مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۴۰۱)
دوره‌ی ۱-۳۸، شماره‌ی ۲، ص. ۸۹-۹۸، (پژوهشی)

Original Article

یک مدل جدید DEA معکوس برای تجدید ساختار واحدها (مطالعه‌ی موردی: بانک‌های تجاری عضو شورای همکاری خلیج فارس)

مونا آوند (کارشناس ارشد)
سعید قبادی * (استادیار)
سعید جهانگیری (استادیار)
گروه ریاضی، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان، ایران

این مقاله به مسئله‌ی «تجدید ساختار واحدها» بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده‌های معکوس می‌پردازد. مسئله‌ی تجدید ساختار عبارت است از آن که یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده بر پایه‌ی هم‌افزایی از طریق ادغام یا هم‌افزایی معکوس از طریق انشعاب، اقدام به تولید مجموعه‌یی جدید از واحدهای تصمیم‌گیرنده به منظور بهبود کارایی می‌کند. در این مقاله مسئله‌ی تجدید ساختار واحدها (ادغام و انشعاب) بر پایه‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی تحت مطالعه قرارگرفته و بر اساس شرایط از پیش معین کارایی برای هر یک از واحدهای جدید، مدل‌هایی برای تخمین ورودی‌ها (خروجی‌ها) پیشنهاد شده است. مهمترین مزایای مدل‌های پیشنهادی در مقایسه با سایر مدل‌های فراهم آورده شده، عبارت است از: الف) به دلیل به کارگیری از ابزار برنامه‌ریزی چندهدفی، امکان پیگیری اهداف چندگانه در مسئله‌ی تجدید ساختار برای تصمیم‌گیرنده فراهم می‌کند. ب) مدل‌های پیشنهادی دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری هستند، زیرا تعداد متغیرها به شدت کاسته شده است. همچنین، برای ارزیابی عملکرد مدل‌های پیشنهادی، یک مثال عددی با داده‌های واقعی به کارگرفته شده است.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تحلیل پوششی داده‌های معکوس، تجدید ساختار واحدها، کارایی، برنامه‌ریزی چندهدفی.

mona.avand @yahoo.com
ghobadi@iaukhsh.ac.ir
jahangiri@iaukhsh.ac.ir

۱. مقدمه

هر مسئله‌ی نیازمند تصمیم‌گیری را می‌توان در انواع دسته مسائل تحقیق در عملیات طبقه‌بندی کرد. یکی از شاخه‌های بسیار مهم و کاربردی تحقیق در عملیات، تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) [۱] نام دارد که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز[۱] ابداع شد. تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتریک برای برآورد کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس با ورودی و خروجی‌های چندگانه، بر پایه‌ی برنامه‌ریزی ریاضی است. اگرچه تحلیل پوششی داده‌ها روشی جدید برای سیاست‌گذاران و صاحب‌نظران اقتصادی به منظور برآورد کارایی است، دامنه‌ی کاربرد این روش در مفاهیم اقتصادی دیگر نیز در حال گسترش است. کاربردهای عملی بسیار متنوعی از تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی و تحلیل عملکرد فعالیت‌های اقتصادی، نظامی، فرهنگی و ... مشاهده شده است.[۲-۴]

برخلاف مدل‌های موجود در تحلیل پوششی داده‌ها که هدف آن محاسبه‌ی کارایی واحدها با ورودی‌ها و خروجی‌های معین است، تحلیل پوششی داده‌های معکوس تحت شرایط از پیش تعریف شده‌ی کارایی، به تخمین سطوح ورودی (یا خروجی) واحدها می‌پردازد، هنگامی که بعضی یا همه‌ی سطوح خروجی (یا ورودی) به میزان معینی افزایش یافته است. نخستین بار ژانگ و سو[۵] یک سیستم ارزیابی را توسعه دادند که منجر به پیدایش تحلیل پوششی داده‌های معکوس[۲] شد. سپس در سال ۲۰۰۰، بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده‌های معکوس، درصدد پاسخگویی به سؤالات زیر برآمدند: «اگر یک واحد تصمیم‌گیرنده‌ی خاص، ورودی‌هایش (یا خروجی‌هایش) را به میزان معینی افزایش دهد، برای حفظ سطح کارایی موجود، چه میزان خروجی (ورودی) اضافی می‌بایستی تولید (تأمین) شود؟»[۶ و ۷] جهانشاهلو و همکاران[۸ و ۹] در سال ۲۰۰۴ مدل‌هایی را برای بهبود کارایی واحدهای ناکارا، برای پاسخ به سؤالات مطرح شده توسط وی و همکاران [۶ و ۷] در چارچوب DEA معکوس مطرح کردند. هادی وینچه و همکاران[۱۰ و ۱۱] نیز ضمن اصلاح شرایط کافی برای تخمین ورودی‌ها بر پایه‌ی مدل‌های مطرح شده توسط وی و همکاران[۷]، شرایط لازم را برای پاسخگویی به سؤالات مطرح شده در ادبیات DEA معکوس

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۹/۹، اصلاحیه ۱۴۰۰/۱۱/۲۳، پذیرش ۱۴۰۰/۱۲/۲۳.
DOI:10.24200/J65.2022.57309.2195

بیان کردند. پس از آن تحلیل پوششی داده‌های معکوس در زمینه‌های مختلف نظری و کاربردی همانند تخصیص منابع[۲،۱۲ و۱۳]، تحلیل حساسیت[۹]، تحت وابستگی موقت درونی[۱۴-۱۶]، بهبود اندازه کارایی[۱۲]، ادغام واحدها[۱۷-۲۱] و ... به کار گرفته شد.

اخیراً، در راستای افزایش کارایی شرکت‌ها، محققان مسئله‌یی تحت عنوان «تجدید ساختار شرکت‌ها[۳]» مطرح[۲۲] و بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده‌های معکوس درصدد پاسخگویی به آن برآمدند. آنان در مسئله‌ی تجدید ساختار شرکت‌ها دو موضوع ادغام[۴] و انشعاب[۵] واحدها را با اهداف کارایی از پیش مشخص شده، بر پایه‌ی به کارگیری مفهوم تحلیل پوششی داده‌های معکوس مورد مطالعه قرار دادند. به عبارت دیگر، با به کارگیری تحلیل پوششی داده‌های معکوس در چارچوب تجدید ساختار کلی واحدها که عبارت است از آن که یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده بر پایه‌ی هم‌افزایی از طریق ادغام یا هم‌افزایی معکوس از طریق انشعاب، اقدام به تولید یک مجموعه جدید از واحدها تصمیم‌گیرنده به منظور بهبود کارایی می‌کنند. در واقع درصدد تخمین بردار خروجی‌های (یا ورودی‌های) مجموعه‌ی جدید واحدها با ورودی‌های (یا خروجی‌های) مشخص و سطح معینی از کارایی برآمدند.[۲۲] آنها برای این منظور (تخمین ورودی‌ها یا خروجی‌های واحدهای جدید)، مدل‌های برنامه‌ریزی تک‌هدفی را برای به دست آوردن بیشترین مجموع منفعت به کار گرفته و راه حل‌هایی را پیشنهاد کردند.

در این مقاله، ما در صدد پاسخگویی به سؤالات موجود در مسئله‌ی تجدید ساختار کلی واحدها با به کارگیری برنامه‌ریزی چندمنظوره بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده‌های معکوس هستیم. یکی از مزیت‌های این روش در مقایسه با روش پیشنهادی گفته شده[۲۲] آن است که تصمیم‌گیرنده می‌تواند در صورت داشتن اهداف متفاوت (مثلاً ذخیره‌ی برخی از ورودی‌های خاص)، آنها را در مدل اعمال کند، در حالی که در مدل‌های فراهم آورده شده در این مقاله تعداد متغیرها به شدت کاهش یافته است. بنابراین، این روش از پیچیدگی محاسباتی کمتری برخوردار است. همچنین، به منظور تبیین کارایی مدل‌های پیشنهادی، این مدل‌ها بر روی مجموعه‌یی مشتمل از ۴۲ بانک تجاری عضو شورای همکاری عربی خلیج فارس[۶] اعمال شده است.

بخش‌های دیگر این مقاله به موضوعات زیر می‌پردازد: در بخش دوم برخی از مدل‌های متعارف در تحلیل پوششی داده‌ها مرور شده است. در بخش سوم به مسئله‌ی تجدید ساختار واحدهای تصمیم‌گیرنده برپایه‌ی تحلیل پوششی داده‌های معکوس پرداخته شده و مدل‌هایی برای پاسخگویی به سؤالات مطرح شده در این زمینه ارائه شده است. در بخش چهارم یک مثال با داده‌های واقعی برای بیان نحوه‌ی به کارگیری مدل‌های پیشنهادی ارائه شده است. بخش پنجم، شامل یک نتیجه‌گیری مختصر است و به تبیین برخی از موضوعات پژوهشی آینده می‌پردازد.

۲. ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده

فرض کنید یک مجموعه از n واحد تصمیم‌گیرنده $\{DMU_j \,:\, j \in J = \{۱, ..., n\}\}$ وجود دارد، به طوری که DUM_j با مصرف ورودی‌های مثبت چندگانه $X_{ij} (i \in I = \{۱, ۲, ..., m\})$، خروجی‌های مثبت چندگانه $y_{rj} (r \in O = \{۱, ۲, ..., s\})$ را تولید می‌کند. فرض کنید بردارهای ورودی و خروجی برای DMU_j به ترتیب $X_j = (x_{۱j}, x_{۲j}, ...x_{mj})^t$ و $Y_j = (y_{۱j}, y_{۲j}, ..., y_{sj})^t$ نمایش داده شوند. مدل شعاعی‌محور در ورودی زیر برای تخمین اندازه کارایی از واحد تحت ارزیابی $DMU_o (o \in J)$ در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} &\theta_o^* = \min \theta \\ &s.t. \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad \forall i \in I, \\ &\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad \forall r \in O, \\ &\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \\ &\lambda_j \geq ۰, \quad \forall j \in J. \end{aligned} \tag{۱}$$

در این مدل، θ_o^* را مقدار کارایی DMU_o در ماهیت ورودی با بازده به مقیاس متغیر می‌نامیم. اگر $\theta_o^* = ۱$ باشد، آنگاه DMU_o را کارا (ضعیف) و در غیر این صورت آن را ناکارا می‌نامیم. همچنین، مدل شعاعی‌محور در ماهیت خروجی زیر برای تخمین اندازه کارایی از واحد تحت ارزیابی $DMU_o (o \in J)$ در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} &\varphi_o^* = \min \varphi \\ &s.t. \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \quad \forall i \in I, \\ &\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{ro}, \quad \forall r \in O, \\ &\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \\ &\lambda_j \geq ۰, \quad \forall j \in J. \end{aligned} \tag{۲}$$

در این مدل، φ_o^* را مقدار کارایی DMU_o را مقدار کارایی در ماهیت ـ خروجی با بازده به مقیاس متغیر می‌نامیم. اگر $\varphi_o^* = ۱$ باشد، DMU_o را کارا (ضعیف) و در غیر این صورت ناکارا می‌نامیم.

۳. تجدید ساختار واحدهای تصمیم‌گیرنده

در یک محیط رقابتی که مشخصه آن کمبود منابع است، تعیین کارایی و بهبود آن از جمله مهمترین دغدغه‌های مدیران و سرمایه‌گذاران است. مسئله‌ی اصلی تجدید ساختار واحدهای تصمیم‌گیرنده که شامل سه موضوع ادغام واحدها، انشعاب واحدها و تجدید ساختار خالص است، از جمله دغدغه‌های مهم مدیران است؛ زیرا انتخاب راهکار انشعاب یا ادغام واحدهای تصمیم‌گیرنده، که رابطه‌ی معکوسی با سطح توسعه و همچنین ارتباط مستقیمی با وسعت جغرافیایی و الگوی توزیع دارد، از مهمترین مشکلات مدیران به شمار می‌آید. برخی از اهداف تجدید ساختار (ادغام و انشعاب) مؤسسات و سازمان‌ها شامل به کارگیری صحیح منابع، صرفه جویی در منابع، تحمیل کمترین هزینه، افزایش اثربخشی و رفع معضلات ناشی از ارتباط با تأمین کنندگان منابع، کاهش کارکنان و رشد سازمان‌ها، و ایجاد تمرکز در مراکز تصمیم‌گیری و ... است. در راهکار مناسب تجدید ساختار توجه به دو نکته بسیار ضروری است: ۱.

تجانس عملکرد بین سازمان‌های انتخابی برای ادغام یا انشعاب است. به عبارت دیگر، هر چه اشتراک مجموعه فعالیت‌ها و حوزه‌های مربوط به سازمان‌های درگیر در تجدید ساختار، نزدیکی بیشتری با هم داشته باشند، شانس موفقیت ادغام یا انشعاب این سازمان‌ها بیشتر خواهد بود. ۲. کارشناسان معتقدند ادغام (انشعاب) سازمان‌ها و مؤسسات با کارایی مشابه در جهت حفظ کارایی و افزایش بهره‌وری که باعث بهبود فضای کسب و کار می‌شود، منجر به توسعه در صنایع دیگر نیز می‌شود.

در بخش پیش رو، پاسخگویی به سؤالات مطرح شده توسط امروزنژاد و همکاران[۲۲] در باب تجدید ساختارکلی واحدها، «اگر در میان یک گروه از DMUها، زیرمجموعه‌یی از آنها علاقه‌مند به تجدید ساختارکلی از طریق هم‌افزایی (ادغام) یا از طریق هم‌افزایی معکوس (انشعاب) و تشکیل مجموعه ایی جدید از DMUها با بردارهای خروجی (ورودی) مشخص وسطح معینی از کارایی از پیش مشخص باشند، آنگاه میزان ورودی‌های (خروجی‌های) لازم برای این واحدهای جدید به چه میزان معینی بایستی باشند؟» پرداخته می‌شود.

برای این منظور فرض کنید که از میان n واحد تصمیم‌گیرنده، واحدهای DMU_p به طوری که $p \in P \subset J$، مجموعه‌یی از واحدهای تصمیم‌گیرنده علاقه‌مند به تجدید ساختار (ادغام یا انشعاب) به منظور بهبود کارایی باشند. همچنین فرض کنید، مجموعه واحدهای جدید پس از تجدید ساختار را با نماد $Q(DMU_q, q \in Q)$ نشان دهیم. علاوه بر این فرض کنید که مجموعه واحدهایی که در بازسازی شرکت نمی‌نمایند را با نماد $\bar{P}$ نشان دهیم. بنابراین، $\overline{P} = J - Q$. فرض کنید ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای جدید DMU_q برای هر $q \in Q$، را به ترتیب با نمادهای α_{iq} و β_{rq} برای هر $r \in Q, i \in I$، نمایش می‌دهیم. باید توجه داشت که در ادبیات تجدید ساختار، اگر تعداد واحدهای شرکت‌کننده در بازسازی از تعداد واحدهای تولیدی پس از بازسازی کمتر باشد، فرایند بازسازی را «انشعاب» و اگر از تعداد واحدهای تولیدی پس از بازسازی بیشتر باشد، فرایند بازسازی را «ادغام» می‌نامند.

۱.۳. تخمین سطوح ورودی واحدها پس از تجدید ساختار

در این زیر بخش، حالتی را در نظر می‌گیریم که واحدهای شرکت کننده در تجدید ساختار، با حفظ میزان مجموع خروجی‌های خود برای واحدهای تولیدی پس از بازسازی، درصدد تعیین ورودی‌های واحدهای پس از تجدید ساختار باشند به طوری که کارایی هر یک از این واحدهای جدید، برابر با مقدار معینی باشد. بنابراین:

۱. مجموع خروجی‌های واحدهای پس از بازسازی برابر با مجموع خروجی‌های واحدهای پیش از بازسازی است:

$$\sum_{q \in Q} \beta_{rq} = \sum_{p \in P} y_{rp}, \qquad \forall r \in O. \tag{۳}$$

۲. مجموع ورودی‌های واحدهای پیش از بازسازی کمتر از مجموع ورودی‌های واحدهای پس از بازسازی نیست:

$$0 \leq \sum_{q \in Q} \alpha_{iq} \leq \sum_{p \in P} x_{ip}, \qquad \forall i \in I. \tag{۴}$$

۳. اندازه کارایی هریک از واحدهای تولیدی پس از بازسازی مقداری ثابت و از پیش تعیین شده $\bar{\theta}_q(\forall q \in Q)$ باشد.

بر این اساس می‌توان برای تخمین بردار ورودی‌های هریک از واحدهای تولیدی پس از تجدید ساختار، مدل ۵ را در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
& Min(\alpha_{1q}, \alpha_{2q}, \ldots, \alpha_{mq}; \forall q \in Q) \\
& s.t. \\
& \sum_{j \in \bar{p}} \lambda_{jq} x_{ij} + \sum_{q \in Q} \lambda_q \alpha_{iq} - \alpha_{iq} \bar{\theta}_q \leq 0, \qquad \forall i \in I, \forall q \in Q \\
& \sum_{j \in \bar{p}} \lambda_{jq} y_{rj} + \sum_{q \in Q} \lambda_q \beta_{rq} - \beta_{rq} \geq 0, \qquad \forall r \in O, \forall q \in Q \\
& \sum_{j \in \bar{p}} \lambda_{jq} + \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \qquad \forall q \in Q, \\
& \sum_{q \in Q} \alpha_{iq} \leq \sum_{p \in P} x_{ip}, \qquad \forall i \in I, \\
& \sum_{q \in Q} \beta_{rq} = \sum_{p \in P} y_{rp}, \qquad \forall r \in O, \\
& \lambda_{jq} \geq 0, \qquad \forall j \in \bar{P}, q \in Q, \\
& \lambda_q \geq 0, \qquad \forall q \in \\
& \alpha_{iq} \geq 0, \qquad \forall i \in I, q \in Q, \\
& \beta_{rq} \geq 0, \qquad \forall r \in O, q \in Q.
\end{aligned} \tag{۵}$$

در این مدل،

$$\begin{aligned}
& ((\lambda_{jq} : \forall j \in \bar{P}, \lambda_q; \forall q \in Q), \\
& (\alpha_{iq} : \forall i \in I, \forall q \in Q), \\
& (\beta_{rq} : \forall r \in O, \forall q \in Q))
\end{aligned}$$

بردار متغیرهاست. همچنین، $\bar{\theta}_q(\forall_q \in Q)$ مقداری ثابت و معلوم است. شایان ذکر است که اگر هدف اصلی از تجدید ساختار برای شناسایی بیشترین منفعت بازسازی باشد، آنگاه این منفعت به وسیله‌ی کمینه‌سازی مجموع ورودی‌های به کار گرفته شده توسط بازسازی، قابل محاسبه است. بر اساس این هدف، امروزنژاد و همکاران[۲۲] مدل‌های خود را با به کارگیری تحلیل پوششی داده‌های معکوس معرفی کردند؛ اگرچه مشخصه‌ی اصلی مدل‌های DEA معکوس، تعیین پارامترهای مجهول با برنامه‌ریزی چندهدفی است. با این وجود، اگر تصمیم‌گیرنده اهداف مختلفی از تجدید ساختار دنبال کند، مدل‌های متناظر باید به فرم برنامه‌ریزی چندهدفی تنظیم شود. مدل ۵ را می‌توان با به کارگیری روش مجموع وزنی، به برنامه‌ریزی تک‌هدفی غیرخطی ۶ با همان محدودیت‌ها تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}
& Min \sum_{i \in I} \sum_{q \in Q} w_{iq} \alpha_{iq} \\
& s.t \\
& \text{The constraints set of Model (۵)},
\end{aligned} \tag{۶}$$

به طوری که $\sum_{i \in I} \sum_{q \in Q} w_{iq} = 1$. این واضح است که این وزن‌ها توسط تصمیم‌گیرنده و بر اساس اهدافی که دنبال می‌کند، انتخاب می‌شوند. در واقع وزن بیشتر نشان‌دهنده‌ی اهمیت ورودی واحدی خاص است که تصمیم‌گیرنده درصدد ذخیره‌سازی بیشتر آن است. در این مدل هدف، کمینه‌سازی مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی‌های واحدهای تولیدی پس از بازسازی $\alpha_{iq}(i \in I, q \in Q)$ (iامین ورودی از qامین واحد تصمیم‌گیرنده پس از بازسازی) است.

از آن‌جا که انگیزه‌ی اصلی «تصمیم شرکت در تجدید ساختار واحدها» بهبود کارایی آنها است، می‌توان چنین فرض کرد که واحدهای شرکت‌کننده در فرایند تجدید

ساختار، ناکارا هستند. بنابراین، بر اساس مفهوم مجموعه امکان تولید (PPS) [۷] این واحدها را می‌توان به وسیله‌ی ترکیبی محدب از واحدهایی که در بازسازی شرکت نمی‌کنند، بیان کرد. پر واضح است که واحدهایی که کارا بوده ولی کارای راسی نیستند، دارای چنین وضعیتی در PPS هستند. بنابراین می‌توان چنین فرض کرد که در هر جواب بهینه، $\lambda_q^* = 0\ (\forall q \in Q)$ است. بنابراین، می‌توان مدل ۶ را به صورت مدل برنامه‌ریزی خطی ۷ بازنویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
& Min \sum_{i\in I}\sum_{q\in Q} w_{iq}\alpha_{iq} \\
& s.t. \\
& \sum_{j\in\bar{p}} \lambda_{jq} x_{ij} \le \alpha_{iq}\bar{\theta}_q, \quad \forall i\in I, \forall q\in Q \\
& \sum_{j\in\bar{p}} \lambda_{jq} y_{rj} \ge \beta_{rq}, \quad \forall r\in O, \forall q\in Q \\
& \sum_{j\in\bar{p}} \lambda_{jq} = 1, \quad \forall q\in Q, \\
& \sum_{q\in Q} \alpha_{iq} \le \sum_{p\in P} x_{ip}, \quad \forall i\in I, \\
& \sum_{q\in Q} \beta_{rq} = \sum_{p\in P} y_{rp}, \quad \forall r\in O, \\
& \lambda_{jq} \ge 0, \quad \forall j\in\bar{P}, q\in Q, \\
& \alpha_{iq} \ge 0, \quad \forall i\in I, q\in Q, \\
& \beta_{rq} \ge 0, \quad \forall r\in O, q\in Q.
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

باید توجه داشت که تعداد متغیرهای مدل فوق، در مقایسه با مدل پیشنهادی توسط امروزنژاد و همکاران[۲۲]، به شدت کمتر است. در این مدل تعداد متغیرها برابر $|Q|(|\bar{P}| + |O| + |I|)$ بوده، در حالی که تعداد متغیرها در روش امروزنژاد و همکاران[۲۲]، برابر با $(|Q||\bar{P}| + |O||P| + |I||Q|)$ است. بنابراین، این مدل از پیچدگی محاسباتی کمتری برخوردار است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که مدل فوق می‌تواند برای تخمین ورودی‌ها استفاده شود.

قضیه‌ی ۱: فرض کنید که مجموعه واحدهای تولید شده، پس از فرایند تجدید ساختار درون مجموعه امکان تولید جاری باشد. اگر

$$
\begin{aligned}
& \Delta = ((\lambda^*_{jq} : \forall j\in\bar{P}; \forall q\in Q), \\
& (\alpha^*_{iq} : \forall i\in I, \forall q\in Q), \\
& (\beta^*_{rq} : \forall r\in O, \forall q\in Q))
\end{aligned}
$$

یک جواب بهینه برای مدل ۷ باشد، آنگاه کارایی هریک از واحدهای ایجاد شده پس از تجدید ساختار (DMU_q برای هر $q\in Q$) برابر $\bar{\theta}_q$ است.

برهان: برای این منظور باید ثابت کنیم که مقدار بهینه‌ی مدل ۸ برای هر $q\in Q$، برابر با $\bar{\theta}_q$ است:

$$
\begin{aligned}
& \theta^{**}_q = \min \theta_q \\
& s.t. \\
& \sum_{j\in\bar{p}} \lambda_{jq} x_{ij} + \sum_{q\in Q} \lambda_q x_{iq} \le x_{iq}\theta_q, \quad \forall i\in I, \forall q\in Q \\
& \sum_{j\in\bar{p}} \lambda_{jq} y_{rj} + \sum_{q\in Q} \lambda_q y_{rq} \ge y_{rq}, \quad \forall r\in O, \forall q\in Q \\
& \sum_{j\in\bar{p}} \lambda_{jq} + \sum_{q\in Q} \lambda_q = 1, \quad \forall q\in Q \\
& \lambda_{jq} \ge 0, \quad \forall j\in\bar{P}, \forall q\in Q, \\
& \lambda_q \ge 0, \quad \forall q\in Q.
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

که در آن واحد جدید DMU_q برای هر $q\in Q$، دارای ورودی‌های $(\forall i\in I) x_{iq} = \alpha^*_{iq}$ و خروجی‌های $(\forall r\in O) y_{rq} = \beta^*_{rq}$ است. چون Δ برای مدل ۷ شدنی است، پس:

$$\sum_{j\in\bar{p}} \lambda^*_{jq} x_{ij} \le \alpha^*_{iq}\bar{\theta}_q = \bar{\theta}_q x_{iq}, \quad \forall i\in I, \forall q\in Q, \tag{۹}$$

$$\sum_{j\in\bar{p}} \lambda^*_{jq} y_{rj} \ge \beta^*_{rq} = y_{rq}, \quad \forall r\in O, \forall q\in Q, \tag{۱۰}$$

$$\sum_{j\in\bar{p}} \lambda^*_{iq} = 1, \quad \forall q\in Q, \tag{۱۱}$$

$$\sum_{j\in\bar{p}} \alpha^*_{iq} \le \sum_{p\in P} x_{ip}, \quad \forall i\in I, \tag{۱۲}$$

$$\sum_{q\in Q} \beta^*_{rq} = \sum_{p\in P} y_{rp}, \quad \forall r\in O, \tag{۱۳}$$

$$\lambda^*_{jq} \ge 0, \quad \forall j\in\bar{P}, \forall q\in Q. \tag{۱۴}$$

با توجه به روابط ۹ تا ۱۴ واضح است که:

$$((\lambda_{jq} = \lambda^*_{jq} : \forall j\in\bar{P}, \lambda_q = \lambda^*_q), \theta_q = \bar{\theta}_q : \forall q\in Q)$$

یک جواب شدنی برای مدل ۸ است و بنابراین، $\theta^{**}_q \le \bar{\theta}_q$.

اینک با فرض این که $((\lambda^{**}_{iq} : \forall j\in\bar{P}, \lambda^{**}_q), \theta^{**}_q : \forall q\in Q)$ جواب بهینه‌ی مدل ۸ باشد و نیز با توجه به مدل ۸ و رابطه‌ی ۹ داریم:

$$
\begin{aligned}
x_{iq}\theta^{**}_q &\ge \sum_{j\in\bar{P}} \lambda^{**}_{jq} x_{ij} + \sum_{q\in Q} \lambda^{**}_q x_{iq} \\
&\ge \sum_{j\in\bar{P}} \lambda^{**}_{jq} x_{ij} + \sum_{q\in Q} \lambda^{**}_q \Big(\sum_{j\in\bar{P}} \lambda^{*}_{jq} x_{ij}\Big) \\
&= \sum_{j\in\bar{P}} \Big(\lambda^{**}_{jq} + \sum_{q\in Q} \lambda^{**}_q \lambda^*_{jq}\Big) x_{ij} \quad \forall i\in I, q\in Q
\end{aligned}
$$

با فرض $\bar{\lambda}_{jq} = \lambda^{**}_{jq} + \sum_{q\in Q} \lambda^{**}_q \lambda^*_{jq}$ برای هر $q\in Q$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\bar{P}} \bar{\lambda}_{jq} &= \sum_{j\in\bar{P}} \Big(\lambda^{**}_{jq} + \sum_{q\in Q} \lambda^{**}_q \lambda^*_{jq}\Big) \\
&= \sum_{j\in\bar{P}} \lambda^{**}_{jq} + \sum_{q\in Q} \lambda^{**}_q \Big(\sum_{j\in\bar{P}} \lambda^*_{jq}\Big) \\
&= 1, \quad \forall q\in Q
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

$$\sum_{j\in\bar{P}} \bar{\lambda}_{jq} x_{ij} \le x_{iq}\theta^{**}_q, \quad \forall i\in I, q\in Q. \tag{۱۶}$$

در یک روش مشابه و به کمک رابطه‌ی ۱۰ نیز خواهیم داشت:

$$\sum_{j\in\bar{P}} \bar{\lambda}_{jq} y_{rj} \le y_{rq}, \quad \forall r\in O, q\in Q. \tag{۱۷}$$

اینک به خلف فرض کنید که یک $\hat{q}\in Q$ وجود دارد به طوری که $\theta^{**}_{\hat q} < \bar\theta_{\hat q}$ و نیز با توجه به رابطه‌ی ۱۶ داریم:

$$\sum_{j\in\bar P}\bar\lambda_{jq}x_{ij} \le x_{i\hat q}\theta^{**}_{\hat q} < x_{i\hat q}\bar\theta_{\hat q}, \qquad \forall i\in I. \tag{۱۸}$$

بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $x_{1\hat q} = \alpha_{1\hat q} > 0$، چون $x_{\hat q} = (x_{1\hat q}, x_{2\hat q}, ..., x_{m\hat q}) \neq 0$، به کمک رابطه‌ی ۱۶ داریم:

$$\sum_{j\in\bar P}\bar\lambda_{j\hat q}x_{1j} \le x_{1q}\theta^{**}_{\hat q} < x_{1\hat q}\bar\theta_{\hat q}. \tag{۱۹}$$

پس عدد مثبتی مانند $\mu > 0$ وجود دارد به طوری که $\alpha^*_{1\hat q} - \mu > 0$ و

$$\sum_{j\in\bar P}\bar\lambda_{j\hat q}x_{1j} \le (x_{1\hat q}-\mu)\bar\theta_{\hat q} = (\alpha^*_{1\hat q}-\mu)\bar\theta_{\hat q}. \tag{۲۰}$$

حال، برای هر $r\in O, q\in Q$ قرار دهید $\bar\beta_{rq} = \beta^*_{rq}$ و

$$\bar\alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha^*_{ij} - \mu & i = 1, j = \hat q \\ \alpha^*_{ij} & otherwise. \end{cases}$$

بر طبق روابط ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۸ و ۲۰، واضح است که:

$$\nabla = ((\bar\lambda_{jq} : \forall j\in\bar p; \forall q\in Q),$$
$$(\bar\alpha_{ij} : \forall i\in I, \forall q\in Q),$$
$$(\bar\beta_{rj} : \forall r\in O, \forall q\in Q))$$

یک جواب شدنی برای مدل ۷ است. مقدار تابع هدف در این جواب شدنی عبارت است از:

$$\sum_{i\in I}\sum_{q\in Q} w_{iq}\bar\alpha_{iq} = \sum_{i\in I-\{-1\}}\sum_{q\in Q} w_{iq}\bar\alpha_{iq} + w_{1q}\bar\alpha_{1q}$$
$$= \sum_{i\in I-\{-1\}}\sum_{q\in Q} w_{iq}\alpha^*_{iq} + (\alpha^*_{1q}-\mu)w_{iq}$$
$$< \sum_{i\in I-\{-1\}}\sum_{q\in Q} \alpha^*_{iq}w_{iq} + \alpha^*_{1q}w_{iq} = \sum_{i\in I}\sum_{q\in Q}\alpha^*_{iq}w_{iq}.$$

به عبارت دیگر مقدار تابع هدف در جواب شدنی ∇ از مقدار تابع هدف در جواب بهینه Δ کمتر است. بنابراین، فرض خلف باطل و لذا حکم ثابت است. □

۳.۲. تخمین سطوح خروجی واحدها پس از تجدید ساختار

در این زیر بخش، حالتی را در نظر می‌گیریم که واحدهای شرکت کننده در تجدید ساختار، با حفظ میزان مجموع ورودی‌های خود برای واحدهای تولیدی پس از بازسازی، درصدد تعیین خروجی‌های واحدهای پس از تجدید ساختار هستند، به طوری که کارایی هر یک از این واحدهای جدید، برابر با مقدار معینی باشد. بنابراین:

۱. مجموع ورودی‌های واحدهای پیش از بازسازی برابر با مجموع ورودی‌های واحدهای تولیدی پس از بازسازی است:

$$\sum_{q\in Q}\alpha_{iq} = \sum_{p\in P} x_{ip}, \qquad \forall i\in I. \tag{۲۱}$$

۲. مجموع خروجی‌های واحدهای تولیدی پس از بازسازی بیشتر یا مساوی با مجموع خروجی‌های واحدهای پیش از بازسازی است:

$$\sum_{q\in Q}\beta_{rq} \ge \sum_{p\in P} y_{rp}, \qquad \forall r\in O. \tag{۲۲}$$

۳. اندازه کارایی هر یک از واحدهای تولیدی پس از بازسازی برابر با مقداری ثابت و از پیش تعیین شده $\bar\varphi_q(\forall q\in Q)$ باشد.

با این فرض که تصمیم‌گیرنده، اهداف مختلفی از تجدید ساختار واحدها دنبال می‌کند، لذا برای تخمین بردار خروجی‌های هر یک از واحدهای تولیدی پس از تجدید ساختار، می‌توان مدل زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
& max \quad (\beta_{1q}, \beta_{2q}, ..., \beta_{sq}; \quad \forall q\in Q) \\
& s.t. \\
& \sum_{j\in\bar p}\lambda_{jq}x_{ij} + \sum_{q\in Q}\lambda_q\alpha_{iq} - \alpha_{iq} \le 0, \qquad \forall i\in I, \forall q\in Q, \\
& \sum_{j\in\bar p}\lambda_{jq}y_{rj} + \sum_{q\in Q}\lambda_q y_{rq} - \beta_{rq}\bar\varphi_q \ge 0, \qquad \forall r\in O, \forall q\in Q, \\
& \sum_{j\in\bar p}\lambda_{jq} + \sum_{q\in Q}\lambda_q = 1, \qquad \forall q\in Q, \\
& \sum_{q\in Q}\alpha_{iq} = \sum_{q\in Q} x_{ip}, \qquad \forall i\in I, \\
& \sum_{q\in Q}\beta_{rq} \ge \sum_{p\in P} y_{rp}, \qquad \forall r\in O, \\
& \lambda_{jq} \ge 0, \qquad \forall j\in\bar P, q\in Q, \\
& \lambda_q \ge 0, \qquad \forall q\in Q, \\
& \alpha_{iq} \ge 0, \qquad \forall i\in I, q\in Q, \\
& \beta_{rq} \ge 0, \qquad \forall r\in O, q\in Q.
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

در این مدل، بردار متغیرها به صورت زیر است:

$$((\lambda_{jq} : \forall j\in\bar P),$$
$$(\lambda_q; \forall q\in Q),$$
$$(\alpha_{iq} : \forall i\in I, \forall q\in Q),$$
$$(\beta_{rq} : \forall r\in O, \forall q\in Q)).$$

همچنین، $\bar\varphi_q(q\in Q)$ مقداری ثابت و معلوم است. مدل ۲۳ را می‌توان با به کارگیری روش مجموع وزنی به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی تک‌هدفی غیرخطی با مجموعه محدودیت‌های مدل ۲۳ تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{r\in O}\sum_{q\in Q} w_{rq}\beta_{rq} \\
& s.t. \\
& The\ constraints\ set\ of\ Model\ (23),
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

به طوری که $\sum_{r\in O}\sum_{q\in Q} w_{rq} = 1$. پر واضح است که وزن بیشتر نشان‌دهنده‌ی اهمیت خروجی واحدی خاص است که تصمیم‌گیرنده درصدد تولید بیشتر آن است. هدف از مدل فوق، بیشینه‌سازی مجموع وزن‌دار شده خروجی‌های واحدهای تولیدی پس از بازسازی $\beta_{rq}(r\in O, q\in Q)$ (rامین خروجی از qامین واحد تصمیم‌گیرنده پس از بازسازی) است. در یک روش مشابه تبدیل مدل ۶ به مدل ۷، می‌توان مدل ۲ را به مدل خطی زیر تبدیل کرد:

$$\max \sum_{r\in O}\sum_{q\in Q} w_{rq}\beta_{rq}$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{jq} x_{ij} \leq \alpha_{iq}, \quad \forall i \in I, \forall q \in Q,\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{jq} y_{rj} \geq \bar{\varphi}_q \beta_{rq}, \quad \forall r \in O, \forall q \in Q,\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{jq} = 1, \quad \forall q \in Q,\\
&\sum_{q\in Q} \alpha_{iq} = \sum_{q\in Q} x_{ip}, \quad \forall i \in I,\\
&\sum_{q\in Q} \beta_{rq} \geq \sum_{p\in P} y_{rp}, \quad \forall r \in O,\\
&\lambda_{jq} \geq 0, \quad \forall j \in \bar{P}, \forall q \in Q,\\
&\alpha_{iq} \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall q \in Q,\\
&\beta_{rq} \geq 0, \quad \forall r \in O, \forall q \in Q.
\end{aligned} \tag{25}$$

باید توجه داشت که تعداد متغیرهای موجود در مدل فوق در مقایسه با مدل پیشنهادی توسط امروزنژاد و همکاران[۲۲] بسیار کمتر است. بنابراین، این مدل از پیچیدگی محاسباتی کمتری برخوردار است.

قضیه‌ی۲ نشان می‌دهد که مدل فوق می‌تواند برای تخمین خروجی‌های واحدهای تولیدی پس از بازسازی به کار گرفته شود.

قضیه‌ی ۲: فرض کنید که مجموعه واحدهای تولید شده، پس از فرایند تجدید ساختار درون مجموعه امکان تولید جاری باشند. اگر

$$\begin{aligned}
&((\lambda^*_{jq} - \forall j \in \bar{P}; \forall q \in Q),\\
&(\alpha^*_{iq} : \forall i \in I, \forall q \in Q),\\
&(\beta^*_{rq} : \forall r \in O, \forall q \in Q))
\end{aligned}$$

یک جواب بهینه برای مدل ۲۵ باشد، آنگاه کارایی هر یک از واحدهای ایجاد شده پس از تجدید ساختار (DMU_q برای $q \in Q$) برابر $\bar{\varphi}_q$ است.

برهان: مشابه برهان قضیه‌ی ۱ است. فقط باید توجه داشت که برای هر ($\forall q \in Q$) DMU_q، باید مدل ۲۶ را برای محاسبه‌ی اندازه کارایی در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{**}_q = \max \quad \varphi\\
&s.t.\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{jq} x_{ij} + \sum_{q\in Q} \lambda_q \alpha_{iq} \leq x_{iq}, \forall i \in I, \forall q \in Q,\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{jq} y_{rj} + \sum_{q\in Q} \lambda_q y_{rq} \geq \varphi_q y_{rq}, \forall r \in O, \forall q \in Q,\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{jq} + \sum_{q\in Q} \lambda_q = 1, \quad \forall q \in Q,\\
&\lambda_{jq} \geq 0, \forall j \in \bar{P}, \forall q \in Q,\\
&\lambda_q \geq 0, \forall q \in Q.
\end{aligned} \tag{26}$$

ملاحظه‌ی ۱: اگرچه مدل‌های فراهم آورده شده در این مقاله تحت بازده به مقیاس متغیرند، می‌توان این مدل‌ها را برای بازده به مقیاس ثابت، غیرافزایشی و غیرکاهشی نیز توسعه داد.

ملاحظه‌ی ۲: در صورتی که واحدهای شرکت‌کننده در فرایند تجدید ساختار کارای غیر راسی باشند، آنگاه مدل‌های پیشنهادی در مقاله، همچنان معتبرند زیرا مجموعه امکان تولید قبل و بعد از فرایند بازسازی یکسان است.

ملاحظه‌ی ۳: بر پایه‌ی مطالب بحث شده، می‌توان برای تخمین سطوح ورودی و خروجی در مسئله‌ی تجدید ساختار واحدها الگوریتم زیر را پیشنهاد کرد:

گام ۱. اندازه کارایی واحدها با استفاده از مدل ماهیت ورودی (مدل ۱) یا مدل ماهیت خروجی (مدل ۲) اندازه‌گیری می‌شود.

گام ۲. مجموعه‌یی از واحدهای ناکارا برای شرکت در فرایند تجدید ساختار، توسط تصمیم‌گیرنده انتخاب می‌شود.

گام ۳. اندازه کارایی مورد نیاز برای هریک از واحدهای جدیدالتأسیس بعد از فرایند تجدید ساختار، توسط تصمیم‌گیرنده پیشنهاد می‌شود.

گام ۴. مدل متناظر با تجدید ساختار مربوطه بر پایه‌ی مدل ماهیت ورودی ۷ یا مدل ماهیت خروجی ۲۵ تنظیم می‌شود.

گام ۵. مدل تنظیم شده درگام چهارم حل و جواب(های) بهینه‌ی آن شناسایی می‌شود.

گام ۶. میزان منابع و خروجی‌های واحدهای جدیدالتأسیس شناسایی شده و همچنین سهم هریک از واحدهای شرکت‌کننده در فرایند تجدید ساختار در میزان ورودی‌ها و خروجی‌ها واحد جدیدالتأسیس تعیین می‌شود.

۴. یک مثال با داده‌های واقعی

برای توضیح روش پیشنهادی، یک مجموعه از بانک‌های تجاری عضو شورای همکاری خلیج فارس که شامل دو ورودی و دو خروجی هستند، را در نظر گرفته‌ایم. داده‌ها از مقاله امروزنژاد و همکاران[۲۲] اخذ شده و به همراه اندازه کارایی بر اساس مدل ۱، در جدول ۱ درج شده است.

اینک فرض کنید بانک‌های B_1، B_2 و B_3 را برای یک فرایند تجدید ساختار از نوع ادغام و به وجود آوردن دو بانک جدیدالتأسیس C_1 و C_2 با کارایی معین، در نظر گرفته‌ایم. فرض کنید:

$$C_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \beta_{12} \\ \beta_{22} \end{bmatrix}.$$

با توجه به نمادگذاری‌های در نظر گرفته شده در بخش ۳ داریم:

$$\bar{P} = \{4, ..., 42\}, \quad P = \{1, 2, 3\}, \quad Q = \{1, 2\}.$$

بر اساس فرضیات در نظر گرفته شده در بخش ۳-۱ و به کارگیری مدل ۷ برای تجدید ساختار مفروض، مدل متناظر چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Min\ (\alpha_{11} w_{11} + \alpha_{21} w_{21}) + (\alpha_{12} w_{12} + \alpha_{22} w_{22})\\
&s.t.\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{j1} x_{ij} - \alpha_{i1} \bar{\theta}_1 \leq 0, \quad i = 1, 2,\\
&\sum_{j\in \bar{p}} \lambda_{j2} x_{ij} - \alpha_{i2} \bar{\theta}_2 \leq 0, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

جدول ۱. داده‌ها و اندازه کارایی ۴۲ بانک تجاری عضو شورای همکاری خلیج فارس.

بانک	I_1	I_2	O_1	O_2	Θ
B_{1}	۳۹۵۶/۷۹۶	۱۸۹۴/۴۲۶	۹۰۰۱/۰۰۴	۸۷۰۱/۴۹۷	۱/۰۰
B_{2}	۴۸۱/۲۳۹	۳۱۹/۹۷۶	۹۷۴/۸۵۴	۵۹۷/۷۲۶	۰/۶۷۷
B_{3}	۳۰۵/۲۰۰	۱۳۸/۶۰۰	۴۷۹/۸۰۰	۲۵۲/۲۰۰	۰/۶۴۰
B_{4}	۴۷۱۰/۶۸۰	۳۹۹۶/۲۵۹	۱۲۹۲۰/۳۳۷	۶۰۶۰/۷۶۸	۰/۸۹۳
B_{5}	۱/۰۱۸	۱/۲۸۲	۳/۰۵۴	۰/۳۷۷	۱/۰۰
B_{6}	۹۵۴/۴۳۷	۱۲۰۸/۷۰۳	۱۹۹۱/۰۰۴	۷۲۷۸/۰۹۷	۱/۰۰
B_{7}	۳/۹۶۵	۵/۰۸۲	۱۳/۳۵۹	۳/۰۰۳	۰/۸۲۹
B_{8}	۱۴/۶۳۰	۱۶/۸۶۳	۴۴/۶۵۹	۱۴/۹۳۸	۰/۷۳۸
B_{9}	۱۱/۷۷۱	۶/۵۷۹	۲۲/۹۵۲	۱۵/۱۳۴	۰/۷۲۷
B_{10}	۳۶۴/۹۲۰	۲۴۴/۷۵۰	۹۲۳/۵۱۰	۱۹۴۲/۹۳۵	۱/۰۰
B_{11}	۴۸۹۷/۴۴۲	۲۷۸۷/۱۸۱	۱۱۲۹۴/۶۰۷	۹۳۶۳/۲۳۲	۰/۹۳۹
B_{12}	۱۴/۶۶۵	۸/۹۷۳	۲۸/۱۲۴	۱۰/۹۷۱	۰/۶۷
B_{13}	۶/۰۷۷	۱۴/۲۴۹	۲۶/۹۹۴	۱۰/۲۰۷	۰/۹۷۰
B_{14}	۳۹۷/۶۲۷	۳۷۱/۵۵۳	۸۹۴/۸۴۵	۱۹۰۲/۸۷۸	۰/۸۱۳
B_{15}	۶۶۱/۱۲۰	۸۳۰/۱۶۶	۲۳۲۵/۱۲۸	۱۷۴۸/۵۳۱	۰/۹۵۳
B_{16}	۱۲/۱۲۵	۷/۳۴۶	۳۳/۵۷۳	۱۹/۵۳۰	۰/۹۶۰
B_{17}	۱۲۲۲/۰۲۶	۱۰۴۹/۴۷۹	۲۹۵۹/۵۰۹	۲۶۵۱/۵۴۶	۰/۷۸۵
B_{18}	۹۳۱/۱۷۲	۸۳۸/۳۴۶	۲۴۶۰/۷۹۸	۲۷۶۵/۴۸۵	۰/۸۶۶
B_{19}	۴۰۷۰/۳۵۱	۲۸۴۵/۴۹۸	۸۳۳۷۷/۳۶۸	۷۷۲۶/۹۰۶	۰/۷۷۰
B_{20}	۳۷۲۱/۲۳۳	۸۵۸/۴۶۳	۶۹۵۳/۷۰۱	۲۷۷۹/۷۱۶	۱/۰۰
B_{21}	۱۶/۱۳۷	۷/۰۸۰	۴۰۷۷۱	۲۲/۱۲۶	۱/۰۰
B_{22}	۱۵۰/۷۰۶	۱۳۲/۵۰۴	۵۳۸/۷۵۴	۱۲۹/۹۵۶	۱/۰۰
B_{23}	۳۸۵۷/۹۴۰	۲۸۹۴/۳۷۴	۷۴۳۹/۵۲۶	۱۰۲۳۹/۰۸۷	۰/۹۱۰
B_{24}	۷۹۹۴/۸۰۸	۲۲۸۶/۹۰۸	۱۴۱۵۶/۱۹۴	۱۱۲۶۱/۸۲۰	۱/۰۰
B_{25}	۹/۶۸۹	۶/۹۷۵	۲۲/۴۳۲	۶/۰۳۲	۰/۷۵۶
B_{26}	۳۲۹۲/۷۳۶	۱۹۵۳/۵۹۲	۷۰۴۱/۱۶۴	۳۳۲۳/۹۷۳	۰/۸۲۶
B_{27}	۴۰۲/۷۷۲	۳۲۱/۱۸۹	۹۰۶/۲۳۷	۷۷۵/۷۷۸	۰/۶۷۸
B_{28}	۳۲/۸۳۵	۲۱/۵۳۶	۹۷/۶۷۹	۲۶/۵۵۱	۰/۹۸۰
B_{29}	۶/۷۳۷	۷/۸۵۴	۱۸/۴۰۲	۴/۵۰۴	۰/۶۹۰
B_{30}	۵۳۱/۳۹۵	۹۲۲/۰۴۰	۱۶۷۲/۰۹۳	۱۱۸۵/۱۶۵	۰/۸۱۵
B_{31}	۱۵۲/۵۱۰	۱۹۰/۳۶۱	۶۸۵/۳۷۴	۷۶۹/۸۹۸	۱/۰۰
B_{32}	۱/۹۲۵	۴/۵۸۱	۹/۱۶۳	۵/۲۷۴	۱/۰۰
B_{33}	۴/۸۸۹	۶/۷۳۷	۱۷/۴۰۲	۵/۰۸۲	۰/۸۴۰
B_{34}	۳۲۳۳/۶۱۹	۲۵۲۷/۴۱۴	۷۹۵۹/۷۳۳	۴۶۸۴/۶۱۶	۰/۸۴۰
B_{35}	۵۱۶۹/۷۱۰	۵۴۰۵/۹۷۵	۱۵۱۸۹/۶۰۹	۹۸۳۰/۱۳۷	۰/۸۷۱
B_{36}	۶۸۰۲/۵۶۶	۵۶۰۸/۸۶۳	۱۹۹۵۸/۰۴۳	۱۵۷۱۶/۸۹۳	۱/۰۰
B_{37}	۳۱۱۱/۹۵۲	۲۱۲۶/۰۱۳	۶۸۹۵/۵۷۲	۴۸۶۹/۳۱۶	۰/۸۱۱
B_{38}	۳۶۰۰/۹۸۳	۱۳۱۹/۷۱۱	۶۵۴۷/۹۲۴	۵۱۱۶/۰۸۲	۰/۸۷۶
B_{39}	۷۷۸۱/۷۵۴	۸۴۸۶/۴۲۵	۲۷۵۱۴/۰۳۳	۱۴۳۳۵/۶۷۹	۱/۰۰
B_{40}	۴۴۸۸/۶۶۶	۴۵۳۱/۴۱۹	۱۲۱۵۷/۹۱۳	۱۲۳۸۰/۶۷۷	۱/۰۰
B_{41}	۳۱۸۸/۷۳۶	۱۱۰۶/۱۵۴	۵۷۲۷/۰۰۹	۶۱۹۴/۴۶۰	۱/۰۰
B_{42}	۶۵۰/۸۳۰	۳۰۷/۹۵۹	۱۲۶۵/۶۴۶	۴۴۱/۳۵۹	۰/۷۸۰

$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۱}y_{rj}-\beta_{r۱}\geq ۰,\qquad r=۱,۲,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۲}y_{rj}-\beta_{r۲}\geq ۰,\qquad r=۱,۲,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۱}=۱,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۲}=۱,$$
$$\alpha_{۱۱}+\alpha_{۱۲}\leq ۴۷۴۳/۲۳۵,\qquad \alpha_{۲۱}+\alpha_{۲۲}\leq ۲۳۵۳/۰۰۲,$$
$$\beta_{۱۱}+\beta_{۱۲}=۱۰۴۵۵/۶۵۸,\qquad \beta_{۲۱}+\beta_{۲۲}=۹۵۵۱/۴۲۳,$$
$$\lambda_{jq}\geq ۰,\alpha_{iq}\geq ۰,\beta_{rq}\geq ۰,$$
$$\forall j\in\bar{P},q\in Q,i\in I,r\in O. \qquad (۲۷)$$

فرض کنید هدف تصمیم‌گیرنده از تجدید ساختار آن باشد که بانک‌های جدید $C_۱$ و $C_۲$ کارا باشند ($\bar{\theta}_۱,\bar{\theta}_۲=۱$). مدل فوق را با در نظر گرفتن وزن‌های یکسان حل کرده و جواب بهینه زیر حاصل شده است:

$$\alpha^*_{۱۱}=۳۰۴/۷۲۳۵۶۵۵۹۴۳,$$
$$\alpha^*_{۲۱}=۳۸۵/۸۹۸۲۸۹۵۱۸$$
$$\alpha^*_{۱۱}=۶۳۶/۳۰۲۸۴۴۲۲۹,$$
$$\beta^*_{۲۱}=۲۳۱۸/۶۴۸۴۷۴۹۴۶$$
$$\lambda^*_{۵۲}=۰/۶۸۱۴۵۶۳۵۲,$$
$$\lambda^*_{۶۲}=۰/۳۱۸۵۴۳۶۴۸,$$
$$\lambda^*_{jq}=۰,\forall j\in\bar{P},j\neq ۵,۶,\qquad q=۱.$$
$$\alpha^*_{۱۲}=۹۴۹/۴۲۹۰۲۲۸۳۶,\qquad \alpha^*_{۲۲}=۱۲۰۰/۵۱۴۱۶۹۸۰۳$$
$$\beta^*_{۱۲}=۹۸۱۹/۳۵۵۱۵۷۷۱,\qquad \beta^*_{۲۲}=۷۲۳۲/۷۷۴۵۲۵۰۵۴$$
$$\lambda^*_{۶۲}=۰/۹۹۱۵۰۴۹۴۹,\qquad \lambda_{۱۰,۲}=۰/۰۰۸۴۹۵۰۵۱,$$
$$\lambda^*_{jq}=۰.\forall j\in\bar{P},j\neq ۶,۱۰,\qquad q=۲.$$

بنابراین، بردارهای ورودی و خروجی دو بانک جدید به قرار زیر پیشنهاد می‌شود:

$$C_۱=\begin{bmatrix}۳۰۴/۷۲۳۵۶۵۹۴۳\\ ۳۸۵/۸۹۸۲۸۹۵۱۸\\ ۶۳۶/۳۰۲۸۴۴۲۲۹\\ ۲۳۱۸/۶۴۸۴۷۴۹۴۶\end{bmatrix},$$
$$C_۲=\begin{bmatrix}۹۴۹/۴۲۹۰۲۲۸۳۶\\ ۱۲۰۰/۵۱۱۴۱۶۹۸۰۳\\ ۹۸۱۹/۳۵۵۱۵۷۷۱\\ ۷۲۳۲/۷۷۴۵۲۵۰۵۴\end{bmatrix}.$$

اینک فرض کنید بانک‌های $B_۸$ و $B_{۱۲}$ را برای یک فرایند تجدید ساختار از نوع انشعاب و به وجود آوردن سه بانک جدید $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ با کارایی معین، در نظر گرفته‌ایم. اطلاعات دو بانک مورد نظر ($B_۸,B_{۱۲}$) در جدول واقع در پیوست ۱ درج شده است.

درواقع، بانک‌های $B_۸$ و $B_{۱۲}$ به عنوان واحدهای تصمیم‌گیرنده پیش از بازسازی در نظرگرفته شده‌اند به طوری که سه واحد جدید $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ را پس از بازسازی ایجاد می‌کنند. فرض کنید:

$$S_q=\begin{bmatrix}\alpha_{۱q}\\ \alpha_{۲q}\\ \beta_{۱q}\\ \beta_{۲q}\end{bmatrix}\ q=۱,۲,۳.$$

با توجه به نمادگذاری‌های در نظرگرفته شده در بخش ۳ داریم:

$$\bar{P}=J-\{۸,۱۲\},\qquad P=\{۸,۱۲\},\qquad Q=\{۱,۲,۳\}.$$

بر اساس فرضیات در نظرگرفته شده در بخش ۳-۱ و به کارگیری مدل ۷ برای تجدید ساختار مفروض، مدل متناظر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Min\ (\alpha_{۱۱}w_{۱۱}+\alpha_{۲۱}w_{۲۱})+$$
$$(\alpha_{۱۲}w_{۱۲}+\alpha_{۲۲}w_{۲۲})+$$
$$(\alpha_{۱۳}w_{۱۳}+\alpha_{۲۳}w_{۲۳})$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۱}x_{ij}-\alpha_{i۱}\bar{\theta}_۱\leq ۰,\qquad i=۱,۲,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۲}x_{ij}-\alpha_{i۲}\bar{\theta}_۲\leq ۰,\qquad i=۱,۲,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۳}x_{ij}-\alpha_{i۳}\bar{\theta}_۳\leq ۰,\qquad i=۱,۲,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۱}y_{rj}-\beta_{r۱}\geq ۰,\qquad r=۱,۲.$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۲}y_{rj}-\beta_{r۲}\geq ۰,\qquad r=۱,۲,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۳}y_{rj}-\beta_{r۳}\geq ۰,\qquad r=۱,۲,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۱}=۱,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۲}=۱,$$
$$\sum_{j\in\bar{p}}\lambda_{j۳}=۱,$$
$$\alpha_{۱۱}+\alpha_{۱۲}+\alpha_{۱۳}\leq ۲۹/۲۹۵,$$
$$\alpha_{۲۱}+\alpha_{۲۲}+\alpha_{۲۳}\leq ۲۵/۸۳۶,$$
$$\beta_{۱۱}+\beta_{۱۲}+\beta_{۱۳}=۷۲/۷۸۳,$$
$$\beta_{۲۱}+\beta_{۲۲}+\beta_{۲۳}=۲۵/۹۰۹,$$
$$\lambda_{jq}\geq ۰,\alpha_{iq}\geq ۰,\beta_{rq}\geq ۰,$$
$$\forall j\in\bar{P},q\in Q,i\in I,r\in O. \qquad (۲۸)$$

فرض کنید هدف تصمیم‌گیرنده از ادغام آن باشد که بانک‌های جدید $S_۳$، $S_۲$ و $S_۱$ کارا باشند. ($\bar{\theta}_۱=\bar{\theta}_۲=\bar{\theta}_۱=۱$). لذا، باحل مدل فوق با وزن‌های یکسان، جواب بهینه‌ی زیر حاصل شده است:

$$\alpha^*_{11} = ۴٫۲۴۸۳۷۰۷۱۶, \quad \alpha^*_{21} = ۵٫۳۷۲۹۹۳۴۹,$$

$$\beta^*_{11} = ۹٫۷۸۹۵۶۴۸۰۸, \quad \beta^*_{21} = ۲۵٫۰۳۵۳۴۳۸۸۱,$$

$$\lambda^*_{51} = ۰٫۹۹۶۶۱۱۸۰۴, \quad \lambda^*_{61} = ۰٫۰۰۳۳۸۸۱۹۶,$$

$$\lambda^*_{jq} = ۰, \quad \forall j \in \bar{P}, j \neq ۵,۶, \quad q = ۱.$$

$$\alpha^*_{12} = ۱/۰۴۰۴۱۵۳۴۲, \ \alpha^*_{22} = ۱/۲۹۶۹۹۶۹۴۵,$$

$$\beta^*_{12} = ۵۹/۹۳۹۴۳۵۱۹۲, \ \beta^*_{22} = ۰/۴۹۶۶۵۶۱۱۹,$$

$$\lambda^*_{52} = ۰/۹۹۹۹۳۸۴۰۳, \ \lambda**_{۱۰/۲} = ۰/۰۰۰۰۶۱۵۹۷,$$

$$\lambda^*_{jq} = ۰, \ \forall j \in \bar{P}, j \neq ۵,۱۰. \ q = ۲$$

$$\alpha^*_{13} = ۱/۰۱۸, \ \alpha^*_{23} = ۱/۲۸۲,$$

$$\beta^*_{13} = ۳/۰۵۴, \ \beta^*_{23} = ۰/۳۷۷,$$

$$\lambda^*_{53} = ۱, \ \lambda^*_{jq} = ۰, \ \forall j \in \bar{P}, j \neq ۱, \ q = ۳.$$

بنابراین، بردارهای ورودی و خروجی سه بانک جدید به قرار زیر پیشنهاد می‌شود:

$$S_1 = \begin{bmatrix} ۴٫۲۴۸۳۷۰۷۱۶ \\ ۵٫۳۷۲۹۷۹۳۴۹ \\ ۹٫۷۸۹۵۶۴۸۰۸ \\ ۲۵٫۰۳۵۳۴۳۸۸۱ \end{bmatrix}, \ S_2 = \begin{bmatrix} ۱٫۰۴۰۴۱۵۳۴۲ \\ ۱٫۲۹۶۹۹۶۹۴۵ \\ ۵۹٫۹۳۹۴۳۵۱۹۲ \\ ۰٫۴۹۶۶۵۶۱۱۹ \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} ۱٫۰۱۸ \\ ۱٫۲۸۲ \\ ۳٫۰۵۴ \\ ۰٫۳۷۷ \end{bmatrix}.$$

۴. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، مسئله‌ی تجدید ساختار ـ شامل دو مسئله‌ی اصلی ادغام و انشعاب واحدهای تصمیم‌گیرنده ـــ با به کارگیری مفهوم DEA معکوس و نیز با استفاده از برنامه‌ریزی چندهدفی مورد بررسی قرار گرفته است. در این راستا، مدل‌هایی برای تخمین سطوح ورودی (خروجی) واحدهای جدید پس از فرایند بازسازی فراهم شده است. شرایط کافی در تخمین بردار ورودی‌های (خروجی‌های) واحدهای جدیدالتأسیس با یک سطح کارایی از پیش معین، بیان و ثابت شده است. از مهمترین مزایای مدل‌های پیشنهادی در مقایسه با مدل‌های فراهم آورده شده توسط امروزنژاد و همکاران[۲۲]، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف) به دلیل به کارگیری ابزار برنامه‌ریزی چندهدفی، امکان پیگیری اهداف چندگانه در مسئله‌ی تجدید ساختار برای تصمیم‌گیرنده فراهم شده است.

ب) روش پیشنهادی دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری است، زیرا تعداد متغیرها در مدل‌های پیشنهادی به شدت کاهش یافته است.

بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند به صورتی کاراتر، به مدیران جهت تخصیص بهتر منابع و تنظیم عرضه تولیدات برای واحدهای تحت امر در راستای اهداف کلی واحدها کمک کند.

در این مقاله، مسئله‌ی تجدید ساختار برای مجموعه‌یی از واحدهای ناکارا مورد مطالعه قرارگرفت، لذا توسعه‌ی مدل‌ها و الگوریتم پیشنهادی برای حالتی که مجموعه امکان تولید قبل و بعد از بازسازی یکسان نباشد می‌تواند زمینه‌ی مناسبی برای تحقیقات آینده باشد. همچنین توسعه مدل‌های پیشنهادی در این مقاله، برای حالتی که در بین داده‌ها، اطلاعات نادقیقی مانند داده‌های بازه‌یی، فازی یا تصادفی وجود داشته باشد می‌تواند زمینه‌ی تحقیقاتی مناسبی برای مسیر پژوهشی آینده باشد. علاوه بر آن، گسترش مسئله‌ی تجدید ساختار تحت وابستگی موقت درونی داده‌ها[۱۶ و ۲۳]، با ساختار شبکه‌یی را می‌توان از موضوعات تحقیقاتی قابل توجه پیش رو در نظر گرفت.

پانوشت‌ها

1. data envelopment analysis (DEA)
2. Inverse DEA
3. firm's restructuring
4. merge
5. split
6. cooperation council for the Arab states of the Persian Gulf
7. production possibility set

منابع (References)

1. Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E. "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, **2**, pp. 429-444 (1978).
2. Ghobadi S. "A generalized dea model for inputs (outputs) estimation under intertemporal dependence". *RAIRO-Operations Research*, **53**(5), pp. 1791-1805 (2018a).
3. Moonesian, V., Jahangiri, S. and Ghobadi, S. "Efficiency and super-efficiency under inter-temporal dependence". *RAIRO-Operations Research*, **54**(5), pp. 1385-1400 (2020).
4. Sueyoshi, T. and Sekitani, K. "Returns to scale in dynamic DEA". *European Journal of Operational Research*, **161**(2), pp. 536-544 (2005).
5. Zhang, X. S. and Cui, J. C. "A project evaluation system in the state economic information system of china an operations research practice in public sectors". *International Transactions in Operationl Research*, **6**, pp. 441-452 (1999).
6. Wei, Q. L., Zhang, J., and Zhang, X. "An inverse DEA model for input,output estimate", *European Journal of Operational Research*, **121**(1), pp. 151-163 (2000).
7. Yan, H., Wei, Q., and Hao, G. "DEA models for resource reallocation and production input.output estima-

tion". *European Journal of Operational Research*, **136**, pp. 19-31 (2002).

8. Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Shoja, N. and et al. "Input estimation and identification of extra in inverse DEA models"/, *Applied Mathematics and Computation*, **156**, pp. 427-437 (2004).
9. Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Shoja, N. and et al. "The outputs estimation of a DMU according to improvement of its efficiency", *Applied Mathematics and Computation*, **147**, pp. 409-413 (2004).
10. Hadi-Vencheh, A., Foroughi, A. A., and Soleimani-damaneh, M. "A DEA model for resource allocation", *Economic Modelling*, **25**(5), pp. 983-993 (2008).
11. Hadi-Vencheh, A. and Foroughi, A. A. "A generalized DEA model for inputs. outputs estimation", *Mathematical and Computer Modelling*, **43**, pp. 447-457 (2006).
12. Ghobadi, S. "Inputs and outputs estimation in inverse DEA". *Iranian Journal of Optimization*, **9**(2), pp. 119-129 (2017).
13. Ghobadi, S. and Jahangiri, S. "Optimal allocation of resources using the ideal-solutions". *Journal of New Researches in Mathematics* **5**(20), pp. 121-134 (2019).
14. Ghobadi, S. "A dynamic DEA model for resource allocation". *Int. J. of Mathematics in Operational Research*, **17**(1), pp. 50-77 (2020).
15. Ghobadi, S., Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F. and et al. "Dynamic inverse DEA in the presence of fuzzy Data". *Advances in Environmental Biology*, **8**(24), pp. 139-151 (2014).
16. Jahanshahloo, G. R., Soleimani-damaneh, M., and ghobadi, S. "Inverse DEA under inter-temporal dependence using multiple-objective programming". *European Journal of Operational Research*, **240**, pp. 447-456 (2015).
17. Gattoufi, S. Amin, G. R and Emrouznejad, E. "A new inverse DEA method for merging banks". *IMA Journal Of Management Mathematics*, **25**, pp. 73-87 (2014).
18. Zeinodin, E. and Ghobadi, S. "Merging DMUs based on of the idea inverse DEA". *Iranian Journal of Optimization*, **11**(2), pp. 77-84 (2019).
19. Zenodin, E. and Ghobadi, S. "Merging decision-making units under inter-temporal dependence". *IMA Journal of Management Mathematics*, **31**(2), pp. 139-166 (2020).
20. Ghobadi, S. and Soleimani-Chamkhorami, Kh. "Merging decision-making units with fuzzy data". *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **29**(4), 2140012 (2021).
21. Ghobadi, S. "Merging decision-making units with interval data". *RAIRO - Operations Research*, **55**, pp. 1605-1630 (2021).
22. Gattoufi, S., Emrouznejad, A. and Amin, Gh.R. "Modelling generalized firms' restructuring using inverse DEA", **48**, pp. 51-61 (2017).
23. Ghobadi, S., Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F. and et al. "Efficiency measure under inter-temporal dependence", **17**(2), pp. 657-675 (2018).