مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۴۰۱)
دوره‌ی ۱-۳۸، شماره‌ی ۱، ص. ۱۱۱-۱۱۷، (پژوهشی)

Original Article

طراحی نمودار کنترل جمع دنباله‌ی چندمتغیره برای پایش ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری

محمدمبین همتی (کارشناس‌ارشد)
امیرحسین امیری* (استاد)
زهرا جلیلی بال (دانشجوی دکتری)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد

نمودارهای کنترل شوهارتی برای پایش میانگین یا واریانس طراحی شده‌اند، اما در بسیاری از فرایندها پایش میانگین و واریانس به دلیل ماهیت فرایند امکان‌پذیر نیست و استفاده از ضریب تغییرات برای پایش فرایند توصیه می‌شود. در نوشتار حاضر، طراحی نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره با در نظرگرفتن خطای اندازه‌گیری انجام می‌شود. همچنین راهکار مناسب برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی در فاز ۲ ارائه می‌شود. در ادامه، عملکرد نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری با عملکرد نمودار کنترل در حالت بدون خطا و با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف بر اساس معیار متوسط طول دنباله مقایسه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد معیار متوسط طول دنباله با افزایش مقدار خطای اندازه‌گیری کاهش می‌یابد و مقادیر از حالت بدون در نظرگرفتن خطای اندازه‌گیری دور می‌شوند.

واژگان کلیدی: نمودارکنترل، پایش ضریب تغییرات، خطای اندازه‌گیری، ضریب تغییرات چندمتغیره، زنجیره‌ی مارکوف.

mobin.hemmati.75@gmail.com
amiri@shahed.ac.ir
zjalili222@alumni.ut.ac.ir

۱. مقدمه

اغلب نمودارهای کنترل شوهارتی برای پایش تغییرات در میانگین یا واریانس فرایند طراحی‌شده‌اند. اما در بسیاری از فرایندها پایش میانگین و واریانس فرایند به دلیل ماهیت فرایند مورد نظرکاری غیرمعقول است.[۱] از جمله دلایل استفاده از ضریب تغییرات برای پایش فرایند عبارت‌اند از:

۱. مقایسه تغییرات در مجموعه داده‌های مختلف با واحدهای اندازه‌گیری مختلف؛

۲. وجود مقادیر بسیار مختلف برای میانگین؛

۳. هنگامی‌که میانگین یا انحراف معیار فرایند از یک نمونه به نمونه‌ی دیگر ثابت نباشد و واریانس ترکیبی از میانگین باشد، ممکن است پایش میانگین و انحراف معیار فرایند هشداری مبنی بر تحت‌کنترل نبودن فرایند بدهد، در حالی که فرایند مورد نظر تحت‌کنترل است و این هشدار به دلیل ماهیت ذاتی فرایند مورد نظر بوده است.[۲]

در بسیاری ازکاربردها کیفیت فرایند یا محصول به‌وسیله‌ی چندین مشخصه‌ی کیفی توصیف می‌شود که در این حالت از پایش ضریب تغییرات چندمتغیره استفاده می‌شود. از طرف دیگر در بیشترکاربردهای واقعی، مقادیر اندازه‌گیری شده به‌وسیله‌ی تجهیزات اندازه‌گیری بیان‌گر مقادیر واقعی مشخصه‌های کیفی محصول نیستند. وجود خطای اندازه‌گیری در نمودارهای کنترل امری رایج است و روی عملکرد نمودارهای کنترل تأثیر می‌گذارد.[۳] ینگ و همکاران[۴] اولین نمودارکنترل را برای پایش ضریب تغییرات در حالت چندمتغیره تحت تغییرات معلوم و نامعلوم ارائه کردند. لیم و همکاران[۱] نمودار جدید جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات در حالت چندمتغیره در فاز دوم را ارائه کردند. عباسی و همکاران[۵] برای اولین بار در ادبیات موضوع به پایش ضریب تغییرات در فاز یک پرداختند. برای نشان دادن توانایی، نمودار ارائه شده از معیار احتمال هشدار استفاده شده است. ختان و همکاران[۶] روشی برای پایش ضریب تغییرات در حالت چندمتغیره در فرایندهای تولید کوتاه‌مدت ارائه دادند. ینگ و همکاران[۷] برای اولین بار نمودارکنترل برای پایش ضریب تغییرات اما به‌صورت تک‌متغیره را در حالت وجود خطای اندازه‌گیری ارائه دادند. تران و همکاران[۸] یک نمودارکنترل شوهارتی و یک نمودارکنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) با حدکنترل بالا برای پایش ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری توسعه دادند. نگیان و همکاران[۹] دو نمودار ترکیبی با حدود یک‌طرفه برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره ارائه کردند. جینجربوش و همکاران[۱۰] یک نمودار کنترل چندمتغیره‌ی میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش ضریب تغییرات را طراحی کردند. حق

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۶/۱، اصلاحیه ۱۴۰۰/۸/۲۵، پذیرش ۱۴۰۰/۹/۲.
DOI:10.24200/J65.2021.58429.2232

و همکاران[۱۱] دو نمودار کنترل EWMA تطبیقی برای هر دو حالت تک‌متغیره و چندمتغیره برای پایش ضریب تغییرات پیشنهاد کردند. چو و همکاران[۱۲] نمودار کنترلی را برای پایش ضریب تغییرات با در نظر گرفتن قوانین حساس‌سازی و روابط زنجیره‌ی مارکوف بررسی کردند. ترن و همکاران[۱۳] در مقاله‌یی به بررسی یک نمودار کنترل برای پایش ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری پرداختند. در نهایت ایوب و همکاران[۱۴] یک نمودار شوهارتی برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری ارائه دادند. در این مطالعه، یک نمودار کنترل جمع دنباله[۱] برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری در فاز دوم ارائه شده است. در نمودار کنترل پیشنهادی از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف برای محاسبه‌ی متوسط طول دنباله و از رویکرد اندازه‌گیری چندگانه برای کاهش اثر منفی خطای اندازه‌گیری روی عملکرد نمودار کنترل استفاده شده است. در ادامه مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش دوم مدل پیشنهادی به تفصیل شرح داده شده که شامل آماره‌ی پایش چندمتغیره‌ی ضریب تغییرات، مدل خطی خطای اندازه‌گیری و نمودارکنترل جمع دنباله به‌صورت چندمتغیره و در حضور خطای اندازه‌گیری است. در بخش سوم به تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش می‌پردازیم و در بخش چهارم نیز به نتیجه‌گیری و بحث در رابطه با نتایج بدست آمده پرداخته‌ایم.

۲. روش‌شناسی پژوهش

در این بخش ضمن تبیین مدل خطای اندازه‌گیری و آماره‌ی ضریب تغییرات چندمتغیره در حالت خطا به توسعه‌ی نمودار کنترل پیشنهادی جمع دنباله در حضور خطای اندازه گیری در فاز ۲ پرداخه می‌شود.

۱.۲. مدل خطی خطای اندازه‌گیری

لازم به ذکر است که t اندیس تعداد دفعات اندازه‌گیری، i اندیس شماره‌ی نمونه[۲] (زمان)، j اندیس اندازه‌ی نمونه،[۳] k نشان‌دهنده‌ی تعداد نواحی، K نشان‌دهنده‌ی پارامتر ثابت در نمودار جمع دنباله که بر اساس مقدار اولیه طول دنباله در حالت تحت‌کنترل به‌دست می‌آید و v نشان‌دهنده‌ی تعداد مشخصه‌ی کیفی مورد بررسی است. در مطالعه‌ی ایوب و همکاران[۱۴] آمده است؛ $\boldsymbol{Y}_{ij}$ یک بردار $۱ \times v$ از مشخصات کیفی برای $i = ۱, ۲, \ldots$ و $j = ۱, ۲, \ldots, n$ است؛ زمانی‌که n اندازه نمونه و i شماره نمونه باشد. $\boldsymbol{Y}_{ij}$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره‌ی مستقل (MN) با بردار تصادفی میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ است؛ $(Y_{ij} - MN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}))$، فرض می‌شود که مقادیر $\boldsymbol{Y_{ij}}$ به‌صورت غیرمستقیم از نتایج $\{\boldsymbol{X^*_{i,j,۱}}, \boldsymbol{X^*_{i,j,۲}}, \ldots, \boldsymbol{X^*_{i,j,m}}\}$ برای $m \geq ۱$ که مجموعه‌ی تعداد اندازه‌گیری‌هاست (t)، با نماد * به معنی داشتن خطای اندازه‌گیری به دست می‌آید و $\boldsymbol{X^*_{i,j,t}}$ با رابطه‌ی خطای خطی (۱) با مقادیر $\boldsymbol{Y_{ij}}$ مرتبط می‌شود. بردار $\mathbf{A}$ و ماتریس $\mathbf{B}$ در این مطالعه مقادیری مشخص‌اند؛ در حالی که $\varepsilon_{i,j,t}$ یک بردار $۱ \times v$ از خطای تصادفی است که توزیع نرمال چندمتغیره دارد $(MN((۰, \boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}))$ و $\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}$ مقداری مشخص دارد که به‌عنوان ماتریس واریانس بردار $\boldsymbol{\varepsilon_{i,j,t}}$ شناخته می‌شود. اگر $\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}} = \sum_{t=۱}^{m} \mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,t}}/_{m}$ و $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*{}_{\mathbf{i}} = \sum_{j=۱}^{n}\sum_{t=۱}^{m} \mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,t}}/_{mn}$ را در نظر بگیریم که در آن‌ها $\overline{\boldsymbol{X}}^*_{i,j}$ بردار میانگینی از تمام m بار اندازه‌گیری $\boldsymbol{X^*_{i,j,۱}}, \boldsymbol{X^*_{i,j,۲}}, \ldots, \boldsymbol{X^*_{i,j,m}}$ برای نمونه jام $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ که هرکدام اندازه نمونه n دارند و $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}^*_i$ بردار میانگین کلی $\overline{\boldsymbol{X}}^*_{i,۱}, \overline{\boldsymbol{X}}^*_{i,۲}, \ldots, \overline{\boldsymbol{X}}^*_{i,n}$ برای نمونه‌ی iام است.

$$\mathbf{X}^*{}_{\mathbf{i,j,t}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_{\mathbf{i,j}} + \varepsilon_{i,j,t}\ . \qquad (۱)$$

$$\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,t}} \sim MN(\mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} + \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)\ . \qquad (۲)$$

$$\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}} \sim MN(\mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} + {}^{\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon}/_{m})\ . \qquad (۳)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}} \sim MN(\mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, {}^{۱}/_{n}(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} + {}^{\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon}/_{m}))\ . \qquad (۴)$$

۲.۲. ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطا

فرض کنید که $\{\mathbf{X}_۱, \mathbf{X}_۲, \ldots, \mathbf{X}_n\}$ یک نمونه تصادفی با n عضو باشد که از یک توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ تبعیت کند. ضریب تغییرات چندمتغیره‌ی این نمونه با استفاده از رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود:

$$\gamma = (\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}\boldsymbol{\mu})^{-\frac{۱}{۲}}, \qquad (۵)$$

در این مقاله دو نمودار تک‌جهت، برای پایش چندمتغیره‌ی ضریب تغییرات فرایند با داشتن خطای اندازه‌گیری ارائه شده است. ینگ و همکاران[۴] اشاره کرده‌اند ضریب تغییرات نمونه‌یی چندمتغیره با داشتن خطای اندازه‌گیری از رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود؛ که در آن $\boldsymbol{S}^*_i$ ماتریس واریانس کوواریانس $\overline{\boldsymbol{X}}^*_{i,j}$ با استفاده از رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود. ینگ و همکاران[۴] با در نظر گرفتن عبارت $T^۲ = ({}^{\sqrt{n}}/_{\hat{\gamma}})^۲ = n\overline{\mathbf{X}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-۱}\overline{\mathbf{X}}$ دریافتند $\frac{T^۲}{n-۱}.\frac{n-v}{v} \sim F_{v,n-v,\delta}$ یک توزیع غیرمرکزی F با v و $(n-v)$ درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزی δ است. در نتیجه با توجه به توزیع $\overline{\boldsymbol{X}}^*_{i,j}$ و $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}^*_i$ مقدار پارامتر غیرمرکزی در حضور خطای اندازه‌گیری هم به‌صورت مشابه تابعی از خود ضریب تغییرات است:

$$\delta^* = n\,\boldsymbol{\mu}{*}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}{*}^{-۱}\boldsymbol{\mu}{*}$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\mu}{*} = E(\overline{\boldsymbol{X}}^*_{\mathbf{i,j}})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}{*} = Var(\overline{\boldsymbol{X}}^*_{\mathbf{i,j}})$$

طبق رابطه‌ی ۸ محاسبه می‌شود. بدون از دست دادن عمومیت رابطه‌ی فوق $\mathbf{A}$ را بردار صفر و $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ قرار می‌دهیم، که خلاصه شده رابطه‌ی پارامتر غیرمرکزی به‌صورت رابطه‌ی ۹ است:

$$\hat{\gamma}^* = (\overline{\overline{\boldsymbol{X}^{*T}_i}}\boldsymbol{S}^{*-۱}_{\boldsymbol{i}}\overline{\overline{\boldsymbol{X}^*_i}})^{\frac{-۱}{۲}}. \qquad (۶)$$

$$\mathbf{S}^*_{\mathbf{i}} = \frac{۱}{n-۱}(\sum_{j=۱}^{n}(\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}} - \overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})(\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}} - \overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})^T)\ . \qquad (۷)$$

$$\delta{*} = n(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mu)^T(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon}{m})^{-۱}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu})\ . \qquad (۸)$$

$$\delta{*} = n\,\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{\Sigma} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon}{m})^{-۱}\boldsymbol{\mu} = n\gamma^{-۲} - n\,\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}\frac{\boldsymbol{\theta}}{m}(\mathbf{I} + \frac{\boldsymbol{\theta}}{m})^{-۱}\boldsymbol{\mu}\ . \qquad (۹)$$

که در آن $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}$؛ و نیز می‌توان نشان داد که $\boldsymbol{\theta} = \theta^۲\mathbf{I}$. اگر $\theta^۲$ مقدار قطری از عناصر ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ باشد، خاطرنشان می‌شود $\theta^۲$ نرخ خطای اندازه‌گیری در

نظرگرفته شده ($\theta^2 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma^2$) است، که مقدار داخل پرانتز برای حالت تک‌متغیره است. در این مطالعه:

$$\theta^2 \in P\{0, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0\}$$

$$\boldsymbol{\theta} \in \{0\mathbf{I}, 0.1\mathbf{I}, 0.3\mathbf{I}, 0.5\mathbf{I}, 1.0\mathbf{I}, 2.0\mathbf{I}\}$$

پس به‌صورت مشابه رابطه‌ی ۱۰ توزیع غیرمرکزی F با $v, n-v$ درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزی δ^* است. در نهایت تابع توزیع تجمعی غیرمرکزی F با $v, n-v$ درجه‌ی آزادی برای آماره‌ی ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطا طبق رابطه‌ی ۱۱ است و وارون تابع توزیع تجمعی $\hat{\gamma}^*$ در رابطه‌ی ۱۲ نشان داده شده است. برای محاسبه‌ی حدود کنترلی نمودار [4] با در نظرگرفتن خطای اندازه‌گیری از روابط ۱۳ و ۱۴ استفاده می‌شود:

$$\frac{T*^2}{n-1}.\frac{n-v}{v} \sim F_{v,n-v,\delta*} \, . \tag{10}$$

$$F_{\hat{\gamma}*}(u\,|n,v,\delta*) = 1 - F_{v,n-v,\delta*}\Big(\frac{n(n-v)}{(n-1)vu^2}\Big) \, . \tag{11}$$

$$F_{\hat{\gamma}*}{}^{-1}(\alpha\,|n,v,\delta*) = \sqrt{\frac{n(n-v)}{(n-1)v}\Big[\frac{1}{F^{-1}_{v,n-v,\delta*}(1-\alpha)}\Big]} \, . \tag{12}$$

$$UCL = F^{-1}_{\hat{\gamma}^*}(1-\alpha_0\,|n,v,\delta*_0)\, , \tag{13}$$

$$LCL = F^{-1}_{\hat{\gamma}^*}(\alpha_0\,|n,v,\delta*_0)\, . \tag{14}$$

α_0 احتمال خطای نوع اول، $\delta*_0 = n\gamma_0^{-2} - n\,\boldsymbol{\mu}_0^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{m}}(\mathbf{I}+\frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{m}})^{-1}\boldsymbol{\mu}_0$، $\boldsymbol{\mu}_0$، γ_0، $\boldsymbol{\Sigma}_0$ مقادیر بردار میانگین تحت کنترل، MCV تحت کنترل و ماتریس واریانس کواریانس در حالت تحت کنترل‌اند. برای محاسبه‌ی بردار میانگین و ماتریس واریانس ـ کواریانس در حالت خطادار از رابطه‌ی ۱۵ استفاده می‌شود که در آن بردار میانگین به تعداد مشخصه‌ی کیفی است؛ عنصر اول از فرمول داخل رابطه و عناصر بعدی همه ۱ هستند و ماتریس واریانس ـ کواریانس یک ماتریس همانی با عناصر قطری ۱ و مابقی عناصر صفر به تعداد مشخصه‌ی کیفی مورد بررسی است ($\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}$). لازم به ذکر است بردار میانگین اولیه از حاصل جایگذاری ضریب تغییرات اولیه (γ_0) و بردار میانگین در حالت تحت شیفت با جایگذاری ضریب تغییرات خارج از کنترل ($\gamma_1 = \tau^* y_0$) به دست می‌آید. ماتریس واریانس ـ کواریانس در حالت اولیه و در حالت تحت شیفت $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}$ است.

$$\boldsymbol{\mu} = (\sqrt{\gamma^{-2}-1}, 1, ..., 1)^T . \tag{15}$$

۳.۲. نمودار جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری

نمودار کنترل جمع دنباله، نموداری ساده ولی قدرتمند برای پایش فرایند و کشف شیفت‌های کوچک‌تر با سرعتی بیشتر با استفاده از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف است. این نمودار حدود کنترل را به k ناحیه تقسیم می‌کند و با استفاده از امتیازی که برای هر ناحیه فرض می‌شود، به محاسبه‌ی مجموع تجمعی امتیاز هر نمونه تا محقق شدن شرط خارج از کنترل می‌پردازد. در این مطالعه برای نمودار جمع دنباله چندمتغیره به علت اریب بودن $\hat{\gamma}^*$ و همچنین اهمیت کشف شیفت در حالت افزایشی، از نمودار جمع دنباله برای شیفت‌های افزایشی برای مقادیر ضریب تغییرات چندمتغیره با داشتن خطای اندازه‌گیری استفاده می‌شود. در این حالت k ناحیه‌ی مجزا وجود دارد (k ناحیه بالای UCL_0). در مقاله‌ی لیم و همکاران[1] نشان داده شده است که $0 < UCL_0 < UCL_1 < ... < UCL_{k-1} < UCL_k$. زمانی که $UCL_0 = F^{-1}_{\hat{\gamma}^*}(0.5\,|n,v,\delta_0*)$ ضریب تغییرات چندمتغیره‌ی نمونه با در نظرگرفتن خطا باشد و $UCL_k = \infty$، در این صورت برای محاسبه‌ی امتیاز از رابطه‌ی ۱۶ استفاده می‌شود، که در آن $i = 1, 2, \dots$ شماره‌ی نمونه برای داده‌های فاز دوم است و $0 \le s_1 \le s_2 \le ... \le s_k$. لازم به ذکر است که برای رابطه‌ی حد کنترل بالا با توجه به این که به دنبال میانه‌ی جمع دنباله‌های نمونه هستیم، از عدد ۰٫۵ استفاده شده است.

$$\begin{aligned} & s(\hat{\gamma}_i*) = s_j \quad if\ \hat{\gamma}_i* \in [UCL_{j-1}, UCL_j) \\ & for\ j = 1, 2, ..., k\ . \end{aligned} \tag{16}$$

$$U_i = \begin{cases} 0 & , if\ \hat{\gamma}_i* < UCL_0\ , \\ U_{i-1} + s(\hat{\gamma}_i*) & , if\ \hat{\gamma}_i* \ge UCL_0\ . \end{cases} \tag{17}$$

مقادیر اولیه به‌صورت $U_0 = 0$ برای داده‌های فاز ۲ است. این مقادیر برای بقیه مقادیر U_i در رابطه‌ی ۱۷ محاسبه شده است. حدود نمودار کنترل جمع دنباله‌ی چندمتغیره به منظور کشف شیفت‌های افزایشی تحت رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} & UCL_j = K \times F^{-1}_{\hat{\gamma}^*}(\alpha_j\,|n,v,\delta_0{}^*) \\ & for\ j = 1, 2, ..., k-1\ . \end{aligned} \tag{18}$$

که در آن K یک عدد ثابت است که با توجه به مقدار ARL_0 مد نظر که با جایگذاری $\tau = 1$ به دست می‌آید، محاسبه می‌شود. این رابطه بر اساس $100\alpha_j$ امین چندک از توزیع $\hat{\gamma}^*$ با استفاده از رابطه‌ی ۱۹ به دست آمده است:

$$\alpha_j = \Phi\Big(\frac{3j}{k-1}\Big)\ ,\ \ for\ j = 1, 2, ..., k-1\ . \tag{19}$$

که در آن شمارنده‌ی $3j$ باعث می‌شود زمانی که $j = K - 1$ باشد، میزان α_j برابر چندک $\mu + 3\sigma$ از توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد. در نتیجه بین UCL_0, UCL_{k-1} به $k - 1$ ناحیه تقسیم شده است. هرگاه $U_i \ge s_k$ باشد، در نمودار جمع دنباله‌ی افزایشی هشدار خارج از کنترل ($\hat{\gamma}_i* \in [UCL_{k-1}, UCL_k)$) دریافت می‌شود. برای راحتی نمایش به اختصار از $RS_{\hat{\gamma}_i*}(k, K, \{s_1, s_2, ..., s_k\})$ برای نشان دادن نمودار جمع دنباله‌ی افزایشی استفاده می‌شود. احتمال رخداد ضریب تغییرات چندمتغیره‌ی نمونه در هر ناحیه، مطابق رابطه‌ی ۲۰ است، احتمال قرارگرفتن آماره زیر UCL_0 با p_0 نمایش داده می‌شود و با استفاده از رابطه‌ی ۲۱ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} & p_j = pr(\,\hat{\gamma}_i^* \in [UCL_{j-1}, UCL_j)) = \\ & \quad pr(\,\hat{\gamma}^*\langle UCL_j) - pr(\,\hat{\gamma}^*\langle UCL_{j-1}) \\ & p_j = 1 - F_F\big(\tfrac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_j{}^2}\,|v, n-v, \delta^*\big) - 1 \\ & +F_F\big(\tfrac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_{j-1}{}^2}\,|v, n-v, \delta^*\big) \\ & p_j = F_F\big(\tfrac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_{j-1}{}^2}\,|v, n-v, \delta^*\big) \\ & -F_F\big(\tfrac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_j{}^2}\,|v, n-v, \delta^*\big)\ . \end{aligned} \tag{20}$$

$$p_0 = \begin{cases} 0.5 & , \quad if\ \tau = 1\ , \\ 1 - F_F\big(\tfrac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_0{}^2}\,|v, n-v, \delta^*\big)\, . & , \quad if\ \tau \ne 1\ . \end{cases} \tag{21}$$

جدول ۱. نتایج نمودار افزایشی جمع دنباله با / بدون نظرگرفتن خطای اندازه‌گیری.

v=۳, n=۵, τ=۱/۲۵																							
m=۱								m=۲								m=۵							
γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1	γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1	γ_0	K	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_2$	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1
۰.۳	۱.۰۴۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵.۹۳۳۲	۰.۳	۱.۰۴۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵.۹۳۳۲	۰.۳	۱.۰۴۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵.۹۳۳۲
		۰	۱	۳	۵	۰.۱*I	۳۵.۵۸۲۱			۰	۱	۳	۵	۰.۱*I	۳۵.۷۵۶۱			۰	۱	۳	۵	۰.۱*I	۳۵.۸۶۲۰
		۰	۱	۳	۵	۰.۳*I	۳۴.۹۱۶۰			۰	۱	۳	۵	۰.۳*I	۳۵.۴۱۱۰			۰	۱	۳	۵	۰.۳*I	۳۵.۷۲۱۱
		۰	۱	۳	۵	۰.۵*I	۳۴.۲۹۹۷			۰	۱	۳	۵	۰.۵*I	۳۵.۰۷۷۹			۰	۱	۳	۵	۰.۵*I	۳۵.۵۸۲۱
		۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۲.۹۸۹۲			۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۴.۲۹۹۷			۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۵.۲۴۲۹
		۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۱.۴۴۲۶			۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۲.۹۸۹۲			۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۴.۶۰۱۵

حال با داشتن تعداد و امتیاز هر ناحیه و همچنین پارامتر متناظر با هر مجموعه از امتیازات، حدود متناظر با هرکدام محاسبه می‌شود. نکته‌ی حائز اهمیت برای محاسبه‌ی متوسط طول دنباله برای هر مجموعه از امتیاز، تشکیل ماتریس حالت و محاسبه‌ی احتمالات مربوطه است تا به کمک آن‌ها و روابط زنجیره‌ی مارکوف مقدار متوسط طول دنباله محاسبه شود. با در نظرگرفتن امتیاز تجمعی در هر مرحله (حالت) در ماتریس انتقال، ماتریس p محاسبه می‌شود و با حذف آخرین سطر و آخرین ستون از این ماتریس، ماتریس Q محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که امتیاز تجمعی (حالت) همیشه از مقدار صفر شروع می‌شود. در نهایت مقدار متوسط طول دنباله برای هر مجموعه از داده‌ها محاسبه می‌شود و به تحلیل‌گر در تشخیص حالت خارج ازکنترل برای پایش فرایند یاری می‌دهد. در ادامه، با داشتن ماتریس p و حذف سطر و ستون آخر آن، ماتریس Q به دست می‌آید که با استفاده از رابطه‌ی ۲۲ معیار متوسط طول دنباله محاسبه می‌شود. در رابطه‌ی ۲۲، $\boldsymbol{S^T} = (۱, ۰, \ldots, ۰)$ بردار احتمالات اولیه، $\mathbf{I}$ ماتریس همانی و ۱ برداری است که تمام عناصر آن ۱ باشد. در خصوص نحوه‌ی به دست آوردن ARL و توضیحات بیشتر، می‌توان به مقاله‌ی لیم و همکاران[1] مراجعه کرد.

$$\mathrm{ARL} = \mathbf{S^T}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-۱}۱ . \qquad (۲۲)$$

۳. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

در این تحلیل، پارامترهای نمودار جمع دنباله‌ی چندمتغیره به‌صورت $k = ۴$، $ARL_۰ = ۳۷۰$، $n \in \{۵, ۱۰\}$، $v = ۳, ۴$، $m \in \{۱, ۲, ۵\}$، $\gamma_۰ \in \{۰/۱, ۰/۳, ۰/۵\}$، $\tau \in \{۱/۲۵, ۱/۵۰\}$ و $\boldsymbol{\theta} \in \{۰/۱\mathbf{I}, ۰/۳\mathbf{I}, ۰/۵\mathbf{I}, ۱\mathbf{I}, ۲\mathbf{I}\}$ با شیفت افزایشی مفروض‌اند. مقادیر بهینه برای امتیاز نواحی و پارامتر K و متناسب با آن‌ها مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل $ARL_۱$ به دست آمده است. به دلیل بالا بودن حجم نتایج به دست آمده، نتایج مربوط به سه

جدول ۲. نمایش ماتریس p برای ۴ ناحیه و امتیازات $\{۰, ۱, ۳, ۵\}$.

حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	$p_۰ + p_۱$	$p_۲$	۰	$p_۳$	۰	$p_۴$
۲	$p_۰$	$p_۱$	$p_۲$	۰	$p_۳$	$p_۴$
۳	$p_۰$	۰	$p_۱$	$p_۲$	۰	$p_۳ + p_۴$
۴	$p_۰$	۰	۰	$p_۱$	$p_۲$	$p_۳ + p_۴$
۵	$p_۰$	۰	۰	۰	$p_۱$	$p_۲ + p_۳ + p_۴$
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱

مشخصه‌ی کیفی، اندازه نمونه‌ی ۵، شیفت ۱٫۲۵ را برای مقدار اولیه‌ی ضریب تغییرات چندمتغیره ۰٫۳ امتیازات و پارامتر مربوط گزارش شده است. در جدول ۱ نتایج متوسط طول دنباله برای $\gamma_۰ = ۰/۳$، پارامتر $K = ۱/۰۴۹$، $k = ۴$، $S_k = \{۰, ۱, ۳, ۵\}$، $\boldsymbol{\theta} \in \{۰/۱\mathbf{I}, ۰/۳\mathbf{I}, ۰/۵\mathbf{I}, ۱\mathbf{I}, ۲\mathbf{I}\}$، $\tau = ۱/۲۵$، $v = ۳$، $n = ۵$ و $m \in \{۱, ۲, ۵\}$ آورده شده است که مقدار متوسط طول دنباله در حالت بدون در نظرگرفتن خطای اندازه‌گیری از مطالعه لیم و همکاران[1] آورده شده است.

نتایج ثبت شده در جدول ۱ نشان می‌دهد که متوسط طول دنباله با افزایش مقدار خطا کاهش یافته است. همچنین رویکرد افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری باعث نزدیک شدن نتایج به واقعیت می‌شود. زیرا متوسط طول دنباله با افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری افزایش می‌یابد و به واقعیت نزدیک‌تر می‌شود. در نتیجه منجر به کاهش اثر خطای اندازه‌گیری روی عملکرد نمودارکنترل می‌شود. در ادامه نیز برای مثال یک نمونه از ماتریس p برای امتیازات $S_k = \{۰, ۱۲, ۳, ۵\}$ آورده شده است.

در جدول ۲ در این مورد به‌خصوص و برای مثال حالت (مجموعه‌ی امتیازات تجمعی در هر مرحله) به‌صورت $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۴ \geq ۵\}$ است که به‌عنوان ۶ حالت در نظرگرفته می‌شود؛ در این حالت ماتریس p به‌صورت جدول ۲ است.

جدول ۳. متوسط طول دنباله خارج از کنترل در حالت خطای اندازه‌گیری برای $v = ۳,۴$ و $n = ۵,۱۰$.

τ=۱/۲۵, γ=۰/۳																
		m=۱					m=۲					m=۵				
		θ					θ					θ				
	0I	0.1I	0.3I	0.5I	0.3I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I
v=۳ n=۵	۳۵.۹۳۳۲	۳۵.۵۸۲۱	۳۴.۹۱۶۰	۳۴.۲۹۹۷	۳۲.۹۸۹۲	۳۱.۴۴۲۶	۳۵.۷۵۶۱	۳۵.۴۱۱۰	۳۵.۰۷۷۹	۳۴.۲۹۹۷	۳۲.۹۸۹۲	۳۵.۸۶۲۰	۳۵.۷۲۱۱	۳۵.۵۸۲۱	۳۵.۲۴۲۹	۳۴.۶۰۱۵
v=۳ n=۱۰	۱۳.۶۶۵۴	۱۳.۵۶۴۹	۱۳.۳۶۷۹	۱۳.۱۷۵۹	۱۲.۷۱۵۱	۱۱.۸۵۸۷	۱۳.۶۱۵۰	۱۳.۵۱۵۲	۱۳.۴۱۶۷	۱۳.۱۷۵۹	۱۲.۷۱۵۱	۱۳.۶۴۵۲	۱۳.۶۰۴۹	۱۳.۵۶۴۹	۱۳.۴۶۵۸	۱۳.۲۷۱۳
v=۴ n=۵	۵۲.۹۴۴۶	۵۱.۷۵۸۱	۴۹.۴۴۶۹	۴۷.۲۲۸۷	۴۲.۱۸۱۶	۳۴.۸۳۷۲	۵۲.۳۴۸۹	۵۱.۱۷۲۳	۵۰.۰۱۶۵	۴۷.۲۲۸۷	۴۲.۱۸۱۶	۵۲.۷۰۵۸	۵۲.۲۳۰۴	۵۱.۷۵۸۱	۵۰.۵۹۱۷	۴۸.۳۲۵۴
v=۴ n=۱۰	۱۵.۱۱۷۱	۱۴.۷۲۴۸	۱۳.۹۶۰۷	۱۳.۲۲۳۶	۱۱.۴۹۵۲	۸.۴۹۲۵	۱۴.۹۲۰۱	۱۴.۵۳۱۳	۱۴.۱۴۹۲	۱۳.۲۲۳۶	۱۱.۴۹۵۲	۱۵.۰۳۸۱	۱۴.۸۸۰۹	۱۴.۷۲۴۸	۱۴.۳۳۹۴	۱۳.۵۸۸۸

جدول ۴. متوسط طول دنباله خارج از کنترل در حالت خطای اندازه‌گیری برای $v = ۳,۴$ و $n = ۵,۱۰$.

τ=۱/۵, γ=۰/۳																
		m=۱					m=۲					m=۵				
		θ					θ					θ				
	0I	0.1I	0.3I	0.5I	0.3I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I
v=۳ n=۵	۱۲.۴۶۴۰	۱۲.۳۴۱۱	۱۲.۱۱۱۳	۱۱.۹۰۳۱	۱۱.۴۸۲۷	۱۱.۱۰۰۰	۱۲.۴۰۱۹	۱۲.۲۸۱۷	۱۲.۱۶۶۷	۱۱.۹۰۳۱	۱۱.۴۸۲۷	۱۲.۴۳۹۰	۱۲.۳۸۹۶	۱۲.۳۴۱۱	۱۲.۲۲۳۵	۱۲.۰۰۴۴
v=۳ n=۱۰	۴.۶۷۹۴	۴.۶۵۱۷	۴.۵۹۶۸	۴.۵۴۲۴	۴.۴۰۸۲	۴.۱۳۹۸	۴.۶۶۵۶	۴.۶۳۷۹	۴.۶۱۰۵	۴.۵۴۲۴	۴.۴۰۸۲	۴.۶۷۳۹	۴.۶۶۲۸	۴.۶۵۱۷	۴.۶۶۲۴۲	۴.۵۶۹۵
v=۴ n=۵	۲۰.۷۲۵۱	۲۰.۱۰۰۶	۱۸.۹۰۵۸	۱۷.۷۸۸۷	۱۵.۳۷۴۲	۱۲.۲۵۲۵	۲۰.۴۱۰۶	۱۹.۷۹۵۰	۱۹.۱۹۷۵	۱۷.۷۸۸۷	۱۵.۳۷۴۲	۲۰.۵۹۸۸	۲۰.۳۴۸۳	۲۰.۱۰۰۶	۱۹.۴۹۳۹	۱۸.۳۳۷۱
v=۴ n=۱۰	۵.۲۶۰۹	۵.۱۱۷۱	۴.۸۳۷۳	۴.۵۶۷۶	۳.۹۳۳۲	۲.۸۰۴۹	۵.۱۸۸۷	۵.۰۴۶۲	۴.۹۰۶۳	۴.۵۶۷۶	۳.۹۳۳۲	۵.۲۳۲۰	۵.۱۷۴۳	۵.۱۱۷۱	۴.۹۷۶۰	۴.۷۰۱۲

در نهایت در این ماتریس سطر آخر حالت جاذب است، به این معنی که اگر امتیاز تجمعی مقداری بیشتر از ۵ داشته باشد با توجه به امتیاز نواحی غیرممکن است که از این حالت بیرون آید و به حالت تحت کنترل بازگردد.

در نمودار جمع دنباله اگر مقدار امتیاز تجمعی یا همان آماره‌ی مربوط به نمودار جمع دنباله بیشتر از S_k باشد حالت خارج از کنترل رخ می‌دهد. همچنین اگر در نمودار جمع دنباله‌ی افزایشی برای مثال شیفتی در جهت عکس صورت گیرد مقدار امتیاز به صفر برمی‌گردد که در رابطه‌ی ۱۶ نشان داده شده است.

با توجه به آنالیز حساسیت‌های صورت گرفته روی $\boldsymbol{\theta} \in \{۰/۱\mathbf{I}, ۰/۳\mathbf{I}, ۰/۵\mathbf{I}, ۱\mathbf{I}, ۲\mathbf{I}\}$، $\tau = ۱/۲۵$ و $\tau = ۱/۵$، $v = ۳,۴$، $n = ۵,۱۰$ و $m \in \{۱,۲,۵\}$ در جدول‌های ۳ و ۴ نتایج نشان می‌دهد که هر چه خطای اندازه گیری بیشتر شود متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل از متوسط طول دنباله در حالت بدون خطا فاصله گرفته و کاهش می‌یابد. با افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل به حالت بدون خطا نزدیک و اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری روی عملکرد نمودار کنترل کاهش می‌یابد. زمانی که اندازه نمونه بزرگ می‌شود و رفتار مشابه در عملکرد نمودارکنترل دیده می‌شود اما مقادیر متوسط طول دنباله کوچک‌تر می‌شود. با افزایش تعداد مشخصه‌ی کیفی، مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خارج ازکنترل افزایش می‌یابند لیکن رفتار مشابه در عملکرد نمودارکنترل مشاهده می‌شود یعنی با افزایش خطای اندازه‌گیری مقادیر متوسط طول دنباله خارج ازکنترل کاهش یافته و از مقدار متوسط طول دنباله در حالت بدون خطا فاصله می‌گیرد. اما با افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری مقادیر متوسط طول دنباله در حالت خطا به مقادیر متوسط طول دنباله در حالت بدون خطا نزدیک می‌شود.

مقادیر ارزش انتظاری متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل برای $v = ۳,۴$، $n = ۵,۱۰$ و $m \in \{۱,۲,۵\}$ در جدول ۵ گزارش شده است که بر اساس مقادیر متوسط طول دنباله خارج از کنترل تحت شیفت‌های ۱٫۲۵ و ۱٫۵ محاسبه شده است. همچنین فرض شده است که شیفت‌ها از توزیع یکنواخت تبعیت می‌کنند و هرکدام با احتمال یکسان رخ می‌دهند؛ در این صورت EARL متوسط مقادیر ARL در دو شیفت بررسی شده خواهد بود که برای حالت‌های مختلف (با / بدون خطای اندازه‌گیری) و دفعات متعدد اندازه‌گیری ۱، ۲ و ۵، برای تعداد ۳ و ۴ مشخصه‌ی کیفی و اندازه نمونه ۵ و ۱۰ گزارش شده است. نتایج جدول ۵ نیز رفتار مشابه متوسط طول دنباله در جداول ۳ و ۴ را نشان می‌دهد به گونه‌یی که با افزایش خطا معیار از حالت بدون خطا فاصله می‌گیرد و با افزایش دفعات اندازه‌گیری این اثر نامطلوب کاهش و به مقدار بدون خطا نزدیک می‌شود.

جدول ۵. مقادیر انتظاری متوسط طول دنباله (EARL) با $v = ۳, ۴$ و $n = ۵, ۱۰$.

		m=۱					m=۲					m=۵				
θ	0I	0.1I	0.3I	0.5I	0.3I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I
v=۳ n=۵	۲۴.۲۰	۲۳.۹۶	۲۳.۵۱	۲۳.۱۰	۲۲.۲۴	۲۱.۲۷	۲۴.۰۸	۲۳.۸۵	۲۳۶۲	۲۳.۱۰	۲۲.۲۴	۲۴.۱۵	۲۴.۰۶	۲۳.۹۶	۲۳.۷۳	۲۳.۳۰
v=۳ n=۱۰	۹.۱۷	۹.۱۱	۸.۹۸	۸.۸۶	۸.۵۶	۸.۰۰	۹.۱۴	۹.۰۸	۹.۰۱	۸.۸۶	۸.۵۶	۹.۱۶	۹.۱۳	۹.۱۱	۹.۰۶	۸.۹۲
v=۴ n=۵	۳۶.۸۳	۳۵.۹۳	۳۴.۱۸	۳۲.۵۱	۲۸.۷۸	۲۳.۵۴	۳۶.۳۸	۳۵.۴۸	۳۴۶۱	۳۲.۵۱	۲۸.۷۸	۳۶۶۵	۳۶.۲۹	۳۵.۹۳	۳۵.۰۴	۳۳.۳۳
v=۴ n=۱۰	۱۰.۱۹	۹.۹۲	۹.۴۰	۸.۹۰	۷.۷۱	۵.۶۵	۱۰.۰۵	۹.۷۹	۹.۵۳	۸.۹۰	۷.۷۱	۱۰.۱۴	۱۰.۰۳	۹.۹۲	۹.۶۶	۹.۱۵

۴. نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای مطالعات آتی

در این مقاله، نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری توسعه داده شد و با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف معیار متوسط طول دنباله محاسبه شد. عملکرد نمودار کنترل جمع دنباله پیشنهادی در حضور خطای اندازه گیری با عملکرد این نمودار در حالت بدون خطا و با استفاده زنجیره‌ی مارکوف بر حسب معیار متوسط طول دنباله مقایسه و نتایج نشان داد که عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با افزایش خطای اندازه گیری نسبت به عملکرد این نمودار در حالت بدون خطا فاصله گرفته و خطای اندازه گیری اثر منفی روی عملکرد این نمودار کنترل دارد. در ادامه رویکرد افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری پیشنهاد و عملکرد نمودار در حضور خطای اندازه‌گیری برحسب معیار متوسط طول دنباله به عملکرد این نمودار در حالت بدون خطا نزدیک شد. آنالیز حساسیت‌های لازم روی پارامترهای مؤثر از جمله تعداد دفعات اندازه‌گیری در رویکرد اندازه‌گیری چندگانه، تعداد مشخصه‌ی کیفی مورد بررسی، اندازه نمونه، شیفت مقدار ضریب تغییرات در حالت خارج از کنترل، ضریب تغییرات چندمتغیره در حالت اولیه و مقادیر مختلف خطای اندازه‌گیری انجام شد.

از جمله پیشنهادهای آتی در حوزه‌ی نمودارهای کنترل ضریب تغییرات می‌توان به بررسی اثر خطای اندازه‌گیری در سایر نمودارهای کنترلی، شامل نمودارهای تطبیقی برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره اشاره کرد. همچنین بررسی روش‌های مختلف نمونه‌گیری یا استفاده از اطلاعات کمکی در پایش ضریب تغییرات چندمتغیره، مقایسه‌ی نتایج این مقاله با دیگر مقالاتی که در این حوزه کار کرده‌اند و نیز ارزیابی عملکرد نمودار پیشنهادی با استفاده از معیارهایی همچون SDRL، علاوه بر ARL را می‌توان به‌عنوان پیشنهادهای دیگر در این حوزه مطرح کرد.

پانوشت‌ها

1. run sum chart
2. sample number
3. sample size
4. multivariate coefficient of variation chart

منابع (References)

1. Lim, A.J., Khoo, M.B., Teoh, W.L. and et al. "Run sum chart for monitoring multivariate coefficient of variation", *Computers & Industrial Engineering*, **109**, pp. 84-95 (2017).
2. Kang, C.W., Lee, M.S., Seong, Y.J. and et al. "A control chart for the coefficient of variation", *Journal of Quality Technology*, **39**(2), pp. 151-158 (2007).
3. Tran, K.P., Heuchenne, C. and Balakrishnan, N. "On the performance of coefficient of variation charts in the presence of measurement errors", *Quality and Reliability Engineering International*, **35**(1), pp. 329-350 (2019).
4. Yeong, W.C., Khoo, M.B.C., Teoh, W.L. and et al. "A control chart for the multivariate coefficient of variation", *Quality and Reliability Engineering International*, **32**(3), pp. 1213-1225 (2016).
5. Dawod, A.B., Abbasi, S.A. and Al- Momani, M. "On the performance of coefficient of variation control charts in Phase I", *Quality and Reliability Engineering International*, **34**(6), pp. 1029-1040 (2018).
6. Khatun, M., Khoo, M.B., Lee, M.H. and et al. "One-sided control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation in short production runs", *Transac-*

tions of the Institute of Measurement and Control, **41**(6), pp. 1712-1728 (2019).

7. Yeong, W.C., Khoo, M.B.C., Lim, S.L. and et al. "The coefficient of variation chart with measurement error", *Quality Technology & Quantitative Management*, **14**(4), pp. 353-377 (2017).
8. Tran, K.P., Heuchenne, C. and Balakrishnan, N. "On the performance of coefficient of variation charts in the presence of measurement errors", *Quality and Reliability Engineering International*, **35**(1), pp. 329-350 (2019).
9. Nguyen, Q.T., Tran, K.P., Castagliola, P. and et al. "One-sided synthetic control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **89**(10), pp. 1841-1862 (2019).
10. Giner- Bosch, V., Tran, K.P., Castagliola, P. and et al. "An EWMA control chart for the multivariate coefficient of variation", *Quality and Reliability Engineering International*, **35**(6), pp. 1515-1541 (2019).
11. Haq, A. and Khoo, M.B. "New adaptive EWMA control charts for monitoring univariate and multivariate coefficient of variation", *Computers & Industrial Engineering*, **131**, pp. 28-40 (2019).
12. Chew, X.Y., Khaw, K.W. and Yeong, W.C. "The efficiency of run rules schemes for the multivariate coefficient of variation: a markov chain approach", *Journal of Applied Statistics*, **47**(3), pp. 460-480 (2020).
13. Tran, K.P., Nguyen, H.D., Nguyen, Q.T. and et al. "One-sided synthetic control charts for monitoring the coefficient of variation with measurement errors", *In 2018 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, pp. 1667-1671 (2018).
14. Ayyoub, H.N., Khoo, M.B., Saha, S. and et al. "Multivariate coefficient of variation charts with measurement errors", *Computers & Industrial Engineering*, **147**, 106633 (2020).