مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۹)
دوره‌ی ۱-۳۶، شماره‌ی ۲/۲، ص. ۷۷-۸۶

Original Article

مدل‌سازی مسئله‌ی مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی با کمبود ترکیبی و با در نظرگرفتن غربال‌گری تولید و محدودیت‌های احتمالی: الگوریتم‌های نقطه‌ی درونی و برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی

سیده ساناز میرخورسندی (کارشناسی ارشد)
سید حمیدرضا پسندیده * (دانشیار)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده‌ی فنی، دانشگاه خوارزمی

smkhorsandi@yahoo.com
shr_pasandideh@khu.ac.ir

در این نوشتار یک مدل مقدار تولید اقتصادی با توجه به شرایط دنیای واقعی توسعه داده شده است. کمبود در مدل به صورت ترکیبی و تولیدات نیز شامل محصولات کاملاً سالم و محصولات معیوب غیر قابل تعمیر که در زمره‌ی ضایعات قرار می‌گیرند، در نظرگرفته شده است. هزینه‌های مربوط به تقاضای پس‌افت به دو صورت ثابت و وابسته به زمان در نظر گرفته شده است. در مدل پیشنهادی طول دوره‌ی موجودی، طول دوره‌یی که موجودی مثبت است و نرخ تقاضای پس‌افت شده در دوره‌ی کمبود با هدف کمینه‌سازی هزینه‌ی کل موجودی تعیین شده است، به نحوی که تمام محدودیت‌های تصادفی و قطعی مدل برآورده شود. مدل چندمحصولی ارائه شده در قالب یک مسئله از نوع برنامه‌ریزی غیرخطی و تک‌هدفه است. بر این اساس از دو روش حل دقیق برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و الگوریتم نقطه‌ی درونی بهره گرفته شده است و در مجموع بیست مثال عددی توسط این دو روش حل شده است.

واژگان کلیدی: مقدار تولید اقتصادی، کمبود ترکیبی، ضایعات، الگوریتم نقطه‌ی درونی، برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی.

۱. مقدمه

یکی از سیاست‌های مهم در سیستم‌های کنترل موجودی به ویژه مدل‌های مقدار تولید اقتصادی (EPQ) [1] بازبینی و غربال‌گری کالای تولید شده به لحاظ کیفی است که اثر قابل توجهی بر مدیریت موجودی در سیستم‌های مقدار تولید اقتصادی، کاهش هزینه‌ها و افزایش اعتبار سیستم‌های تولیدی دارد. همه‌ی موارد فوق، اهمیت بازبینی تولیدات را از جنبه‌های مختلف در مدل‌های مقدار تولید اقتصادی نشان می‌دهد. به منظور تطبیق هرچه بیشتر مدل با دنیای واقعی و افزایش کارایی آن برخی مفروضات در مدل‌های کلاسیک را نقض کرده و مدل با وجود کمبود در نظر گرفته شده است. با توجه به این‌که رخداد کمبود یکی از مهم‌ترین مسائلی است که در شرایط واقعی در سیستم‌های تولیدی واقع می‌شود و به تبع آن تصمیم‌گیری در مورد مدت زمان کمبود در این شرایط بسیار حائز اهمیت است، در مدل ارائه شده کمبود به صورت ترکیبی از تقاضای پس‌افت شده و فروش از دست رفته در نظر گرفته شده است که بر کاهش هزینه‌ی کل موجودی تأثیر به سزایی دارد. همچنین با توجه به این‌که فرض سالم بودن کلیه‌ی محصولات تولیدی با شرایط واقعی ناسازگار است، تولید کالای معیوب نیز در میان محصولات تولید شده امری اجتناب‌ناپذیر است. از آن‌جا که اغلب در دنیای واقعی میزان منابع در دسترس به طور قطعی معین و مشخص نیست، به منظورکاربردی‌تر ساختن مدل و نزدیک‌تر ساختن آن به واقعیت، منابع در نظرگرفته شده در محدودیت‌هایی که بر مدل اعمال شده، به صورت احتمالی لحاظ شده‌اند که بسیار حائز اهمیت است. با بهره‌گیری از تمامی موارد فوق که هریک نقش مهمی در جهت بهبود و افزایش کارایی مدل دارند و با هدف تعیین مقدار بهینه‌ی نرخ تقاضای پس‌افت، طول دوره‌ی موجودی و طول دوره‌یی که در آن موجودی مثبت است، هزینه‌های کل موجودی کمینه شده است. تعدادی از مقالات ارائه شده در این حوزه از مدل‌های کنترل موجودی در ادامه فهرست شده است.

تینگ و همکاران[1] در سال ۲۰۱۱ یک مدل مقدار تولید اقتصادی را ارائه کردند که در آن ضایعات، از کار افتادگی تصادفی تجهیزات تولید که در دوره‌ی بازپرسازی پس‌افت رخ می‌دهد، در نظرگرفته شده است و در این مدل اندازه انباشت بهینه تعیین می‌شود. همچنین نرخ ضایعات در این مطالعه به صورت تصادفی در نظر

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۷/۱، اصلاحیه ۱۳۹۹/۱/۲۰، پذیرش ۱۳۹۹/۲/۳۱ .
DOI:10.24200/J65.2020.54273.2044

گرفته شده است. هدف از ارائه‌ی این مدل کمینه‌سازی متوسط هزینه‌های حین اجرا برای یک سیستم ناقص است.

گلاک و جابر[۲] در سال ۲۰۱۳ یک مدل برای سیستم موجودی ـ تولید چندمرحله‌یی توسعه دادند که بر اساس یک عملکرد کلی از چهار شاخص جزئی که مبتنی بر زمان تولید، بازده فرایند، موجودی در فرایند و تکرار حمل و نقل است بهینه شده است. هریک از این شاخص‌های اجرای جزئی، توسط تصمیم‌گیرنده‌ی سیستم مطابق با اهمیت آن وزن‌دهی شده است. طالعی‌زاده و همکاران[۳] در سال ۲۰۱۴ یک مدل کنترل موجودی را، که یک مدل مقدار تولید اقتصادی است توسعه دادند و در آن وقفه در تولید، دوباره‌کاری و ضایعات را مد نظر قرار داده‌اند. سرکار و همکاران[۴] در سال ۲۰۱۴ به توسعه‌ی یک مدل کنترل موجودی پرداخته‌اند؛ در مدل پیشنهادی آنها سیستم تولید به صورت تک‌مرحله‌یی بوده و کمبود در آن برنامه‌ریزی شده است. همچنین در این مدل دوباره‌کاری در سیستم و ضایعات در نظر گرفته شده است؛ میزان ضایعات در این مدل به صورت تصادفی است. تینگ و چانگ[۵] در سال ۲۰۱۴ یک مدل مقدار تولید اقتصادی با ضایعات، دوباره‌کاری و خرابی تصادفی ماشین را مورد بررسی قرار دادند. هدف اصلی در این مدل پیشنهادی دوگانه است. این مطالعه روش‌های بسیار دقیق ریاضی را برای تعیین هزینه‌ی کل مورد انتظار در هر واحد زمانی که روی تمام اعداد مثبت محدب است به منظور بهبود و اصلاح تحدب در قضیه‌ی ۱ (قضیه‌ی پاداش ـ تجدید، شاخه‌یی از نظریه‌ی احتمال است که فرایندهای پوآسون را به زمان‌های نگهداری اختیاری عمومیت می‌دهد و از جمله کاربردهای آن، جستجوی زمان اجرای بهینه است) موجود در مدلی که توسط چیو و همکاران[۶] در سال ۲۰۱۰ ارائه شد، به کار برده است. وو و سونگ[۷] در سال ۲۰۱۴ یک مدل مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی را با ضایعات بهینه‌سازی کردند و همچنین یک سیاست بهبودیافته‌ی چندتحویلی برای مدل در نظر گرفتند. هدف این مطالعه، تعیین زمان چرخه‌ی تولید بهینه است که هزینه‌ی متوسط سیستم در اجرا را در واحد زمان کمینه می‌کند و اثرات نرخ تصادفی ضایعات و سیاست تحویل بهبودیافته در زمان چرخه‌ی تولید بهینه را مشخص می‌کند.

چیو و همکاران[۸] در سال ۲۰۱۴ مدل پیشنهادی‌شان در سال ۲۰۱۳ را[۹] توسعه دادند، که این مدل ترکیبی از سیاست بهبودیافته‌ی چندتحویلی به یک سیستم موجودی یک‌پارچه‌ی چندخرده فروش با یک تولیدکننده همراه با ضایعات در تولید است. سیواشنکاری و پاناایاپان[۱۰] در سال ۲۰۱۴ یک مدل موجودی تولید را توسعه دادند که در آن با طرح پس‌افت، مقدار بهینه برای یک محصول واحد که در یک سیستم تولید تک‌مرحله‌یی تولید شده، تعیین می‌شود. همچنین فرض شده است که این سیستم تولیدی کالاهای با کیفیت ناقص‌تولید می‌کند، به طوری که نسبتی از کالاهای معیوب در همان چرخه دوباره‌کاری می‌شود. هدف در این مدل کمینه ساختن هزینه‌ی کل است. چیو و همکاران[۱۱] در سال ۲۰۱۵ مدلی ارائه کردند که در آن از محاسبات دیفرانسیل برای تعیین زمان چرخه‌ی تولید مشترک استفاده شده است. به طوری که کل تولید، موجودی و هزینه‌های تحویل برای یک مدل مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی با ضایعات، دوباره‌کاری و تحویل چندگانه کمینه می‌شود. اکبرزاده و همکاران[۱۲] در سال ۲۰۱۶ یک مدل مقدار تولید اقتصادی را با دوباره‌کاری ناقص کالاهای تولید شده با کیفیت ناسالم ارائه دادند و در آن، هزینه‌های کل سیستم موجودی را محاسبه کردند.

در این نوشتار، مدل ارائه شده توسط خلیل‌پور و همکاران[۱۳] که یک مدل مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی با تقاضای پس‌افت جزئی است توسعه داده شده است؛ این مدل در ادامه و توسعه‌یافته‌ی مدل پیشنهادی‌قبلی‌شان[۱۴] بوده است. چیو و همکاران[۱۵] در سال ۲۰۱۷ رویکردی جایگزین برای بهینه‌سازی یک مدل مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی با ضایعات و یک سیاست چندتحویلی پیشرفته ارائه کردند. نظر به این که «استفاده از محاسبات دیفرانسیل روی تابع هزینه‌ی سیستم» روشی مرسوم برای به دست آوردن زمان چرخه‌ی تولید بهینه است، آنها یک روش جبری بدون استفاده از حساب دیفرانسیل ارائه کردند. طالعی‌زاده و همکاران[۱۶] در سال ۲۰۱۷ یک مدل مقدار تولید اقتصادی با کالاهای ناقص و تقاضای عقب مانده ارائه کردند. در سیستم تولیدی پیشنهادی، کسری از کالاها پس از غربال‌گری کل تولید به عنوان کالاهای ناقص شناسایی می‌شود که در خارج از محل تولید دوباره‌کاری شده و سپس به موجودی اضافه می‌شود. یوآن شای و همکاران[۱۷] در سال ۲۰۱۸ یک سیستم موجودی مبنی بر مقدار تولید اقتصادی با ضایعات تصادفی و میزان تولید قابل تنظیم را با هدف افزایش ظرفیت به منظور ساده‌تر کردن برنامه‌ریزی تولید و مقابله با وجود ضایعات تصادفی در فرایندهای تولید واقعی مورد بررسی قرار دادند. آنها ثابت کردند که تابع هزینه‌ی مورد انتظار مدل پیشنهادی یک تابع محدب است. فکری[۱۸] در سال ۲۰۱۹ یک مدل مقدار تولید اقتصادی، شامل ضایعات و دوباره‌کاری موارد معیوب ارائه کرد، که زمان راه‌اندازی و خرابی ماشین تحت فرضیه‌ی اثر یادگیری است. مسئله‌ی پیشنهادی بر اساس یک تابع هزینه‌ی موجودی تعمیم یافته است. نوبیل و همکاران[۱۹] در سال ۲۰۱۹ یک مسئله‌ی مقدار تولید اقتصادی را برای یک سیستم تولیدی ناقص با زمان راه‌اندازی غیرصفر برای کالاهای با قابلیت دوباره‌کاری معرفی کردند. هدف از مسئله‌ی ارائه شده، به دست آوردن زمان تولید بهینه، کمبود بهینه در هر دوره و کمینه‌سازی هزینه‌ی کل سیستم موجودی است. در نوشتار حاضر، به منظورکاربردی‌تر ساختن و نزدیک‌تر کردن هر چه بیشتر مدل پیشنهادی با سیستم‌های تولیدی واقعی علاوه بر درنظر گرفتن وجود ضایعات و خلاف آثار ارائه شده توسط محققین، چندین محدودیت تصادفی و قطعی نیز بر مدل اعمال شده است. با توجه به شرایط دنیای واقعی که اغلب اطمینان کامل از میزان منابع در دسترس همچون فضای ذخیره‌سازی و بودجه‌ی در دسترس به طور قطعی و حتمی وجود ندارد، به منظور ارائه‌ی واقع‌گرایانه‌تر مدل، محدودیت‌های مربوط به فضای ذخیره سازی و بودجه به صورت احتمالی در نظر گرفته شده و به تبع احتمالی بودن میزان بودجه‌ی در دسترس محدودیت‌های مربوط به هزینه‌ی نگهداری، هزینه‌ی فروش از دست رفته، هزینه‌های پس‌افت ثابت و وابسته به زمان نیز به صورت احتمالی در نظر گرفته شده است. همچنین با توجه به وجود ضایعات به همراه کالاهای تمام شده در طی تولید، همواره نیازمند فرایند غربال‌گری و جداسازی ضایعات از کالاهای سالم بوده و بنابراین می‌بایست هزینه‌ی مربوط به غربال‌گری تولید و هزینه‌ی دفع ضایعات از سیستم تولیدی را نیز به عنوان هزینه‌های وارد شده به سیستم در نظر گرفت. از این رو محدودیت‌های مربوط به هزینه‌های غربال‌گری تولید و دفع ضایعات نیز به صورت تصادفی بر مدل اعمال شده‌اند. در نوشتار حاضر برای مقابله با عدم قطعیت موجود در منابع در دسترس و تصادفی بودن محدودیت‌ها از رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی استفاده شده است. همچنین متوسط زمان کمبود برای تمامی تولیدات محدود شده است و در نتیجه، درجه‌ی اعتبار سیستم تولیدی و میزان رضایت‌مندی مشتری از آن نیز افزایش می‌یابد. در راستای بهینه‌سازی کاهش هزینه‌های کل سیستم تولیدی (هدف مدل ارائه شده)، مقدار بهینه‌ی طول چرخه‌ی موجودی، طول چرخه‌ی موجودی مثبت و نرخ تقاضای پس‌افت تعیین می‌شود به گونه‌یی که کلیه‌ی محدودیت‌ها نیز بر قرار باشند. تابع هدف هزینه‌ی کل موجودی شامل هزینه‌های مربوط به نصب و راه اندازی، نگهداری، فروش از دست رفته، پس‌افت ثابت و

پس‌افت وابسته به زمان، غربال‌گری تولید و دفع ضایعات است. با توجه به آن‌که مدل ارائه شده از نوع برنامه‌ریزی غیرخطی است، به منظور حل مدل از دو روش حل دقیق برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و الگوریتم نقطه‌ی درونی استفاده شده است.

به طور خلاصه می‌توان نوآوری‌های این نوشتار را نسبت به کارهای مشابه انجام شده، علاوه بر آنچه که در مطالب بالا بدان اشاره شد، چنین بیان کرد:

- طراحی یک مدل تک‌هدفه‌ی مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی همراه با ضایعات و غربال‌گری تولید و با کمبود ترکیبی و محدودیت‌های تصادفی و قطعی؛
- به کارگیری روش‌های دقیق برای حل مدل پیشنهادی به نام‌های روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و روش نقطه‌ی درونی؛
- بررسی کارایی و مقایسه‌ی دو روش مورد استفاده، به شکل آماری با استفاده از آزمون‌های توکی و تاپسیس.

در بخش دوم از این نوشتار به تعریف مسئله و مفروضات آن پرداخته شده و در بخش سوم ضمن معرفی اندیس‌ها و پارامترها و متغیرهای تصمیم مسئله، مدل ریاضی مسئله ارائه شده است. در بخش چهارم روش‌های مورد استفاده برای حل مدل توضیح داده شده است و در بخش پنجم، مثال‌های عددی با استفاده از روش‌های حل ذکر شده ارائه شده است. در بخش ششم عملکرد این روش‌ها با استفاده از آزمون‌های تاپسیس و توکی مورد ارزیابی قرارگرفته است. در نهایت در بخش هفتم نیز نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲. تعریف مسئله و مفروضات

مسئله‌ی مورد بررسی در نوشتار حاضر یک مدل مقدار تولید اقتصادی چندمحصولی را با هدف کمینه‌سازی هزینه‌ی کل موجودی ارائه کرده است. در مدل‌های کلاسیک مقدار تولید اقتصادی، هیچ محدودیتی به مدل اعمال نشده و کمبود مجاز نیست؛ در واقع کلیه‌ی شرایط ثابت، معین و به صورت قطعی است که با شرایط حاضر در دنیای واقعی فاصله داشته است. بنابراین به منظور افزایش کارایی و تطبیق بیشتر مدل با شرایط کنونی، کمبود مجاز و به صورت ترکیبی از فروش از دست رفته و تقاضای پس‌افت شده در نظر گرفته شده است. همچنین فرض سلامت کامل محصولات تولیدی که اغلب با شرایط حاضر در دنیای واقعی در تضاد است، نقض شده است. با این تفاوت که در این مدل بر خلاف بیشینه آثار ارائه شده توسط محققین که یک سیستم تولیدی را با سه دسته‌بندی از کالاهای سالم و معیوب و ضایعات در نظر می‌گیرند، در این نوشتار کالای معیوب نیز همان ضایعات در نظر گرفته شده است، به گونه‌یی که این دسته از کالاهای معیوب قابلیت تعمیر مجدد یا دوباره‌کاری را ندارند و باید در رده‌ی ضایعات قرار بگیرند. تعدادی محدودیت نیز بر مدل اعمال شده است که با توجه به این‌که میزان منابع در دسترس همچون فضای مورد نیاز انبار و بودجه‌ی در اختیار به صورت دقیق و قطعی مشخص نیست، محدودیت مربوط به فضای مورد نیاز برای ذخیره‌سازی تولیدات و محدودیت میزان بودجه‌ی در دسترس و به تبع آن محدودیت هزینه‌ی نگهداری، محدودیت فروش از دست رفته، محدودیت تقاضاهای پس‌افت، محدودیت میزان هزینه‌ی غربال‌گری تولید و محدودیت میزان هزینه‌ی دفع ضایعات به صورت تصادفی در نظرگرفته شده‌اند. با هدف کمینه‌سازی کل هزینه‌ی موجودی، مقادیر بهینه‌ی طول چرخه‌ی موجودی، طول چرخه‌یی که در آن موجودی مثبت است و نرخ تقاضای پس‌افت تعیین می‌شود، به طوری که تمام محدودیت‌های اعمال شده بر مدل نیز برقرار است. مفروضات در نظرگرفته شده در این مدل عبارت‌اند از:

- کمبود در این مدل مجاز است و تقاضا با نرخ خاصی پس‌افت و یا فروش از دست رفته می‌شود.
- چرخه‌ی تولید برای هر محصول مختص به همان محصول است.
- مجموع دفعات تولید برای کل محصولات در یک سال محدود است.
- مقدار متوسط زمان کمبود برای کل محصولات محدود است.
- بودجه‌ی در دسترس به علت این‌که معلوم و مشخص نیست احتمالی در نظر گرفته شده است.
- هزینه‌های اختصاص داده شده برای نگهداری کالا، پس‌افت و فروش از دست رفته، غربال‌گری تولید و دفع ضایعات به صورت احتمالی در نظرگرفته شده است.
- تمام محصولات فقط در یک انبار واحد نگهداری می‌شوند.
- فرایند تولید و غربال‌گری در هر چرخه هم‌زمان انجام می‌پذیرد.
- در پایان فرایند غربال‌گری، ضایعات حاصل از سیستم تولیدی دفع می‌شود.

۳. مدل‌سازی

چنان که گفته شد در مسئله‌ی مورد بررسی با هدف تعیین مقدار بهینه‌ی طول چرخه‌ی موجودی، طول چرخه‌ی موجودی مثبت و نرخ تقاضای پس‌افت شده و برقراری کلیه‌ی محدودیت‌های اعمال شده بر مدل، هزینه‌ی کل سیستم تولیدی کمینه شده است. مدل بررسی شده در این نوشتار مبتنی بر مدلی است که توسط خلیل پور و همکاران[۱۳ و ۱۴] ارائه شده است. به منظور توسعه‌ی مدل، از برخی نمادهای جدید ـ علاوه بر نمادهای مورد استفاده در مدل پایه ـ در فرمول‌بندی ریاضی مسئله استفاده شده که در ادامه معرفی می‌شود.

۱.۳. نمادها

۱.۱.۳. اندیس‌ها

i: شمارنده‌ی مربوط به نوع محصولات

۲.۱.۳. پارامترها

D_i: نرخ تقاضای سالانه‌ی محصول i؛

P_i: نرخ تولید سالانه‌ی محصول i؛

h_i: هزینه‌ی نگهداری سالانه‌ی محصول i؛

k_i: هزینه‌ی نصب و راه‌اندازی سالانه‌ی محصول i؛

b_i: هزینه‌ی متغیر تقاضای پس‌افت شده مربوط به هر واحد از محصول i (سالانه)؛

bf_i: هزینه‌ی ثابت تقاضای پس‌افت شده مربوط به هر واحد از محصول i؛

π_i: هزینه‌ی کمبود فروش از دست رفته مربوط به هر واحد از محصول i؛

γ_i: درصدی از تولید که جزء ضایعات محسوب می‌شود؛

S_i: هزینه‌ی غربال‌گری هر واحد از محصولات؛

d_i: هزینه‌ی دفع هر واحد از ضایعات؛

O_i: فضای مورد نیاز برای نگهداری یک واحد از محصول i در انبار؛

$MAHC$: بیشترین هزینه‌ی مجاز مربوط به کل هزینه‌ی نگهداری؛

$MALSC$: بیشترین هزینه‌ی مجاز مربوط به کل هزینه‌های فروش از دست رفته؛

$MABC$: بیشترین هزینه‌ی مجاز مربوط به کل هزینه‌های پس‌افت؛

$screening$: بیشترین هزینه‌ی غربال‌گری برای تمام محصولات؛

$disposal$: بیشترین هزینه‌ی مربوط به دفع کل ضایعات؛

$Budget$: کل بودجه‌ی در دسترس؛

Cap: بیشترین فضای مجاز برای ذخیره‌ی موجودی در انبار؛

nc: بیشترین مجموع تعداد چرخه‌های تولیدی برای کلیه‌ی محصولات در سال؛

a: بیشترین مقدار متوسط زمان کمبود برای کلیه‌ی محصولات؛

n: تعداد انواع محصولات تولیدی.

۳.۱.۳. متغیرهای تصمیم

T_i: طول دوره‌ی موجودی محصول i؛

th_i: طول دوره‌ی موجودی مثبت برای محصول i؛

β_i: نرخ تقاضای پس‌افت شده از محصول i در طول دوره‌ی کمبود.

۲.۳. تابع هزینه‌ی کل موجودی

با توجه به مفروضات ارائه شده، کل هزینه‌های موجودی تعیین می‌شود و با توجه به این که تابع هدف در این مدل ریاضی، به دنبال کمینه‌سازی کل هزینه‌های سیستم مقدار تولید اقتصادی است، تابع هزینه‌ی موجودی در معادله‌ی ۱ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} Minz &= \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{T_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{h_iD_i\left(P_i-\gamma_iP_i-D_i\right)T_i\left(\frac{th_i}{T_i}\right)^2}{2\left(P_i-\gamma_iP_i\right)} \\ &+\sum_{i=1}^{n}\pi_i\left(1-\beta_i\right)D_i\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right) \\ &+\sum_{i=1}^{n}\frac{bf_i\beta_iD_i\left(P_i-\gamma_iP_i-\beta_iD_i\right)\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)}{\left(P_i-\gamma_iP_i\right)} \\ &+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\beta_iD_i\left(P_i-\gamma_iP_i-\beta_iD_i\right)T_i\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)^2}{2\left(P_i-\gamma_iP_i\right)} \\ &+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_iP_i}{T_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i\gamma_iP_i}{T_i} \end{aligned} \tag{1}$$

تابع هدف ارائه شده در رابطه‌ی ۱ از مجموع هفت هزینه به دست آمده است که هزینه‌ی نصب و راه اندازی مربوط به جمله‌ی اول، هزینه‌ی نگهداری موجودی مربوط به دومین جمله از هزینه‌ها، هزینه‌ی فروش از دست رفته مربوط به جمله‌ی سوم، جمله‌ی چهارم مربوط به هزینه‌ی پس‌افت ثابت، جمله‌ی پنجم مربوط به هزینه‌ی پس‌افت وابسته به زمان، جمله‌ی ششم نیز مربوط به هزینه‌ی غربال‌گری تولید و در نهایت جمله‌ی هفتم مختص هزینه‌ی دفع ضایعات است.

محدودیت‌ها:

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{h_iD_i\left(P_i-\gamma_iP_i-D_i\right)T_i\left(\frac{th_i}{T_i}\right)^2}{2\left(P_i-\gamma_iP_i\right)}\leq MAHC\right\}\geq\alpha_1 \tag{2}$$

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^{n}\pi_i\left(1-\beta_i\right)D_i\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)\leq MALSC\right\}\geq\alpha_2 \tag{3}$$

$$Prob\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{bf_i\beta_iD_i(P_i-\gamma_iP_i-\beta_iD_i)\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)}{(P_i-\gamma_iP_i)}\\&+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\beta_iD_i(P_i-\gamma_iP_i-\beta_iD_i)T_i\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)^2}{2(P_i-\gamma_iP_i)}\leq MABC\end{aligned}\right\}\geq\alpha_3 \tag{4}$$

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_iD_i\left(T_i-th_i\right)+D_ith_i\right)\times\pi_i\leq Budget\right\}\geq\alpha_4 \tag{5}$$

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i\left(P_i-\gamma_iP_i-D_i\right)th_i}{\left(P_i-\gamma_iP_i\right)}\times o_i\leq Cap\right\}\geq\alpha_5 \tag{6}$$

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{s_iP_i}{T_i}\leq screening\right\}\geq\alpha_6 \tag{7}$$

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i\gamma_iP_i}{T_i}\leq disposal\right\}\geq\alpha_7 \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}\leq nc \tag{9}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_i-th_i\right)}{n}\leq a \tag{10}$$

$$th_i\leq T_i\forall i \tag{11}$$

$$0\leq\beta_i\leq 1\forall i \tag{12}$$

$$th_i,T_i\geq 0\forall i \tag{13}$$

محدودیت تصادفی ۲ تا ۵، ۷ و ۸ هر یک به ترتیب تضمین می‌کنند که کل هزینه‌های مربوط به نگهداری محصولات، کل هزینه‌های مربوط به فروش از دست رفته، کل هزینه‌های مربوط به پس‌افت، کل بودجه‌ی در دسترس، کل هزینه‌ی غربال‌گری تولید و کل هزینه‌ی دفع ضایعات از بیشترین مقدار بودجه‌ی مربوطه‌شان تجاوز نکند. محدودیت تصادفی ۶ نیز تضمین می‌کند که کل فضای مورد نیاز برای ذخیره‌ی موجود از بیشترین مقدار فضای مجاز مربوطه بیشتر نشود. این مقادیر از یک توزیع نرمال با میانگین μ مربوطه و واریانس σ^2 مربوطه پیروی می‌کنند. محدودیت‌های تصادفی ۲ تا ۸ با بهره‌گیری از رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی به ترتیب به صورت روابط ۱۴ تا ۲۰ بازنویسی شده است. در تمام این روابط Z_a مربوطه بالاترین نقطه‌ی درصدی a مربوطه از توزیع نرمال استاندارد است.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{h_iD_i\left(P_i-\gamma_iP_i-D_i\right)T_i\left(\frac{th_i}{T_i}\right)^2}{2\left(P_i-\gamma_iP_i\right)}\right)+Z_{\alpha_1}\sigma_{MAHC}\leq\mu_{MAHC} \tag{14}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i\left(1-\beta_i\right)D_i\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)\right)+Z_{\alpha_2}\sigma_{MALSC}\leq\mu_{MALSC} \tag{15}$$

$$\left(\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{bf_i\beta_iD_i(P_i-\gamma_iP_i-\beta_iD_i)\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)}{(P_i-\gamma_iP_i)}\\&+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\beta_iD_i(P_i-\gamma_iP_i-\beta_iD_i)T_i\left(1-\frac{th_i}{T_i}\right)^2}{2(P_i-\gamma_iP_i)}\end{aligned}\right)+Z_{\alpha_3}\sigma_{MABC}\leq\mu_{MABC} \tag{16}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i D_i\left(T_i - th_i\right) + D_i th_i\right)\times \pi_i\right)$$
$$+Z_{\alpha_4}\sigma_{Budget} \le \mu_{Budget} \qquad (۱۷)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i\left(P_i-\gamma_i P_i - D_i\right)th_i}{\left(P_i-\gamma_i P_i\right)}\times o_i\right) + Z_{\alpha_5}\sigma_{Cap} \le \mu_{Cap} \qquad (۱۸)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i P_i}{T_i}\right) + Z_{\alpha_6}\sigma_{screening} \le \mu_{screening} \qquad (۱۹)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i\gamma_i P_i}{T_i}\right) + Z_{\alpha_7}\sigma_{disposal} \le \mu_{disposal} \qquad (۲۰)$$

محدودیت معرفی شده در رابطه‌ی ۹ تضمین می‌کند که مجموع دفعات تولید برای کل محصولات، طی یک سال از یک میزان مشخص و معلوم تجاوز نکند. محدودیت معرفی شده در رابطه‌ی ۱۰ نشان‌دهنده‌ی آن است که مقدار متوسط زمان کمبود برای کلیه‌ی محصولات محدود است. محدودیت‌های مربوط به روابط ۱۱ تا ۱۳ نیز تعیین‌کننده‌ی مقادیر ممکن برای متغیرهای تصمیم‌گیری در مدل پیشنهادی هستند.

۴. روش‌های حل

به منظور حل مدل ریاضی پیشنهادی، از الگوریتم نقطه‌ی درونی و روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی استفاده شده که در ادامه توضیح داده شده است.

۱.۴. برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی[۲]

برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی یکی از جدیدترین و شاید یکی از بهترین روش‌های بهینه‌سازیِ توسعه‌یافته است. این روش شیوه‌یی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با نرخ همگرایی فوق خطی است.[۲۰] این روش همچنین یک الگوریتم قدرتمند برای حل مسائل مرتبط با تکنولوژی و فنّاوری در مقیاس بزرگ است. به طور کلی برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی یک الگوریتم تکرارشونده است و در هر تکرار مسئله را به صورت یک زیرمسئله‌ی درجه دو فرموله کرده و آن را حل می‌کند. سپس از جواب به دست آمده برای ایجاد یک نقطه‌ی جدید و تکرار جدید استفاده می‌کند.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم زیر را در نظر بگیرید. مقدار X طوری تعیین می‌شود که:

$$MinQ = \nabla f^T \Delta X + \frac{1}{2}\Delta X^T\left[\nabla^2 L\right]\Delta X \qquad (۲۱)$$

محدودیت‌ها:

$$g_j + \nabla g_j^T \Delta X \le 0 \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad (۲۲)$$

$$h_k + \nabla h_k^T \Delta X = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,p \qquad (۲۳)$$

تابع لاگرانژ در رابطه‌ی ۲۴ ارائه می‌شود:

$$\tilde{L} = f(X) + \sum_{j=1}^{m}\left(\lambda_j g_j(X)\right) + \sum_{k=1}^{p}\left(\lambda_{m+k}h_k(X)\right) \qquad (۲۴)$$

مشابه با روش نیوتن برای حل مسائل غیرخطی با کمینه‌سازیِ بدون محدودیت، بردار جواب ΔX به عنوان مسیر جستجوی S در نظر گرفته می‌شود و زیرمسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم (S به عنوان متغیر تصمیم است) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$MinQ(S) = \nabla f(X)^T S + \frac{1}{2}S^T[H]S \qquad (۲۵)$$

محدودیت‌ها:

$$\beta_j g_j(X) + \nabla g_j(X)^T S \le 0; \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad (۲۶)$$

$$\bar{\beta} h_k(X) + \nabla h_k(X)^T S = 0; \qquad k = 1,2,\ldots,p \qquad (۲۷)$$

محدودیت‌های ۲۶ و ۲۷ به یک مدل درجه دوم محلی مربوط به لاگرانژ $\tilde{L}$ مرتبط هستند؛ لاگرانژ L به عنوان تابع هدفی است که به زیرمسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم (QP) هدایت و منجر می‌شود. در رابطه‌ی ۲۵ و محدودیت‌های ۲۶ و ۲۷، [H] یک ماتریس معین مثبت است که ابتدا به عنوان ماتریس هویت در نظر گرفته می‌شود و در تکرارهای بعدی به‌روزرسانی می‌شود به طوری که به منظورهمگرایی ماتریس هیشین، تابع لاگرانژ و ثابت‌های $\bar{\beta}$ و β_j مورد استفاده قرار می‌گیرد تا این اطمینان حاصل شود که محدودیت‌های خطی شده به طور کامل فضای شدنی را قطع نمی‌کنند.

$$\bar{\beta} \approx 0.9 : \beta_j = \begin{cases} 1 if g_j(x) \ll 0 \\ \bar{\beta} if g_j(x) \gg 0 \end{cases} \qquad (۲۸)$$

وقتی که $\bar{\beta}$ دارای مقدار خاص و ویژه است، رابطه‌ی ۲۸ مقادیر معمول محدودیت ۲۶ را ارائه می‌کند. زیرمسئله‌ی این رابطه یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم است و بدین ترتیب روش‌های موجود با کمینه کردن توابع درجه دوم را می‌توان برای حل آن زیرمسئله به کار برد. یک بار مسیر جستجوی S با حل مسئله‌ی مدل شده در رابطه‌ی ۲۵ تعیین می‌شود و بردار الگو همان‌طورکه در رابطه‌ی ۲۹ نشان داده شده و به‌روزرسانی می‌شود.

$$x_{j+1} = x_j + \propto^* S \qquad (۲۹)$$

رابطه‌ی ۲۹ بردار الگوی به‌روزرسانی شده است، هنگامی که مسیر جستجو با حل رابطه‌ی ۲۵ یافت می‌شود؛ در این رابطه $\propto^*$ طول گام بهینه در امتداد مسیر S است که با کمینه کردن تابع ϕ که در رابطه‌ی ۳۰ ارائه شده پیدا می‌شود.

$$\emptyset = f(x) + \sum_{j=1}^{m}\left(\lambda_j\left(\max\left[0, g_j(X)\right]\right)\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\left(\lambda_{m+k}\left(\left|h_k(X)\right|\right)\right) \qquad (۳۰)$$

با

$$\lambda_j = \begin{cases} |\lambda_j|, j = 1,2,\ldots,m+p & \text{در اولین تکرار} \\ max\left\{\left|\lambda_j\right|, \frac{1}{2}(\widetilde{\lambda_j}\ |\lambda_j|)\right\} & \text{در سایر تکرارها} \end{cases} \qquad (۳۱)$$

و در تکرار قبلی $\lambda_j = \tilde{\lambda}_J$ است. به علاوه، طول گام تک‌بعدی $\propto^*$ می‌تواند با استفاده از هر روشی برای کمینه‌سازیِ تک‌بعدی، تعیین و یافت شود. یک بارکه X_j با استفاده از رابطه‌ی ۲۵ در یک تکرار تعیین می‌شود، ماتریس هیشین [H] به منظور بهبود تقریب درجه دوم تکرار بعدی و به روزرسانی می‌شود.

۲.۴. الگوریتم نقطه‌ی درونی[۳]

روش‌های نقطه‌ی درونی در برنامه‌ریزی ریاضی، بزرگ‌ترین و برجسته‌ترین بخش از تحقیق در بهینه‌سازی از زمان توسعه‌ی روش سیمپلکس بوده است.[۲۱] تاریخچه روش نقطه‌ی درونی به سال ۱۹۸۴ برمی‌گردد، زمانی‌که کارمارکار[۲۲] الگوریتم پیشنهادی خود را برای برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد کرد.[۲۳] ایده‌ی او نزدیک شدن به راه حل بهینه بود، به گونه‌یی که از داخل محدوده قابل اجرا باشد. روش‌های نقطه‌ی درونی نمای نظری برنامه‌ریزی ریاضی، تکرار و محاسبات آن را به طور دائم تغییر داده است. پسندیده و همکاران[۲۴] در سال ۲۰۱۵ عملکرد این روش را در حل مسائل غیرخطی با یک روش دقیق معروف به نام برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، که یکی دیگر از روش‌های کارآمد برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی است، مقایسه کردند. علاوه براین، قرائی و همکاران[۲۵] در سال ۲۰۱۵ مطلوبیت عملکرد این روش را برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی تأیید کردند. نتایج حاصل از تحقیق آنها نشان داد که روش‌های برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و الگوریتم نقطه‌ی درونی از عملکرد مطلوبی به لحاظ راه حل‌های بهینه، تعداد گام‌ها برای دستیابی به راه حل بهینه، عدم ناموجهی، خطای بهینه و مکمل بودن برخوردارند. به منظور درک بهتر این روش، یک مسئله از نوع برنامه‌ریزی غیرخطی را طبق رابطه‌ی ۳۲ در نظر بگیرید:

$$Minimize F(x)$$

محدودیت‌ها:

$$g(x) = 0$$
$$h_l \leq h(x) \leq h_u$$
$$x_l \leq x \leq x_u \qquad (۳۲)$$

ابتدا باید نامساوی‌های در محدودیت مسئله با استفاده از متغیرهای کمکی به تساوی تبدیل شود:

$$Minimize F(x)$$

محدودیت‌ها:

$$g(x) = 0$$
$$h(x) + s_h = h_u$$
$$s_h + s_{sh} = h_u - h_l$$
$$x + s_x = x_u$$
$$x - x_l \geq 0, s_h, s_{sh}, s_x \geq 0 \qquad (۳۳)$$

بر اساس معادلات فوق، فرم الگوریتمی روش نقطه‌ی درونی را مطابق نوشتار کارمارکار[۱۹] در سال ۱۹۸۴ می‌توان چنین شرح داد:

- گام ۱: یک نقطه‌ی شروع موجه انتخاب کنید، به طوری که شرایط غیرمنفی بودن را برآورده سازد. سپس، مسدودکننده‌ی اولیه‌ی مسئله را چنین تنظیم کنید:

$$Minimize F_\mu = F(x)$$
$$= \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x - x_l)\, i$$
$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \ln(s_x)\, i$$
$$-\mu \sum_{j=1}^{m} \ln(s_h)\, j$$
$$-\mu \sum_{j=1}^{m} \ln(s_{sh})\, j$$

محدودیت‌ها:

$$g(x) = 0$$
$$h(x) + s_h = h_u$$
$$s_h + s_{sh} = h_u - h_l$$
$$x + s_x = x_u \qquad (۳۴)$$

از آن‌جا که μ به عنوان یک پارامتر مسدودکننده است، باید یک عدد مثبت باشد. تابع لاگرانژین نیز به صورت رابطه‌ی ۳۵ است.

$$L_\mu = F(x) - Y^T g(x)$$
$$-y_h^T [h_u - s_h - h(x)]$$
$$-y_{sh}^T (h_u - h_l - s_h - s_{sh})$$
$$-y_x^T [x_u - x - s_x]$$
$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x - x_l)\, i$$
$$-\mu \sum_{i=1}^{n} \ln(s_x)\, i$$
$$-\mu \sum_{j=1}^{m} \ln(s_h)\, j$$
$$-\mu \sum_{j=1}^{m} \ln(s_{sh})\, j \qquad (۳۵)$$

به طوری‌که y، y_h، y_{sh} و y_x ضرب‌کننده‌ی لاگرانژین هستند. شرایط بهینگی اولیه عبارت است از:

$$\nabla_x L_\mu = \nabla F(x) - \nabla g(x)^T y$$
$$+\nabla h(x)^T Y_h + Y_x - z = 0 \qquad (۳۶)$$
$$\nabla_{sh} L_\mu = y_h + y_{sh} - \mu \cdot S_{h^e}^{-1} = 0 \qquad (۳۷)$$
$$\nabla_{ssh} L_\mu = y_{sh} - \mu \cdot S_{sh^e}^{-1} = 0. \qquad (۳۸)$$
$$\nabla_{sx} L_\mu = y_x - \mu \cdot S_x^{-1} e = 0. \qquad (۳۹)$$
$$\nabla_y L_\mu = -g(x) = 0. \qquad (۴۰)$$
$$\nabla_{yh} L_\mu = h(x) + s_h - h_u = 0. \qquad (۴۱)$$
$$\nabla_{yx} L_\mu = x + s_h - x_u = 0. \qquad (۴۲)$$
$$\nabla_{ysh} L_\mu = sh + s_{sh} - h_u + h_l = 0. \qquad (۴۳)$$
$$(X - X_l) \cdot Z \cdot e = \mu \cdot e \qquad (۴۴)$$

به طوری که:

$$e = [1 \ldots, 1]^T \qquad (۴۵)$$
$$X = diag(x_1 \ldots . x_n) \qquad (۴۶)$$

$$
\begin{bmatrix}
-Z^{-1}(x-x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & S_h^{-1}(Y_{sh}+Y_h) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & S_x^{-1}Y_h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_{sh}^{-1}Y_{sh} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla h & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\nabla h^T & H & -\nabla g^T \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla g & 0
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
\Delta_z \\ \Delta_{sh} \\ \Delta_{sx} \\ \Delta_{ssh} \\ \Delta_{yx} \\ \Delta_{ysh} \\ \Delta_{yh} \\ \Delta_x \\ \Delta_y
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\mu \cdot z^{-1}e + (x-x_1)\cdot e \\
-\mu \cdot S_h^{-1}e - (Y_{sh}+Y_h)\cdot e\cdot \\
\mu \cdot S_x^{-1} - Y_{x^e} \\
\mu \cdot S_{sh}^{-1} - Y_{sh^e} \\
-X - S_x + X_u \\
-S_h - S_{sh} + (h_u - h_l) \\
-h(x) - S_h + h_u \\
-\Delta_x L_\mu \\
g(x)
\end{bmatrix}
\qquad (۵۳)
$$

$$s_h = diag(s_{h1} \ldots . s_{hn}) \qquad (۴۷)$$

$$s_{sh} = diag(s_{sh1} \ldots . s_{shm}) \qquad (۴۸)$$

$$Y_x = diag(y_{x1} \ldots . y_{xm}) \qquad (۴۹)$$

$$Y_{sh} = diag(y_{sh1} \ldots . y_{shm}) \qquad (۵۰)$$

$$Y_h = diag(y_{h1} \ldots . y_{hn}) \qquad (۵۱)$$

$$S_x = diag(S_{x1} \ldots . S_{xm}) \qquad (۵۲)$$

لازم به ذکر است که معادلات فوق، ماتریس‌هایی از گرادیان‌های محدودیت هستند و z ماتریس مورب است.

- گام ۲: پارامتر مسدودکننده‌ی μ در این مرحله محاسبه می‌شود.

- گام ۳: برای به دست آوردن یک مسیر جستجو به منظور تکرار، سیستم معادله ۵۳ باید حل شود. سپس بردار $[\Delta_z, \Delta_{sh}, \Delta_{sx}, \Delta_{ssh}, \Delta_{yx}, \Delta_{ysh}, \Delta_{yh}, \Delta_x, \Delta_y]$ مسیر جستجو خواهد بود.

- گام ۴: در این مرحله تعیین اندازه‌ی a و به‌روزرسانی راه حل با استفاده از سیستم معادلات ۵۴ تا ۶۱ انجام می‌شود:

$$x^k = \bar{x} + \bar{\alpha}_p \nabla_x \qquad (۵۴)$$

$$Y^k = \bar{y} + \bar{\alpha}_D \nabla_y \qquad (۵۵)$$

$$s_x^k = \bar{s}_x + \bar{\alpha}_p \nabla_{sx} \qquad (۵۶)$$

$$Y_x^k = \bar{Y}_x + \bar{\alpha}_D \nabla_{yX} \qquad (۵۷)$$

$$s_h^k = \bar{s}_h + \bar{\alpha}_p \nabla_{sh} \qquad (۵۸)$$

$$Y_h^k = \bar{Y}_h + \bar{\alpha}_D \nabla_{yh} \qquad (۵۹)$$

$$s_{sh}^k = \bar{s}_{sh} + \bar{\alpha}_p \nabla_{ssh} \qquad (۶۰)$$

$$Y_{sh}^k = \bar{Y}_{sh} + \bar{\alpha}_D \nabla_{ysh} \qquad (۶۱)$$

در معادلات فوق $\bar{a}_P$ طول مسئله‌ی اولیه و $\bar{a}_D$ در این مرحله طول مسئله‌ی دوگان است که با توجه به تابع شایستگی با یک روش فیلتر انتخاب می‌شوند تا ضرایب مثبت لاگرانژ و کمکی‌ها را حفظ کنند. همچنین مشاهده می‌شود که یک گام از الگوریتم نقطه‌ی درونی همانند رابطه‌ی ۶۲ است که در روابط ۵۴ تا ۶۱ بسط داده شده است.

برای مسئله‌ی اولیه:

$$\left(x^k, S_x^k, S_h^k, S_{sh}^k\right) \to (\bar{x}, \bar{S}_x, \bar{S}_h, \bar{S}_{sh}) \qquad (۶۲)$$

برای مسئله‌ی دوگان:

$$\left(Y^k, Y_x^k, Y_h^k, Y_{sh}^k\right) \to (\bar{Y}, \bar{Y}_x, \bar{Y}_h, Y_{sh}) \qquad (۶۳)$$

الگوریتم نقطه‌ی درونی یک دنباله $\{x^k, S_x^k, S_h^k, S_{sh}^k\}$ را برای دنباله‌ی پارامتر مسدودکننده‌ی $\{\mu\}$ همگرای به صفر تولید می‌کند. روند تکرار به صورت یک گپ مکمل نسبی خاتمه می‌یابد. عدم انطباق شرایط بهینه‌ی مطلق در معادلات ۶۴ و ۶۵ تعریف شده است.

- گام ۵: اگر راه حل به دست آمده از معیار همگرایی منطبق با معادلات ۶۴ تا ۶۷ باشد، راه حل بهینه تعیین می‌شود. در غیر این صورت باید به گام ۲ رفت.

$$\frac{gup}{1 + \|Dual - obj\|} \leq \varepsilon_1 \qquad (۶۴)$$

$$\|largest - mismatch - of - KKT\| \leq \varepsilon_2 \qquad (۶۵)$$

به طوری که:

$$gap = (y_h + y_{sh})^T s_h + y_{sh}^T S_{sh}$$
$$+ y_x^T S_x + z^T (x - x_l) \quad (۶۶)$$
$$dual - obj = F(x) - Y^T g(x)$$
$$- y_h^T [h_u - h(x)] - y_{sh}^T [h_u - h_l]$$
$$- y_x^T [x_u - x] - Z^T (x - x_l) \quad (۶۷)$$

۵. نمونه‌ی عددی

ده مثال عددی به واسطه‌ی دو الگوریتم پیشنهادی و با کمک نرم‌افزار سس[4] حل شده است. در این مثال‌ها تعداد انواع محصولات تولیدی برابر با ۵ فرض شده است. به منظور ارزیابی عملکرد روش‌های حل مذکور سه شاخص از معیارهای بهینگی در نظر گرفته شده است، به طوری که این سه شاخص شامل مقدار تابع هدف محاسبه شده است که در نتیجه‌ی حل مدل توسط روش‌های پیشنهادی به دست می‌آید. همچنین تعداد گام‌های حاصل به منظور رسیدن به جواب بهینه و نیز مقدار عدم ناموجهی در مدل است. مقادیر پارامترهای مسئله در جدول ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۱. محدوده‌ی مقادیر پارامترها.

پارامتر	محدوده‌ی مقادیر
D_i	[۱۰۰_۵۰۰]
P_i	[۱۵۰_۱۰۰۰]
h_i	[۴_۸]
k_i	[۳۰۰_۳۷۰]
b_i	[۴/۸_۸]
bf_i	[۰/۵_۱/۵]
π_i	[۳_۵]
o_i	[۱_۵]
γ_i	[۰/۰۱_۰/۰۴]
s_i	[۰/۲_۰/۶]
d_i	[۲_۳]
MAHC	[۱۵۰۰۰_۲۰۰۰۰]
MALSC	[۱۵۰۰۰_۲۰۰۰۰]
MABC	[۱۶۰۰۰_۲۰۰۰۰]
Budget	[۲۲۰۰۰_۳۰۰۰۰]
Cap	[۱۸۰۰_۳۰۰۰]
screening	[۱۰۰۰_۶۰۰۰]
disposal	[۱۰۰۰۰_۱۷۰۰۰]
nc	[۹_۱۵]
a	[۰/۲_۰/۳]

همچنین نتایج حاصل از حل مسئله توسط هریک از روش‌ها در جدول ۲ ارائه شده است.

۶. ارزیابی عملکرد

در این بخش نتایج به دست آمده در بخش پیشین توسط آزمون‌های آماری توکی و تاپسیس مورد تجزیه و تحلیل قرارگرفته است.

۱.۶. آزمون توکی[5]

به منظور تحلیل نتایج به دست آمده از اجرای دو روش پیشنهادی در حل مدل ریاضی و مقایسه‌ی آنها با یکدیگر، از روش توکی بهره گرفته شده است. در این نوشتار، آزمون فرض توکی برای هر سه شاخص تعیین شده شامل مقدار تابع هدف، تعداد گام‌ها و همچنین عدم ناموجهی مدل انجام پذیرفته است. بنابراین با در نظر گرفتن سطح اطمینان ۹۵ درصد، میانگین نتایج دو روش مورد استفاده با توجه به سه شاخص ارزیابی معرفی شده، توسط آزمون توکی مورد مقایسه قرار گرفته است، به گونه‌یی که در هر مقایسه، فرضیه‌ی $(H_۰)$ بیانگر آن است که کلیه‌ی میانگین‌های حاصل از نتایج مربوط به هریک از روش‌ها با یکدیگر مساوی‌اند و فرضیه‌ی مقابل $(H_۱)$ به معنی رد فرض است، به گونه‌یی که نشان‌دهنده‌ی عدم تساوی یا همان وجود تفاوت معنی‌دار در میان کمینه یکی از میانگین‌ها با بقیه‌ی آنهاست. نتایج حاصل از اجرای این آزمون در جدول ۳ نشان داده شده است.

با توجه به نتایج موجود در جدول ۳، قدر مطلق اختلاف میانگین‌های حاصل از روش‌های حل با $q \propto (K, N, -K)$ مورد مقایسه قرارگرفته و چنانچه قدر مطلق اختلاف میانگین‌ها بیش از آن باشد فرضیه‌ی $(H_۰)$ پذیرفته نخواهد شد. در نتیجه این دو میانگین حاصل از روش‌های حل مربوطه با یکدیگر اختلاف معنی‌داری خواهند داشت و چنانچه قدر مطلق اختلاف میانگین‌ها کم‌تر از آن باشد فرضیه‌ی $(H_۰)$ برقرار خواهد بود که بنابراین تفاوت معنی‌داری میان میانگین‌های دو روش مربوطه وجود نخواهد داشت. چنان که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، دو روش حل به کارگرفته شده در هیچ یک از شاخص‌های مورد مقایسه با یکدیگر تفاوت معنی‌داری ندارند.

۲.۶. آزمون تاپسیس[6]

به منظور انتخاب بهترین روش حل، نتایج به دست آمده توسط الگوریتم تاپسیس مورد تجزیه و تحلیل قرارگرفته است. ماتریس تصمیم تاپسیس برای انتخاب گزینه‌ی برتر چنین به دست آمده است:

$$\begin{array}{c} \\ SQP \\ IP \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{Z}^-_{\min} & \mathrm{Iteration}^-_{\min} & \mathrm{Infeasibility}^-_{\min} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۴۶۴۵/۵۲۹۴ & ۱۵۹ & ۵/۵۵۰۵۲\mathrm{E}-۱۰ \\ ۴۶۳۶/۵۵۳۱۸ & ۲۱۷/۶ & ۸/۲۷۹۴۶\mathrm{E}-۱۱ \end{bmatrix} \end{array} \quad (۶۸)$$

نتایج حاصل از اجرای الگوریتم تاپسیس در جدول ۴ ارائه شده است.

با توجه به نتایج به دست آمده، روشی به عنوان روش برتر انتخاب خواهد شد که بیشترین مقدار را داشته باشد. بنابراین طبق نتایج حاصل از آزمون تاپسیس الگوریتم نقطه‌ی درونی نسبت به روش حل برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی دارای عملکرد بهتری است.

جدول ۲. نتایج به دست آمده از حل مسئله با استفاده از دو روش پیشنهادی.

ردیف	برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی			الگوریتم نقطه‌ی درونی		
	مقدار تابع هدف	تعداد گام‌ها	عدم ناموجهی	مقدار تابع هدف	تعداد گام‌ها	عدم ناموجهی
۱	۳۵۲۷٫۲۴	۳۷۳	۰	۳۵۲۶٫۳۵	۲۹۳	۱٫۴ E -۱۲
۲	۴۵۱۷٫۳۸	۱۰۷	۲٫۳ E -۰۹	۴۵۱۷٫۳۸	۲۹۷	۱٫۹ E -۱۲
۳	۵۰۳۳٫۱۷	۷۴	۱۱-E ۱٫۶	۵۰۲۶٫۰۴	۲۷۹	۱٫۳ E -۱۲
۴	۴۶۷۲٫۲۹	۱۶۸	۰	۴۶۷۲٫۱۲	۱۸۳	۱٫۸ E -۱۰
۵	۵۳۴۵٫۰۹	۱۵۰	۱٫۱ E -۱۰	۵۳۴۵٫۰۱	۱۷۲	۲٫۱ E -۱۲
۶	۴۶۷۳٫۹۴	۱۳۲	۲٫۷ E -۰۹	۴۵۹۴٫۳۷	۳۰۷	۲٫۶ E -۱۲
۷	۴۷۱۱٫۹	۱۵۳	۱٫۸ E -۱۰	۴۷۱۱٫۹	۱۴۰	۹٫۴ E -۱۲
۸	۴۶۸۰٫۶۲	۱۲۸	۱٫۲ E -۱۱	۴۶۸۰٫۶۲	۱۸۴	۴٫۱ E -۱۰
۹	۴۹۱۱٫۲۳	۱۹۰	۱٫۱ E -۱۱	۴۹۱۱٫۲۳	۱۳۸	۳٫۸ E -۱۲
۱۰	۴۳۸۲٫۴۳	۱۱۵	۲٫۳ E -۱۰	۴۳۸۰٫۵۱	۱۸۳	۲٫۱ E -۱۰

جدول ۳. نتایج حاصل از اختلاف میانگین‌های روش‌های حل.

عدم ناموجهی	تعداد گام‌ها	مقدارتابع هدف	
۲٫۰۲۸	-۲٫۴۵۹	۰٫۰۵۹	$\overline{SQP} - \overline{IP}$
۲٫۹۷	۲٫۹۷	۲٫۹۷	$q(\text{۰/۰۵}, \text{۲}, \text{۱۸})$

جدول ۴. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم تاپسیس.

CSQP	CIP
۰٫۰۱۰۱۲۲۶۵۳	۰٫۹۸۹۸۷۷۳۴۷

۷. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، یک مدل مقدار تولید اقتصادی (EPQ) چندمحصولی با هدف کاهش هزینه‌های کل موجودی ارائه شد که در آن کمبود مجاز و به صورت ترکیبی از تقاضای پس‌افت شده و فروش از دست رفته فرض شده است و بخشی از تقاضا با دو هزینه‌ی ثابت و متغیر پس‌افت شده است. به منظور کاربردی‌تر شدن و نزدیکی بیشتر مدل پیشنهادی به دنیای واقعی، کالاهای تولیدی به دو دسته‌ی سالم و معیوب تقسیم‌بندی شدند؛ کالاهای معیوب غیر قابل تعمیر بوده و به عنوان ضایعات محسوب می‌شوند. همچنین به جهت غیرقطعی بودن شرایط و عدم اطمینان از میزان بودجه‌ی در دسترس، محدودیت‌هایی برای مدل در نظر گرفته شده که تعدادی از این محدودیت‌ها به فرم احتمالی هستند و از توزیع نرمال پیروی می‌کنند.

در مدل پیشنهادی طول دوره‌ی کل موجودی، طول دوره‌یی که در آن موجودی مثبت است و همچنین نرخ تقاضای پس‌افت شده، متغیرهای تصمیمی هستند که با کمینه‌سازی هزینه‌ی کل موجودی تعیین می‌شوند. با توجه به غیرخطی بودن مدل ارائه شده، دو روش حل دقیق برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و الگوریتم نقطه‌ی درونی برای حل مدل مطرح و در مجموع بیست مثال عددی توسط این دو روش با استفاده از نرم افزار سس حل شد. سپس عملکرد روش‌های حل با استفاده از آزمون فرض توکی مقایسه شد که نتایج حاصل نشان‌دهنده‌ی آن است که اختلاف معنی‌داری میان هیچ یک از شاخص‌های مقدار تابع هدف، عدم ناموجهی مدل و تعداد گام‌های لازم برای رسیدن به جواب بهینه وجود ندارد. نتایج حاصل از اجرای آزمون تاپسیس حاکی از عملکرد بهتر الگوریتم نقطه‌ی درونی نسبت به روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی است. بخش کوچکی از زمینه‌های توسعه و ادامه‌ی این نوشتار می‌تواند شامل موارد پیشنهادی زیر باشد:

- در نظر گرفتن تولید کالاها توسط چند ماشین؛
- فازی و مبهم در نظر گرفتن برخی از پارامترهای اصلی مسئله؛
- تولید کالاهای معیوب که قابلیت دوباره‌کاری دارند؛
- توسعه‌ی مدل تحت شرایط تورمی؛
- استفاده از مدل‌های تخفیف در قیمت‌های مختلف؛
- بهره‌گیری از روش‌های ابتکاری و فراابتکاری و بررسی نکات مثبت و منفی هر یک از آنها و همچنین مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با روش‌های حل دقیق ارائه شده در این نوشتار.

پانوشت‌ها

1. economic production quantity
2. sequential quadratic programming (SQP)
3. interior point algorithm (IP)
4. statistical analysis system (SAS)
5. Tukey's hypothesis system test
6. techinque for order of preference by similarity to ideal solution (Topsis)

منابع (References)

1. Ting, C. K., Chiu, Y. S. P. and Chan, C. C. H. "Optimal lot sizing with scrap and random breakdown occurring in backorder replenishing period", *Mathematical and Computational Applications*, **16**(2), pp. 329-339 (2011).
2. Glock, C. H. and Jaber, M. Y. "A multi-stage production-inventory model with learning and forgetting effects, rework and scrap", *Computers & Industrial Engineering*, **64**(2), 708-720 (2013).
3. Taleizadeh, A. A., Cárdenas- Barró, L. E. and Mohammadi, B. "A deterministic multi product single machine EPQ model with backordering, scraped products, rework and interruption in manufacturing process", *International Journal of Production Economics*, **150**, pp. 9-27 (2014).
4. Sarkar, B., Cárdenas-Barrón, L. E., Sarkar, M. and et al. "An economic production quantity model with random defective rate, rework process and backorders for a single stage production system", *Journal of Manufacturing Systems*, **33**(3), pp. 423-435 (2014).
5. Ting, P. S. and Chung, K. J. "On the convexity for the expected total cost per unit time of the EPQ model with scrap, rework and stochastic machine breakdown", *Applied Mathematical Modelling*, **38**(7-8), pp. 2296-2301 (2014).
6. Chiu, Y. S. P., Chen, K. K., Cheng, F. T. and et al. "Optimization of the finite production rate model with scrap, rework and stochastic machine breakdown". *Computers & mathematics with applications*, **59**(2), pp. 919-932 (2010).
7. Wu, M. F., and Sung, P. C. "Optimization of a multi-product EPQ model with scrap and an improved multi-delivery policy", *Journal of Engineering Research*, **2**(4), pp. 1-16 (2014).
8. Chiu, Y. S. P., Chen, Y. C., Lin, H. D. and et al. "Combining an improved multi-delivery policy into a single-producer multi-retailer integrated inventory system with scrap in production", *Economic Modelling*, **39**, pp. 163-167 (2014).
9. Chiu, S.W., Liu, K.-T., Lee, C.-H. and et al."A single-producer multi-retailer integrated inventory system with scrap in production", *Res. J. Appl. Sci. Eng. Technol.* **5**(4), pp. 1154-1159 (2013a).
10. Sivashankari, C. K. and Panayappan, S. "Production inventory model with reworking of imperfect production, scrap and shortages", *International Journal of Management Science and Engineering Management*, **9**(1), pp. 9-20 (2014).
11. Chiu, Y. S., Wu, M. F., Chiu, S. W., and et al. "A simplified approach to the multi-item economic production quantity model with scrap, rework, and multi-delivery", *Journal of applied research and technology*, **13**(4), pp. 472-476 (2015).
12. Akbarzadeh, M., Taleizadeh, A. A. and Esmaeili, M. "Developing an economic production quantity model with scrap, rework and backordering under vendor-managed inventory policy", *International Journal of Advanced Logistics*, **5**(3-4), pp. 125-140 (2016).
13. Khalilpourazari, S., Pasandideh, S. H. R. and Niaki, S. T. A. "Optimization of multi-product economic production quantity model with partial backordering and physical constraints: SQP, SFS, SA, and WCA", *Applied Soft Computing*, **49**, pp. 770-791 (2016).
14. Wee, H. M., Huang, Y. D., Wang, W. T. and et al."An EPQ model with partial backorders considering two backordering costs", *Applied Mathematics and Computation*, **232**, pp. 898-907 (2014).
15. Chiu, S. W., Wu, H. Y. and Chiu, Y. S. P. "On optimization of a multi-product EPQ model with scrap and an improved multi-delivery policy", *International Journal of Applied Engineering Research*, **12**(12), pp. 3170-3173 (2017).
16. Taleizadeh, A. A., Sari-Khanbaglo, M. P. and Cárdenas-Barrón, L. E. "Outsourcing rework of imperfect items in the economic production quantity (EPQ) inventory model with backordered demand", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, (2017).
17. Yuan-Shyi, C. P., Chen, H. Y., Chiu, W. S. and et al."Optimization of an economic production quantity-based system with random scrap and adjustable production rate", *Journal of Applied Engineering Science*, **16**(1), pp. 11-18 (2018).
18. Fekri, M. "Optimal run time for an EPQ model with scrap, rework, setup time and machine breakdown (failure) under learning effect assumption", arXiv preprint arXiv: 1912.11263 (2019).
19. Nobil, A. H., Afshar Sedigh, A. H., Tiwari, S. and et al. "An imperfect multi-item single machine production system with shortage, rework, and scrapped considering inspection, dissimilar deficiency levels, and non-zero setup times", *Scientia Iranica*, **26**(1), pp. 557-570 (2019).
20. Zhu, Z. "An efficient sequential quadratic programming algorithm for nonlinear programming", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **175**(2), pp. 447-464 (2005).
21. Freund, R. M. and Mizuno, S. "Interior point methods: current status and future directions", *In High performance optimization ,Springer, Boston, MA*. pp. 441-466 (2000).
22. Karmarkar, N. "A new polynomial-time algorithm for linear programming", *In Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing. ACM*. pp. 302-311 (1984).
23. Potra, F. A. and Wright, S. J. "Interior-point methods", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **124**(1-2), pp. 281-302 (2000).
24. Pasandideh, S. H. R., Niaki, S. T. A. and Gharaei, A. "Optimization of a multiproduct economic production quantity problem with stochastic constraints using sequential quadratic programming", **Knowledge-Based Systems**, **84**, pp. 98-107 (2015).
25. Gharaei, A., Naderi, B. and Mohammadi, M. "Optimization of rewards in single machine scheduling in the rewards-driven systems", *Management Science Letters*, **5**(6), pp. 629-638 (2015).