. 278-296 (2019).

22. Khosravi, P. and Amiri, A. "Self-Starting control charts for monitoring logistic regression profiles", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **48**(6), pp. 1860-1871 (2019).

23. Celano, G., Castagliola, P., Trovato, E. and et al." Shewhart and EWMA t control charts for short production runs", *Quality and Reliability Engineering International*, **27**(3), pp. 313-326 (2011).

پیوست

پیوست الف: نحوه‌ی به دست آوردن آماره‌ی نهایی روش T و توزیع آن

e_{ij}: باقی‌مانده‌ی نمونه‌ی iام نمونه‌ی مذکور

$$i = ۱, ۲, ..., n$$

داریم

$$e_{ij} \sim N\left(۰, \sigma^۲\right),$$

در نتیجه:

$$\bar{e}_j = \frac{\sum_{i=۱}^{n} e_{ij}}{n} \sim N\left(۰, \frac{\sigma^۲}{n}\right),$$

(الف ـ ۱) با استاندارد کردن $\bar{e}_j$ داریم:

$$Z = \frac{\bar{e}_j - ۰}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}\bar{e}_j - ۰}{\sigma}$$

پس:

$$\sqrt{n}\bar{e}_j \sim N\left(۰, \sigma^۲\right).$$

اکنون آماره‌ی T را که سلانو و همکاران[۲۳] از آن برای محاسبات استفاده کرده‌اند، در نظر می‌گیریم:

$$T_i = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{x}_i - \mu\right)}{S_i} \sim t_{n-۱}. \qquad \text{(الف ـ ۲)}$$

در رابطه‌ی (الف ـ ۲) به‌جای $\overline{X}_i$ مقدار $\sqrt{n}\bar{e}_j$ را قرار می‌دهیم:

$$T_j = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}\bar{e}_j - ۰\right)}{S_{\sqrt{n}\bar{e}_j}} \sim t_{n-۱}; \qquad j \geq ۲. \qquad \text{(الف ـ ۳)}$$

T_j دارای توزیع t استودنت با $n-۱$ درجه آزادی است.

می‌دانیم که $S^۲_{\sqrt{n}x} = nS^۲_x$ اگر به جای x مقدار $\bar{e}_j$ را قرار دهیم، داریم: $S^۲_{\sqrt{n}\bar{e}_j} = nS^۲_{\bar{e}j}$ و با جذرگرفتن از طرفین داریم:

$$S_{\sqrt{n}\bar{e}_j} = \sqrt{n}S_{\bar{e}_j}. \qquad \text{(الف ـ ۴)}$$

اکنون معادل $S_{\sqrt{n}\bar{e}_j}$ را از رابطه‌ی (الف ـ ۴) در رابطه‌ی (الف ـ ۳) جایگزین می‌کنیم،

در نتیجه داریم:

$$T_j = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}\bar{e}_j\right)}{\sqrt{n}S_{\bar{e}_j}} = \frac{\sqrt{n}\bar{e}_j}{S_{\bar{e}_j}} \sim t_{n-۱}; \qquad \text{(الف ـ ۵)}$$

که $j \geq ۲$ مقادیر عدد صحیح به خود می‌گیرد.

در نتیجه رابطه‌ی ۱۱ ثابت می‌شود. T_j دارای توزیع t با $n-۱$ درجه آزادی و با میانگین و واریانس $E(T_j) = ۰$

$\text{var}\left(T_j\right) = \sigma^۲_{T_j} = \frac{n-۱}{(n-۱)-۲} = \frac{n-۱}{n-۳}$ است.

پیوست ب: نحوه‌ی به دست آوردن توزیع MSE_j می‌دانیم:

$$e_{ij} \sim N\left(۰, \sigma^۲\right),$$

$$Z = \frac{e_{ij} - ۰}{\sigma} = \frac{e_{ij}}{\sigma} \sim N\left(۰, ۱\right). \qquad \text{(ب ـ ۱)}$$

با به توان دو رساندن طرفین داریم: $Z^۲ = \frac{e^۲_{ij}}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_۱$ اکنون با گرفتن سیگما از طرفین این رابطه داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{e^۲_{ij}}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_n \sim Gamma\left(\frac{n}{۲}, \frac{۱}{۲}\right). \qquad \text{(ب ـ ۲)}$$

با ضرب کردن این مقدار در $\sigma^۲$ تغییرات زیر را شاهد هستیم:

$$\sigma^۲ \times \left(\frac{\sum e^۲_{ij}}{\sigma^۲}\right) \sim Gamma\left(\frac{n}{۲}, \frac{۱}{۲\sigma^۲}\right),$$

$$\sum e^۲_{ij} \sim Gamma\left(\frac{n}{۲}, \frac{۱}{۲\sigma^۲}\right). \qquad \text{(ب ـ ۳)}$$

حال برای رسیدن به رابطه‌ی (MSE_j) مقدار این رابطه را به $n-۲$ تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\sum e^۲_{ij}}{n-۲} \sim Gamma\left(\frac{n}{۲}, \frac{n-۲}{۲\sigma^۲}\right),$$

$$MSE_j \sim Gamma\left(\frac{n}{۲}, \frac{n-۲}{۲\sigma^۲}\right). \qquad \text{(ب ـ ۴)}$$