

بهینه‌سازی هم‌زمان قیمت و مدت ضمانت برای خانواده‌یی از محصولات چندقطعه‌یی

مظاهر ضیایی (دانشجوی دکتری)

سعیده کنایی* (دانشیار)

مهسا قندهاری (دانشیار)

گروه مدیریت، دانشکده‌ی علوم اداری و اقتصاد دانشگاه اصفهان

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۹ (۱۳۹۹)
دوری (۳۶-۱)، شماره ۱/۲، ص. ۱۵-۲۳

اهمیت روزافزون جلب اعتماد مشتری و تنوع تقاضا باعث شده است توجه به سیاست‌های ضمانت و تولید محصولات به صورت «خانواده‌ی محصول» افزایش یابد که ضمن استفاده از مزایای تولید انبوه و انعطاف‌پذیری، هر عضو خانواده پاسخ‌گوی بخش معینی از تقاضا باشد؛ اما مدل‌های مناسب در این زمینه توسعه‌ی کافی نیافته‌اند. این مقاله یک مدل بهینه‌سازی هم‌زمان قیمت و مدت ضمانت برای محصولات در یک خانواده‌ی محصول را با به‌کارگیری زنجیره‌ی مارکوف ارائه می‌دهد. بدین منظور، ابتدا حالات ممکن برای زیرسیستم‌ها و کل محصول در قالب یک زنجیره‌ی مارکوف پیوسته بیان و مقادیر حدی احتمال حالات نیازمند به خدمات ضمانت محاسبه می‌شود. هدف مدل بهینه‌سازی سود کل محصولات با بهینه‌سازی هم‌زمان قیمت و مدت ضمانت هر محصول است. مدل مسئله برای دو سیاست ضمانت با مدت ثابت و تجدیدشونده ارائه می‌شود. با فرض عدد صحیح بودن مدت ضمانت، مدل مسئله برنامه‌ریزی مختلط غیرخطی است. حل مثال‌های عددی و تحلیل حساسیت برای پارامترهای مهم با استفاده از نرم افزار GAMS برای این دو سیاست انجام می‌شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که مدل بیشترین حساسیت را نسبت به ضرایب کسب قیمت و مدت ضمانت دارد و حساسیت کمی نسبت به میزان استفاده دارد. همچنین سهم هر محصول از کل تولیدات با تغییر ظرفیت تغییر زیادی نمی‌کند. این مطالعه می‌تواند به تولیدکنندگان کمک کند که در مرحله‌ی توسعه‌ی محصول (طراحی و مهندسی) بهینه‌سازی متغیرهای اصلی یک محصول، مانند قابلیت اطمینان، قیمت و دوره‌ی ضمانت را هم‌زمان انجام دهند. همچنین، مدل پیشنهادی در فرایند تصمیم‌گیری قیمت و مدت ضمانت یک خانواده‌ی محصول و تحلیل حساسیت پارامترهای مربوط به خوبی قابل به‌کارگیری توسط مدیران است.

واژگان کلیدی: خانواده‌ی محصول، قیمت، مدت ضمانت، زنجیره‌ی مارکوف، برنامه‌ریزی مختلط غیرخطی.

۱. مقدمه

زمینه‌ی جلب اعتماد مشتریان، امروزه، مدت ضمانت نه تنها یک خدمت ضروری برای یک محصول است، بلکه مشتریان آن را به‌عنوان میزان قابل اعتماد بودن محصول تلقی می‌کنند.^[۱] به گونه‌یی که در سال‌های اخیر تعیین مدت ضمانت به بخشی مهم از سیاست‌های بازاریابی تبدیل شده است.^[۲] ارائه‌ی مدت ضمانت طولانی‌تر باعث افزایش تقاضا می‌شود، ولی هزینه‌های شرکت‌ها را افزایش می‌دهد. بنابراین، تصمیم‌گیری هم‌زمان در مورد مدت ضمانت و قیمت یک محصول اهمیت زیادی پیدا کرده است.

توجه به مفهوم خانواده‌ی محصول به گونه‌یی است که اکنون بسیاری از محصولات مانند اتومبیل، انواع رایانه، تلفن‌های همراه و مانند آنها، به‌صورت خانواده‌ی محصول به

رقابت شدیدی که در اثر افزایش تنوع تقاضا و اهمیت جلب اعتماد مشتریان بین شرکت‌ها در جریان است، باعث توسعه‌ی مفاهیم و مدل‌های جدیدی شده است. به همین دلیل مفهوم «خانواده‌ی محصول» و سیاست‌های مرتبط با جلب اعتماد مشتری، مانند مدت ضمانت، طی سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته‌اند. مفهوم خانواده‌ی محصول این امکان را فراهم می‌کند که ضمن استفاده از مزایای تولید انبوه و انعطاف‌پذیری، پاسخ مناسب به تقاضاهای متنوع داده شود. در

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۱۸/۱۵، اصلاحیه ۱۳۹۸/۷/۱۵، پذیرش ۱۳۹۸/۸/۲۷

DOI:10.24200/J65.2019.52582.1952

mazaherziaei@gmail.com
sketabi@ase.ui.ac.ir
m.gandehari@ase.ui.ac.ir

بازار عرضه می‌شوند. به همین دلیل مسائل مرتبط با خانواده‌ی محصول در سال‌های اخیر موضوع بسیاری از تحقیقات بوده است [۲۰-۲۱]. در مورد هم‌زمانی تصمیمات یک محصول مانند قابلیت اطمینان، قیمت، مدت ضمانت نیز پژوهش‌های زیادی انجام شده است. [۲۱-۲۳] اما پژوهش‌چندانی برای ارائه‌ی مدل‌هایی که قیمت و مدت ضمانت را برای محصولات مختلف یک خانواده از محصولات را هم‌زمان بهینه‌کند، صورت نگرفته است.

مدل‌های ارائه شده در زمینه‌ی مدت ضمانت فقط برای یک محصول با دو حالت «در حال کار» یا «خراب» بوده است؛ در حالی که مدت ضمانت در عمل یک متغیر عدد صحیح است، در این مدل‌ها مدت ضمانت متغیری پیوسته فرض می‌شود. این مدل‌ها نامقیدند و تابع هدف اغلب آنها کمیته‌سازی هزینه است. بنابراین، در زمینه مدل‌هایی برای یک خانواده‌ی محصول، که هر محصول بتواند در چند حالت قرار گیرد و هدف آن بیشینه‌سازی سود باشد، کمبودهای زیادی وجود دارد.

این مقاله با هدف جبران این کمبود تهیه شده است و هدف آن ارائه‌ی یک مدل ریاضی مقید برای بیشینه‌سازی سود با بهینه‌سازی هم‌زمان مدت ضمانت به صورت یک متغیر عدد صحیح و قیمت هر یک از محصولات در یک خانواده از محصولات با لحاظ چندحالتی بودن هر محصول است. برای انجام این کار یک مدل چندحالتی برای زیرسیستم‌ها و کل محصول در قالب یک زنجیره‌ی مارکوف پیوسته بیان می‌شود تا امکان محاسبه‌ی احتمالات حدی، حالتی که نیاز به خدمات ضمانت وجود دارد و بنابراین هزینه‌هایی برای شرکت ایجاد می‌کند، فراهم شود. در این مدل علاوه بر معادلات تعادلی زنجیره‌ی مارکوف، محدودیت‌هایی برای ظرفیت‌های تولید و موتاژ لحاظ شده است.

در ادامه‌ی این مقاله، ابتدا در بخش ۲ به مرور پژوهش‌های پیشین در این زمینه پرداخته می‌شود و در بخش ۳ ابتدا توابع لازم برای مدل‌سازی بررسی می‌شود و سپس فرمول‌بندی کل مسئله برای دو سیاست مختلف ضمانت ارائه می‌شود. در بخش ۴ نتایج حل مدل برای چند مثال عددی مسئله تحت سیاست‌های مختلف بررسی و تحلیل حساسیت بر روی چندین پارامتر انجام می‌شود. در نهایت جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش ۵ صورت می‌گیرد.

۲. مرور پیشینه

در طول چهار دهه‌ی گذشته و با افزایش توجه به خانواده‌ی محصولات مطالعات زیادی در این زمینه صورت گرفته است. بخشی از این مطالعات در مورد طراحی این محصولات متناسب با نیازهای مشتریان و عوامل بازاریابی و رعایت روابط فنی و عملکردی است و در حیطه‌ی مدیریت بازار و مهندسی قرار می‌گیرند. [۲-۷] بخش دیگری از آنها در زمینه‌ی بهینه‌سازی میزان تولید، محل تولید، امکانات تولید، توزیع، خدمات پس از فروش و مدیریت زنجیره‌ی تأمین این محصولات بوده است. [۸-۱۴] بخشی از این مطالعات نیز در زمینه‌ی بهینه‌سازی تعداد و نوع زیرسیستم‌ها و چیدمان‌های محصولات صورت گرفته است. [۱۵-۲۱] اما تا جایی که نگارندگان این مقاله جستجو کرده‌اند، مطالعه‌ی در زمینه‌ی مدت ضمانت خانواده‌ی محصول صورت نگرفته است.

قیمت‌گذاری در مطالعات مختلف مورد توجه است، [۲۳، ۲۴] اما در زمینه‌ی تعیین هم‌زمان قیمت و مدت ضمانت اولین بار گیلمن و برگر در سال ۱۹۷۶ تابعی برای تقاضا برحسب قیمت و مدت ضمانت ارائه دادند و با به‌کارگیری آن در یک تابع سود

شرایط بهینگی را بررسی کردند. [۲۴] تابع پیشنهادی آنها در چند مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است. [۲۵-۲۷] هونگ و همکاران این تابع تقاضا را برای بهینه‌سازی قیمت و مدت ضمانت برای یک محصول جدید در قالب یک مدل بهینه‌سازی نامقید فرمول‌بندی کردند و با روش کنترل بهینه، برای دو سناریوی تعیین قیمت آن را تحلیل کردند. [۲۵] در همین باره پژوهشگران دیگری مدل‌های ریاضی برای سیاست‌های مختلف ضمانت و شرایط متفاوت شرکت و محصولات ارائه کرده‌اند. [۲۵-۲۹] مطالعه در مورد هزینه‌های ضمانت برای محصولات چندقطعه‌ی محدود بوده است. [۳۰-۳۳] از جمله مرجع [۳۰] که طی آن نحوه‌ی محاسبه‌ی هزینه‌ی اضافه کردن مدت ضمانت به درخواست مشتری بررسی شده است و همچنین مرجع [۳۳] که با استفاده از فرایندهای تصادفی روابط میانگین و واریانس تعدادخرابی‌ها سیستم‌ها چندقطعه‌ی را با فرض عدم استقلال قطعات با چیدمان‌های مختلف ارائه کرده است.

در مجموع می‌توان گفت که هنوز مدل ریاضی مناسبی که به‌طور هم‌زمان قیمت و مدت ضمانت را برای یک خانواده‌ی محصول بهینه‌کند، ارائه نشده است. اغلب مدل‌های مربوط به قیمت و مدت ضمانت از نوع نامقید هستند که در همه‌ی آن‌ها هم قیمت و هم مدت ضمانت پیوسته در نظر گرفته می‌شود. در صورتی که اصولاً شرایط حاکم بر مسئله برای در نظر گرفتن واقعیت وجود محدودیت‌ها را ایجاب می‌کند و به علاوه مدت ضمانت در عمل یک متغیر گسسته است. مثلاً اگر مدت ضمانت بهینه برابر ۱۳۵ روز باشد، باید تصمیم گرفت که آن را چهارالی شش ماه و حتی یک سال در نظر گرفت و به مشتری اعلام کرد. همچنین در عمل یک محصول در چند حالت قرار می‌گیرد؛ اما به‌جز مرجع [۲۷] سیستم‌های چندحالتی در این زمینه مطالعه نشده‌اند.

در این مقاله حالات ممکن برای یک محصول در قالب یک مدل مارکوف پیوسته تبیین و سپس بهینه‌سازی هم‌زمان قیمت و مدت ضمانت برای محصولات یک خانواده از محصول برای دو سیاست ضمانت در قالب یک مدل برنامه‌ریزی مختلط غیرخطی مدل‌سازی می‌شود.

۳. ارائه‌ی مدل

در این بخش ابتدا مبانی و روابط لازم برای برپایی مدل تبیین و سپس کل مدل ارائه می‌شود.

۱.۳. خانواده‌ی محصولات

یک خانواده شامل K نوع محصول است که هر محصول پاسخ‌گوی بخش معینی از بازار است. همه‌ی محصولات شامل n زیرسیستم هستند و برای هر زیرسیستم i ، m_i گزینه مانند z ($z = 1, \dots, m_i$) از انواع قطعات برای انتخاب وجود دارد. بنابراین، ویژگی‌های هر محصول متناسب با نیاز مشتریان بخش مربوط در بازار، با انتخاب قطعات خاصی به وجود می‌آید. زیرسیستم‌ها به صورت سری هستند؛ بنابراین، با خرابی یا شکست هر یک از زیرسیستم‌ها کل محصول از کار می‌افتد. فرض بر این است که چیدمان هر محصول CNF_k شامل ترکیبی سازگار از قطعات، متناسب با نیازهای بخش مربوطه در بازار، از پیش تعیین شده است.

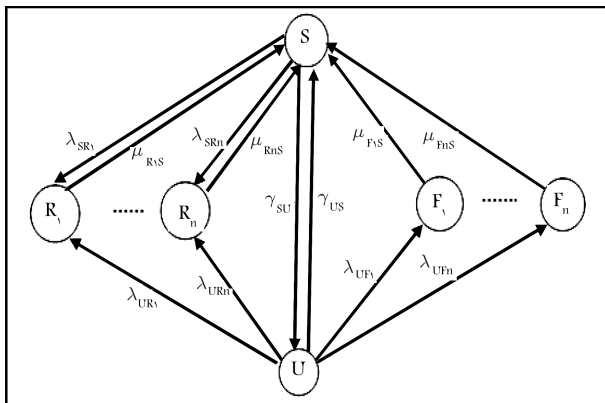
۲.۳. محاسبه‌ی احتمالات شکست و خرابی سیستم به کمک

زنجیره‌ی مارکوف

برای محاسبه‌ی هزینه‌های ضمانت لازم است احتمالات بلندمدت حالت‌هایی که

جدول ۱. معرفی نرخ‌های گذار.

λ_{UF_i}	= متوسط تعداد شکست در واحد زمان وقتی که زیر سیستم i در حال کار باشد. (گذار از حالت U به حالت F)
λ_{UR_i}	= متوسط تعداد خرابی‌ها در واحد زمان وقتی که زیر سیستم i در حال کار باشد. (گذار از حالت U به حالت R)
λ_{SR_i}	= متوسط تعداد خرابی‌ها در واحد زمان وقتی که زیر سیستم i در حالت آماده به کار باشد. (گذار از حالت S به حالت R)
μ_{R_iS}	= متوسط تعداد دفعاتی که در واحد زمان می‌توان زیر سیستم i را از حال شکست نوسازی کرد. (گذار از حالت R به حالت S)
μ_{R_iS}	= متوسط تعداد دفعاتی که در واحد زمان می‌توان زیر سیستم i را از حال شکست تعمیر کرد. (گذار از حالت R به حالت S)
γ_{SU}	= متوسط تعداد تقاضای کار از سیستم در طول واحد زمان. (گذار از حالت S به حالت U)
γ_{US}	= متوسط تعداد کاری که سیستم در واحد زمان می‌دهد. (گذار از حالت U به حالت S)



شکل ۱. نمودار تغییر حالات سیستم محصول با n زیر سیستم (برای سادگی، حالات شکست یا خرابی فقط برای زیر سیستم‌های ۱ و n نشان داده شده است.)

انجام خدمات ضمانت را می‌طلبند، معلوم شوند. هر محصول یا سیستم در یکی از چهار حالت آماده به کار (S)، در حال کار (U)، شکست (F) و خراب (R) قرار دارد. با توجه به سری بودن زیر سیستم‌ها حالت شکست و خرابی محصول ناشی از شکست یا خرابی یکی از زیر سیستم‌هاست. در دو حالت شکست و خرابی نیاز به خدمات ضمانت وجود دارد و در نتیجه به هزینه منجر می‌شوند. در حالت خرابی فقط نیاز به تعمیر است ولی در حالت شکست باید علاوه بر تعمیر، تعویض قطعه انجام شود. در هر حال فرض می‌شود که محصول بعد از دریافت خدمات ضمانت به خوبی یک محصول نو کار خواهد کرد. سیستم در ابتدا در حالت آماده به کار است، این وضعیت می‌تواند به دو وضعیت دیگر تبدیل شود. یکی حالت کار و دیگری حالت خرابی که ناشی از خرابی یکی از زیر سیستم‌هاست. سیستم از حالت در حال کار می‌تواند به هر یک از سه حالت دیگر تبدیل شود. طبیعتاً سیستم از دو حالت خرابی یا شکست فقط به حالت آماده به کار می‌رود.

از زنجیره‌ی مارکوف زمان پیوسته به دلیل انعطاف پذیری و قابلیت آن در مدل‌سازی رفتارهای وابسته به زمان، برای تعیین احتمالات بلندمدت، حدی، حالت‌ها استفاده شده است. احتمالات قرار گرفتن در دو حالت شکست و خرابی به دلیل این‌که منجر به دریافت خدمات ضمانت و تحمیل هزینه برای شرکت می‌شوند، مورد نظر هستند. تعریف و نمادهای حالت‌های سیستم همراه نرخ‌های گذار از حالت‌ها به همدیگر در جدول ۱ نشان داده شده‌اند. بدیهی است که با توجه به مفروضات پایه در زنجیره‌ی مارکوف، احتمالات گذار دارای توزیع نمایی با نرخ‌های فوق هستند. جدول ۱ یک جدول نوعی برای هر محصول است که برای سادگی از ذکر اندیس محصول خودداری شده است.

با توجه به این‌که تعداد زیر سیستم‌های سیستم برابر n است، مجموع حالات سیستم برابر $2n + 2$ خواهد بود. نمودار تغییر حالات سیستم در شکل ۱ نشان داده شده است.

ماتریس نرخ تغییرحالت‌های سیستم (A) به قرار زیر خواهد بود:

برای محاسبه‌ی امید ریاضی هزینه‌ها به احتمالات حدی حالت‌ها نیاز است. احتمال قرار گرفتن سیستم در هر یک از حالات در بلندمدت $\pi = (\pi_U, \pi_{F_1}, \dots, \pi_{F_n}, \pi_{R_1}, \dots, \pi_{R_n}, \pi_S)$ از حل دستگاه معادلات تعادلی ۱ به دست می‌آید.

$$\pi.A = 0 \quad (1)$$

همچنین، از آنجایی‌که همیشه سیستم در یکی از حالات قرار می‌گیرد، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -\gamma_{US} - \sum_{i=1}^n (\lambda_{UF_i} + \lambda_{UR_i}) & \lambda_{UF_1} & \lambda_{UF_2} & \dots & \lambda_{UF_n} & \lambda_{UR_1} & \lambda_{UR_2} & \dots & \lambda_{UR_n} & \gamma_{US} \\ 0 & -\mu_{F_1S} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{F_1S} \\ 0 & 0 & -\mu_{F_2S} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{F_2S} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_{F_nS} & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{F_nS} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mu_{R_1S} & 0 & \dots & 0 & \mu_{R_1S} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\mu_{R_2S} & \dots & 0 & \mu_{R_2S} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_{R_nS} & \mu_{R_nS} \\ \gamma_{SU} & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{SR_1} & \lambda_{SR_2} & \dots & \lambda_{SR_n} & -\gamma_{SU} - \sum_{i=1}^n \lambda_{SR_i} \end{bmatrix}$$

که در آن C_{ij} هزینه تولید قطعه‌ی j برای زیر سیستم i است و CM_{ki} هزینه هر زیر سیستم i برای محصول k و cm_k جمع هزینه‌های تولید محصول k است. هزینه ضمانت برای هر محصول (ew_k) بستگی به تعداد و نوع خدمات ضمانت دارد. نرخ انجام خدمات ضمانت به صورت روابط ۷ و ۸ محاسبه می‌شود:

$$\mu F_{ki} = \pi F_{ki} \quad \mu F_{ki} S \quad (7)$$

$$\mu R_{ki} = \pi R_{ki} \quad \mu R_{ki} S \quad (8)$$

تعداد دفعات خدمات ضمانت هم تحت تأثیر مدت ضمانت و هم تحت تأثیر سیاست ضمانت است. دو سیاست ضمانت متداول در مورد مدت ضمانت وجود دارد:

۱. سیاست مدت ثابت

در این سیاست خدمات ضمانت برای مدت معینی بعد از فروش محصول (مثلاً یک سال) ارائه می‌شود. با فرض‌های قبلی، تعداد خدمات ضمانت برای حالت شکست (NF_{ki}) در بازه‌ی زمانی T عبارت خواهد بود از:

$$NF_{ki} = \mu F_{ki} T \quad (9)$$

و به‌طور مشابه تعداد خدمات ضمانت برای حالت خرابی (NR_{ki}) در بازه‌ی زمانی T چنین است:

$$NR_{ki} = \mu R_{ki} T \quad (10)$$

۲. سیاست تجدیدشونده

در این سیاست دوره‌ی ضمانت یک محصول تا وقتی که اولین خرابی بعد از مدت ضمانت اتفاق افتد، ادامه می‌یابد. با توجه به ویژگی‌های توزیع عمر نمایی، احتمال این‌که زیر سیستم i از محصول k در مدت T دچار شکست شود (pr_{ki})، برابر $pr_{ki} = e^{-\mu F_{ki} T}$ است و با فرض این‌که قطعه و سیستم بعد از هر بار دریافت خدمات ضمانت به خوبی یک قطعه‌ی نوکار می‌کند، تعداد دفعات خدمات ضمانت در دوره‌ی ضمانت یکی کمتر از متوسط تعداد آزمایش‌های یک توزیع هندسی با پارامتر pr_{ki} است. پس در این حالت تعداد خدمات ضمانت برای حالت شکست (NF_{ki}) در بازه‌ی زمانی T به قرار زیر است:

$$NF_{ki} = e^{-\mu F_{ki} T} - 1 \quad (11)$$

و به‌طور مشابه تعداد خدمات ضمانت برای حالت خرابی (NR_{ki}) برای این سیاست بازه‌ی زمانی T به قرار زیر خواهد بود:

$$NR_{ki} = e^{-\mu R_{ki} T} - 1 \quad (12)$$

تعداد خدمات ضمانت هر محصول از جمع تعداد شکست زیر سیستم‌ها به دست می‌آید. هزینه هر بار خدمات ضمانت برای هر محصول در حالت شکست شامل دو هزینه، یکی هزینه تعویض (cs_{ki}) و دیگری هزینه تعمیر (cr_{ki}) است. هزینه هر بار خدمات ضمانت در حالت خرابی فقط شامل هزینه تعمیر است. با فرض این‌که سیاست شرکت انجام خدمات ضمانت به صورت رایگان باشد، هزینه ضمانت هر محصول در طول مدت ضمانت (w_k) برای شرکت چنین است:

$$ew_k = \sum_{i=1}^n (NF_{ki} (cs_{ki} + cr_{ki}) + NR_{ki} cr_{ki}) \quad (13)$$

$$\pi_U + \sum_{i=1}^n \pi_{F_i} + \sum_{i=1}^n \pi_{R_i} + \pi_S = 1 \quad (2)$$

بنابراین، احتمالات بلند مدت را می‌توان از دستگاه معادلات ۳ به دست آورد (برای سهولت در محاسبات به‌جای معادله‌ی تعادلی آخرین حالت از رابطه‌ی ۲ استفاده می‌شود):

$$\begin{aligned} & \left(-\gamma_{us} - \sum_{i=1}^n (\lambda_{UF_i} + \lambda_{UR_i}) \right) \pi_U + \gamma_{SU} \pi_S = 0 \\ & \lambda_{UF_i} \pi_U - \mu_{F_i S} \pi_{F_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & \lambda_{UR_i} \pi_U - \mu_{R_i S} \pi_{R_i} + \lambda_{sr_i} \pi_S = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & \pi_U + \sum_{i=1}^n \pi_{F_i} + \sum_{i=1}^n \pi_{R_i} + \pi_S = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

با حل دستگاه معادلات ۳ مقادیر π_{F_i} یعنی احتمال بلند مدت قرار گرفتن سیستم در حالت شکست ناشی از شکست زیر سیستم i و π_{R_i} یعنی احتمال قرار گرفتن سیستم در حالت خرابی ناشی از خرابی زیر سیستم i به دست می‌آیند.

۳.۳. تابع تقاضا

تقاضا تابعی از عوامل مختلفی مثل مشخصات محصول (قیمت، کیفیت، تبلیغات و...)، وضعیت رقابتی و مانند آن است. در بسیاری از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی در زمینه‌ی مدت ضمانت، با توجه به این‌که مدت ضمانت در نظر مشتریان نشان‌گر کیفیت است، عوامل اصلی تصمیم‌گیری مشتری را قیمت و دوره‌ی ضمانت در نظر می‌گیرند. گیلیکمن و برگر در سال ۱۹۷۶ تابعی از خانواده‌ی توابع کاب - داگلاس^۱ را به عنوان تابع تقاضا برحسب این دو متغیر پیشنهاد کردند. بر این اساس تابع تقاضای محصول k بر حسب مدت ضمانت (w_k) و قیمت (p_k) چنین خواهد بود:

$$q_k(w, p) = KI_k (KII_k + w_k)^{\alpha_k} p_k^{-\beta_k} \quad (4)$$

$$KI_k, KII_k > 0, 0 < \alpha_k < 1, \beta_k > 1, \forall k$$

که در آن KI_k و KII_k مقادیر ثابت و α_k و β_k نیز به ترتیب ضریب‌های کشش مدت ضمانت و کشش قیمت هستند. گرچه در تابع ۴ قابلیت اطمینان به‌صورت صریح بیان نشده است، اما مدت ضمانت تابعی از قابلیت اطمینان محصول است. در پیشینه‌ی مربوط به خانواده‌ی محصولات اصولاً فرض بر این است که هر مشتری فقط متقاضی یکی از محصولات است.

۴.۳. هزینه‌ی تولید و هزینه‌ی ضمانت هر واحد محصول

هزینه‌های مدل شامل هزینه‌ی تولید و هزینه‌ی ضمانت است. هزینه‌ی واحد تولید هر قطعه در این مدل ثابت در نظر گرفته می‌شود و هزینه‌ی تولید واحد محصول از جمع هزینه‌های تولید قطعات آن محصول، که در چیدمان آن مشخص شده است، به دست می‌آید. فرض می‌شود هزینه‌ی مونتاژ نهایی محصول در هزینه‌های تولید قطعات سرشکن شده است. پس:

$$CM_{ki} = \sum_{j \in CNF_k} C_{ij} \quad (5)$$

$$cm_k = \sum_{i=1}^n CM_{ki} \quad (6)$$

مدل کلی مسئله یک برنامه‌ریزی مختلط غیرخطی است؛ قیمت p متغیر پیوسته و مدت ضمانت w متغیر صحیح است. هدف مسئله بهینه‌سازی سود است. میزان سود کل محصولات از حاصل جمع تقاضای کل درآمد و کل هزینه‌ی هر محصول به دست می‌آید. درآمد هر محصول برابر با حاصل ضرب میزان فروش، که برابر تقاضا فرض می‌شود، در قیمت هر محصول است. هزینه‌ی هر محصول نیز شامل هزینه‌ی تولید و هزینه‌ی ضمانت است. مدل علاوه بر محدودیت‌های مربوط به معادلات تعادلی در زنجیره‌ی مارکوف دارای محدودیت بهینه و کمینه برای میزان تولید هر محصول و نیز کل محصولات است. مدل مسئله به شرح زیر است:

$$\max \Pi(p, w) = \sum_{k=1}^K KI_k (KII_k + W_k)^{\alpha_k} p_k^{-\beta_k} (p_k - cm_k - (\sum_{i=1}^n (NF_{ki}(cs_{ki} + cr_{ki}) + NR_{ki}cr_{ki}))) \quad (14)$$

s.t.

$$(-\gamma SU_k - \sum_{i=1}^n \lambda_{UF_{ki}} + \lambda_{UR_{ki}}) \pi_{Uk} + \gamma SU_k \pi_{Sk} = 0 \quad (15)$$

$$\lambda_{UF_{ki}} \pi_{Uk} - \mu_{F_{ki}S} \pi_{F_{ki}} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$\lambda_{UR_{ki}} \pi_{Uk} - \mu_{R_{ki}S} \pi_{R_{ki}} + \lambda_{sR_{ki}} \pi_{Sk} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$\pi_{Uk} + \sum_{i=1}^n \pi_{F_{ki}} + \sum_{i=1}^n \pi_{R_{ki}} + \pi_{Sk} = 1 \quad (18)$$

$$q_k = KI_k (KII_k + W_k)^{\alpha_k} p_k^{-\beta_k} \quad (19)$$

$$Lq_k \leq q_k \leq Uq_k \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^k q_k \leq M^0 \quad (21)$$

$$Lw_k \leq w_k \leq Uw_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (22)$$

$$Lp_k \leq p_k \leq Up_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (23)$$

$$P \in R^+, W \in N \quad (24)$$

که در آن $Lq_k, Uq_k, Lw_k, Uw_k, Lp_k, Up_k$ و Uw_k, Lw_k, Uq_k, Lq_k به ترتیب ظرفیت تولید، مدت ضمانت و قیمت محصول k هستند. رابطه‌ی ۱۴، تابع هدف سود ناشی از فروش تقاضای برآورد شده محصولات مختلف خانواده با منظور کردن هزینه‌های مورد انتظار تولید و تعمیرات ضمانت و روابط ۱۵-۱۸ معادلات تعادلی زنجیره‌ی مارکوف هستند. رابطه‌ی ۱۹ مقدار تقاضا برای هر محصول و ۲۰ حد بالا و پایین آن را نشان می‌دهد. رابطه‌ی ۲۱ ظرفیت مونتاژ کل محصولات را نشان می‌دهد. روابط ۲۲-۲۴ حدود متغیرها و نوع آنها را معین می‌کنند.

در تابع هدف تعداد شکست و خرابی زیر سیستم i از محصول k ، NF_{ki} و NR_{ki} ، برحسب این که شرکت کدام سیاست ضمانت را اتخاذ کند، براساس روابط مربوط به آن سیاست محاسبه خواهد شد. حدود بالا و پایین مدت ضمانت برای این مسئله براساس عرف بازار و سیاست‌های شرکت انجام می‌شود. یک حد پایین برای قیمت طبیعتاً جمع هزینه‌های تولید قطعات است. یک حد بالا برای قیمت با توجه به تابع تقاضا براساس حداقل ظرفیت تولید هر محصول قابل محاسبه است. اگر

میزان تقاضا از حداقل ظرفیت اقتصادی کمتر باشد، شرکت اصولاً تولید آن را انجام نمی‌دهد؛ پس می‌توان در رابطه‌ی ۱۹ این حد از تولید را برابر تقاضای محصول قرار داد و با قرار دادن حد پایین مدت ضمانت پیشینه‌ی قیمت را به دست آورد. بنابراین خواهیم داشت:

$$Up_k = \exp \left(\frac{\ln(Lq_k) - \ln(KI_k) - \alpha_k \ln(KII_k + LW_k)}{-\beta_k} \right) \quad (25)$$

۶.۳. بررسی ابعاد و شرایط بهینگی مسئله

مسئله دارای K متغیر عدد صحیح و K متغیر پیوسته است و تعداد $K(2i + 5)$ محدودیت خطی و K محدودیت غیرخطی دارد. بنابراین، یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی مختلط غیرخطی با ابعادی نه چندان بزرگ است.

بررسی شرایط بهینگی کل مدل مشکل است؛ اما بررسی تابع هدف امکان‌پذیر است. چون تابع هدف مجموع سود محصولات است، شرایط بهینگی و رفتار تابع سود یک محصول قابل تعمیم به کل تابع هدف خواهد بود. می‌توان نشان داد که اگر $0 < \alpha_k - \beta_k + 1$ ، که در دنیای واقعی معمولاً چنین است، آنگاه تابع هدف یک جواب یگانه و بهینه دارد. [۲۶] با توجه به این که محدودیت‌های مدل عمدتاً خطی هستند، انتظار کلی این است که مسئله به راحتی به یک جواب بهینه‌ی کلی برسد. بنابراین، حل آن توسط نرم‌افزارهای متداول موجود مانند GAMS بدون مشکل خاصی امکان‌پذیر خواهد بود.

۴. نتایج محاسباتی

مسئله‌ی تعیین قیمت و مدت زمان ضمانت بهینه برای محصولات یک خانواده از محصولات چیدمان‌پذیر در واقع از دو بخش تشکیل می‌شود. در بخش اول برای هر یک از محصولات براساس اطلاعات قطعات، دستگاه معادلات تعادلی مارکوف مربوط، روابط ۱۵-۱۸، را می‌توان حل کرد تا اطلاعات لازم برای بخش دوم که یک مسئله‌ی بهینه‌سازی است، به دست آید. هر دو بخش توسط نرم‌افزارهای معمول، از جمله GAMS یا MATLAB، قابل حل است. برای مسائل نه‌چندان بزرگ، می‌توان هر دو بخش را به صورت یک جا حل کرد. در این پژوهش با توجه به ابعاد مسئله از نرم‌افزار GAMS برای حل هر دو بخش در قالب یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مختلط غیرخطی، بر روی یک رایانه‌ی ASUS با پردازشگر $\text{compute cores } 3 \times 12 \text{ Hz}$ استفاده شده است.

۱.۴. مثال موردی

در این بخش یک مثال موردی برای یک شرکت که در حال تولید یک خانواده از لپ‌تاپ است، ارائه و حل می‌شود. متقاضیان لپ‌تاپ‌های تولیدی در چهار گروه ($K = 4$) قرار می‌گیرند، خانگی با کاربری‌های معمولی (محصول A)، اداری برای انجام کارهای دفتری و گاهی محاسباتی و پردازش تصویر متداول (محصول B)، کاربرانی که عملیات محاسباتی سنگین دارند (محصول C) و کاربران ویژه مانند بازیگران بازی‌های رایانه‌ی، (محصول D). بنابراین، باید با چیدمان مناسب از قطعات انتظارات آنها را پاسخ گفت. رفتار هر گروه از مصرف‌کنندگان نسبت به قیمت و مدت ضمانت متفاوت است. مشتریان محصولات خانگی نسبت به قیمت حساسیت زیادی دارند، کاربران بازی‌های رایانه‌ی کمترین حساسیت به قیمت را

جدول ۲. اطلاعات زیر سیستم‌ها و قطعات.

μ_{RS_i}	μ_{FS_i}	$\lambda_{UR_{ij}}$	$\lambda_{UF_{ij}}$	CM_{ij}	گزینه‌ها (i)	زیر سیستم (i)
۱۱۵	۵۰	۰٫۰۷	۰٫۱	۵۰	۱	I
		۰٫۰۵	۰٫۰۷۵	۹۰	۲	
۱۵۰	۷۰	۰٫۰۴	۰٫۰۴	۴۰	۱	II
		۰٫۰۳	۰٫۰۳۵	۶۰	۲	
		۰٫۰۲	۰٫۰۲۵	۹۰	۳	
۱۸۵	۱۰۰	۰٫۱۲	۰٫۱۵	۲۵	۱	III
		۰٫۰۸	۰٫۰۷۵	۴۵	۲	
۱۱۰	۴۰	۰٫۰۸	۰٫۱۲۵	۷۵	۱	IV
		۰٫۰۵	۰٫۰۷۵	۱۲۵	۲	
		۰٫۰۴	۰٫۰۶	۱۷۵	۳	
۱۹۰	۹۵	۰٫۰۸	۰٫۱۳	۱۰۰	۱	V
		۰٫۰۶	۰٫۱	۱۵۰	۲	
		۰٫۰۵	۰٫۰۸۵	۲۰۰	۳	

جدول ۳. اطلاعات محصولات برای سیاست ۱.

γ_{SU}	γ_{US}	cr	β	α	KI	CNF	محصول
۱۵۰	۱۰۰	۸	۱٫۶	۰٫۲۱	۱۵×۱۰^۹	{۱, ۱, ۱, ۱, ۱}	A
۱۸۰	۶۰	۱۰	۱٫۵	۰٫۲۳	$۸/۵ \times ۱۰^۹$	{۱, ۲, ۱, ۱, ۲}	B
۲۰۰	۳۰	۱۳	۱٫۶	۰٫۲۵	۷×۱۰^۹	{۲, ۲, ۲, ۲, ۲}	C
۲۰۰	۲۵	۱۷	۱٫۵	۰٫۲۳	۸×۱۰^۹	{۲, ۳, ۲, ۳, ۳}	D

یک خط مونتاژ مشترک وجود دارد. به طوری که حداکثر تعداد ۸۵۰۰۰۰۰ محصول قابل مونتاژ است.

بیشینه و کمینه قیمت بر اساس رابطه‌ی ۲۵ و با لحاظ ۱۰۰۰۰۰ برای کمینه‌ی تولید قابل قبول برای همه‌ی محصولات محاسبه و در حل مسئله در نظر گرفته شده است. حدود برای مدت ضمانت برابر ۱ و ۱۲ (بر حسب سه ماه) است. مسئله با داده‌های فوق برای هر دو سیاست ضمانت حل شده است.

سیاست ۱ - مدت ثابت - نتایج به دست آمده از حل مدل به وسیله نرم‌افزار GAMS وقتی شرکت سیاست ۱ را انتخاب کند، در جدول ۴ نشان داده شده است.

سیاست ۲ - ضمانت تجدید شونده - وقتی شرکت سیاست ۲ یا تجدیدشونده را اتخاذ می‌کند، رفتار مشتریان تغییر می‌یابد. زیرا آنها تلقی بهتری از کیفیت محصول خواهند داشت و احساس می‌کنند که هزینه‌های آنها کاهش خواهد یافت. بنابراین، کسش قیمت و مدت ضمانت نسبت به سیاست ۱ متفاوت خواهد بود. مقادیر جدید کسش قیمت و مدت ضمانت به شرح جدول ۵ برآورد شده است.

تابع هدف مسئله در این سیاست متناسب با روابط مربوط به این سیاست در مورد تعداد شکست‌ها و خرابی‌هایی که خدمات ضمانت دریافت می‌کنند، باید تغییر یابد. نتایج به دست آمده از حل مدل به وسیله نرم‌افزار GAMS وقتی شرکت

دارند و مشتریان اداری و محاسبات سنگین حساسیت متوسطی دارند. برای مدت ضمانت ترتیب حساسیت چنین است: مشتریان با محاسبات سنگین، اداری‌ها، کاربران بازی‌های رایانه‌یی و در نهایت مشتریان خانگی.

هر محصول دارای پنج جزء اصلی یا زیر سیستم ($n = 5$) شامل CPU (زیر سیستم I)، حافظه (زیر سیستم II)، زیرسیستم توان (زیر سیستم III)، برد اصلی (زیر سیستم IV) و نمایشگر (زیر سیستم V) که برای هر کدام به ترتیب تعداد ۲، ۳، ۲، ۳ و ۳ قطعات برای انتخاب وجود دارد. اطلاعات مربوط به قطعات در جدول ۲ نشان داده شده است. در ستون‌های ۴ و ۵ جدول ۲ نرخ‌های شکست و خرابی قطعات برای یک بازه‌ی سه ماهه نشان داده شده و بدین ترتیب واحد مدت ضمانت سه ماه است. همچنین به دلیل این که همه‌ی قطعات الکترونیکی هستند، نرخ خرابی آنها یکسان است و برابر $\lambda_{SR_{ij}} = 0/002, \forall i, j$ در هر سه ماه است. هزینه‌ی تعویض زیر سیستم‌ها برابر هزینه‌ی تولید آنها در نظر گرفته شده است.

جدول ۳ اطلاعات محصولات را نشان می‌دهد. مقدار ثابت KII برابر، $KII_k = 3,7k$ است. ضمناً مجموعه‌ی CNF گزینه‌های انتخاب شده برای هر محصول را نشان می‌دهد. در حال حاضر محدودیتی بر روی میزان تولید هر محصول وجود ندارد، اما محدودیت بر روی تولید کل محصولات به دلیل استفاده از

جدول ۴. نتایج حل مسئله با سیاست ۱.

محصول	قیمت	مدت ضمانت بر حسب سه ماه	مقدار تولید	احتمال در حال استفاده بودن	احتمال آماده به کار بودن	احتمال نیاز به خدمات ضمانت	سود هر محصول
A	۹۶۳,۲	۴	$۳/۷۹ \times ۱۰^۵$	۰,۵۹۴	۰,۴۰۰	۰,۰۰۷	$۲/۲۳ \times ۱۰^۸$
B	۱۵۸۳,۹	۷	$۲/۲۹ \times ۱۰^۵$	۰,۷۴۲	۰,۲۵۱	۰,۰۰۷	$۲/۳۶ \times ۱۰^۸$
C	۱۹۷۶,۵	۸	$۰/۹۹ \times ۱۰^۵$	۰,۸۶۲	۰,۱۳۲	۰,۰۰۶	$۱/۲۴ \times ۱۰^۸$
D	۲۷۶۹,۵	۱۰	$۰/۹۹ \times ۱۰^۵$	۰,۸۸۲	۰,۱۱۳	۰,۰۰۵	$۱/۷۹ \times ۱۰^۸$
جمع			$۸/۰۷ \times ۱۰^۵$				$۷/۶۲ \times ۱۰^۸$

ضمانت می‌شود. با توجه به این که قیمت و مدت ضمانت قبلاً اعلام شده است، سود مورد انتظار نیز تغییر خواهد کرد. برای تحلیل حساسیت در این مورد، نرخ انجام کار با مقادیر ۰,۷۵، ۰,۷۵، ۰,۷۵ و ۱,۲۵ و ۱,۷۵ برابر مقدار فعلی برای هر محصول در مدل وارد شده است، جدول ۷ درصد تغییر در سود محصولات را نشان می‌دهد. چنان که مشاهده می‌شود تغییرات نسبتاً زیاد در نرخ انجام کار تغییراتی در میزان سود ایجاد می‌کند، ولی درصد این تغییرات زیاد نیست. به عبارت دیگر جواب‌های بهینه‌ی به دست آمده در برابر این نوع تغییر استواری خوبی دارد.

۲.۲.۴. تحلیل حساسیت بر روی کشش قیمت β

با توجه به تأثیرات قابل توجهی که کشش قیمت بر تابع هدف و در نتیجه سایر متغیرها می‌گذارد، تحلیل حساسیت بر روی آن برای تصمیم‌گیری بینش خوبی ارائه می‌کند. برای به دست آوردن دامنه‌ی تغییرات β مقدارش را آن قدر تغییر می‌دهیم تا در یک سر آن مدت ضمانت یکی از محصولات به کف آن یعنی ۱ دوره برسد و در سر دیگر مدت ضمانت اغلب محصولات از سقف ۱۲ دوره بیشتر شود. با اجرای برنامه به ازای مقادیر مختلف β این دامنه از ۰,۹۴ تا ۱,۱۵ برابر β فعلی به دست می‌آید. در این بخش حد بالای مدت ضمانت در مسئله حذف می‌شود. نتایج به دست آمده در دامنه‌ی مورد نظر و تغییرات در مقدار تابع هدف و متغیرهای تصمیم، قیمت و مدت ضمانت، در جدول ۸ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود تغییر کم در کشش قیمت باعث تغییرات قابل توجه در مقادیر بهینه‌ی تابع هدف، قیمت و حتی مدت ضمانت می‌شود.

۳.۲.۴. تحلیل حساسیت بر روی کشش مدت ضمانت α

با توجه به اهمیتی که مدت ضمانت بر سیاست‌های شرکت دارد، بررسی تغییرات کشش مدت ضمانت بر تابع هدف و در نتیجه سایر متغیرها ضروری است. برای انجام تحلیل حساسیت بر روی α مقدار آن در دامنه‌ی تغییر داده می‌شود که در یک سر آن مدت ضمانت یک محصول به کف آن یعنی ۱ دوره برسد و در سر دیگر مدت ضمانت اغلب محصولات از سقف ۱۲ دوره بیشتر شود. با اجرای برنامه به ازای مقادیر مختلف α این دامنه از ۰,۷ تا ۱,۲ برابر α فعلی به دست می‌آید. در این

جدول ۵. اطلاعات محصولات برای سیاست ۲.

محصول	α	β
A	۰,۳۱	۱,۶۲
B	۰,۳۳	۱,۶
C	۰,۳۵	۱,۶۵
D	۰,۳۴	۱,۶

سیاست ۲ را انتخاب کند، در جدول ۶ نشان داده شده است. بدیهی است که مقادیر مربوط به احتمالات قرارگیری سیستم در حالات مختلف تغییر نمی‌کند. با این سیاست مقدار تابع هدف نسبت به سیاست ۱ به میزان زیادی کاهش پیدا می‌کند. مدت ضمانت بهینه برای محصولات کمتر از سیاست ۱ و قیمت‌ها به میزان زیادی بیشتر از آن هستند.

۲.۲.۴. تحلیل حساسیت

پارامترهای مختلفی در مسئله وجود دارند که در آینده ممکن است به طور تصادفی یا تحولات بازار تغییر کنند. بنابراین انجام تحلیل حساسیت برای آنها مفید است. در ادامه نتایج تحلیل حساسیت برای مهم‌ترین پارامترها ارائه می‌شود. با توجه به این که نتایج به دست آمده برای سیاست ۲ اعمال این سیاست را عملی نشان نمی‌دهد، در ادامه فرض بر عدم تغییر سیاست فعلی شرکت یعنی سیاست مدت ثابت است.

۱.۲.۴. تحلیل حساسیت بر روی متوسط تعداد تقاضای کار (γST)

تحلیل حساسیت معمولاً بر روی آن پارامترها و ضرایبی انجام می‌شود که در مورد آنها ابهام یا عدم اطمینان بیشتری وجود داشته باشد. یک پارامتر مهم که برآورد دقیق آن مشکل است، میزان استفاده‌ی هر گروه از مشتریان از محصول یا حجم کار است. به طور کلی وقتی حجم کار یک مشتری زیادتر از برآورد اولیه باشد، میزان هزینه، به دلیل افزایش خدمات ضمانت، بیشتر می‌شود؛ زیرا تغییر در حجم کار بر احتمال شکست و احتمال خرابی تأثیر می‌گذارد و تغییر این احتمالات موجب تغییر در هزینه‌ی

جدول ۶. نتایج حل مسئله با سیاست ۲.

محصول	قیمت	مدت ضمانت بر حسب سه ماه	مقدار تولید	احتمال در حال استفاده بودن	احتمال آماده به کار بودن	احتمال نیاز به خدمات ضمانت	سود هر محصول
A	۲۲۳۲,۲	۴	$۱/۰۳ \times ۱۰^۵$	۰,۵۹۴	۰,۴۰۰	۰,۰۰۷	$۱/۶۳ \times ۱۰^۸$
B	۳۰۷۲,۱	۵	$۰/۴۴ \times ۱۰^۵$	۰,۷۴۲	۰,۲۵۱	۰,۰۰۷	$۱/۰۳ \times ۱۰^۸$
C	۳۷۷۶,۷	۵	$۰/۱۸ \times ۱۰^۵$	۰,۸۶۲	۰,۱۳۲	۰,۰۰۶	$۰/۵۲ \times ۱۰^۸$
D	۵۳۵۹,۹	۶	$۰/۱۸ \times ۱۰^۵$	۰,۸۸۲	۰,۱۱۳	۰,۰۰۵	$۰/۵۴ \times ۱۰^۸$
جمع			$۱/۸۳ \times ۱۰^۵$				$۳/۷۳ \times ۱۰^۸$

جدول ۷. درصد تغییر در میزان سود محصولات بر اثر تغییر نرخ تقاضای کار.

محصول	$1/5 * \gamma_{SU}$	$1/25 * \gamma_{SU}$	$1/10 * \gamma_{SU}$	$1/75 * \gamma_{SU}$	$1/5 * \gamma_{SU}$
A	۱,۷	۰,۹	۰,۰	-۱,۱	-۲,۴
B	۱,۶	۰,۸	۰,۰	-۱,۱	-۲,۳
C	۱,۰	۰,۵	۰,۰	-۰,۶	-۱,۲
D	۰,۹	۰,۴	۰,۰	-۰,۵	-۱,۰

جدول ۸. نتایج تحلیل حساسیت بر روی β .

متغیر	محصول	$0/94 * \beta$	$0/97 * \beta$	$1 * \beta$	$1/05 * \beta$	$1/1 * \beta$	$1/15 * \beta$
قیمت	A	۱۱۸۵,۸	۱۰۶۶,۹	۹۶۳,۲	۸۴۹,۱	۷۵۴,۴	۶۷۴,۴
	B	۲۲۲۸,۳	۱۸۴۱,۸	۱۵۸۳,۹	۱۳۱۴,۷	۱۱۵۷,۵	۱۰۲۷,۸
	C	۲۶۹۶,۹	۲۲۶۶,۹	۱۹۷۶,۵	۱۶۶۸,۰	۱۴۱۶,۴	۱۲۶۸,۲
	D	۳۹۵۲,۷	۳۲۶۲,۱	۲۷۶۹,۵	۲۲۶۳,۱	۲۰۱۵,۳	۱۷۳۵,۱
مدت ضمانت	A	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	B	۱۲	۹	۷	۵	۴	۳
	C	۱۴	۱۰	۸	۶	۴	۳
	D	۱۷	۱۳	۱۰	۷	۶	۴
سود		$1/56 \times 10^9$	$1/10 \times 10^9$	$7/62 \times 10^8$	$4/45 \times 10^8$	$2/57 \times 10^8$	$1/50 \times 10^8$

جدول ۹. نتایج تحلیل حساسیت بر روی α .

متغیر	محصول	$0/7 * \alpha$	$0/8 * \alpha$	$0/9 * \alpha$	$1 * \alpha$	$1/1 * \alpha$	$1/2 * \alpha$
قیمت	A	۸۳۱,۰	۸۶۸,۸	۹۱۶,۵	۹۶۳,۲	۱۰۱۱,۹	۱۱۰۷,۴
	B	۱۲۸۶,۱	۱۳۶۸,۰	۱۴۳۹,۹	۱۵۸۳,۹	۱۷۲۷,۹	۱۹۴۳,۹
	C	۱۵۶۹,۴	۱۷۳۲,۰	۱۸۱۳,۵	۱۹۷۶,۵	۲۳۳۹,۵	۲۳۸۳,۹
	D	۲۱۶۶,۲	۲۳۸۱,۲	۲۶۷۵,۶	۲۷۶۹,۵	۳۰۶۰,۱	۳۳۵۱,۲
مدت ضمانت	A	۱	۲	۳	۴	۵	۷
	B	۳	۴	۵	۷	۹	۱۲
	C	۳	۵	۶	۸	۱۰	۱۳
	D	۴	۶	۸	۱۰	۱۳	۱۶
سود		$6/89 \times 10^8$	$7/08 \times 10^8$	$7/41 \times 10^8$	$7/62 \times 10^8$	$7/92 \times 10^8$	$8/73 \times 10^8$

کل تولیدات پرداخته می‌شود. چون محدودیت ظرفیت تولید در حال حاضر فعال نیست، کاهش آن تا حدود ۸۰۰۰۰۰ که مقدار بهینه‌ی ظرفیت تولید است، تغییری در متغیرها و مقادیر ایجاد نمی‌کند. چون فرمول‌بندی مسئله به گونه‌ی است که با کاهش ظرفیت تولید از ظرفیت بهینه‌ی فعلی مقادیر بهینه‌ی قیمت و ضمانت افزایش می‌یابند، کاهش ظرفیت تولید تا جایی بررسی می‌شود که قیمت‌ها حداکثر ۱/۲۵ برابر فعلی شوند. با روش سعی و خطا کمترین ظرفیت تولید برابر ۵۵۰۰۰۰ به دست می‌آید. نتایج محاسبات در شکل ۲ نشان داده شده است. بر اساس این جدول گرچه تغییرات در ترکیب محصولات به‌خصوص در حدود مقدار فعلی چندان زیاد نیست، سهم محصول A به مرور کم می‌شود و به سهم محصول C و D محصول

بخش حد بالای مدت ضمانت در مسئله حذف می‌شود. نتایج به دست آمده در دامنه‌ی مورد نظر و تغییرات در مقدار تابع هدف و متغیرهای تصمیم، قیمت و مدت ضمانت، در جدول ۹ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که میزان تغییر در مقادیر بهینه‌ی تابع هدف قیمت و حتی مدت ضمانت در اثر تغییر در کشش مدت ضمانت نسبت به قیمت خیلی کمتر، اما قابل توجه، است.

۴.۲.۴. تحلیل حساسیت بر روی ظرفیت تولید

به دلایل مختلفی ممکن است محدودیت منابع برای میزان کل تولیدات به وجود آید. در این قسمت به بررسی تأثیر تغییرات در ظرفیت تولید بر سهم هر محصول از

در قالب مدل برنامه‌ریزی مختلط غیرخطی ارائه کرده است. بررسی شرایط بهینگی نشان می‌دهد که تابع هدف با مفروضات منطبق با شرایط دنیای واقعی یک جواب بهینه‌ی یگانه دارد.

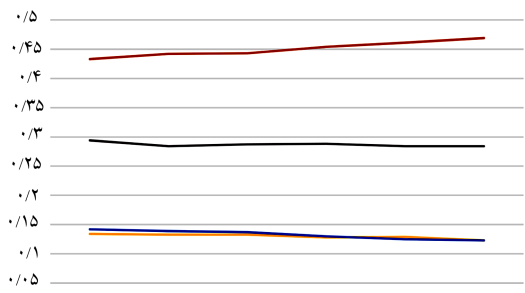
برای بررسی چگونگی رفتار مدل مثال‌های عددی حل و همچنین تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای اصلی انجام شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که مدل بیشترین حساسیت را نسبت به ضرایب کسش قیمت و مدت ضمانت دارد و حساسیت کمی نسبت به میزان استفاده دارد. همچنین سهم هر محصول از کل تولیدات با تغییر ظرفیت تغییر زیادی نمی‌کند. بنابراین، استواری جواب‌ها از این لحاظ خوب است.

این مطالعه می‌تواند به تولیدکنندگان کمک کند که در مرحله‌ی توسعه‌ی محصول، بهینه‌سازی متغیرهای اصلی یک محصول، مانند قابلیت اطمینان، قیمت و دوره‌ی ضمانت را هم‌زمان انجام دهند.

برای برپایی چنین مدلی تعیین حالات و نرخ‌های گذار آنها از اطلاعات بخش خدمات پس از فروش به دست می‌آید و هزینه‌های تولید و ضمانت اصولاً در دسترس هستند. البته دست‌یابی به تابع تقاضا نیاز به یک مطالعه‌ی میدانی و استفاده از روش رگرسیون دارد.

مدل ارائه شده در این مقاله از جنبه‌های مختلفی قابل گسترش است:

۱. آن‌جایی‌که با افزایش حجم تولید در اثر تولید به مقیاس بزرگ، هزینه‌های تولید واحد محصول کاهش می‌یابد، می‌توان این توسعه را در مدل انجام داد.
۲. در این مقاله دو سیاست ضمانت بررسی شدند. توسعه‌ی مدل می‌تواند برای سیاست‌های دیگری، مانند سیاست دوره‌ی ضمانت بر حسب مقدار کارکرد سیستم، یا تسهیم هزینه یا سیاست ترکیبی نیز صورت گیرد.
۳. می‌توان انتخاب چیدمان‌های یک محصول از بین چیدمان‌های مختلف را در مدل وارد کرد و مدل جامع‌تری را توسعه داد.



	۵۵۰۰۰۰	۶۰۰۰۰۰	۶۵۰۰۰۰	۷۰۰۰۰۰	۷۵۰۰۰۰	۸۰۰۰۰۰
محصول A	۰/۴۳۳	۰/۴۴۲	۰/۴۴۳	۰/۴۵۴	۰/۴۶۱	۰/۴۶۹
محصول B	۰/۲۹۴	۰/۲۸۴	۰/۲۸۷	۰/۲۸۸	۰/۲۸۴	۰/۲۸۴
محصول C	۰/۱۳۴	۰/۱۳۳	۰/۱۳۳	۰/۱۲۸	۰/۱۲۹	۰/۱۲۳
محصول D	۰/۱۴۲	۰/۱۳۹	۰/۱۳۷	۰/۱۳	۰/۱۲۵	۰/۱۲۳

شکل ۲. تغییرات در سهم محصولات در ظرفیت‌های مختلف تولیدی.

اضافه می‌شود. سهم محصول A بیشترین تغییر را دارد و سهم محصول B تقریباً ثابت می‌ماند.

۵. نتیجه‌گیری

گرچه اهمیت تعیین هم‌زمان قیمت و مدت ضمانت برای محصولات یک خانواده‌ی محصول اهمیت زیادی دارد، اما کمتر به آن توجه شده است. این مقاله برای اولین بار فرمول‌بندی تعیین دوره‌ی ضمانت و قیمت را برای محصولات یک خانواده‌ی محصول با به کارگیری زنجیره‌ی مارکوف برای یک محصول چند حالتی و چندقطعه‌ی

پانویس

1. Cbb-Douglas function

منابع (References)

1. Thomas, M.U. and Rao, S.S. "Warranty economic decision models: a summary and some suggested directions for future research", *Operations Research*, **47**(6), pp. 807-820 (1999).
2. Blischke, W.R. and Murthy, D.N.P. "Product warranty management - I: a taxonomy for warranty policies", *European Journal of Operational Research*, **62**(2), pp. 127-148 (1992).
3. Murthy, D.N.P. and Djameludin, I. "New product warranty: a literature review", *International Journal of Production Economics*, **2**(79), pp. 231-60 (2002).
4. Fitzsimmons, J.A., Panagiotis, K. and Debasish, N.M. "Design strategy and its interface with manufacturing and marketing: a conceptual framework", *Journal of Operations Management*, **10**(3), pp. 398-415 (1991).
5. Swink, M. and Song, M. "Effects of marketing-manufacturing integration on new product development time and competitive advantage", *Journal of Operations Management*, **25**(1), pp. 203-217 (2007).
6. Ernest, H., Wayne, D. and Carsten, R. "Sales, marketing, and research-and- development cooperation across new product development stages: implications for success", *Journal of Marketing*, **74**, pp. 80-92 (2010).
7. Park, W.Y., Ro, Y.K. and Kim, N. "Architectural innovation and the emergence of a dominant design: the effects of strategic sourcing on performance", *Research Policy*, **47**(6), pp. 326-341 (2018).
8. Raman, N. and Chhajed, D. "Simultaneous determination of product attributes and prices, and production processes in product-line design", *Journal of Operations Management*, **12**(3), pp. 187-204 (1995).
9. Lambert, D.M., Cooper, M.C. and Pagh, J.D. "Supply chain management implementation issues and research

- opportunities”, *The International Journal of Logistics Management*, **11**(1), pp. 1-17 (1998).
10. Michalek, J., Oben, C., Papalambros, P.Y. and et al. “Balancing marketing and manufacturing objectives in product line design”, *ASME Journal of Mechanical Design*, **128**(6), pp. 1196-1204 (2006).
 11. Fujita, K., Amaya, H. and Akai, H., “Mathematical model for simultaneous design of module communalization and supply chain configuration toward global product family”, *Journal of Intelligent Manufacturing*, **24**, pp. 991-1004 (2012).
 12. Yang, D., Jiao, R.J., Ji, Y. and et al. “Joint optimization for coordinated configuration of product families and supply chains by a leader-follower stackelberg game”, *European Journal of Operational Research*, **246**(1), pp. 263-280 (2015).
 13. Umpfenbach, L.W., Dalkiran, E., Chinnam, R.B. and et al. “Optimization of strategic planning processes for configurable products”, *Journal of the Operational Research Society*, (2017) DOI:org/10.1057/s41274-017-0287-3
 14. Taleizadeh, A.A, Pourrezaie K.P. and Moon, I. “Hybrid NSGA-II for an imperfect production system considering product quality and returns under two warranty policies”, *Applied Soft Computing*, **75**, pp. 333-348 (2019).
 15. Simpson, T.W. “Product platform design and customization: status and promise. artificial intelligence for engineering design”, *Analysis and Manufacturing*, **18**(1), pp. 3-20 (2004).
 16. Jiao, J. and Zhang, Y. “Product portfolio planning with customer-engineering interaction”, *IIE Transactions*, **37**(9), pp. 801-814 (2005).
 17. Jose, A. and Tollenaere, M.J. “Modular and platform methods for product family design: literature analysis”, *Journal of Intelligent Manufacturing*, **16**(3), pp. 371-390 (2005).
 18. Liu, Z., Wong, Y.S. and Lee, K.S “Modularity analysis and commonality design: a framework for the top-down platform and product family design”, *International Journal of Production Research*, **48**(12), pp. 3657-3680 (2010).
 19. Chowdhury, S., Messac, A. and Khire, R.A. “Comprehensive product platform planning (CP3) framework”, *Journal of Mechanical Design*, **133**(10), pp. 101004-1 - 101004-15 (2011).
 20. Broeke, M.V., Boute, R. and Samii, B. “Evaluation of product-platform decisions based on total supply chain costs”, *International Journal of Production Research*, **53**(18), pp. 5545-5563 (2015).
 21. Kim, S. and Moon, S.K. “Sustainable product family configuration based on a platform strategy”, *Journal of Engineering Design*, (2017) DOI:10.1080/09544828.2017.1393657
 22. Nakhai Kamalabadi, I. and Maihami, R. “Joint pricing and inventory control for deteriorating items with partial backlogging”, *International Journal of Industrial Engineering and Production Management*, **21**(4), pp. 167-177 (2011).
 23. Nakhai Kamalabadi, I. and Maihami, R. “Dynamic pricing and ordering policy for non-instantaneous deteriorating items”, *Advanced Materials Research*, **433-440**, pp. 6607-6615 (2012).
 24. Glickman, T.S. and Berger, P.D. “Optimal price and protection period decisions for a product under warranty”, *Management Science*, **22**(12), pp. 1381-139 (1976).
 25. Huang, H.Z., Liu, Z.J. and Murthy, D.N.P. “Optimal reliability, warranty and price for new products”, *IIE Transactions*, **39**(8), pp. 819-827 (2007).
 26. Manna, D.K. “Price warranty length decision with glickman-berger model”, *International Journal of Reliability and Safety*, **2**(3), pp. 221-233 (2008).
 27. Jeyakumar, K. and Robert, P.T. “Joint determination of price, warranty length and production quantity for new products under free renewal warranty policy”, *International Journal for Quality Research*, pp. 51-58 (2010).
 28. Menezes, M.A.J. “An approach for determination of warranty length”, *International Journal of Research in Marketing*, **9**, pp. 177-195 (1992).
 29. Xie, X. “Optimal pricing and two-dimensional warranty policies for a new product”, *International Journal of Production Research*, (2017) DOI: 10.1080/00207543.2017.135557
 30. Liu, Y., Liu, Z. and Wang, Y. “Customized warranty offering for configurable products”, *Reliability Engineering and System Safety*, **118**, pp. 1-7 (2013).
 31. Liu, B., Wu, J. and Xie, M. “Cost analysis for multi-component system with failure interaction under renewing free-replacement warranty”, *European Journal of Operational Research*, **243**(3), pp. 874-882 (2015).
 32. Ahmadi, R. “An optimal replacement policy for complex multi-component systems”, *International Journal of Production Research*, **54**(17), pp. 5303-5316 (2016).
 33. Moakedi, H., Seyedhosseini, M. and Shahanaghi, K. “A block-based inspection policy for a multi-component system subject to two failure modes with stochastic dependence”, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, **25**(2), pp. 314-339 (2019).