طراحی نمودار کنترل جمع دنباله چند متغیره برای پایش ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری

محمد مبین همتی[1]، امیرحسین امیری*[2]، زهرا جلیلی بال[3]

[1] کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران،mobin.hemmati.۷۵@gmail.com

[2] استاد گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، amiri@shahed.ac.ir

[3] دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، zjalili۲۲۲@alumni.ut.ac.ir

* نویسنده مسئول: امیرحسین امیری

چکیده

نمودارهای کنترل شوهارتی برای پایش میانگین یا واریانس طراحی‌شده‌اند؛ اما در بسیاری از فرآیندها پایش میانگین و واریانس به دلیل ماهیت فرآیند امکان پذیر نیست و استفاده از ضریب تغییرات برای پایش فرآیند توصیه می‌شود. در این مقاله، طراحی نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چند متغیره با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری انجام می‌شود. همچنین راهکار مناسب برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی در فاز ۲ ارائه می‌شود. در ادامه، عملکرد نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چند متغیره در حضور خطای اندازه‌گیری با عملکرد نمودار کنترل در حالت بدون خطا و با استفاده از زنجیره مارکوف بر اساس معیار متوسط طول دنباله مقایسه می شود. نتایج نشان می‌دهد معیار متوسط طول دنباله با افزایش مقدار خطای اندازه‌گیری کاهش می یابد و مقادیر از حالت بدون در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری دور می‌شوند.

کلمات کلیدی: نمودار کنترل، پایش ضریب تغییرات، خطای اندازه‌گیری، ضریب تغییرات چند متغیره، زنجیره مارکوف.

۱. مقدمه

اغلب نمودارهای کنترل شوهارتی برای پایش تغییرات در میانگین یا واریانس فرآیند طراحی‌شده‌اند. اما در بسیاری از فرایندها پایش میانگین و واریانس فرآیند به دلیل ماهیت فرآیند موردنظر کاری غیرمعقول است[۱]. از جمله دلایل استفاده از ضریب تغییرات برای پایش فرآیند عبارتند از:

۱- مقایسه تغییرات در مجموعه داده‌های مختلف با واحدهای اندازه‌گیری مختلف ۲- وجود مقادیر بسیار مختلف برای میانگین ۳- هنگامی‌که میانگین یا انحراف معیار فرآیند از یک نمونه به نمونه‌ی دیگر ثابت نبوده و واریانس ترکیبی از میانگین است، ممکن است پایش میانگین و انحراف معیار فرآیند هشداری مبنی بر تحت کنترل نبودن فرآیند بدهد، درحالی‌که فرآیند موردنظر تحت کنترل است و این هشدار به دلیل ماهیت ذاتی فرآیند موردنظر بوده است [۲]. در بسیاری از کاربردها کیفیت فرآیند یا محصول به‌وسیله چندین مشخصه کیفی توصیف می‌شود که در این حالت از پایش ضریب تغییرات چند متغیره استفاده می‌شود. از طرف دیگر در بیش‌تر کاربردهای واقعی، مقادیر اندازه‌گیری شده به‌وسیله تجهیزات اندازه‌گیری بیانگر مقادیر واقعی مشخصه‌های کیفی محصول نیستند. وجود خطای اندازه‌گیری در نمودارهای کنترل امری رایج است و روی عملکرد نمودارهای کنترل تأثیر می‌گذارد؛ (تران و همکاران [۳]). ینگ و همکاران [۴] اولین نمودار کنترل را برای پایش ضریب تغییرات در حالت چندمتغیره تحت تغییرات معلوم و نامعلوم ارائه کردند. لیم و همکاران [۱] نمودار جدید جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات در حالت چند متغیره در فاز دوم را ارائه کردند. عباسی و همکاران [۵] برای اولین بار در ادبیات موضوع به پایش ضریب تغییرات در فاز یک پرداختند. برای نشان دادن توانایی نمودار ارائه‌شده از معیار احتمال هشدار استفاده‌شده است. ختان و همکاران [۶] روشی برای پایش ضریب تغییرات در حالت چند متغیره در فرآیندهای تولید کوتاه مدت ارائه دادند. ینگ و همکاران [۷] برای اولین بار نمودار کنترل برای پایش ضریب تغییرات اما به‌صورت تک متغیره را در حالت وجود خطای اندازه‌گیری ارائه دادند. تران و همکاران [۸] یک نمودار کنترل شوهارتی و یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) با حد کنترل بالا برای پایش ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری توسعه دادند. نگیان و همکاران [۹] دو نمودار ترکیبی با حدود یک‌طرفه برای پایش ضریب تغییرات چند متغیره ارائه کردند. جینجربوش و همکاران [۱۰] یک نمودار کنترل چند متغیره میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش ضریب تغییرات را طراحی کردند. حق و همکاران [۱۱] دو نمودار کنترل

EWMA تطبیقی برای هر دو حالت تک متغیره و چند متغیره برای پایش ضریب تغییرات پیشنهاد کردند. چو و همکاران [۱۲] نمودار کنترلی را برای پایش ضریب تغییرات با در نظر گرفتن قوانین حساس سازی و روابط زنجیره مارکوف بررسی کردند. ترن و همکاران [۱۳] در مقاله‌ای به بررسی یک نمودار کنترل برای پایش ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه گیری پرداختند. در نهایت ایوب و همکاران[۱۴] یک نمودار شوهارتی برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری ارائه دادند. در این مطالعه، یک نمودار کنترل جمع دنباله[۱] برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری در فاز دوم ارائه شده است. در نمودار کنترل پیشنهادی از رویکرد زنجیره مارکوف برای محاسبه متوسط طول دنباله و از رویکرد اندازه‌گیری چندگانه برای کاهش اثر منفی خطای اندازه‌گیری بر روی عملکرد نمودار کنترل استفاده شده است. در ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم مدل پیشنهادی به تفصیل شرح داده شده که شامل آماره پایش چندمتغیره ضریب تغییرات، مدل خطی خطای اندازه‌گیری و نمودار کنترل جمع دنباله به‌صورت چندمتغیره و در حضور خطای اندازه‌گیری است. بخش سوم به تحلیل داده ها و یافته های پژوهش می پردازد. بخش چهارم نیز به نتیجه گیری و بحث در رابطه با نتایج بدست آمده پرداخته است.

۲. روش شناسی پژوهش

در این بخش ضمن تبیین مدل خطای اندازه گیری و آماره ضریب تغییرات چند متغیره در حالت خطا به توسعه نمودار کنترل پیشنهادی جمع دنباله در حضور خطای اندازه گیری در فاز ۲ پرداخته می‌شود.

۲-۱. مدل خطی خطای اندازه‌گیری

لازم به ذکر است که t اندیس تعداد دفعات اندازه‌گیری، i اندیس شماره نمونه[۲](زمان)، j اندیس اندازه نمونه[۳]، k نشان-دهنده تعداد نواحی، K نشان‌دهنده پارامتر ثابت در نمودار جمع دنباله که براساس مقدار اولیه طول دنباله در حالت تحت کنترل به‌دست می‌آید و v نشان‌دهنده تعداد مشخصه کیفی مورد بررسی است. در مطالعه ایوب و همکاران [۱۴] آمده است؛ $\mathbf{Y_{ij}}$ یک بردار $v \times 1$ از مشخصات کیفی برای $i = 1, 2, \ldots$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ است؛ زمانی‌که n اندازه نمونه و i شماره نمونه باشد. $\mathbf{Y_{ij}}$ دارای توزیع نرمال چند متغیره مستقل (MN) با بردار تصادفی میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ است؛ $(Y_{ij} \sim MN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}))$، فرض می‌شود که مقادیر $\mathbf{Y_{ij}}$ به‌صورت غیرمستقیم از نتایج $\{\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,1}}, \mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,2}}, \ldots, \mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,m}}\}$ برای $m \geq 1$ که مجموعه‌ی تعداد اندازه‌گیری‌هاست (t)، با نماد * به معنی داشتن خطای اندازه-گیری به دست می‌آیند و $\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,t}}$ با رابطه‌ی خطای خطی (۱)

---

[۱] Run sum chart
[۲] Sample number
[۳] Sample size

با مقادیر $\mathbf{Y_{ij}}$ مرتبط می‌شود؛ بردار $\mathbf{A}$ و ماتریس $\mathbf{B}$ در این مطالعه مقادیری مشخص هستند؛ درحالی‌که $\varepsilon_{i,j,t}$ یک بردار $v\times 1$ از خطای تصادفی است که توزیع نرمال چندمتغیره دارد $(MN(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}))$ و $\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}$ مقداری مشخص دارد که به‌عنوان ماتریس واریانس بردار $\boldsymbol{\varepsilon_{i,j,t}}$ شناخته می‌شود. اگر $\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}}=\sum_{t=1}^{m}\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,t}}/m$ و $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,t}}/mn$ را در نظر بگیریم که در آن‌ها $\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}}$ بردار میانگینی از تمام m بار اندازه‌گیری $\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,1}},\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,2}},\ldots,\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,m}}$ برای نمونه‌ jام $(j=1,2,\ldots,n)$ که هرکدام اندازه نمونه n دارند و $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}}$ بردار میانگین کلی $\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,1}},\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,2}},\ldots,\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,n}}$ برای نمونه i ام‌است.

$$\mathbf{X^*_{i,j,t}}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{Y_{i,j}}+\varepsilon_{i,j,t}\ . \qquad (۱)$$

$$\mathbf{X^*_{i,j,t}}\sim MN(\mathbf{A}+\mathbf{B}\boldsymbol{\mu},\mathbf{B^T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}+\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon})\ . \qquad (۲)$$

$$\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}}\sim MN(\mathbf{A}+\mathbf{B}\boldsymbol{\mu},\mathbf{B^T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}+\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}/m)\ . \qquad (۳)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}}\sim MN(\mathbf{A}+\mathbf{B}\boldsymbol{\mu},\tfrac{1}{n}(\mathbf{B^T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}+\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}/m))\ . \qquad (۴)$$

۲-۲. ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطا

فرض کنید که $\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n\}$ یک نمونه تصادفی با n عضو باشد که از یک توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ تبعیت کند. ضریب تغییرات چندمتغیره این نمونه با استفاده از رابطه (۵) محاسبه می شود:

$$\gamma=(\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{-1}}\boldsymbol{\mu})^{-\frac{1}{2}}, \qquad (۵)$$

در این مقاله دو نمودار تک جهت، برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات فرایند با داشتن خطای اندازه‌گیری ارائه‌شده است. ینگ و همکاران [۴] اشاره کرده‌اند ضریب تغییرات نمونه‌ای چند متغیره با داشتن خطای لندازه‌گیری از رابطه (۶) محاسبه می‌شود؛ که در رابطه فوق $\mathbf{S}^*_{\mathbf{i}}$ ماتریس واریانس کوواریانس $\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}}$ با استفاده از رابطه (۷) محاسبه می شود؛ ینگ و همکاران [۴] با در نظر گرفتن عبارت $T^2=(\sqrt{n}/\hat{\gamma})^2=n\overline{\mathbf{X}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S^{-1}}\overline{\mathbf{X}}$، دریافتند $\frac{T^2}{n-1}.\frac{n-v}{v}\sim F_{v,n-v,\delta}$ یک توزیع غیر مرکزی F با v و $(n-v)$ درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی δ است؛ درنتیجه با توجه به توزیع $\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}}$ و $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}}$ مقدار پارامتر غیر مرکزی در حضور خطای اندازه‌گیری هم به‌صورت مشابه تابعی از خود ضریب تغییرات است، $\delta^*=n\,\boldsymbol{\mu}^{*\mathbf{T}}\,\boldsymbol{\Sigma}^{*\mathbf{-1}}\,\boldsymbol{\mu}^*$ که $\boldsymbol{\mu}^*=E(\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}})$ و $\boldsymbol{\Sigma}^*=Var(\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}})$ است؛ و طبق رابطه (۸) محاسبه می‌شود. بدون از دست دادن عمومیت رابطه فوق $\mathbf{A}$ را بردار صفر و $\mathbf{B}=\mathbf{I}$ قرار می‌دهیم، که خلاصه‌شده رابطه پارامتر غیر مرکزی به‌صورت رابطه (۹) می باشد:

$$\hat{\gamma}^*=(\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{*\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}\mathbf{S}^{*\mathbf{-1}}_{\mathbf{i}}\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})^{-1/2}\ . \qquad (۶)$$

$$\mathbf{S_i^*} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}} - \overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})(\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}} - \overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})^T\right).$$ (۷)

$$\delta^* = n(\mathbf{A}+\mathbf{B\mu})^T\left(\mathbf{B^T\Sigma B}+\frac{\mathbf{\Sigma_\varepsilon}}{m}\right)^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B\mu}).$$ (۸)

$$\delta^* = n\,\boldsymbol{\mu}^T\left(\boldsymbol{\Sigma}+\frac{\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon}{m}\right)^{-1}\boldsymbol{\mu} = n\gamma^{-2} - n\,\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\boldsymbol{\theta}}{m}\left(\mathbf{I}+\frac{\boldsymbol{\theta}}{m}\right)^{-1}\boldsymbol{\mu}.$$ (۹)

که $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ است و همچنین می‌توان نشان داد که $\boldsymbol{\theta} = \theta^2\mathbf{I}$. اگر θ^2 مقدار قطری از عناصر ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ باشد، همچنین خاطرنشان می‌شود θ^2 نرخ خطای اندازه‌گیری در نظر گرفته‌شده ($\theta^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma^2$)، که مقدار داخل پرانتز برای حالت تک متغیره است. در این مطالعه $\theta^2 \in P\{0, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0\}$ و همچنین $\boldsymbol{\theta} \in \{0\mathbf{I}, 0.1\mathbf{I}, 0.3\mathbf{I}, 0.5\mathbf{I}, 1.0\mathbf{I}, 2.0\mathbf{I}\}$ است. پس به صورت مشابه رابطه (۱۰) توزیع غیر مرکزی F با $v, n-v$ درجه‌ی آزادی؛ و پارامتر غیر مرکزی δ^* است. در نهایت تابع توزیع تجمعی غیر مرکزی F با $v, n-v$ درجه‌ی آزادی برای آماره ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطا طبق رابطه (۱۱) می باشد و وارون تابع توزیع تجمعی $\hat{\gamma}^*$ ، در رابطه (۱۲) نشان داده شده است؛ برای محاسبه حدود کنترلی نمودار MCV [۴] با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری از روابط (۱۳) و (۱۴) استفاده می شود:

$$\frac{T^{*2}}{n-1}\cdot\frac{n-v}{v} \sim F_{v,n-v,\delta^*}.$$ (۱۰)

$$F_{\hat{\gamma}^*}(u \mid n, v, \delta^*) = 1 - F_{v,n-v,\delta^*}\left(\frac{n(n-v)}{(n-1)vu^2}\right).$$ (۱۱)

$$F_{\hat{\gamma}^*}^{-1}(\alpha \mid n, v, \delta^*) = \sqrt{\frac{n(n-v)}{(n-1)v}\left[\frac{1}{F^{-1}_{v,n-v,\delta^*}(1-\alpha)}\right]}.$$ (۱۲)

$$UCL = F^{-1}_{\gamma^*}(1-\alpha_0 \mid n, v, \delta^*_0),$$ (۱۳)

$$LCL = F^{-1}_{\gamma^*}(\alpha_0 \mid n, v, \delta^*_0).$$ (۱۴)

α_0 احتمال خطای نوع اول، $\delta^*_0 = n\gamma_0^{-2} - n\,\boldsymbol{\mu}_0^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\frac{\boldsymbol{\theta}}{m}(I+\frac{\boldsymbol{\theta}}{m})^{-1}\boldsymbol{\mu}_0$ ، $\boldsymbol{\mu}_0$ ، γ_0 و $\boldsymbol{\Sigma}_0$ مقادیر بردار میانگین تحت کنترل، MCV تحت کنترل و ماتریس واریانس کوواریانس در حالت تحت کنترل هستند؛ برای محاسبه بردار میانگین و ماتریس واریانس کواریانس در حالت خطادار از رابطه (۱۵) استفاده می‌شود؛ که در این رابطه بردار میانگین به تعداد مشخصه کیفی است که عنصر اول از فرمول داخل رابطه و عناصر بعدی همه یک می‌باشند و ماتریس واریانس کوواریانس یک ماتریس همانی با عناصر قطری یک و مابقی عناصر صفر به تعداد مشخصه کیفی مورد بررسی است ($\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$). لازم به ذکر است بردار میانگین اولیه از حاصل جایگذاری ضریب تغییرات اولیه (γ_0) و بردار میانگین در حالت تحت شیفت با جایگذاری ضریب تغییرات خارج از

[۴] Multivariate coefficient of variation chart

کنترل ($\gamma_1 = \tau * \gamma_0$) به دست می‌آید؛ و ماتریس واریانس کوواریانس در حالت اولیه و در حالت تحت شیفت، $\mathbf{\Sigma = I}$ می باشد.

$$\mathbf{\mu} = (\sqrt{\gamma^{-2} - 1}, 1, \ldots, 1)^T . \qquad (۱۵)$$

۳-۲. نمودار جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری

نمودار کنترل جمع دنباله، نموداری ساده ولی قدرتمند برای پایش فرایند و کشف شیفت‌های کوچک‌تر با سرعتی بیشتر با استفاده از رویکرد زنجیره مارکوف است. این نمودار حدود کنترل را به k ناحیه تقسیم می‌کند و با استفاده از امتیازی که برای هر ناحیه فرض می شود، به محاسبه مجموع تجمعی امتیاز هر نمونه تا محقق شدن شرط خارج از کنترل می‌پردازد. در این مطالعه برای نمودار جمع دنباله چند متغیره به علت اریب بودن $\hat{\gamma}^*$، و همچنین اهمیت کشف شیفت در حالت افزایشی، از نمودار جمع دنباله برای شیفت‌های افزایشی برای مقادیر ضریب تغییرات چندمتغیره با داشتن خطای اندازه‌گیری استفاده می‌شود. در این حالت kناحیه مجزا وجود دارد(kناحیه بالای UCL_0). در مقاله لیم و همکاران[۱] نشان داده‌شده است که، $0 < UCL_0 < UCL_1 < \ldots < UCL_{k-1} < UCL_k$ زمانی که $UCL_0 = F^{-1}_{\hat{\gamma}^*}(0.5 | n, v, \delta_0 *)$ ضریب تغییرات چند متغیره نمونه با در نظر گرفتن خطا باشد و $UCL_k = \infty$، در این صورت برای محاسبه امتیاز از رابطه (۱۶) استفاده می‌شود؛ در رابطه (۱۶)، $i = 1, 2, \ldots$ شماره نمونه برای داده‌های فاز دوم است و $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_k$. لازم به ذکر است که برای رابطه حد کنترل بالا با توجه به اینکه به دنبال میانه جمع دنباله های نمونه بوده به این ترتیب از عدد ۰/۵ استفاده شده است.

$$s(\hat{\gamma}_i *) = s_j \quad if \;\; \hat{\gamma}_i * \in [UCL_{j-1}, UCL_j) \quad for \;\; j = 1, 2, \ldots, k . \qquad (۱۶)$$

$$U_i = \begin{cases} 0 & , if \;\hat{\gamma}_i * < UCL_0 \;, \\ U_{i-1} + s(\hat{\gamma}_i *) & , if \;\hat{\gamma}_i * \ge UCL_0 . \end{cases} \qquad (۱۷)$$

مقادیر اولیه به‌صورت $U_0 = 0$ برای داده‌های فاز ۲ است. این مقادیر برای بقیه مقادیر U_i در رابطه (۱۷) محاسبه شده است. حدود نمودار کنترل جمع دنباله چند متغیره به منظور کشف شیفت‌های افزایشی تحت رابطه (۱۸) محاسبه می‌گردد:

$$UCL_j = K \times F^{-1}_{\hat{\gamma}^*}(\alpha_j | n, v, \delta_0^*) \quad for \;\; j = 1, 2, \ldots, k-1 . \qquad (۱۸)$$

در رابطه (۱۸)، K یک عدد ثابت است که با توجه به مقدار ARL_0 مدنظر که با جایگذاری $\tau = 1$به دست می‌آید، محاسبه می‌شود. این رابطه بر اساس $100\alpha_j$امین چندک از توزیع $\hat{\gamma}^*$ با استفاده از رابطه (۱۹) به‌دست‌آمده است:

$$\alpha_j = \Phi\left(\frac{3j}{k-1}\right)\ ,\ for\ j = 1,2,...,k-1\ . \qquad (۱۹)$$

در رابطه (۱۹)، شمارنده $3j$ باعث می‌شود زمانی که $j = k-1$، باشد، میزان α_j برابر چندک $\mu+3\sigma$ از توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد.

درنتیجه بین $UCL_0\ ,UCL_{k-1}$ به $k-1$ ناحیه تقسیم شده است. هرگاه $U_i \geq s_k$ باشد، در نمودار جمع دنباله افزایشی هشدار خارج از کنترل $(\hat{\gamma}_i{}^* \in [UCL_{k-1},UCL_k))$ دریافت می‌شود. برای راحتی نمایش به‌اختصار از $RS_{\hat{\gamma}_i{}^*}(k\ ,K\ ,\{s_1,s_2,...,s_k\})$ برای نشان دادن نمودار جمع دنباله افزایشی استفاده می‌شود. احتمال این‌که مقدار ضریب تغییرات چندمتغیره نمونه در هر ناحیه بیافتد، طبق رابطه (۲۰) می باشد، احتمال قرار گرفتن آماره زیر UCL_0 با p_0 نمایش داده می‌شود و با استفاده از رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
p_j &= pr(\hat{\gamma}_i^* \in [UCL_{j-1},UCL_j)) = pr(\hat{\gamma}^* < UCL_j) - pr(\hat{\gamma}^* < UCL_{j-1}) \\
p_j &= 1 - F_F\left(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_j{}^2}\middle| v,n-v,\delta^*\right) - 1 \\
&\quad + F_F\left(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_{j-1}{}^2}\middle| v,n-v,\delta^*\right) \\
p_j &= F_F\left(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_{j-1}{}^2}\middle| v,n-v,\delta^*\right) \\
&\quad - F_F\left(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_j{}^2}\middle| v,n-v,\delta^*\right).
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

$$p_0 = \begin{cases} 0.5 & ,if\ \ \tau = 1\ , \\ 1 - F_F\left(\dfrac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_0{}^2}\middle| v\ ,n-v\ ,\delta^*\right). & ,if\ \ \tau \neq 1. \end{cases} \qquad (۲۱)$$

حال با داشـــتن تعداد و امتیاز هر ناحیه و همچنین پارامتر متناظر با هر مجموعه از امتیازات حدود متناظر با هرکدام محاسبه می‌شود، نکته‌ی حائز اهمیت برای محاسبه متوسط طول دنباله برای هر مجموعه از امتیاز؛ تشـــکیل ماتریس حالت و محاسبه احتمالات مربوطه است که به کمک آن‌ها و روابط زنجیره مارکوف مقدار متوســـط طول دنباله محاســـبه شـــود. با در نظر گرفتن امتیاز تجمعی در هر مرحله به‌عنوان حالت در ماتریس انتقال، ماتریس p محاســبه می‌شــود و با حذف آخرین سـطر و آخرین سـتون از این ماتریس، ماتریس Q محاســـبه می‌شـــود. شـــایان‌ذکر اســـت که امتیاز تجمعی(حالت) همیشه از مقدار صفر شروع می‌شود. درنهایت مقدار متوســـط طول دنبالـه برای هر مجموعـه از داده‌هـا محاسـبه می‌شـود و به تحلیل‌گر در تشخیص حالت خارج از کنترل برای پایش فرآیند یاری می‌دهد. در ادامه با داشـــتن ماتریس p و حذف سـطر و سـتون آخر آن ماتریس Q به دسـت می‌آید که با اسـتفاده از رابطه (۲۲) معیار متوسـط طول دنبالـه محـاســـبـه می‌شـــود، کـه در رابطـه (۲۲)، $\mathbf{S^T} = (1,0,...,0)$ بردار احتمالات اولیه اســـت، $\mathbf{I}$ ماتریس همانی و $\mathbf{1}$ برداری اســـت که تمام عناصـــر آن مقدار یک باشـند. در خصـوص نحوه بدسـت آوردن ARL و توضـیحات بیشتر، می توان به مقاله لیم و همکاران [۱] مراجعه کرد.

$$\text{ARL} = \mathbf{S^T}(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}. \qquad (۲۲)$$

۳. تحلیل داده ها و یافته های پژوهش

در این تحلیل، پارامترهای نمودار جمع دنباله چند متغیره به‌صورت $k=4$، $ARL_0=370$، $n\in\{5,10\}$، $v=3,4$، $m\in\{1,2,5\}$، $\gamma_0\in\{0.1,0.3,0.5\}$ و $\tau\in\{1.25,1.50\}$ با شیفت $\boldsymbol{\theta}\in\{0.1\mathbf{I},0.3\mathbf{I},0.5\mathbf{I},1\mathbf{I},2\mathbf{I}\}$ افزایشی مفروض هستند؛ مقادیر بهینه برای امتیاز نواحی و پارامتر K و متناسب با آن‌ها مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل ARL_1 به‌دست آمده‌اند. به دلیل بالا بودن حجم نتایج به‌دست‌آمده، نتایج مربوط به ۳ مشخصه کیفی، اندازه نمونه ۵، شیفت ۱.۲۵ را برای مقدار اولیه ضریب تغییرات چند متغیره ۰.۳ امتیازات و پارامتر مربوط گزارش شده است. در جدول (۱) نتایج متوسط طول دنباله برای $\gamma_0=0.3$، پارامتر $K=1.049$، $k=4$، $S_k=\{0,1,3,5\}$، $\boldsymbol{\theta}\in\{0.1\mathbf{I},0.3\mathbf{I},0.5\mathbf{I},1\mathbf{I},2\mathbf{I}\}$، $\tau=1.25$، $v=3$، $n=5$ و $m\in\{1,2,5\}$ آورده شده است که مقدار متوسط طول دنباله در حالت بدون در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری از مطالعه لیم و همکاران [۱] آورده شده است.

نتایج جدول (۱) نشان می‌دهد متوسط طول دنباله با افزایش مقدار خطا کاهش پیداکرده است؛ همچنین رویکرد افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری باعث نزدیک شدن نتایج به واقعیت می‌شود. زیرا متوسط طول دنباله با افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری افزایش می‌یابد و به واقعیت نزدیک‌تر می‌شود؛ و در نتیجه منجر به کاهش اثر خطای اندازه گیری روی عملکرد نمودار کنترل می‌شود. در ادامه هم برای مثال یک نمونه از ماتریس p برای امتیازات $S_k=\{0,1,3,5\}$ آورده شده‌است. در جدول (۲) در این مورد به‌خصوص و برای مثال حالت (مجموعه‌ی امتیازات تجمعی در هر مرحله) به‌صورت $\{0,1,2,...,4,\geq 5\}$ است که به‌عنوان ۶ حالت در نظر گرفته می‌شود؛ حال ماتریس p به‌صورت جدول (۲) است.

در نهایت در این ماتریس سطر آخر حالت جاذب است، به این معنی که اگر امتیاز تجمعی مقداری بیشتر از ۵ داشته باشد با توجه به امتیاز نواحی غیرممکن است که از این حالت بیرون آمده و به حالت تحت کنترل بازگردد.

جدول ۱: نتایج نمودار افزایشی جمع دنباله با و بدون نظر گرفتن خطای اندازه گیری

$v=3, n=5, \tau=1.25$																							
$m=1$								$m=2$								$m=5$							
γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1	γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1	γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1
۰.۳	۱.۰٤۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵.۹۳۳۲	۰.۳	۱.۰٤۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵.۹۳۳۲	۰.۳	۱.۰٤۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵.۹۳۳۲
		۰	۱	۳	۵	۰.۱*I	۳۵.۵۸۲۱			۰	۱	۳	۵	۰.۱*I	۳۵.۷۵٦۱			۰	۱	۳	۵	۰.۱*I	۳۵.۸٦۲۰
		۰	۱	۳	۵	۰.۳*I	۳٤.۹۱٦۰			۰	۱	۳	۵	۰.۳*I	۳۵.٤۱۱۰			۰	۱	۳	۵	۰.۳*I	۳۵.۷۲۱۱
		۰	۱	۳	۵	۰.۵*I	۳٤.۲۹۹۷			۰	۱	۳	۵	۰.۵*I	۳۵.۰۷۷۹			۰	۱	۳	۵	۰.۵*I	۳۵.۵۸۲۱
		۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۲.۹۸۹۲			۰	۱	۳	۵	۱*I	۳٤.۲۹۹۷			۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۵.۲٤۲۹
		۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۱.٤٤۲٦			۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۲.۹۸۹۲			۰	۱	۳	۵	۲*I	۳٤.٦۰۱۵

جدول ۲: نمایش ماتریس **p** برای ۴ ناحیه و امتیازات {۰،۱،۳،۵}

حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	p_0+p_1	p_2	0	p_3	0	p_4
۲	p_0	p_1	p_2	0	p_3	p_4
۳	p_0	۰	p_1	p_2	0	p_3+p_4
۴	p_0	0	0	p_1	p_2	p_3+p_4
۵	p_0	0	0	0	p_1	$p_2+p_3+p_4$
۶	0	0	0	0	0	۱

در نمودار جمع دنبلله اگرمقدار امتیاز تجمعی یا همان آماره مربوط به نمودار جمع دنباله بیشتر از S_k باشد حالت خارج از کنترل رخ می‌دهد و همچنین اگر در نمودار جمع دنباله افزایشـــی برای مثال شـــیفتی در جهت عکس صـــورت گیرد مقدار امتیاز به صفر برمی‌گردد که در رابطه (۱۶) نشان داده شده است.

با توجه به آنالیز حساسیت‌های صورت گرفته روی $\boldsymbol{\theta}\in\{0.1\mathbf{I}, 0.3\mathbf{I}, 0.5\mathbf{I}, 1\mathbf{I}, 2\mathbf{I}\}$، $\tau=1.25$ و $\tau=1.5$، $v=3,4$، $n=5,10$ و $m\in\{1,2,5\}$ در جدول (۳) و (۴)، نتایج نشان می‌دهد که هر چه خطای اندازه گیری بیشتر شود متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل از متوسط طول دنباله در حالت بدون خطا فاصله گرفته و کاهش می‌یابد. با افزایش تعداد دفعات اندازه گیری مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل به حالت بدون خطا نزدیک و اثر نامطلوب خطای اندازه گیری روی عملکرد نمودار کنترل کاهش می یابد. زمانی که اندازه نمونه بزرگ می شود و رفتار مشابه در عملکرد نمودار کنترل دیده می شود لیکن مقادیر متوسط طول دنباله کوچکتر می شوند. با افزایش تعداد مشخصه کیفی، مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل افزایش می یابند لیکن رفتار مشابه در عملکرد نمودار کنترل مشاهده می شود یعنی با افزایش خطای اندازه گیری مقادیر متوسط طول دنباله خارج از کنترل کاهش یافته و از مقدار متوسط طول دنباله در حالت بدون خطا فاصله می گیرند لیکن با افزایش تعداد دفعات اندازه گیری مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خطا به مقادیر متوسط طول دنباله در حالت بدون خطا نزدیک می‌شوند.

مقادیر ارزش انتظاری متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل برای $v=3,4$، $n=5,10$ و $m\in\{1,2,5\}$ در جدول ۵ گزارش شده است که بر اساس مقادیر متوسط طول دنباله خارج از کنترل تحت شیفتهای ۱/۲۵ و ۱/۵ محاسبه شده است. همچنین فرض شده است که شیفتها از توزیع یکنواخت تبعیت می کنند و هر کدام با احتمال یکسان رخ می دهند در این صورت $EARL$ متوسط مقادیر ARL در دو شیفت بررسی شده خواهد بود که برای حالتهای مختلف (با و بدون خطای اندازه گیری) و دفعات متعدد اندازه گیری ۱، ۲ و ۵، برای تعداد ۳ و ۴ مشخصه کیفی و اندازه نمونه ۵ و ۱۰ گزارش شده است. نتایج جدول ۵ نیز رفتار مشابه متوسط طول دنباله در جداول ۳ و ۴ را نشان می دهد به گونه ای که با افزایش خطا معیار از حالت بدون خطا فاصله و با افزایش دفعات اندازه گیری این اثر نامطلوب کاهش و به مقدار بدون خطا نزدیک می شود.

جدول ۳: متوسط طول دنباله خارج از کنترل در حالت خطای اندازه‌گیری برای $v = 3,4$ و $n = 5,10$

$\tau = 1.25$, $\gamma_0 = 0.3$																
		$m = 1$					$m = 2$					$m = 5$				
		θ					θ					θ				
	0**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	0.3**I**	2**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	1**I**	2**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	1**I**	2**I**
$v = 3$ $n = 5$	۳۵.۹۳۳۲	۳۵.۵۸۲۱	۳۴.۹۱۶۰	۳۴.۲۹۹۷	۳۲.۹۸۹۲	۳۱.۴۴۲۶	۳۵.۷۵۶۱	۳۵.۴۱۱۰	۳۵.۰۷۷۹	۳۴.۲۹۹۷	۳۲.۹۸۹۲	۳۵.۸۶۲۰	۳۵.۷۲۱۱	۳۵.۵۸۲۱	۳۵.۲۴۲۹	۳۴.۶۰۱۵
$v = 3$ $n = 10$	۱۳.۶۶۵۴	۱۳.۵۶۴۹	۱۳.۳۶۷۹	۱۳.۱۷۵۹	۱۲.۷۱۵۱	۱۱.۸۵۸۷	۱۳.۶۱۵۰	۱۳.۵۱۵۲	۱۳.۴۱۶۷	۱۳.۱۷۵۹	۱۲.۷۱۵۱	۱۳.۶۴۵۲	۱۳.۶۰۴۹	۱۳.۵۶۴۹	۱۳.۴۶۵۸	۱۳.۲۷۱۳
$v = 4$ $n = 5$	۵۲.۹۴۴۶	۵۱.۷۵۸۱	۴۹.۴۴۶۹	۴۷.۲۲۸۷	۴۲.۱۸۱۶	۳۴.۸۳۷۲	۵۲.۳۴۸۹	۵۱.۱۷۲۳	۵۰.۰۱۶۵	۴۷.۲۲۸۷	۴۲.۱۸۱۶	۵۲.۷۰۵۸	۵۲.۲۳۰۴	۵۱.۷۵۸۱	۵۰.۵۹۱۷	۴۸.۳۲۵۴
$v = 4$ $n = 10$	۱۵.۱۱۷۱	۱۴.۷۲۴۸	۱۳.۹۶۰۷	۱۳.۲۲۳۶	۱۱.۴۹۵۲	۸.۴۹۲۵	۱۴.۹۲۰۱	۱۴.۵۳۱۳	۱۴.۱۴۹۲	۱۳.۲۲۳۶	۱۱.۴۹۵۲	۱۵.۰۳۸۱	۱۴.۸۸۰۹	۱۴.۷۲۴۸	۱۴.۳۳۹۴	۱۳.۵۸۸۸

جدول ۴: متوسط طول دنباله خارج از کنترل در حالت خطای اندازه‌گیری برای $v=3,4$ و $n=5,10$

$\tau=1.5$, $\gamma_0=0.3$																
		$m=1$					$m=2$					$m=5$				
		θ					**θ**					**θ**				
	0**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	0.3**I**	2**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	1**I**	2**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	1**I**	2**I**
$v=3$ $n=5$	۱۲.۴۶۴۰	۱۲.۳۴۱۱	۱۲.۱۱۱۳	۱۱.۹۰۳۱	۱۱.۴۸۲۷	۱۱.۱۰۰۰	۱۲.۴۰۱۹	۱۲.۲۸۱۷	۱۲.۱۶۶۷	۱۱.۹۰۳۱	۱۱.۴۸۲۷	۱۲.۴۳۹۰	۱۲.۳۸۹۶	۱۲.۳۴۱۱	۱۲.۲۲۳۵	۱۲.۰۰۴۴
$v=3$ $n=10$	۴.۶۷۹۴	۴.۶۵۱۷	۴.۵۹۶۸	۴.۵۴۲۴	۴.۴۰۸۲	۴.۱۳۹۸	۴.۶۶۵۶	۴.۶۳۷۹	۴.۶۱۰۵	۴.۵۴۲۴	۴.۴۰۸۲	۴.۶۷۳۹	۴.۶۶۲۸	۴.۶۵۱۷	۴.۶۶۲۴۲	۴.۵۶۹۵
$v=4$ $n=5$	۲۰.۷۲۵۱	۲۰.۱۰۰۶	۱۸.۹۰۵۸	۱۷.۷۸۸۷	۱۵.۳۷۴۲	۱۲.۲۵۲۵	۲۰.۴۱۰۶	۱۹.۷۹۵۰	۱۹.۱۹۷۵	۱۷.۷۸۸۷	۱۵.۳۷۴۲	۲۰.۵۹۸۸	۲۰.۳۴۸۳	۲۰.۱۰۰۶	۱۹.۴۹۳۹	۱۸.۳۳۷۱
$v=4$ $n=10$	۵.۲۶۰۹	۵.۱۱۷۱	۴.۸۳۷۳	۴.۵۶۷۶	۳.۹۳۳۲	۲.۸۰۴۹	۵.۱۸۸۷	۵.۰۴۶۲	۴.۹۰۶۳	۴.۵۶۷۶	۳.۹۳۳۲	۵.۲۳۲۰	۵.۱۷۴۳	۵.۱۱۷۱	۴.۹۷۶۰	۴.۷۰۱۲

جدول ۵: مقادیر انتظاری متوسط طول دنباله (**EARL**) با $v=3,4$ و $n=5,10$

		$m=1$					$m=2$					$m=5$				
θ	0**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	0.3**I**	2**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	1**I**	2**I**	0.1**I**	0.3**I**	0.5**I**	1**I**	2**I**
$v=3$ $n=5$	۲۴.۲۰	۲۳.۹۶	۲۳.۵۱	۲۳.۱۰	۲۲.۲۴	۲۱.۲۷	۲۴.۰۸	۲۳.۸۵	۲۳.۶۲	۲۳.۱۰	۲۲.۲۴	۲۴.۱۵	۲۴.۰۶	۲۳.۹۶	۲۳.۷۳	۲۳.۳۰
$v=3$ $n=10$	۹.۱۷	۹.۱۱	۸.۹۸	۸.۸۶	۸.۵۶	۸.۰۰	۹.۱۴	۹.۰۸	۹.۰۱	۸.۸۶	۸.۵۶	۹.۱۶	۹.۱۳	۹.۱۱	۹.۰۶	۸.۹۲
$v=4$ $n=5$	۳۶.۸۳	۳۵.۹۳	۳۴.۱۸	۳۲.۵۱	۲۸.۷۸	۲۳.۵۴	۳۶.۳۸	۳۵.۴۸	۳۴.۶۱	۳۲.۵۱	۲۸.۷۸	۳۶.۶۵	۳۶.۲۹	۳۵.۹۳	۳۵.۰۴	۳۳.۳۳
$v=4$ $n=10$	۱۰.۱۹	۹.۹۲	۹.۴۰	۸.۹۰	۷.۷۱	۵.۶۵	۱۰.۰۵	۹.۷۹	۹.۵۳	۸.۹۰	۷.۷۱	۱۰.۱۴	۱۰.۰۳	۹.۹۲	۹.۶۶	۹.۱۵

٤. نتیجه گیری و پیشنهادها برای مطالعات آتی

در این مقاله، نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضـــریب تغییرات چند متغیره با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری توسعه داده شد و با استفاده از زنجیره مارکوف معیار متوسط طول دنباله محاسبه شد. عملکرد نمودار کنترل جمع دنباله پیشـــنهادی در حضـــور خطای اندازه گیری با عملکرد این نمودار در حالت بدون خطا و با اســـتفاده زنجیره مارکوف بر حسب معیار متوسط طول دنباله مقایسه و نتایج نشان داد که عملکرد نمودار کنترل پیشـنهادی با افزایش خطای اندازه گیری نســـبت به عملکرد این نمودار در حالت بدون خطا فاصـــله گرفته و خطای اندازه گیری اثر منفی روی عملکرد این نمودار کنترل دارد. در ادامه رویکرد افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری پیشـــنهاد و عملکرد نمودار در حضـــور خطای اندازه گیری بر حسب معیار متوسط طول دنباله به عملکرد این نمودار در حـالـت بـدون خطـا نزدیـک شـــد. آنـالیز حســـاســـیت‌های لازم روی پارامترهای مؤثر از جمله تعداد دفعات اندازه‌گیری در رویکرد اندازه‌گیری چند گانه، تعداد مشخصه کیفی مورد بررسی، اندازه نمونه، شیفت در مقدار ضــریب تغییرات در حالت خارج از کنترل، ضــریب تغییرات چند متغیره در حالت اولیه و مقادیر مختلف خطای اندازه‌گیری انجام شـــد. از جمله پیشـــنهادات آتی در حوزه نمودارهای کنترل ضـــریب تغییرات میتوان به بررســـی اثر خطای اندازه گیری در ســـایر نمودارهای کنترلی شـــامل نمودارهای تطبیقی برای پایش ضـریب تغییرات چند متغیره اشاره کرد. همچنین بررسی روش‌های مختلف نمونه‌گیری و یا اسـتفاده از اطلاعات کمکی در پایش ضـریب تغییرات چند متغیره از دیگر پتانسـیل های این موضـوع برای پژوهش‌های آتی می باشند. به عنوان یکی دیگر از موارد پیشنهادی برای پژوهش‌های آتی، می‌توان به مقایسه نتایج این مقاله با دیگر مقالاتی که در این حوزه کار کرده لند، اشـــاره کرد. ارزیابی عملکرد نمودار پیشـنهادی با اسـتفاده از معیارهایی همچون SDRL، علاوه بر ARL نیز از جمله دیگر پیشنهاداتی است که می تواند در این حوزه مطرح شود.

منابع

١. Lim, A. J., Khoo, M. B., Teoh, W. L., & Haq, A. Run sum chart for monitoring multivariate coefficient of variation. Computers & Industrial Engineering, ١٠٩, (٢٠١٧). ٨٤-٩٥.

٢. Kang, C. W., Lee, M. S., Seong, Y. J., & Hawkins, D. M. A control chart for the coefficient of variation. Journal of quality technology, ٣٩(٢), (٢٠٠٧). ١٥١-١٥٨.

٣. Tran, K. P., Heuchenne, C., & Balakrishnan, N. On the performance of coefficient of variation charts in the presence of measurement errors. Quality and Reliability Engineering International, ٣٥(١), (٢٠١٩). ٣٢٩-٣٥٠.

٤. Yeong, W. C., Khoo, M. B. C., Teoh, W. L., & Castagliola, P. A control chart for the multivariate coefficient of variation. Quality and Reliability Engineering International, ٣٢(٣), (٢٠١٦). ١٢١٣-١٢٢٥.

٥. Dawod, A. B., Abbasi, S. A., & Al-Momani, M. On the performance of coefficient of variation control charts in Phase I. Quality and Reliability Engineering International, ٣٤(٦), (٢٠١٨). ١٠٢٩-١٠٤٠.

٦. Khatun, M., Khoo, M. B., Lee, M. H., & Castagliola, P. One-sided control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation in short production runs. Transactions of the Institute of Measurement and Control, ٤١(٦), (٢٠١٩). ١٧١٢-١٧٢٨.

٧. Yeong, W. C., Khoo, M. B. C., Lim, S. L., & Teoh, W. L. The coefficient of variation chart with measurement error. Quality Technology & Quantitative Management, ١٤(٤), (٢٠١٧). ٣٥٣-٣٧٧.

٨. Tran, K. P., Heuchenne, C., & Balakrishnan, N. On the performance of coefficient of variation charts in the presence of measurement errors. Quality and Reliability Engineering International, ٣٥(١), (٢٠١٩). ٣٢٩-٣٥٠.

٩. Nguyen, Q. T., Tran, K. P., Castagliola, P., Celano, G., & Lardjane, S. One-sided synthetic control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation. Journal of Statistical Computation and Simulation, ٨٩(١٠), (٢٠١٩). ١٨٤١-١٨٦٢.

١٠. Giner-Bosch, V., Tran, K. P., Castagliola, P., & Khoo, M. B. C. An EWMA control chart for the multivariate coefficient of variation. Quality and Reliability Engineering International, ٣٥(٦), (٢٠١٩). ١٥١٥-١٥٤١.

١١. Haq, A., & Khoo, M. B. New adaptive EWMA control charts for monitoring univariate and multivariate coefficient of variation. Computers & Industrial Engineering, ١٣١, (٢٠١٩). ٢٨-٤٠.

١٢. Chew, X. Y., Khaw, K. W., & Yeong, W. C. The efficiency of run rules schemes for the multivariate coefficient of variation: a Markov chain approach. *Journal of Applied Statistics*, *47*(٣), (٢٠٢٠). ٤٦٠-٤٨٠.

١٣. Tran, K. P., Nguyen, H. D., Nguyen, Q. T., & Chattinnawat, W. One-sided synthetic control charts for monitoring the coefficient of variation with measurement errors. In *2018 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), (2018).* ١٦٦٧-١٦٧١ .

١٤. Ayyoub, H. N., Khoo, M. B., Saha, S., & Castagliola, P. Multivariate coefficient of variation charts with measurement errors. Computers & Industrial Engineering, ١٤٧, (٢٠٢٠). ١٠٦٦٣٣.

Designing a run sum control chart for monitoring multivariate coefficient of variation in the presence of measurement errors

Mohammadmobin Hemmati[a], **Amirhossein Amiri**[b*], **Zahra Jalilibal**[c]

[a] *M.Sc. Degree, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Shahed University, Tehran, Iran*

[b] *Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Shahed University, Tehran, Iran*

[c] *Ph.D. Candidate, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Shahed University, Iran Tehran,*

Corresponding author: Amirhossein Amiri (*amiri@shahed.ac.ir)*

Abstract

Most Shewhart control charts are designed to monitor changes in the mean or variance of the process. There are some situations when the process mean fluctuates from time to time but is still considered as in-control and the process standard deviation is a linear function of the process mean. In addition, in some cases, the mean and the variance of a process are actually dependent on each other. Also, in many processes, monitoring the mean or variance of the process is unreasonable due to the nature of the process, and it is recommended to use coefficient of variation to monitor the process. Although monitoring multivariate coefficient of variation has been studied in both Phases I and II, the design of chart for monitoring multivariate CV considering measurement errors has been studied fewer in previous studies and hence it has been considered in this research. In this paper, a run sum control chart is developed for monitoring multivariate coefficient of variation in the presence of measurement errors in Phase II and the performance of the proposed chart with and without the assumption of measurement errors is compared through average run length (ARL) criterion based on Markov chain approach. The results show that, the presence of measurement errors has a negative effect on the performance of the run sum control chart. In other words, ARL of the run sum chart in the presence of measurement errors gets far away from the corresponding value without measurement errors as the magnitude of measurement errors increases. This research considers multiple measurements approach to reduce the effect of measurement errors on the performance of control charts in monitoring the multivariate coefficient of variation in Phase II. The results of the proposed chart's performance show that ARL decreases in the presence of measurement errors due to increasing the effect of measurement errors on the performance of control chart. The results show that, by using multiple measurements approach, the results will become closer to the case without measurement errors.

Keywords: Control chart, Monitoring coefficient of variation, Measurement errors, Multivariate coefficient of variation, Markov chain.