مهندسی صنایع و مدیریت شریف
دوره‌ی ۱ - ۲۶، شماره‌ی ۱، ص. ۶۵-۸۱

ارائه‌ی مدل‌های پایدار به‌منظور استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی در فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP)

شیوا تاتینا (دانشجوی کارشناسی ارشد)
کورش عشقی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

در مدل‌های تصمیم‌گیری رایج تحت شرایط عدم قطعیت، داده‌های اولیه‌ی مدل کامل و قطعی فرض می‌شود، اگرچه به‌ندرت چنین اطلاعاتی به‌صورت دقیق و کامل موجود است. لذا ارائه‌ی مدلی که در شرایط عدم قطعیت بتواند سیستم را در برابر تغییرات ورودی‌ها محافظت کند ضروری است. یکی از ابزارهای پرکاربرد در زمینه‌ی تصمیم‌گیری چندمعیاره «فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی» (AHP) است. در این نوشتار مدل‌هایی ارائه شده است که محافظت از تغییر وزن‌ها و اولویت‌های مستخرج از ماتریس مقایسات زوجیِ بازه‌یی در روش AHP را در برابر تغییرات قضاوت‌های زوجی در بازه‌ها و همچنین وجود خطا و ناسازگاری در ماتریس‌های حاوی قضاوت‌های بازه‌یی ممکن می‌سازد. بدین‌منظور دو مدل پایدار پیشنهاد شده که یکی مبتنی بر روش بهینه‌سازی پایدار است و دیگری براساس برنامه‌ریزی آرمانی است و وزن‌های بازه‌یی را برای گزینه‌ها/معیارها فراهم می‌آورد. با توجه به شاخص‌های سنجش پایداری پاسخ‌ها و حل مسائل نمونه نشان داده شده است که مدل‌های پیشنهادی برای استخراج وزن‌ها و اولویت‌های مناسب و پایدار، در مقایسه با سایر مدل‌های موجود در ادبیات موضوع از کارآیی مناسبی برخوردارند.

واژگان کلیدی: فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی، ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی، پاسخ پایدار، بهینه‌سازی پایدار، برنامه‌ریزی آرمانی.

tatina@mehr.sharif.it
eshghi@sharif.edu

۱. مقدمه

فرایند تحلیل سلسله مراتبی (AHP)، به‌عنوان یک ابزار تصمیم‌گیری چندمعیاره و روشی برای تخمین وزن به‌طور گسترده در حوزه‌های مختلف همچون انتخاب، ارزیابی، برنامه‌ریزی و توسعه، تصمیم‌گیری، پیش‌بینی و... مورد استفاده قرار گرفته است.[۱] در روش AHP معمولاً از قضاوت‌های دقیق و ماتریس مقایسات زوجی غیربازه‌یی استفاده می‌شود، اما با توجه به پیچیدگی‌ها و عدم قطعیت‌های موجود در مسائل تصمیم‌گیری دنیای واقعی، گاهی استفاده از قضاوت‌های دقیق غیرواقعی و غیرممکن است. عدم قطعیت در قضاوت‌ها را می‌توان دوگونه بیان کرد: ۱. به‌عنوان یک تخمین نقطه‌یی با یک تابع توزیع احتمال؛ ۲. به‌عنوان تخمینی بازه‌یی بدون تابع توزیع احتمال. اغلب مطالعات در زمینه‌ی اولین بیان صورت‌گرفته است، اما این حالت کاربرد چندانی ندارد. این امر را شاید بتوان ناشی از سخت‌بودن تعیین تابع احتمال برای عدم قطعیت قضاوت‌های ذهنی دانست. حتی زمانی که این توزیع‌های احتمالی مشخص‌اند، با مشکل استخراج بردار مقادیر ویژه از ماتریس مقایسات زوجی مواجه خواهیم بود، چرا که ترکیب‌کردن مستقیم توزیع‌های احتمالی امکان‌پذیر نیست.[۲] اخیراً محققین روش‌هایی‌برای استخراج وزن از قضاوت‌هایی که به‌صورت بازه‌یی ارائه می‌شوند پیشنهاد کرده‌اند. به‌کارگیری قضاوت‌های بازه‌یی باعث می‌شود مدل‌ساز بتواند عدم قطعیت‌های موجود در قضاوت‌ها را بدون درگیرشدن با توابع توزیع احتمال، در مدل استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی وارد کند؛ از سوی دیگر برای تصمیم‌گیرنده نیز فراهم‌آوردن قضاوت‌های بازه‌یی در ماتریس مقایسات زوجی در شرایط وجود عدم قطعیت، ساده‌تر و طبیعی‌تر است.

ساعتی برای حالتی که تصمیم‌گیرنده درمورد بازده در نظر گرفته شده برای قضاوت‌ها با عدم‌قطعیت مواجه است استفاده از قضاوت‌های بازه‌یی را پیشنهاد می‌کند و بیان می‌دارد که معمولاً قضاوت‌ها تحت شرایط عدم قطعیت به‌صورت محدوده یا بازه‌یی از مقادیر ارائه می‌شوند که چنین قضاوت‌هایی ممکن است به تصمیم‌های متفاوتی بینجامد که در فرایند تصمیم‌گیری موجد عدم اطمینان هستند. عدم اطمینان ممکن است در قضاوت‌های تصمیم‌گیرنده درمورد معیارها، در قضاوت‌های وی درمورد گزینه‌ها، یا در هر دو مورد وجود داشته باشد و لذا در استخراج مقیاس‌ها و در نتیجه‌ی نهایی نیز عدم قطعیت وجود خواهد داشت.[۳]

در ادامه (در بخش دوم)، نتایج حاصل از مرور ادبیات موجود درخصوص روش‌های «استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی» و «بهینه‌سازی پایدار» ارائه می‌شود و در بخش بعدی انواع عدم قطعیت‌ها در مسائل تصمیم‌گیری، تعاریف پایداری و روش‌های بهینه‌سازی پایدار معرفی می‌شود. سپس دو مدل پایدار برای استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی ارائه می‌شود که اولین مدل پیشنهادی

تاریخ: دریافت ۱۳۸۷/۴/۱۸، داوری ۱۳۸۷/۱۱/۷، پذیرش ۱۳۸۸/۱/۲۵.

مبتنی بر روش بهینه‌سازی پایدار با مجموعه عدم قطعیت بودجه‌یی است و تخمین‌های نقطه‌یی را برای وزن‌ها استخراج می‌کند، و مدل دوم براساس برنامه‌ریزی آرمانی است و وزن‌های بازه‌یی را از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی استخراج می‌کند. در بخش بعد چند معیار برای ارزیابی پایداری پاسخ‌های دو مدل پیشنهادی معرفی می‌شود و سپس به‌منظور اعتبارسنجی دو مدل پیشنهادی به حل چند نمونه مسئله خواهیم پرداخت و نتایج آنها را ارزیابی و مقایسه خواهیم کرد. در ادامه ویژگی‌های دو مدل پیشنهادی مطرح می‌شوند و در انتها، ضمن جمع‌بندی نتایج حاصل از این مطالعه، زمینه‌هایی برای تحقیقات آتی معرفی شده است.

۲. مطالعه‌ی ادبیات علمی مسئله

در سال ۲۰۰۷ شرط معتبر بودن ابزار تصمیم‌گیری AHP، انتخاب صحیح مقیاس‌های عددی و طراحی مناسب روش اولویت‌بندی اعلام شد.[۴] در همان سال روشی برای بیشینه‌سازی ضریب هم‌بستگی در تخمین اولویت‌ها از یک ماتریس مقایسات زوجی غیربازه‌یی پیشنهاد شد[۵] که حاصل آن تخمین‌های دقیق از وزن‌ها در حالت سازگاری کامل است، اگرچه در حالت ناسازگاری بیش از یک پاسخ ارائه می‌دهد. رامانانان روش «تحلیل پوششی داده‌ها» (DEA)[۱] را به‌منظور استخراج و ترکیب وزن‌ها و جلوگیری از پدیده‌ی تغییر اولویت‌بندی، با روش AHP ترکیب کرد (روش DEAHP)، اما وانگ با حل چند مثال عددی نقاط ضعف این روش را مشخص،[۶] و یک مدل برنامه‌ریزی خطی را با ترکیب‌کردن روش AHP با دیدگاه وزن‌های متغیر در DEA طراحی کرد ـ روش برنامه‌ریزی خطی برای تولید وزن‌های مطلوب‌تر[۲] (LP-GFW). این روش قادر به تولید وزن‌های دقیق در حالت سازگاری کامل و تولید وزن‌های تخمینی در حالت ناسازگاری است. دیگر محققین، به‌منظور نشان‌دادن عدم قطعیت‌های موجود در قضاوت‌های زوجی «روش کم‌ترین تخمین حد بالا[۳]» را برای استخراج وزن‌های بازه‌یی از ماتریس‌های مقایسات زوجی غیربازه‌یی ارائه کرده‌اند.[۷] پیش‌تر، در سال ۲۰۰۵ روشی به‌نام ترکیب اولویت‌بندی چندمعیاره (MPS)[۴] برای ترکیب روش‌های مختلف استخراج وزن/اولویت‌ها پیشنهاد شد[۸] که درواقع روشی است برای ارزیابی عملکرد کیفی روش‌های مختلف استخراج وزن براساس فاصله‌ی اقلیدوسی[۵] و کم‌ترین مقدار تغییر[۶]؛ این روش یک روش پایدار معرفی شد. در سال ۲۰۰۲ نیز روشی پایدار براساس روش بردار ویژه برای استخراج تخمین‌های نقطه‌یی از ماتریس‌های غیربازه‌یی دارای خطا ارائه شد[۹] که در آن، با تبدیل عناصر ماتریس مقایسات زوجی به مقادیری در بازه [۰, ۱] مقدار خطاها از لحاظ کمّی کاهش می‌یابد و کلیه‌ی عناصر ماتریس یکسان‌تر (قابل مقایسه‌تر) و خطاها در پاسخ نهایی کم‌تر می‌شوند. در سال ۲۰۰۳، با این فرض که در بسیاری از موارد می‌توان لگاریتم عناصر ماتریس مقایسات زوجی دقیق (غیربازه‌یی) را به‌خوبی با یک توزیع نرمال با واریانس ثابت مدل کرد، فرمولی برای ارزیابی میزان انحراف استاندارد وزن‌های‌تخمینی حاصل از تحلیل رگرسیون پیشنهاد،[۱۰] و برای حذف عناصر دارای خطا در ماتریس مقایسات زوجی از روش رگرسیون پایدار استفاده شد. گورنانی (۲۰۰۵) در یک مسئله‌ی چندمعیاره‌ی انتخاب از مجموعه‌گزینه‌های طراحیِ دارای ریسک، با استفاده از روش سنجش هم‌پوشانی و ترکیب آن با روش معادل‌ها و غیرمعادل‌های فرضی[۷]، تأثیرعدم قطعیت‌ها را تخفیف داد،[۱۱] ونیز روش انتخاب پایدار گزینه‌ها (RASM) [۸] را که برای تعیین وزن معیارها روشی است نظام‌مند به‌گونه‌یی که گزینه‌ی برتر نسبت به تغییرات کوچک در ارزش‌های وزنی پایدار است، پیشنهاد داد.

چنان که ذکر شد، یکی از روش‌های لحاظ‌کردن عدم قطعیت‌های تصمیم‌گیرنده در مدل‌های تصمیم‌گیری در روش AHP، بهره‌گیری از قضاوت‌های زوجی بازه‌یی است اگرچه، استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی با مشکلات محاسباتی فراوانی مواجه است. ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی را معمولاً به‌صورت ماتریس A(رابطه‌ی ۱) نمایش می‌دهند. در این ماتریس روابط ۲ و ۳ برقرار است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & [a^L_{12},a^U_{12}] & [a^L_{13},a^U_{13}] & \dots & [a^L_{1n},a^U_{1n}] \\ [a^L_{21},a^U_{21}] & 1 & [a^L_{23},a^U_{23}] & \dots & [a^L_{2n},a^U_{2n}] \\ . & & & & . \\ . & \dots & 1 & & . \\ . & & & & . \\ [a^L_{1n},a^U_{1n}] & & \dots & & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$a^L_{ij}\le a^U_{ij} \qquad \forall i,j=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

$$a^L_{ji}=\frac{1}{a^U_{ij}},\qquad a^U_{ji}=\frac{1}{a^L_{ij}} \qquad \forall i,j=1,2,\dots,n \qquad (3)$$

تعداد ترکیبات مختلف قضاوت‌ها در ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی ممکن است با افزایش عدم قطعیت در قضاوت‌ها، به‌طور فزاینده‌یی افزایش یابد. برای مواجهه با این مشکل دو راه وجود دارد: ۱. استفاده از شبیه‌سازی؛ ۲. بهره‌گیری از برنامه‌ریزی ریاضی. در همین راستا، روش تخمین بازه‌یی با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو پیاده‌سازی شده است.[۲] مشکل این روش، تعیین نوع توزیع مورد استفاده در شبیه‌سازی است. آربل (۱۹۸۹)،[۳] یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای حل مسائل AHP بازه‌یی ارائه کرد. کرس (۱۹۹۱)[۳] نیز به غیر عملی‌بودن روش آربل در حل ماتریس‌های مقایسات زوجی ناسازگارپی برد. هملاینن و سالو (۱۹۹۵-۱۹۹۰) روش آربل را به‌صورت سلسله‌مراتبی توسعه دادند.[۱۲و۱۳] آنها دو رابطه در زمینه‌ی روابط تسلطی برمبنای وزن گزینه‌ها تعریف کرده‌اند؛ این وزن‌ها براساس نظر تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شوند و شبیه وزن‌های مورد استفاده در مدل‌های مطلوبیت چندمعیاره‌اند. این روابط تسلطی (ترجیحی) پس از اعلام هر قضاوت جدیدی می‌بایست مورد بازنگری قرارگیرند. در این روش بیشینه و کمینه‌ی وزن‌های بازه‌یی مورد جست‌وجو قرار می‌گیرد. هاینز (۱۹۹۷) براساس روش ارائه‌شده توسط آربل و با درنظرگرفتن توزیعی برای وزن‌ها، یک روش آماری برای استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی ارائه کرد[۱۴] که نتایج آن کاملاً به نوع توزیعِ درنظرگرفته شده وابسته است. در این روش میانگین توزیع به‌عنوان وزن معیارها تعیین می‌شود البته این روش نیز با مشکل روش آربل مواجه است. از آنجا که همه‌ی روش‌های پیشنهادی برای ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی ناسازگار قابل استفاده نیست، وانگ و همکاران (۲۰۰۵) روشی برای سنجش سازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی ارائه کرده‌اند[۱۵] و بر این اساس، برای ماتریس‌های سازگار روش آربل را توصیه و برای ماتریس‌های ناسازگار یک روش برنامه‌ریزی غیرخطی براساس بردار ویژه ارائه کرده‌اند. در سال ۱۹۹۷ محققین روش برنامه‌ریزی آرمانی لکسیکوگراف (LGP)[۹] را برای استخراج تخمین‌های نقطه‌یی از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی ناسازگار پیشنهاد کردند اما وانگ ثابت کرد که این روش به‌لحاظ نظری دارای اشکالاتی است.[۱۶] در سال ۲۰۰۴، سوگی‌هارا مدلی تحت عنوان «AHP احتمالی برای داده‌های غیربازه‌یی[۱۰]» براساس تحلیل رگرسیون بازه‌یی، به‌منظور استخراج وزن‌های بازه‌یی از ماتریس مقایسات زوجی غیربازه‌یی ارائه کرد،[۱۷] ونیز با معرفی روش نرمال‌سازی وزن‌های بازه‌یی، یک زوج مدل ریاضیاتی (مدل‌های حد پایین

و حد بالا[۱۱]) را برای استخراج وزن از داده‌های بازه‌یی معرفی می‌کند. این دو مدل یک تخمین تقریبی از وزن‌ها ارائه می‌کنند. وانگ یک روش برنامه‌ریزی آرمانی لگاریتمی دومرحله‌یی (TLGP)[۱۲] برای استخراج وزن از ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی سازگار و ناسازگار پیشنهاد کرده[۱۸] و توصیه می‌کند ماتریس مقایسات زوجی فازی به ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی تبدیل و با روش پیشنهادی حل شود. وانگ با لگاریتمی‌کردن روابط، مشکل تفاوت عناصر خطا در مثلث‌های بالا و پایین ماتریس مقایسات زوجی را حل کرده است. در سال ۲۰۰۵، یک مدل برنامه‌ریزی خطی دومرحله‌یی برای استخراج وزن از ماتریس غیربازه‌یی ارائه شد[۱۹] که برای ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی توسعه داده شده است. این مدل با ارائه‌ی پاسخی ثابت درمورد مسائل ناسازگار، امکان تشخیص ناسازگاری‌های عمده را فراهم می‌آورد. وانگ همچنین یک مدل برنامه‌ریزی خطی براساس روش برنامه‌ریزی آرمانی برای استخراج وزن‌های بازه‌یی طراحی کرده[۲۰] که در ماتریس‌های سازگار و ناسازگار کاربرد دارد. علاوه‌بر این، او روشی برای مقایسه‌ی پاسخ‌های حاصل از روش‌های مختلف درمورد ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی سازگار پیشنهاد کرده است.

چنان که در مرور ادبیات موضوع بیان شد، روش‌های مختلفی برای استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی پیشنهاد شده است اما در هیچ‌یک از این روش‌ها دیدگاه پایدارسازی پاسخ‌ها و تصمیمات ملحوظ نشده است. تنها در استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی غیربازه‌یی چند مطالعه در زمینه‌ی پایدارسازی تصمیمات و اولویت‌ها صورت گرفته است که در ادامه به موضوع پایداری و تحقیقات انجام شده در این زمینه خواهیم پرداخت.

نظریه‌ی پایداری یکی از موضوعات نسبتاً جدید و به‌سرعت در حال توسعه است و در مقالات متعددی به کاربردهای مختلف این روش پرداخته شده است، اما تاکنون این روش‌ها در زمینه‌ی استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی AHP کاربرد نداشته است. روش‌های پایدار، مدل‌هایی را ارائه می‌کنند که در آنها تغییرات در داده‌های ورودی منجر به تغییرات کمی در نتایج می‌شود.[۲۱] طی سال‌های اخیر محققین زیادی در زمینه‌ی بهینه‌سازی پایدار و روش‌های ممکن برای پیاده‌سازی آن فعالیت کرده‌اند؛ ازجمله در سال ۱۹۹۵ روشی ارائه شد[۲۲] که از ترکیب مدل بهینه‌سازی آرمانی با روش تشریح داده‌های مسئله برمبنای سناریو به دست می‌آید. در این مدل برای جلوگیری از وقوع بدترین سناریوی ممکن از تابع جریمه به‌منظور ایجاد مدل پایدار استفاده می‌شود. در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰، یک مدل بهینه‌سازی خطی برای به‌دست آوردن پاسخی که برای کلیه‌ی داده‌ها عملی است و به یک مجموعه‌ی محدب تعلق دارد، پیشنهاد شد.[۲۳] راه حل‌های حاصل از این مدل بسیار محافظه‌کارانه‌اند. یکی از مهم‌ترین گام‌ها در پیشبرد نظریه‌ی بهینه‌سازی پایدار توسط بن‌ـتال و نمیروسکی (به‌صورت مستقل)[۲۴و۲۵] و ال‌قاوی و همکاران[۲۶و۲۷] برداشته شد. آنها فرض کرده‌اند داده‌های دارای عدم قطعیت، متعلق به یک مجموعه‌ی بیضوی‌اند. یکی از نقاط ضعف این روش آن است که منجر به مسئله‌یی غیر خطی می‌شود. در سال ۲۰۰۴ روشی ارائه شد که به‌کمک آن می‌توان هزینه‌ی پایداری (هزینه‌ی متعادل‌سازی بین عملی‌بودن و بهینه‌بودن) پاسخ‌ها را کاهش داد.[۲۸و۲۹] به‌طور خاص، در این روش سطح محافظه‌کارانه بودن راه‌حل‌های پایدار، به‌صورت حدود احتمالی برای تغییرات محدودیت‌ها قابل تنظیم است. یک جنبه‌ی مهم این روش خطی‌بودن مدل پایدار پیشنهادی است. همچنین محققین، همتای پایدار یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را که مجموعه‌ی دارای عدم قطعیت آن را می‌توان با هر نرم دلخواهی تعریف کرد، طراحی و ارائه کرده‌اند.[۳۰] این روش تضمین می‌کند که با در نظرگرفتن هر وابستگی دلخواهی در توزیع ضرایب دارای عدم قطعیت باز هم محدودیت‌های تعریف‌شده تحت مدل احتمالی، عملی باقی می‌مانند.

براساس مطالعات صورت گرفته در میان روش‌های ارائه‌شده برای استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی AHP برخی از آنها فقط در ماتریس مقایسات زوجی سازگار کاربرد دارند؛ برخی نیز فقط می‌توانند یک مجموعه وزن‌های غیربازه‌یی (دقیق) که تخمین نقطه‌یی هستند را از ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی استخراج کنند. از میان روش‌های ارائه‌شده، فقط روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، روش پیشنهادی سوگی‌هارا (۲۰۰۴)، روش برنامه‌ریزی آرمانی لگاریتمی دومرحله‌یی (TLGP) وانگ (۲۰۰۵)، و روش برنامه‌ریزی آرمانی وانگ (2007-c) را می‌توان برای تولید وزن‌های بازه‌یی از ماتریس‌های سازگار و ناسازگار به‌کار برد. البته دو روش شبیه‌سازی و TLGP تاحدودی پیچیده‌اند. روش شبیه‌سازی نیاز به تعداد زیادی شبیه‌سازی دارد و در روش TLGP نیز می‌بایست تعداد $(2n + 1)$ مدل حل شود. روش سوگی‌هارا و روش برنامه‌ریزی آرمانی وانگ (2007-c) تنها روش‌هایی هستند که با یک بار اجرای آنها می‌توان به پاسخ‌های مورد نیاز از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی دست یافت اما پاسخ‌های حاصل از مدل سوگی‌هارا تنها یک تخمین غیردقیق از وزن‌های مورد نظر است؛ روش برنامه‌ریزی آرمانی وانگ نسبت به این روش‌ها بهبود یافته است. در این روش با حل یک بار یک مدل می‌توان به وزن‌های مورد نظر دست یافت. علاوه بر این مدل پیشنهادی وانگ در ماتریس‌های سازگار و ناسازگار نیز کاربرد دارد و تخمین‌های دقیق‌تری را نسبت به روش سوگی‌هارا ارائه می‌کند اما این روش را نمی‌توان یک مدل پایدار دانست.

روش‌هایی که درمورد ابزار AHP تحت عنوان مدل‌های پایدار پیشنهاد شده‌اند مناسب ماتریس‌های مقایسات زوجی غیربازه‌یی است و براساس بررسی صورت‌گرفته تاکنون به مبحث پایداری درمورد استخراج وزن از ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی پرداخته نشده است. علاوه‌بر این از روش‌های بهینه‌سازی پایدار نیز در مدل‌سازی استخراج وزن از ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی و غیربازه‌یی استفاده نشده است.

۳. بهینه‌سازی در شرایط عدم قطعیت

اصطلاح عدم قطعیت معانی مختلفی دارد، اما در آنالیز تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDM)[۱۳] می‌توان تعریف زیمرمن[۱۴] را برای آن ارائه کرد:[۳۱] «عدم قطعیت اشاره به این امر دارد که در یک موقعیت (وضعیت) خاص، شخص اطلاعاتی را که به‌صورت کمی یا کیفی برای توصیف و تشریح، تعیین یا پیش‌بینی قطعی و عددی یک سیستم، رفتار آن و یا سایر مشخصه‌های آن مناسب و مورد نیاز است را در اختیار ندارد.» در واقع در این وضعیت، احتمال وقوع حالات مختلف به‌صورت ذهنی و براساس تجربه و آگاهی محدود تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود. در مسائل تصمیم‌گیری چهار طبقه‌بندی اصلی برای مسائل در نظرگرفته می‌شود: ۱. تصمیم‌گیری در شرایط قطعی، که در این حالت مقادیر دقیق پارامترها معلوم است؛ ۲. تصمیم‌گیری در شرایط ریسک، که در آن چندین مجموعه‌ی ممکن (سناریو) برای مقادیر پارامترها وجود دارد و احتمال رخ‌دادن هریک از مجموعه‌ها نیز مشخص است؛ ۳. تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت که در این حالت تعدادی سناریو با احتمال نامشخص وجود دارد؛ ۴. تصمیم‌گیری فازی که در آن سناریوهای ممکن نامعلوم‌اند (مرز بین عدم قطعیت و ابهام).[۳۲]

روش‌های کلاسیکِ ارائه‌ی پارامترهای دارای عدم قطعیت عبارت‌اند از: آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی احتمالی[۱۵]. این روش‌های قدیمی، هریک نقاط ضعفی

دارند که محدودکننده‌ی کاربرد آنها در مسائل واقعی‌اند. بهینه‌سازی پایدار روش و رویکردی جدید در ارائه‌ی پارامترهای دارای عدم قطعیت است. در دهه‌های اخیر توسعه‌های فراوانی در نظریه‌ی بهینه‌سازی پایدار مجموعه‌های محدب رخ داده است. از نظر سختی کار، بهینه‌سازی پایدار روشی متفاوت برای کنترل عدم قطعیت داده‌ها ارائه کرده است.

دو مسئله‌ی اصلی در زمینه‌ی پایداری وجود دارد: ۱. راه‌حل (پاسخ) پایدار چیست؟ ۲. چگونه راه‌حل پایدار را باید محاسبه کرد؟ به‌طور کلی، پاسخ پایدار را می‌توان چنین تعریف کرد: «یک جواب بهینه‌ی (عملی) که درصورت تحقق هر داده‌یی، بهینه (عملی) باقی بماند»، اما این تعریف بسیار محدودکننده است و در بیشتر مواقع احتمال وجود چنین جوابی بسیار پایین است. بنابراین محققین تعاریف مناسب‌تری را برای راه حل پایدار ارائه کرده‌اند. عده‌یی جواب بهینه‌یی را پایدار می‌دانند که بیشترین تأسف نسبی را کمینه کند.[۳۳] برخی نیز پاسخ حاصل از یک مدل بهینه‌سازی را درصورتی پایدار می‌دانند که برای تمامی سناریوهای درنظرگرفته شده برای داده‌های ورودی بتواند نزدیک به بهینه باقی بماند (پایداری پاسخ) و نیز برای تمامی داده‌ها، تحت کلیه‌ی سناریوها تقریباً عملی باشد (پایداری مدل).[۲۲] محققین دیگری نیز راه‌حل پایدار را یک پاسخ زیربهینه (نزدیک به بهینه) برای داده‌های اسمی مسئله می‌دانند[۲۹] که به‌منظور حصول اطمینان از عملی ماندن مدل تحت تغییرات برخی از داده‌های ورودی از بهینه‌بودن دور شده است.

در زمینه‌ی پایداری در روش AHP نیز به‌طور خاص تعاریفی ارائه شده است. برخی پایداری را در مدل استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی AHP، به‌معنای غیرحساس بودن گزینه‌ی منتخب نسبت به تغییرات در وزن معیارها به کار برده‌اند[۱۱] و برخی نیز پایداری در مدل‌های استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی AHP را عدم تأثیرپذیری بردار وزن (اولویت) از ورودی‌های غلط و غیرمعمول دانسته‌اند.[۹]

برای پاسخ به سؤال چگونگی محاسبه‌ی پاسخ‌های پایدار، باید به تشریح روش‌های بهینه‌سازی پایدار پرداخت. برمبنای مطالعات صورت‌گرفته، روش‌های بهینه‌سازی پایدار را می‌توان براساس انواع مجموعه‌های عدم قطعیت درنظرگرفته‌شده به چهار دسته تقسیم کرد: ۱. مجموعه‌ی عدم قطعیت به‌صورت بازه‌یی؛ ۲. مجموعه عدم قطعیت به‌صورت بیضوی؛ ۳. مجموعه عدم قطعیت به‌صورت یک نرم دلخواه؛ ۴. ارائه‌ی عدم قطعیت در قالب سناریو. از آنجا که در یکی از مدل‌های ارائه‌شده در این نوشتار از روش‌های بازه‌یی بهره‌گرفته شده است لذا درادامه خلاصه‌یی از این روش بیان می‌شود.

مجموعه‌ی عدم قطعیت بازه‌یی: روش‌های پیشنهادی سویستر (۱۹۷۳) و برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) براساس مجموعه‌های عدم قطعیتی هستند که به‌صورت بازه‌یی‌اند. اولین گام برای ایجاد مدل‌های دارای مصونیت دربرابر عدم قطعیت داده‌ها، توسط سویستر (۱۹۷۳) برداشته شد. وی یک مدل‌بهینه‌سازی خطی برای تولید پاسخی که برای تمامی داده‌های متعلق به مجموعه‌ی محدب عملی است پیشنهاد کرد. این مدل پاسخ‌هایی را نتیجه می‌دهد که بسیار محافظه‌کارانه‌اند. به این‌معنا که برای کسب اطمینان از عملی‌ماندن مدل مقدار زیادی از بهینگی مدل در مقایسه با مسئله‌ی اصلی از دست می‌رود.

برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) روشی ارائه کرده‌اند که به‌کمک آن می‌توان هزینه‌ی پایداری (هزینه‌ی متعادل‌سازی بین عملی‌بودن و بهینه‌بودن) پاسخ‌ها را کاهش داد. به‌طور خاص، در این روش سطح محافظه‌کارانه بودن راه‌حل‌های پایدار، به‌صورت حدود احتمالی برای تغییرات محدودیت‌ها قابل تنظیم است. یک جنبه‌ی مهم این روش آن است که روش جدید مدل‌سازی به‌صورت پایدار همچنان یک مسئله‌ی خطی است. رویکرد اتخاذشده توسط سیم و برتسیماس را رویکرد عدم قطعیت بودجه‌یی نیز نامیده‌اند، زیرا در این روش تعداد محدودی از داده‌های غیرقطعی می‌توانند دربردارنده‌ی بیشترین تغییرات تعیین‌شده برای آنها باشند. در ادامه به دلیل کاربرد این روش در مدل پیشنهادی، به‌طور خلاصه این روش بهینه‌سازی تشریح می‌شود. به این منظور مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Max \quad c'\ x \tag{۴}$$

$$S.t. \quad Ax \leq b \tag{۵}$$

$$l \leq x \leq u \tag{۶}$$

در مدل فوق، بدون از دست‌دادن عمومیت مسئله فرض می‌شود که عدم قطعیت در داده‌ها فقط بر عناصر ماتریس A تأثیر می‌گذارد، زیرا می‌توان تابع هدف بیشینه‌سازیz را به‌صورت محدودیت $z - c'x \leq 0$ افزود. برتسیماس و سیم برای ارائه‌ی مدل بهینه‌سازی پایدار، مجموعه‌ی عدم قطعیتی به‌صورت U را برای داده‌ها درنظر گرفته‌اند.

مدل عدم قطعیت داده‌ها U: یک ردیف خاص (i) از ماتریس A در نظر گرفته می‌شود J_i .نماینده‌ی مجموعه ضرایب دارای عدم قطعیت در ردیف i است. هر عنصر $j \in J_i, a_{ij}$ به‌صورت یک متغیر تصادفی کران‌دار و متقارن $j \in J_i, \tilde{a}_{ij}$ مدل می‌شود که می‌تواند حداکثر به‌مقدار $j \in J_i, \hat{a}_{ij}$ حول مقدار اسمی $j \in J_i, a_{ij}$ تغییر کند. به این ترتیب متغیر تصادفی $j \in J_i, \tilde{a}_{ij}$ در بازه‌ی $[a_{ij} - \widehat{a}_{ij}, a_{ij} + \widehat{a}_{ij}]$ مقدار می‌گیرد.

با درنظرگیری مجموعه‌ی عدم قطعیت فوق برای داده‌ها و واردکردن یک تابع محافظت $\beta_i(x^*, \Gamma_i)$ در محدودیت‌های دارای ضرایب غیرقطعی، برتسیماس و سیم یک مدل خطی برای پایدارسازی پاسخ‌ها ارائه کرده‌اند.[۲۸و۲۹] این مدل در بخش (۱.۴) برای‌ارائه‌ی یک مدل پایدار استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی به‌کار گرفته شده است.

۴. ارائه‌ی مدل‌های پیشنهادی

یکی‌از اهداف ارائه‌ی مدل‌های بهینه‌سازی پایدار درنظرگیری تأثیر عدم قطعیت داده‌ها در مدل است تا پاسخ‌های حاصل از مدل در بدترین شرایط نیز عملی و نزدیک به بهینه باشند. در استخراج وزن‌های مناسب از ماتریس مقایسات زوجی AHP در شرایط وجود عدم قطعیت در قضاوت‌ها، استفاده از مقایسات زوجی بازه‌یی روش مناسبی برای دریافت اطلاعات کامل از تصمیم‌گیرنده و درنظرگیری عدم قطعیت‌های وی در مدل است. یکی از مشکلات اساسیِ موجود در استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی، مسئله‌ی ناسازگاری ماتریس‌های حاوی قضاوت‌های زوجی است. معمولاً به‌دلیل استفاده از قضاوت‌های ذهنی تصمیم‌گیرنده در ماتریس‌های مقایسات زوجی، همواره احتمال وجود ناسازگاری به‌ویژه ناسازگاری‌های جزئی در ماتریس‌های مقایسات زوجی وجود دارد. بنابراین مدل پایدار استخراج وزن باید بتواند پاسخ‌ها را از تغییرات در برابر این ناسازگاری‌های جزئی محافظت کند. در این بخش دو مدل پایدار با ویژگی‌هایی متفاوت ارائه‌شده که یکی براساس روش بهینه‌سازی پایدار و دیگری براساس روش برنامه‌ریزی آرمانی است.

در مدل‌های استخراج وزن پاسخ‌های مدل می‌تواند دو گونه باشد: تخمین‌های نقطه‌یی و تخمین‌های بازه‌یی، که هریک از این دو نوع خروجی از مزایایی بهره‌مندند. تخمین نقطه‌یی تصمیم‌گیری را تسهیل می‌کند اما در انتها عدم قطعیت در پاسخ‌ها را به‌صورت بازه منعکس نمی‌کند و از نظر تصمیم‌گیرنده یک پاسخ قطعی به

دست می‌آید. تخمین‌بازه‌یی، عدم قطعیت موجود در تصمیم‌گیری را به‌خوبی نشان می‌دهد و طول بازه‌های تخمینی می‌تواند معیاری برای میزان عدم قطعیت یا ناسازگاری (در ماتریس‌های غیربازه‌یی ناسازگار) باشد، اما تصمیم‌گیرنده در انتها ناچار به تخمین نقطه‌یی برای تصمیم‌گیری است. علاوه بر موارد ذکرشده، زمانی که پاسخ‌ها به‌صورت تخمین‌های بازه‌یی است، احتمال هم‌پوشانی بازه‌ها و تغییر اولویت‌ها وجود دارد اما این مسئله درمورد تخمین‌های نقطه‌یی وجود ندارد. باتوجه به موارد فوق می‌توان تعریف مناسبی برای مدل‌های پایدار استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی در روش AHP ارائه داد. به این ترتیب مدلی پایدار است که بتوان عدم قطعیت‌های موجود در قضاوت‌های زوجی تصمیم‌گیرنده را در آن منظور کرد؛ از سوی دیگر مدل پایدار می‌بایست نسبت به ناسازگاری‌های ذهنی تصمیم‌گیرنده پایدار عمل کند به این معنا که بتواند پاسخ‌هایی نزدیک به پاسخ‌های استخراج‌شده از ماتریس مقایسات زوجی سازگار را ارائه کند. اولویت‌بندی حاصل از این مدل می‌بایست به‌گونه‌یی باشد که تصمیم‌گیری را برای تصمیم‌گیرنده تسهیل کند (اولویت‌بندی با احتمال بالا به دست آید). بر این اساس دو مدل پایدار پیشنهاد شده که در هر دو از قضاوت‌های بازه‌یی به‌عنوان ورودی استفاده شده است. عملکرد این دو مدل متفاوت است اما هر دو در جهت ایجاد ترکیب‌های مختلف از قضاوت‌ها در بازه‌های تعیین‌شده و کاهش خطاها و ناسازگاری‌های عمل‌می‌کنند. خروجی‌نیز در مدل بهینه‌سازی پایدار تخمین به‌صورت نقطه‌یی، و در مدل برنامه‌ریزی آرمانی تخمین به‌صورت بازه‌یی است. در تابع هدف مدل ارائه‌کننده‌ی تخمین‌های بازه‌یی، کمینه‌سازی طول بازه‌ها به‌منظور کاهش هم‌پوشانی و احتمال تغییر اولویت‌ها نیز منظور شده است. روش‌های پیشنهادی براساس روش تحلیل رگرسیون است و از آنجا که این روش براساس دیدگاه احتمالی است لذا وزن‌های بازه‌یی به‌دست آمده از روش پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی را می‌توان به‌عنوان بازه‌های محتمل تخمین زده شده از داده‌های ارائه شده در نظر گرفت.

۱.۴. مدل بهینه‌سازی پایدار پیشنهادی

برای دریافت اطلاعات کامل درمورد قضاوت‌ها و عدم قطعیت‌های تصمیم‌گیرنده در روش AHP، شایسته است از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی (ماتریس ۱) استفاده شود. در ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی، درواقع مجموعه‌های عدم قطعیت درنظرگرفته‌شده برای قضاوت‌های دارای عدم اطمینان، به‌صورت بازه‌یی است که توزیع آماری آنها نامشخص است؛ بنابراین می‌توان برای ارائه‌ی یک مدل پایدار، از مدل‌های بهینه‌سازی پایداری که در آنها از مجموعه‌های عدم قطعیت بازه‌یی استفاده می‌شود بهره برد. به‌منظور استفاده از این مدل بهینه‌سازی پایدار می‌بایست ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای استخراج وزن‌های مورد نیاز از ماتریس مقایسات زوجی AHP در نظر گرفته شود و سپس این مدل به یک مدل بهینه‌سازی پایدار تبدیل شود که بر این اساس مدل پایه‌ی ۷ تا ۱۱ پیشنهاد می‌شود:

$$Min \sum_{i=1}^{n}(e_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(m_{ij}+n_{ij}) \qquad (7)$$

$Subject\ to$

$$(A-nI)W^T - cr.RI.(n-1)W^T - e_i \leq 0 \qquad \forall i=1,...,n \qquad (8)$$

$$a_{ij}^L w_j - n_{ij} \leq w_i \leq a_{ij}^U w_j + m_{ij} \qquad \forall i,j \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (10)$$

$$w_i, e_i, n_{ij}, m_{ij} \geq 0 \qquad (11)$$

A= ماتریس مقایسات زوجی با عناصر دارای عدم قطعیت؛

I= ماتریس قطری‌با عناصر قطر اصلی ۱ و مابقی عناصر آن صفر؛

$W=(w_1,...,w_n)$ که عناصر آن وزن هریک از گزینه‌ها/معیارها است؛

e_i= خطای ناشی از افزایش ناسازگاری عناصر ماتریس A از حد تعیین شده (cr)؛

a_{ij}^U= حد بالای تعیین‌شده در بازه ارائه شده برای عنصر سطر iام و ستون jام ماتریس A؛

a_{ij}^L= حد پایین تعیین‌شده در بازه ارائه شده برای عنصر سطر iام و ستون jام ماتریس A؛

n_{ij}= میزان خطای ایجادشده در اثر انحراف وزن‌های‌استخراج شده از حد پایین‌بازه تعیین‌شده برای عنصر a_{ij}؛

m_{ij}= میزان‌خطای ایجادشده در اثر انحراف وزن‌های استخراج شده از حد بالای بازه تعیین‌شده برای عنصر.

در رابطه‌ی ۷ کمینه‌کردن خطای ناشی از حد پذیرفته‌شده برای نرخ ناسازگاری و خطای ناشی از تخطی از حدود تعیین‌شده برای مقایسات زوجی به‌عنوان تابع هدف منظور شده است. در رابطه‌ی ۸ نیز مقدار بیشینه‌یی برای نرخ سازگاری (CR) در نظر گرفته شده که با cr نشان داده شده است (رابطه‌ی ۱۴). براساس این رابطه ترکیب‌های مختلف مقادیر بازه‌ها به‌گونه‌یی وارد مدل می‌شود که ناسازگاری ناشی از آنها از حد تعیین‌شده (cr) بیشتر نشود ($cr \leq 0/1$)؛ حل این رابطه چنین است:

$$\text{شاخص سازگاری} = CI = \frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \qquad (12)$$

$$\text{نرخ سازگاری} = CR = \frac{CI}{RI} \qquad (13)$$

که در آن RI شاخص سازگاری تصادفی[16] است که براساس تعداد معیارها/گزینه‌ها (n)، دارای مقادیر مشخصی است؛ می‌دانیم که:

$$\frac{(\lambda_{\max}-n)}{RI(n-1)} \leq cr \qquad (14)$$

و به عبارت دیگر:

$$\frac{(\lambda_{\max}-n)W}{RI(n-1)W} \leq cr \qquad (15)$$

در این‌صورت:

$$\lambda_{\max}W - nIW \leq cr.RI.(n-1)W \qquad (16)$$

از آنجا که $AW=\lambda_{\max}W$، خواهیم داشت:

$$AW - nIW - cr.RI(n-1)W \leq 0 \qquad (17)$$

که با درنظرگیری مقداری خطای مجاز (e_i):

$$AW - nIW - cr.RI(n-1)W - e_i \leq 0 \qquad (18)$$

رابطه‌ی ۱۸ همان رابطه‌ی ۸ مدل است؛ همچنین رابطه‌ی ۹ براساس رابطه‌ی ۱۹ به‌دست آمده است.

$$a_{ij}^L \leq \frac{w_i}{w_j} \leq a_{ij}^U \qquad \forall i,j=1,...,n \qquad (19)$$

در حالت کاملاً سازگار و عدم وجود خطا در تخمین‌ها، رابطه‌ی ۱۹ برقرار است اما به‌دلیل وجود ناسازگاری در قضاوت‌های ذهنی افراد، معمولاً این رابطه برقرار نیست و لذا باید مقداری خطا در دو طرف بازه‌در نظر گرفته شود. بنابراین با افزودن مقداری خطا (m_{ij} و n_{ij}) به دو طرف رابطه‌ی ۱۹، رابطه‌ی ۹ حاصل می‌شود. مدل ۷ـ۱۱ را می‌توان براساس روش ارائه‌شده توسط برت‌سیماس و سیم[۲۸,۲۹] به مدل پایدار خطی زیر تبدیل کرد:

$$Min \sum_{i=1}^{n} e_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} (m_{ij} + n_{ij}) \tag{۲۰}$$

$$Subject\ to$$

$$\sum_{j} a_{ij} w_j - cr.RI(n-1) w_i + Z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} - n w_i - e_i \leq 0 \quad \forall i \tag{۲۱}$$

$$Z_i + P_{ij} \geq \hat{a}_{ij} w_j \qquad \forall i, j \in J_i \tag{۲۲}$$

$$a_{ij}^{L} w_j - n_{ij} \leq w_i \leq a_{ij}^{U} w_j + m_{ij} \quad \forall i, j = 1, ..., n \tag{۲۳}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{۲۴}$$

$$w_i, Z_i \geq 0 \qquad \forall i \tag{۲۵}$$

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \in J_i \tag{۲۶}$$

w_i: وزن گزینه/معیار iام (متغیر تصمیم)؛

$\tilde{a}_{ij}, j \in J_i$: عناصر ماتریس مقایسات زوجی ارائه‌شده توسط تصمیم‌گیرنده (A) که دارای عدم قطعیت است. در این ماتریس تصمیم‌گیرنده ممکن است مقایسات زوجی خود را به دو صورت ارائه کند: الف) به‌صورت مقداری اسمی (a_{ij}) به‌عنوان محتمل‌ترین مقدار و مقداری خطا /تغییر مجاز $\hat{a}_{ij}$؛ ب) ارائه‌ی قضاوت به‌صورت بازه‌یی، $[a_{ij}^{L}, a_{ij}^{U}]$، که در این‌صورت $a_{ij} = \frac{a_{ij}^{U} + a_{ij}^{L}}{2}$ و $\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}^{U} - a_{ij}^{L}}{2}$. در هر صورت فرض می‌شود $\tilde{a}_{ij}$ دارای یک توزیع‌متقارن‌با مقدار اسمی a_{ij} برابر با میانه‌ی بازه است و در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ مقدار می‌گیرد.

J_i : مجموعه‌یی از عناصر سطر iام ماتریس A که دارای عدم قطعیت‌اند (این پارامتر در ماتریس A حداکثر می‌تواند در هر سطر برابر $n-1$ باشد.)؛

n: بعد ماتریس مقایسات زوجی (تعداد گزینه‌ها / تعداد معیارها / تعداد متغیر تصمیم)؛

RI: شاخص سازگاری تصادفی که برای مقادیر مختلف n دارای مقادیر مشخصی است؛

Cr: حد مجاز در نظرگرفته شده برای نرخ ناسازگاری؛

A: ماتریس مقایسات زوجی در روش AHP؛

a_{ij}^{U}: حد بالای تعیین‌شده در بازه ارائه‌شده برای عنصر سطر iام و ستون jام ماتریس A؛

a_{ij}^{L}: حد پایین تعیین‌شده در بازه ارائه‌شده برای عنصر سطر iام و ستون jام ماتریس A؛

Γ_i: برای هر i (هر ردیف در ماتریس A) یک پارامتر Γ_i در نظر گرفته می‌شود که لزوماً عدد صحیح نیست و برابر است با تعداد ضرایب دارای عدم قطعیت مجاز به تغییر در بازه تعیین‌شده. این پارامتر در محدوده $[0, |J_i|]$ مقدار می‌پذیرد؛

e_i: خطای ناشی از افزایش ناسازگاری عناصر ماتریس A از حد تعیین شده (cr)؛

m_{ij}: میزان خطای ایجاد شده در اثر انحراف وزن‌های مستخرج از حد بالای بازه تعیین‌شده برای عنصر a_{ij}؛

n_{ij}: میزان خطای ایجادشده در اثر انحراف وزن‌های‌مستخرج از حد پایین بازه تعیین‌شده برای عنصر a_{ij}؛

z_i^*: نرخ تغییر در تابع محافظت از محدودیت iام ($(\beta_i(x^*, \Gamma_i))$)، به‌ازاء یک واحد تغییر در مقدار Γ_i؛

P_{ij}^*: نرخ تغییر در تابع محافظت از محدودیت iام($(\beta_i(x^*, \Gamma_i))$) ، به‌ازاء تغییر در میزان تولرانس پارامتر jام در محدودیت iام.

در این مدل محتمل‌ترین مقدار در هر بازه برابر مقدار اسمی درنظر گرفته‌شده برای هریک از ضرایب دارای عدم قطعیت در مدل است. ضرایب مدل نیز همان عناصر ماتریس مقایسات زوجی‌اند که به‌صورت بازه‌یی بیان شده‌اند.

در این مسئله عدم قطعیت مؤثر بر هریک از مقایسات زوجی مستقل فرض شده است و از آنجا که مقایسات زوجی به یکدیگر وابسته‌اند، احتمال پایداری پاسخ‌ها کم‌تر از شرایطی است که ضرایب مدل از هم مستقل‌اند؛ لذا لازم است مقدار تضمین احتمالی عملی‌ماندن محدودیت‌ها محاسبه شود.[۳۰]

در مدل ۲۰ تا ۲۶ با تغییر Γ_i در محدوده‌ی $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$ انعطاف‌پذیری لازم برای تنظیم پایداری در مقابل سطح محافظه‌کاری در بهینگی تابع هدف حاصل می‌شود و ترکیب‌های مختلف از مقادیر بازه‌ها نیز با درنظرگیری معیار سازگاری در مدل بررسی می‌شود. این مدل در حالتی که حداکثر Γ_i مورد از ضرایب دارای عدم قطعیت (عناصر ماتریس مقایسات زوجی در سطر iام) می‌توانند هم‌زمان بیشترین تغییر مجاز خود را داشته باشند، از بهینگی و پایداری مدل محافظت می‌کند.

۲.۴. مدل برنامه‌ریزی آرمانی پیشنهادی

در روش‌های متداول برنامه‌ریزی خطی، معمولاً یک تابع هدف به‌منظور بیشینه‌سازی منافع و کمینه‌سازی هزینه‌ها/زیان‌ها در نظر گرفته می‌شود، اما در واقعیت در مدل‌سازی مسائل چندین هدف متناقض وجود دارد که می‌بایست با حل مدل همه‌ی آنها را در حد ممکن بهینه کرد. برنامه‌ریزی آرمانی[۱۷] روشی مناسب برای برآورده‌کردن هم‌زمان چند هدف متناقض پیشنهاد می‌کند.[۳۴]

به‌منظور استخراج وزن‌های پایدار از ماتریس مقایسات زوجی AHP می‌بایست میزان عدم قطعیت پاسخ حاصله را کاهش داد. از آنجا که میزان فاصله در بازه تعیین‌شده برای وزن هریک از معیارها/گزینه‌ها نشان‌گر میزان عدم قطعیت است لذا تابع هدف، شامل یک عبارت برای کمینه‌سازی فاصله‌ی مقدار کمینه‌و بیشینه‌ی وزن معیارها/گزینه‌ها است که این امر موجب کاهش هم‌پوشانی وزن‌های بازه‌یی استخراج‌شده و درنتیجه‌کاهش احتمال تغییر اولویت‌ها و موجب پایدارسازی تصمیمات و اولویت‌بندی‌های می‌شود. علاوه براین در مدل، محدودیت‌هایی براساس روابط بین وزن‌ها درنظر گرفته می‌شود که تخطی از آنها نشانه‌ی افزایش ناسازگاری در مدل است (در ماتریس‌های مقایسات زوجی سازگار یا ماتریس‌های دارای ناسازگاری غیرعمده).

در صورتی که در تابع هدف، کمینه‌کردن خطاهای تخطی از محدودیت‌های مدل همراه با کاهش فاصله‌ی بازه‌های استخراج‌شده درنظر گرفته شود می‌توان مشاهده کرد که با نزدیک‌شدن به تخمین نقطه‌یی، خطاهای مربوط به تخطی از محدودیت‌ها بالا می‌رود و برعکس. برهمین اساس مشخص است که در این مسئله اهداف

متناقضی وجود دارد که می‌بایست تا حد امکان برآورده ساخت تا از این طریق وزن‌های بازه‌یی به دست آید که احتمال هم‌پوشانی آنها و درنتیجه احتمال تغییر اولویت‌ها و همچنین خطاهای تخطی از محدودیت‌ها تا حد امکان کاهش یابد. هزینه‌ی تبادل صورت‌گرفته میان بهینگی مدل و عملی‌بودن مدل را می‌توان در تابع هدف تعیین کرد که در این صورت یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی وزن داده شده حاصل خواهد شد. مدل پیشنهادی ۴۱ تا ۴۹ بر همین اساس ارائه شده است.

برای ایجاد چنین مدلی می‌بایست از روابط حاکم بر ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی بهره گرفت. فرض می‌شود تصمیم گیرنده‌یی قضاوت‌های خود را به‌صورت بازه‌یی ارائه کرده است. برای مثال وی می‌تواند قضاوت کند که معیار iام بین a_{ij}^L و a_{ij}^U برابر برتر (مهم‌تر) از معیار jام است. a_{ij}^L و a_{ij}^U اعداد حقیقی و غیرمنفی‌اند و $a_{ij}^L \le a_{ij}^U$. به این ترتیب یک ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی را می‌توان به‌صورت ماتریس ۱ بیان کرد. ماتریس مقایسات زوجی بازه‌ای (A) را می‌توان به دو زیرماتریس غیرمنفی تقسیم کرد، درمورد این دو ماتریس رابطه $A^L \le A \le A^U$ برقرار است. توجه شود که دیگر اصل وارونگی در ماتریس‌های A^U و A^Lبرقرار نیست.

$$A^L = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^L & \dots & a_{1n}^L \\ a_{21}^L & 1 & \dots & a_{2n}^L \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1}^L & a_{n2}^L & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^U = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^U & \dots & a_{1n}^U \\ a_{21}^U & 1 & \dots & a_{2n}^U \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1}^U & a_{n2}^U & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

لازم است محدودیت مربوط به نرمال‌سازی در مسائل معمولی AHP برای ماتریس‌های قضاوت‌های زوجی بازه‌یی توسعه داده شود. بنابر اثبات صورت‌گرفته در نوشتار ارائه‌شده توسط سوگی‌هارا (۲۰۰۴) بردار وزن‌های بازه‌یی را می‌توان نرمال‌شده دانست درصورتی که روابط زیر برقرار باشد:[۱۷]

$$w_j^L + \sum_{j=1, j\neq i} w_j^U \ge 1 \qquad i = 1, ..., n \tag{۲۷}$$

$$w_j^U + \sum_{j=1, j\neq i} w_j^L \le 1 \qquad i = 1, ..., n \tag{۲۸}$$

درصورتی که ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی A، یک مقایسه‌ی بدون خطا درمورد بردار وزن‌های بازه‌یی باشد می‌توان ماتریس A را به‌صورت رابطه‌ی ۲۹ نوشت و آن را به دو ماتریس ۳۰ و ۳۱ تفکیک کرد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & [\frac{w_1^L}{w_2^U}, \frac{w_1^U}{w_2^L}] & \dots & [\frac{w_1^L}{w_n^U}, \frac{w_1^U}{w_n^L}] \\ [\frac{w_2^L}{w_1^U}, \frac{w_2^U}{w_1^L}] & 1 & \dots & [\frac{w_2^L}{w_n^U}, \frac{w_2^U}{w_n^L}] \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ [\frac{w_n^L}{w_1^U}, \frac{w_n^U}{w_1^L}] & [\frac{w_n^L}{w_2^U}, \frac{w_n^U}{w_2^L}] & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

$$A^L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1^L}{w_2^U} & \dots & \frac{w_1^L}{w_n^U} \\ \frac{w_2^L}{w_1^U} & 1 & \dots & \frac{w_2^L}{w_n^U} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{w_n^L}{w_1^U} & \frac{w_n^L}{w_2^U} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

و

$$A^U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1^U}{w_2^L} & \dots & \frac{w_1^U}{w_n^L} \\ \frac{w_2^U}{w_1^L} & 1 & \dots & \frac{w_2^U}{w_n^L} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{w_n^U}{w_1^L} & \frac{w_n^U}{w_2^L} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

با توجه به روابط درنظر گرفته شده برای مقایسات زوجی در دو ماتریس فوق، روابط ۳۲ و ۳۳ را می‌توان بین این ماتریس‌ها برقرار دانست. در این روابط $W^L = (w_1^L, w_2^L, ..., w_n^L)$ و $W^U = (w_1^U, w_2^U, ..., w_n^U)$ است. معادلات زیر روابط مهمی را بین حدود بالا و پایین بازه‌ها در بردار وزن‌های بازه‌یی Wنشان می‌دهند:

$$A^L W^U = W^U + (n-1) W^L \tag{۳۲}$$

$$A^U W^L = W^L + (n-1) W^U \tag{۳۳}$$

باتوجه به وجود خطا و ناسازگاری در قضاوت‌های تصمیم‌گیرنده نمی‌توان کاملاً مطمئن بود که روابط فوق دقیقاً برقرار باشند، بنابراین لازم است مقداری خطا در این معادلات در نظر گرفته شود. Eو M بردارهای خطا هستند، $E = (e_1, ..., e_n)^T$ و $M = (m_1, ..., m_n)^T$، و I یک ماتریس واحد $(n \times n)$ است که عناصر قطر اصلی آن برابر ۱ و سایر عناصر آن صفر است:

$$E = (A^L - I) W^U - (n-1) W^L \tag{۳۴}$$

$$M = (A^U - I) W^L - (n-1) W^U \tag{۳۵}$$

از آنجا که روابط ۳۲ و ۳۳ محدودیت‌های دوطرفه‌یی ایجاد می‌کنند، برای بردارهای خطای E و M، $E^+ = (e_1^+, ..., e_n^+) \ge 0$، $E^- = (e_1^-, ..., e_n^-) \ge 0$ و $M^+ = (m_1^+, ..., m_n^+) \ge 0$، $M^- = (m_1^-, ..., m_n^-) \ge 0$، روابط ۳۶ تا ۴۱ برقرار است:

$$e_i = e_i^+ - e_i^- \qquad i = 1, ..., n \tag{۳۶}$$

$$|e_i| = e_i^+ - e_i^- \qquad i = 1, ..., n \tag{۳۷}$$

$$m_i = m_i^+ - m_i^- \qquad i = 1, ..., n \tag{۳۸}$$

$$|m_i| = m_i^+ - m_i^- \qquad i = 1, ..., n \tag{۳۹}$$

$$e_i^+ . e_i^- = 0 \qquad i = 1, ..., n \tag{۴۰}$$

$$m_i^+ . m_i^- = 0 \qquad i = 1, ..., n \tag{۴۱}$$

که براین اساس، می‌توان مدل بهینه‌سازی پایدار ۴۲ تا ۵۰ را برای استخراج وزن در یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری AHP ارائه داد:

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{n}(w_i^U-w_i^L)+p[\sum_{i=1}^{n}e_i^{+}+e_i^{-}+m_i^{+}+m_i^{-}] \tag{۴۲}$$

$Subject$

$$(A^L-I)W^U-(n-1)W^L-E^{-}+E^{+}=0 \tag{۴۳}$$

$$(A^U-I)W^L-(n-1)W^U-M^{-}+M^{+}=0 \tag{۴۴}$$

$$w_i^L+\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^U \geq 1 \quad i=1,...,n \tag{۴۵}$$

$$w_i^U+\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^L \leq 1 \quad i=1,...,n \tag{۴۶}$$

$$w_i^U-a_{ij}^U w_j^L-q_{ij}\leq 0 \quad \forall i,j=1,...,n \tag{۴۷}$$

$$-w_i^L+a_{ij}^L w_j^U-r_{ij}\leq 0 \quad \forall i,j=1,...,n \tag{۴۸}$$

$$W^U-W^L\geq 0 \tag{۴۹}$$

$$p, W^L, W^U, E^{+}, E^{-}, M^{+}, M^{-}\geq 0 \tag{۵۰}$$

w_i^U: حد بالای بازه استخراج شده برای وزن گزینه/معیار iام (متغیر تصمیم)؛

w_i^L: حد پایین بازه استخراج شده برای وزن گزینه/معیار iام (متغیر تصمیم)؛

p: ضریبی که به‌عنوان جریمه‌ی غیرعملی شدن محدودیت‌ها درنظرگرفته می‌شود؛ به‌عبارت دیگر میزان اهمیت خطا در مدل است.

E و M: بردارهای خطای ناشی از ناسازگاری کلی ماتریس مقایسات زوجی در قضاوت‌ها، و $E^{-}=(e_1^{-},...,e_n^{-})\geq 0$ ،$E^{+}=(e_1^{+},...,e_n^{+})\geq 0$ و $M^{-}=(m_1^{-},...,m_n^{-})\geq 0$ ،$M^{+}=(m_1^{+},...,m_n^{+})\geq 0$؛

a_{ij}^U: حد بالای بازه ارائه شده برای مقایسه زوجی عنصر iام و jام در ماتریس مقایسات زوجی A؛

a_{ij}^L: حد پایین بازه ارائه شده برای مقایسه‌ی زوجی عنصر iام و jام در ماتریس مقایسات زوجی A؛

q_{ij}: خطای ناشی از تفاوت حد بالای وزن‌های تخمین زده شده و حد بالای وزن‌های ارائه شده در ماتریس مقایسات زوجی؛

r_{ij}: خطای ناشی از تفاوت حد پایین وزن‌های تخمین زده شده و حد پایین وزن‌های ارائه شده در ماتریس مقایسات زوجی.

در این مدل روابط ۴۳ و ۴۴ روابط حاصل از تفکیک ماتریس مقایسات زوجی و درنظرگیری خطا در این مقایسات، و روابط ۴۵ و ۴۶ روابط نرمال‌سازی‌اند. روابط ۴۷ و ۴۸ چنین به‌دست آمده‌اند:

$$\frac{w_i^U}{w_j^L}\leq a_{ij}^U \quad \forall i,j \tag{۵۱}$$

$$\frac{w_i^L}{w_j^U}\geq a_{ij}^L \quad \forall i,j \tag{۵۲}$$

با درنظرگیری مقداری خطا (r_{ij}, q_{ij}) که ناشی از وجود خطا و ناسازگاری در قضاوت‌های افراد است، روابط ۵۳و ۵۴ حاصل می‌شود:

$$w_i^U\leq a_{ij}^U w_j^L+q_{ij} \quad \forall i,j \tag{۵۳}$$

$$w_i^L\geq a_{ij}^L w_j^U-r_{ij} \quad \forall i,j \tag{۵۴}$$

که همان روابط ۴۷ و ۴۸ هستند. این روابط بیانگر ارتباط دوبه‌دو میان عناصر ماتریس هستند. درحالی که در روابط ۴۳ و ۴۴ روابط کلی میان ماتریس حاصل از حدود بالای بازه‌ها و ماتریس حاصل از حدود پایین بازه‌ها بیان‌شده است (روابط سطری‌اند). مدل ۴۲ـ۵۰ را می‌توان برای محاسبه‌ی وزن در ماتریس‌هایی که مقایسات زوجی در آنها به‌صورت دقیق (غیربازه‌یی) ارائه شده است نیز به کار گرفت.

قضیه: با این فرض که W^{U^*}، W^{L^*} پاسخ‌های بهینه‌ی حاصل از مدل ۴۲ تا ۵۰ هستند، اگر A یک ماتریس مقایسات زوجی دقیق (غیربازه‌یی) و سازگار باشد، آنگاه $W^{L^*}=W^{U^*}=W^*$. در این رابطه W^* بردار ویژه‌ی سمت راست برای ماتریس A است.

اثبات: درصورتی که A یک ماتریس مقایسات زوجی دقیق (غیربازه‌یی) و سازگار باشد، معادله‌ی مقدار ویژه $AW^*=nW^*$ برقرار خواهد بود و درنتیجه: $(A-nI)W^*=0$. اگر $W^L=W^*$ و $W^U=W^*$، به‌راحتی براساس روابط زیر می‌توان دریافت که $W^L=W^U=W^*$ یک پاسخ عملی برای مدل است.

$$E=(A^L-I)W^U-(n-1)W^L=(A-nI)W^*=0$$

$$M=(A^U-I)W^L-(n-1)W^U=(A-nI)W^*=0$$

برقراری روابط فوق منجر به $\sum_{i=1}^{n}(e_i^{+}+e_i^{-}+m_i^{+}+m_i^{-})=0$ می‌شود و بنابراین می‌توان گفت که $W^L=W^U=W^*$ پاسخ بهینه‌ی مدل است.

در این مدل وزن‌های بازه‌یی به‌گونه‌یی استخراج می‌شوند که مقایسات زوجی ارائه شده را برآورده کرده و از طرف دیگر براساس تابع هدف ارائه‌شده، طول بازه‌های استخراج‌شده نیز کمینه شود تا اولویت‌بندی نهایی پایدار گردد.

۵. معرفی چند شاخص ارزیابی پایداری وزن‌های استخراج‌شده

برای مقایسه‌ی پاسخ‌های حاصل از مدل‌های موجود و مدل‌های پیشنهادی در این نوشتار نیاز به تعریف شاخص مناسبی است. این شاخص‌ها عبارت‌اند از:

۱. **معیار تطابق.** واضح است که مجموعه‌ی وزن‌های بازه‌یی حاصل از حل مدل‌های مختلف را نمی‌توان به‌آسانی و مستقیماً با یکدیگر مقایسه کرد؛ بنابراین به‌منظور انجام بهتر این مقایسه، ابتدا این مجموعه‌ها به ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی تبدیل می‌شوند. درواقع براساس نتایج حاصله، ماتریس مقایسات زوجی ارائه‌شده توسط تصمیم‌گیرنده مجدداً براساس مقادیر محاسبه‌شده تشکیل می‌شود ($[\tilde{l}_{ij}, \tilde{u}_{ij}]=[\frac{w_i^L}{w_j^U}, \frac{w_i^U}{w_j^L}]$) سپس خطای ایجادشده بین هریک از بازه‌های تبدیل شده و بازه‌های اصلی طبق فرمول ۵۵ محاسبه می‌شود.

$$D(A,\tilde{A})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\left(l_{ij}-\tilde{l}_{ij}\right)^2+(u_{ij}-\tilde{u}_{ij})^2] \tag{۵۵}$$

از این معیار فقط درمورد ماتریس‌های مقایسات زوجی سازگار می‌توان استفاده کرد. می‌توان این معیار را برای سنجش کیفیت مجموعه وزن‌های حاصل از مدل پیشنهادی براساس بهینه‌سازی پایدار نیز به کار برد، اما باید توجه داشت که پاسخ‌های حاصل از این مدل تخمین‌های نقطه‌یی‌اند و بنابراین بهتر است با میانگین بازه‌های ارائه‌شده توسط تصمیم‌گیرنده مقایسه شود. این معیار در مثال‌ها با عنوان معیار تطابق و با نماد «Criteria» ارائه شده است.

۲. **معیار مجموع درجه‌های تقدم.** بدیهی است اگر برای دو عنصر وزن‌های بازه‌یی به دست آید که بین بازه‌های آنها هیچ جزء مشترکی وجود نداشته باشد، هیچ‌گاه تغییر اولویت بین این دو عنصر رخ نخواهد داد. زمانی که بازه‌ها با هم تداخل داشته باشند، دیگر اولویت‌بندی واحدی برای گزینه‌ها وجود نخواهد داشت. در پایدارسازی مسائل تصمیم‌گیری باید احتمال تغییر اولویت‌ها بین گزینه‌ها/معیارها کاهش یابد، برای سنجش و مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل‌ها از لحاظ احتمال تغییر اولویت‌های استخراج‌شده، از شاخص درجه تقدم[۱۸] استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۵۶ بیان‌گر درجه تقدم a بر b (یا $a > b$) است[۱۵]). معیار درنظر گرفته شده در اینجا عبارت است از مجموع مقادیردرجه تقدم بین بازه‌ها که در بهترین حالت برابر است با: $(n-1) \times 100$، و هرچه مجموع مقادیر درجه تقدم از این مقدار کم‌تر باشد، درواقع نشان‌دهنده‌ی هم‌پوشانی بیشتر بازه‌ها و احتمال بالاتر تغییر اولویت‌هاست. این معیار در مثال‌ها تحت عنوان معیار درجه تقدم و با نماد «$\sum Pr$» ارائه شده است.

$$P(a > b) = \frac{Max(0, a_2 - b_1) - Max(0, a_1 - b_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)} \qquad (56)$$

۳. **معیار مجموع فواصل بازه‌ها.** فواصل بازه‌ها نشانه‌یی از وجود عدم قطعیت در پاسخ‌های نهایی است و هرچه فواصل بازه‌ها بیشتر باشد، عدم قطعیت در پاسخ‌های‌نهایی بیشتر و تصمیم‌گیری برای تصمیم‌گیرنده سخت‌تر خواهد بود. از طرف دیگر، با افزایش فواصل بازه‌ها احتمال هم‌پوشانی بازه‌ها و تغییر اولویت‌ها نیز افزایش می‌یابد. بنابراین هرچه فواصل بازه‌ها کم‌تر باشد پایداری اولویت‌بندی حاصل بیشتر خواهد بود. این معیار در مثال‌ها تحت عنوان معیار فواصل بازه‌ها و با نماد «$\sum D$» ارائه‌شده است.

۶. نتایج محاسباتی

برای بررسی مدل‌های پیشنهادی در این نوشتار از مقایسه‌ی آنها با مدل‌های موجود در مثال‌هایی که در ادبیات موضوعی این بحث[۱۵،۱۷و۲۰] مطرح شده‌اند استفاده شده که نتایج آن به شرح زیر است:

مثال ۱: ماتریس بازه‌یی A_{11} برای استخراج وزن‌های مورد نیاز درنظر گرفته شده است؛ این ماتریس براساس مدل‌های وانگ و سوگی‌هارا نیز حل شده است. با تغییر مکان عناصر a_{25} و a_{52} ماتریس ناسازگاری به‌صورت ماتریس A_{12} ایجاد خواهد شد:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] & [5,7] & [5,9] \\ [\frac{1}{3},1] & 1 & [1,4] & [1,5] & [1,4] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{4},1] & 1 & [\frac{1}{5},5] & [2,4] \\ [\frac{1}{7},\frac{1}{5}] & [\frac{1}{5},1] & [\frac{1}{5},5] & 1 & [1,2] \\ [\frac{1}{9},\frac{1}{5}] & [\frac{1}{4},1] & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & [\frac{1}{2},1] & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] & [5,7] & [5,9] \\ [\frac{1}{3},1] & 1 & [1,4] & [1,5] & [\frac{1}{4},1] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{4},1] & 1 & [\frac{1}{5},5] & [2,4] \\ [\frac{1}{7},\frac{1}{5}] & [\frac{1}{5},1] & [\frac{1}{5},5] & 1 & [1,2] \\ [\frac{1}{9},\frac{1}{5}] & [1/4] & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & [\frac{1}{2},1] & 1 \end{bmatrix}$$

حل ماتریس بازه‌یی $\mathbf{A}_{11}$: این ماتریس، براساس روش وانگ[۱۵] یک ماتریس‌کاملاً سازگار است و به‌همین علت، هر دو مدل پایین‌ترین حد و بالاترین حد سوگی‌هارا را می‌توان به‌کار برد. نتایج حاصل از حل این مثال توسط سه مدل موجود در

جدول ۱. نتایج حاصل از حل ماتریس $\mathbf{A}_{11}$ براساس روش‌های ارائه‌شده در ادبیات موضوع، با استفاده از مدل پیشنهادی برمبنای برنامه‌ریزی آرمانی.

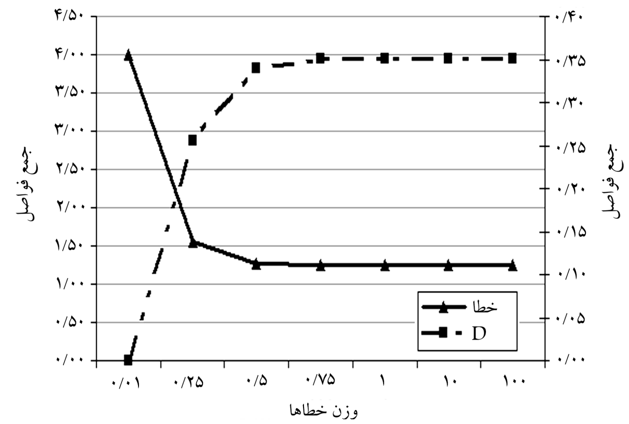
گزینه /معیار	روش سوگی‌هارا (PAHPC)[۱۷] Lower MOdel	روش سوگی‌هارا (PAHPC)[۱۷] Upper Model	روش وانگ (۲۰۰۷-c)[۲۰]	p=۰٫۰۱	p=۰٫۲۵	p=۰٫۵	p=۰٫۷۵	p=۱	p=۱۰, ۱۰۰
W_1	۱ [۰٫۵۳۴و [۰٫۴۲۲	۱ [۰٫۴۰۹و [۰٫۲۹۱	۱ [۰٫۴۵۳و [۰٫۴۵۳	۱ [۰٫۵۶۰و [۰٫۵۶۰	۱ [۰٫۴۵۵و [۰٫۴۵۵	۱ [۰٫۴۶۴و [۰٫۴۶۴	۱ [۰٫۴۶۲و [۰٫۴۶۲	۱ [۰٫۴۶۲و [۰٫۴۶۲	۱ [۰٫۴۶۱و [۰٫۴۶۱
W_2	۲ [۰٫۲۸۲و [۰٫۱۷۸	۲ [۰٫۲۹۱و [۰٫۱۳۶	۲ [۰٫۳۳۲و [۰٫۱۴۰	۲ [۰٫۱۸۷و [۰٫۱۸۷	۲ [۰٫۲۳۷و [۰٫۱۶۳	۲ [۰٫۳۲۵و [۰٫۱۵۵	۲ [۰٫۳۲۹و [۰٫۱۵۴	۲ [۰٫۳۲۹و [۰٫۱۴۵	۲ [۰٫۳۲۹و [۰٫۱۵۴
W_3	۳ [۰٫۱۴۱و [۰٫۱۴۱	۳ [۰٫۱۸۲و [۰٫۰۲۷	۳ [۰٫۲۱۰و [۰٫۰۸۲	۳ [۰٫۱۱۲و [۰٫۱۱۲	۳ [۰٫۱۶۳و [۰٫۰۸۹	۳ [۰٫۱۸۶و [۰٫۰۹۳	۳ [۰٫۲۰۳و [۰٫۰۹۲	۳ [۰٫۲۰۳و [۰٫۰۹۲	۳ [۰٫۲۰۵و [۰٫۰۹۲
W_4	۴ [۰٫۰۸۵و [۰٫۰۷۶	۴ [۰٫۱۳۶و [۰٫۰۳۶	۴ [۰٫۱۳۵و [۰٫۰۶۰	۴ [۰٫۰۸۰و [۰٫۰۸۰	۴ [۰٫۱۳۰و [۰٫۰۵۸	۴ [۰٫۱۰۵و [۰٫۰۶۵	۴ [۰٫۰۹۲و [۰٫۰۶۶	۴ [۰٫۰۹۲و [۰٫۰۶۶	۴ [۰٫۰۹۲و [۰٫۰۶۶
W_5	۵ [۰٫۰۷۰و [۰٫۰۷۰	۵ [۰٫۱۳۶و [۰٫۰۴۵	۵ [۰٫۰۶۳و [۰٫۰۶۳	۵ [۰٫۰۶۲و [۰٫۰۶۲	۵ [۰٫۰۸۹و [۰٫۰۵۴	۵ [۰٫۰۹۰و [۰٫۰۵۳	۵ [۰٫۰۹۰و [۰٫۰۵۱	۵ [۰٫۰۹۰و [۰٫۰۵۱	۵ [۰٫۰۸۸و [۰٫۰۵۱
$\sum E$				۴	۱٫۵۴۸	۱٫۲۷۶	۱٫۲۵۶	۱٫۲۵۶	۱٫۲۵۶
$\sum D$	۰٫۲۲۴	۰٫۶۱۸	۰٫۳۹۶	۰	۰٫۲۵۵	۰٫۳۴۰	۰٫۳۵۱	۰٫۳۵۱	۰٫۳۵۱
$Criteria$	۵۱٫۳۱۴	۲۲۸٫۱۸۱	۳۱٫۱۱۵	۸۸٫۳۰۶	۲۸٫۶۶۶	۲۸٫۵۵۲	۳۰٫۲۴۴	۳۰٫۲۴۴	۳۰٫۱۸۸
$\sum Pr$	۴۰۰	۲۹۲	۳۴۶	۴۰۰	۳۴۳	۳۴۷	۳۴۶	۳۴۶	۳۴۸

ادبیات موضوع در جدول ۱ ارائه شده است. علاوه بر این پاسخ‌های حاصل از مدل پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی نیز برحسب مقادیر مختلف درنظر گرفته‌شده برای وزن خطاها در جدول ۱ آمده است. چنان که در این جدول مشاهده می‌شود، مدل پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی در تمامی مقادیر درنظر گرفته‌شده برای P (وزن خطا) بهتر از سایر مدل‌ها عمل‌کرده است (مگر در شرایطی که وزن خطا نزدیک به صفر منظور شده است). از نظر معیار مجموع فواصل بازه‌ها نیز مدل پیشنهادی عملکرد مطلوبی داشته است و در تمامی وزن‌های در نظر گرفته شده مجموع فواصل به‌دست آمده بهتر از دو مدل حد بالای سوگی‌هارا و وانگ است، اما مقدار این معیار در پاسخ‌های حاصل از مدل حد پایین سوگی‌هارا بهتر است. البته باید در نظر داشت که کلیه‌ی پاسخ‌های حاصل از روش پیشنهادی از لحاظ معیار تطابق مطلوب‌تر از کلیه‌ی پاسخ‌های حاصل از این روش هستند. درمورد معیار درجه‌تقدم نیز از وزن خطای برابر با مقدار ۰٫۵ تا ۱۰۰، مدل ارائه‌شده با حفظ تطابق با ماتریس سازگار ارائه‌شده توسط تصمیم‌گیرنده، قادر است عملکردی بهتر از سایر مدل‌های موجود داشته باشد.

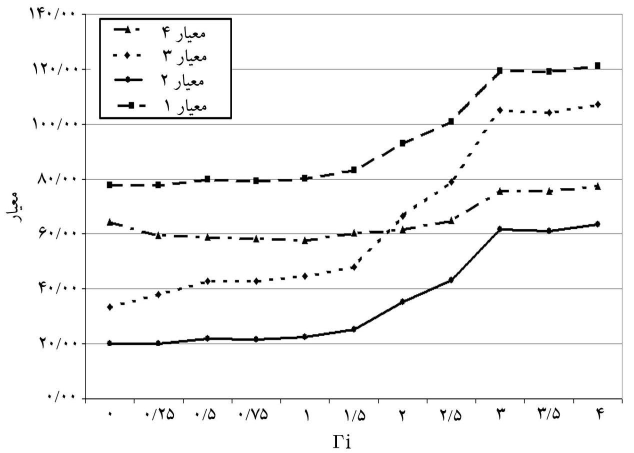
طبق نمودار ارائه‌شده در شکل ۱ با افزایش وزن درنظر گرفته‌شده برای خطا، میزان تخطی از محدودیت‌ها ($\sum E$) کاهش و فاصله‌ی بازه‌های استخراجی برای وزن‌های موردنظر ($\sum D$) افزایش یافته است. براین اساس می‌توان با پذیرش خطای بیشتر به تخمین‌های نقطه‌یی نزدیک‌تر شد و همچنین احتمال هم‌پوشانی بازه‌ها را کاهش داد.

تخمین‌های نقطه‌یی حاصل از روش پیشنهادی براساس بهینه‌سازی پایدار برای مقادیر مختلف Γ درجدول ۲ آمده است.

در شکل ۲، روند معیارهای محاسبه‌شده در جدول ۲ برحسب تعداد ضرایب دارای عدم قطعیت مجاز به تغییر ارائه‌شده است. معیار "$Criteria1$"(مطابق رابطه‌ی ۵۵) نسبت به کم‌ترین و بیشترین کران‌های عناصر ماتریس مقایسات زوجی، معیار "$Criteria2$" برمبنای میانگین و حد بالای بازه‌ها، معیار "$Criteria3$" با توجه به حد پایین و میانگین بازه‌ها، و معیار "$Criteria4$" براساس تنها میانگین بازه‌ها (برای هر دو حد بالا و پایین بازه‌ها مقدار میانگین بازه‌ها منظور شده) محاسبه شده است. براساس نتایج حاصل، زمانی که تعداد ضرایب مجاز به تغییر کم‌تر از ۲ است تمایل به تخمین به سمت پایین بازه‌ها وجود دارد، و با افزایش تعداد متغیرهای



شکل ۱. نمودار تبادل میان بهینگی مدل (کمینه‌سازی فاصله بازه‌ها) و عملی بودن مدل (کاهش ناسازگاری‌ها) در حل ماتریس $\mathbf{A}_{11}$ مثال ۱ـ براساس مدل پیشنهادی برمبنای برنامه‌ریزی آرمانی.



شکل ۲. حل ماتریس $\mathbf{A}_{11}$ مثال ۱، براساس روش بهینه‌سازی پایدار و روند معیارهای محاسبه‌شده در جدول ۲.

جدول ۲. وزن‌های استخراج‌شده برای ماتریس $\mathbf{A}_{11}$ مثال (۱)ـ براساس مدل پیشنهادی برمبنای روش بهینه‌سازی پایدار ($\mathbf{CR} \leq$ ۰٫۱).

Γ_i	۰	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۷۵	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳	۳٫۵	۴
W_1	۰٫۴۵۷	۰٫۴۶۱	۰٫۴۶۶	۰٫۴۷۶	۰٫۴۹۴	۰٫۴۹۰	۰٫۴۹۲	۰٫۴۹۵	۰٫۴۹۷	۰٫۵۰۱	۰٫۵۰۵
W_2	۰٫۲۴۵	۰٫۲۵۲	۰٫۲۶۰	۰٫۲۶۰	۰٫۲۵۹	۰٫۲۷۱	۰٫۲۸۱	۰٫۲۸۲	۰٫۲۹۰	۰٫۲۸۵	۰٫۲۸۱
W_3	۰٫۱۵۱	۰٫۱۵۲	۰٫۱۳۰	۰٫۱۳۰	۰٫۱۱۲	۰٫۱۰۲	۰٫۰۹۸	۰٫۰۹۹	۰٫۰۹۹	۰٫۱۰۰	۰٫۱۰۱
W_4	۰٫۰۸۵	۰٫۰۷۲	۰٫۰۶۸	۰٫۰۶۸	۰٫۰۷۱	۰٫۰۷۰	۰٫۰۷۰	۰٫۰۶۹	۰٫۰۵۸	۰٫۰۵۷	۰٫۰۵۶
W_5	۰٫۰۶۱	۰٫۰۶۳	۰٫۰۶۵	۰٫۰۶۵	۰٫۰۶۵	۰٫۰۶۸	۰٫۰۵۹	۰٫۰۵۵	۰٫۰۵۵	۰٫۰۵۶	۰٫۰۵۶
$\sum E_i$	۰٫۴۱۹	۰٫۶۰۴	۰٫۹۳۹	۰٫۹۳۹	۱٫۱۰۲	۱٫۲۵۸	۱٫۴۳۹	۱٫۵۶۹	۱٫۷۱۲	۱٫۸۰۲	۱٫۸۹۴
$Criteria1$	۷۷٫۸۶	۷۷٫۷۱	۷۹٫۳۴	۷۹٫۳۴	۸۰٫۲۱	۸۳٫۰۷	۹۲٫۹۶	۱۰۰٫۹۴	۱۱۹٫۳۲	۱۱۸٫۹۱	۱۲۱٫۳۰
$Criteria2$	۶۴٫۴۸	۵۹٫۶۶	۵۸٫۱۹	۵۸٫۱۹	۵۷٫۸۳	۶۰٫۴۹	۶۱٫۷۳	۶۵٫۱۰	۷۵٫۶۵	۷۵٫۷۶	۷۷٫۵۲
$Criteria3$	۳۳٫۴۴	۳۷٫۹۴	۴۲٫۶۹	۴۲٫۶۹	۴۴٫۷۸	۴۷٫۸۴	۶۶٫۳۹	۷۸٫۹۸	۱۰۵٫۱۹	۱۰۴٫۲۴	۱۰۷٫۲۸
$Criteria4$	۲۰٫۰۶	۱۹٫۹	۲۱٫۵۴	۲۱٫۵۴	۲۲٫۴	۲۵٫۲۶	۳۵٫۱۶	۴۳٫۱۳	۶۱٫۵۲	۶۱٫۱	۶۳٫۴۹
$Pr(Min)$					٪۲۰	٪۳۶	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰

مجاز به تغییر به‌تدریج انطباق با ماتریس اصلی کاهش (افزایش مقدار معیارها) و تمایل به سمت بالای بازه‌ها افزایش می‌یابد. در واقع $\Gamma_i = ۲$ نقطه‌ی عطف نمودار است و همچنین با درنظرگیری $\Gamma_i = ۲$ می‌توان بیشترین تضمین احتمال را با حداقل تغییرات نسبت به مقدار اسمی به دست آورد. باید درنظر داشت که محتمل‌ترین مقدار بازه‌ها در این روش مقدار میانه است و از طرف دیگر با استفاده از این روش، تخمین‌های نقطه‌یی به‌دست می‌آید که یا کم‌تر از میانگین و یا بیشتر از میانگین است. بنابراین با درنظرگرفتن این که در تابع هدف کمینه‌سازی تخطی از محدودیت‌ها منظور شده است می‌توان انتظار داشت که معیار تطابقی که براساس میانگین بازه‌ها محاسبه شده، از نظر کمی بهترین معیار باشد.

براساس آنالیز حساسیت صورت گرفته، در حالت سازگاری ماتریس مقایسات زوجی، هرچه تعداد ضرایب دارای عدم قطعیت مجاز به تغییر کم‌تر باشد (تعداد ضرایب بیشتری با مقدار اسمی‌شان وارد مدل شوند) معیار تطابق بهتری برای پاسخ‌ها به‌دست خواهد آمد. بنابراین در حالت سازگاری بهترین مقدار برای تعداد ضرایب مجاز به تغییر $\Gamma_i = \sqrt{J_i}$ خواهد بود، زیرا با حداقل تغییرات می‌توان حداکثر احتمال عملی ماندن محدودیت‌ها را به دست آورد. البته توجه به این نکته لازم است که در صورت وجود خطا (ناسازگاری) در ماتریس مقایسات زوجی، پاسخ‌های حاصل از دو ماتریس سازگار و ناسازگار در حالتی که تعداد ضرایبِ دارای عدم قطعیت مجاز به تغییر برابر یا بیش از ۱ است دچار کم‌ترین تغییر می‌شود. این مسئله را می‌توان درمورد ماتریس $A_{۱۲}$ در مثال ۱ مشاهده کرد که به این ترتیب می‌توان $\Gamma_i = \sqrt{J_i}$ را به‌عنوان مقدار بهینه برای پایدارسازی مدل درنظرگرفت (مدل ارائه‌شده براساس بهینه‌سازی پایدار فقط قادر به کنترل ناسازگاری‌های غیرعمده است). در سطر آخر جدول ۲ تحت عنوان "Pr"، میزان تضمین احتمالی برای پایداری مدل (عملی‌ماندن محدودیت‌ها) طبق روش‌های موجود[۳۰] محاسبه و ارائه شده است. کم‌ترین تعدادتغییرات مجازی که در آن بیشترین تضمین احتمالیِ ممکن حاصل می‌شود، ۲ است.

حل ماتریس بازه‌یی $\mathbf{A}_{۱۲}$: نتایج حاصل از حل این ماتریس با استفاده از روش پیشنهادی برمبنای برنامه‌ریزی آرمانی در جدول ۳ ارائه شده است. چنان که از بررسی این نتایج برمی‌آید مدل توانسته است بدون این که معیارهای پایداری، زیاد تحت تأثیر قرار بگیرند پاسخ‌های مورد نیاز را از ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار استخراج کند. برای ارزیابی بهتر نتایج، میانگین وزن‌های بازه‌یی حاصل از حل مدل پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی در دو ماتریس $A_{۱۱}$ و $A_{۱۲}$ مثال ۱ در قالب دو نمودار در شکل ۳ ارائه شده است.

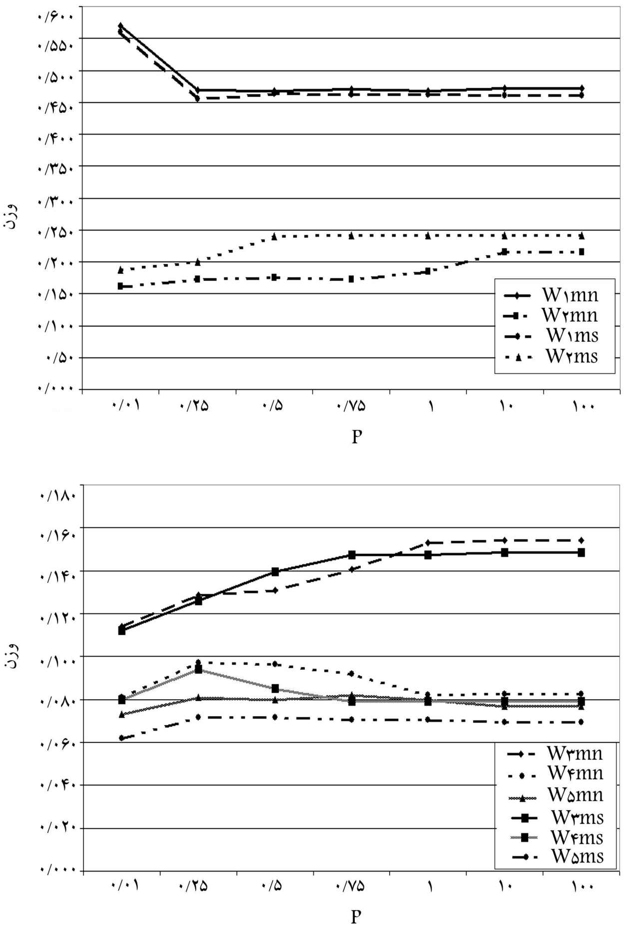
در نمودار ۳، وزن‌های استخراج‌شده در حالت سازگاری با اندیس s و در حالت ناسازگاری با اندیس n نشان داده شده‌اند. با بررسی این شکل و جداول ۱ و ۳ می‌توان دریافت که مدل توانسته است از عهده‌ی عدم تأثیرگذاری جدی ناسازگاری موجود در ماتریس مقایسات زوجی بر پاسخ‌ها برآید؛ چرا که میانگین وزن‌ها در دو ماتریس $A_{۱۱}$ و $A_{۱۲}$ روند یکسانی دارند و اولویت‌بندی نیز تغییری نکرده است. البته برای پایدارسازی بهتر پاسخ‌ها در نظرگیری وزن ۱ و بالاتر برای وزن خطاها مناسب‌تر است.

شاهد دیگر بر پایداری پاسخ‌های حاصل از این مدل، مقادیر معیار تطابق است که روند آن برای مقادیر مختلف وزن خطاها در شکل ۴ ارائه شده است. براساس نمودار ارائه‌شده در شکل ۴ با اعمال ناسازگاری در ماتریس $A_{۱۱}$، معیار تطابق پاسخ‌ها با ماتریس سازگار اصلی ($A_{۱۱}$) تغییر زیادی نمی‌کند و حتی در وزن‌های بالا (۱۰ و ۱۰۰) معیار تطابق در حالتی که ورودی مدل، ماتریس ناسازگار ($A_{۱۲}$) است معیار تطابق کمی بهتر از شرایطی است که ماتریس ورودی سازگار ($A_{۱۱}$) است.

ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار($A_{۱۲}$)، به‌منظور استخراج تخمین‌های نقطه‌یی مناسب و پایدار، با استفاده از مدل پیشنهادی برمبنای بهینه‌سازی پایدار نیز حل شده است. پاسخ‌های حاصل از به‌کارگیری مدل بهینه‌سازی پایدار پیشنهادی در جدول ۴ آمده است.

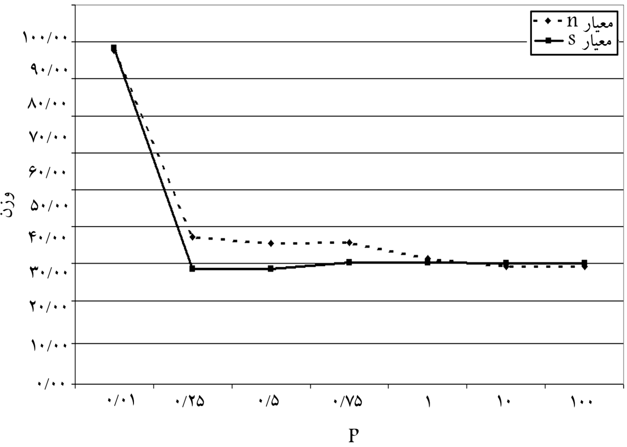
جدول ۳. نتایج حاصل از حل ماتریس $\mathbf{A}_{۱۲}$ مثال (۱) ـ با استفاده از مدل پیشنهادی بر اساس برنامه‌ریزی آرمانی.

گزینه/معیار	P=۰٫۰۱	P=۰٫۲۵	P=۰٫۵	P=۰٫۷۵	P=۱	P=۱۰	P=۱۰۰
$W_۱$	۱ [۰٫۵۷۰و۰٫۵۷۰]	۱ [۰٫۴۶۹و۰٫۴۶۹]	۱ [۰٫۴۶۷و۰٫۴۶۷]	۱ [۰٫۴۷۰و۰٫۴۷۰]	۱ [۰٫۴۶۷و۰٫۴۶۷]	۱ [۰٫۴۷۲و۰٫۴۷۲]	۱ [۰٫۴۷۲و۰٫۴۷۲]
$W_۲$	۲ [۰٫۱۶۱و۰٫۱۶۱]	۲ [۰٫۱۳۵و۰٫۲۱۱]	۲ [۰٫۱۳۴و۰٫۲۱۶]	۲ [۰٫۱۲۳و۰٫۲۲۳]	۲ [۰٫۱۲۳و۰٫۲۴۸]	۲ [۰٫۱۲۴و۰٫۳۰۵]	۲ [۰٫۱۲۴و۰٫۳۰۵]
$W_۳$	۳ [۰٫۱۱۴و۰٫۱۱۴]	۳ [۰٫۰۹۰و۰٫۱۶۷]	۳ [۰٫۰۹۰و۰٫۱۷۲]	۳ [۰٫۰۹۱و۰٫۱۹۰]	۳ [۰٫۰۹۱و۰٫۲۱۵]	۳ [۰٫۰۹۰و۰٫۲۱۸]	۳ [۰٫۰۹۰و۰٫۲۱۸]
$W_۴$	۴ [۰٫۰۸۱و۰٫۰۸۱]	۴ [۰٫۰۵۹و۰٫۱۳۵]	۴ [۰٫۰۵۹و۰٫۱۳۴]	۴ [۰٫۰۶۱و۰٫۱۲۳]	۴ [۰٫۰۶۳و۰٫۱۰۱]	۴ [۰٫۰۶۴و۰٫۱۰۱]	۴ [۰٫۰۶۴و۰٫۱۰۱]
$W_۵$	۵ [۰٫۰۷۳و۰٫۰۷۳]	۵ [۰٫۰۶۸و۰٫۰۹۴]	۵ [۰٫۰۶۷و۰٫۰۹۳]	۵ [۰٫۰۷۰و۰٫۰۹۴]	۵ [۰٫۰۶۷و۰٫۰۹۳]	۵ [۰٫۰۶۹و۰٫۰۸۵]	۵ [۰٫۰۶۹و۰٫۰۸۵]
$\sum E$	۴٫۶۰	۲٫۳۸	۲٫۳۵	۲٫۳۲	۲٫۲۹	۲٫۲۴	۲٫۲۴
$\sum D$	۰٫۰۰	۰٫۲۶	۰٫۲۷	۰٫۲۹	۰٫۳۱	۰٫۳۶	۰٫۳۶
$Criteria$	۸۷٫۶۲	۳۷٫۲۴	۳۵٫۴۷	۳۵٫۷۵	۳۱٫۳۴	۲۹٫۱۸	۲۹٫۱۸
$\sum Pr$	۴۰۰	۳۱۷	۳۱۵	۳۰۸	۳۱۰	۳۲۳	۳۲۳



شکل ۳. مقایسه‌ی روند مقادیر به‌دست‌آمده برای میانگین وزن‌ها در دو ماتریس $\mathbf{A}_{۱۱}$ و $\mathbf{A}_{۱۲}$ در مثال ۱.

برای نمایش بهتر توان‌مندی پایدارسازی مدل ارائه‌شده براساس بهینه‌سازی پایدار، نتایج حاصل از به‌کارگیری ماتریس سازگار ($A_{۱۱}$) و ماتریس ناسازگار ($A_{۱۲}$) به‌عنوان ورودی این مدل، در شکل ۵ برای مقایسه و ارزیابی ارائه شده است. در این نمودار،



شکل ۴. مقایسه‌ی روند مقادیر معیارتطابق در دو ماتریس $\mathbf{A}_{۱۱}$ و $\mathbf{A}_{۱۲}$ مثال ۱.

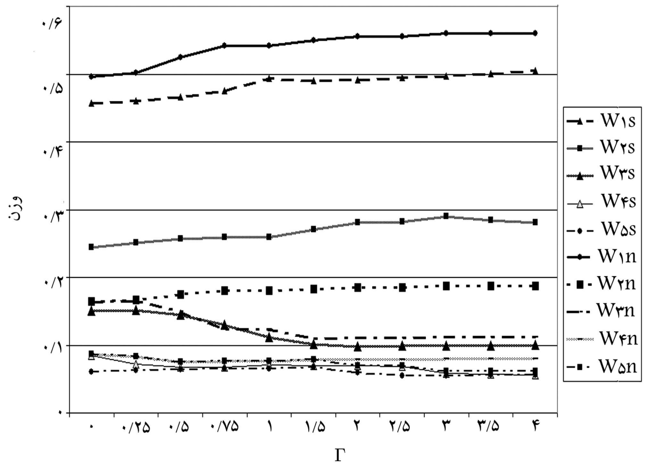
وزن‌های استخراج‌شده در حالت سازگاری با اندیس s و در حالت ناسازگاری با اندیس n نشان داده شده است. این نمودار مشخص می‌کند که چنانچه مقدار Γ_i برابر با ۲ و بیشتر از آن باشد، می‌توان اطمینان حاصل کرد درحالتی که ماتریس ورودی ناسازگار است اولویت‌بندی استخراج‌شده تغییر نمی‌کند و روند وزن‌های استخراج شده از ماتریس ورودی سازگار نیز حفظ می‌شود. این امر توانایی مدل پیشنهادی را در استخراج وزن‌های پایدار از ماتریس‌های دارای خطا (ناسازگاری) نشان می‌دهد.

در شکل ۶، روند معیار تطابق در دو حالت سازگاری ماتریس ورودی (با اندیس s) و ناسازگاری آن (با اندیس n) نشان داده شده است. براین اساس، معیار تطابق ارائه‌شده برمبنای حدود اصلی ماتریس مقایسات زوجی("$Criteria۱$")، با استفاده از مدل بهینه‌سازی پایدار در حالت ناسازگاری ماتریس ورودی به مقادیری نزدیک‌تر به ماتریس اصلی (سازگار) دست‌یافته است و حتی در قسمتی از نمودار $\Gamma_i = ۲ - ۴$ عملکرد مدل در حالتی که ورودی ماتریس ناسازگار است بهتر از شرایطی است که ماتریس ورودی سازگار است.

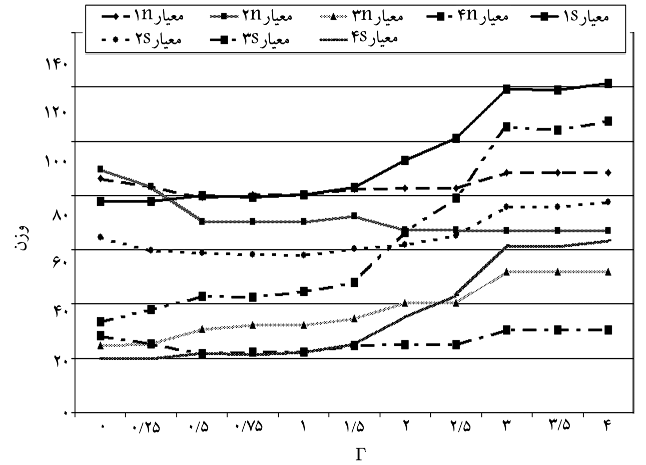
با لحاظ کردن روند تغییرات وزن‌های تخمینی، معیار تطابق و مقدار تضمین احتمالی مدل مشخص می‌شود که مقدار ۲ مناسب‌ترین مقدار برای Γ_i است زیرا

جدول ۴. وزن‌های استخراج‌شده از ماتریس $\mathbf{A}_{۱۲}$ مثال (۱) -براساس مدل پیشنهادی برمبنای بهینه سازی پایدار ($\mathbf{CR} \leq ۰/۱$).

Γ_i	۰	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۷۵	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳	۳٫۵	۴
$W_۱$	۰٫۴۹۶	۰٫۵۰۲	۰٫۵۲۵	۰٫۵۴۲	۰٫۵۴۲	۰٫۵۵۰	۰٫۵۵۵	۰٫۵۵۵	۰٫۵۶۰	۰٫۵۶۰	۰٫۵۶۰
$W_۲$	۰٫۱۶۵	۰٫۱۶۷	۰٫۱۷۵	۰٫۱۸۱	۰٫۱۸۱	۰٫۱۸۳	۰٫۱۸۵	۰٫۱۸۵	۰٫۱۸۷	۰٫۱۸۷	۰٫۱۸۷
$W_۳$	۰٫۱۶۴	۰٫۱۶۶	۰٫۱۵۰	۰٫۱۲۳	۰٫۱۲۳	۰٫۱۱۰	۰٫۱۱۱	۰٫۱۱۱	۰٫۱۱۲	۰٫۱۱۲	۰٫۱۱۲
$W_۴$	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۳	۰٫۰۷۵	۰٫۰۷۷	۰٫۰۷۷	۰٫۰۷۹	۰٫۰۷۹	۰٫۰۷۹	۰٫۰۸۰	۰٫۰۸۰	۰٫۰۸۰
$W_۵$	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۳	۰٫۰۷۵	۰٫۰۷۷	۰٫۰۷۷	۰٫۰۷۹	۰٫۰۷۰	۰٫۰۷۰	۰٫۰۶۲	۰٫۰۶۲	۰٫۰۶۲
$\sum E_i$	۱٫۱۵۵	۱٫۳۴۴	۱٫۶۰۳	۱٫۸۴۱	۲٫۰۷۵	۴٫۲۴۹	۲٫۴۱۹	۲٫۵۶۱	۰۲٫۶۹۹	۲٫۷۴۶	۲٫۷۹۳
$Criteria۱$	۸۶٫۲۰	۸۳٫۲۱	۷۹٫۴۸	۸۰٫۱۵	۸۰٫۱۵	۸۲٫۴۹	۸۲٫۷۹	۸۲٫۷۹	۸۸٫۳۱	۸۸٫۳۱	۸۸٫۳۱
$Criteria۲$	۸۹٫۷۳	۸۳٫۲۶	۷۰٫۳۸	۷۰٫۲۲	۷۰٫۲۲	۷۲٫۴۶	۶۷٫۲۷	۶۷٫۲۷	۶۶٫۸۴	۶۶٫۸۴	۶۶٫۸۴
$Criteria۳$	۲۴٫۸۶	۲۵٫۳۳	۳۰٫۷۷	۳۲٫۲۷	۳۲٫۲۷	۳۴٫۷۰	۴۰٫۵۰	۴۰٫۵۰	۵۱٫۹۶	۵۱٫۹۶	۵۱٫۹۶
$Criteria۴$	۲۸٫۳۸	۲۵٫۳۹	۲۱٫۶۷	۲۲٫۳۴	۲۲٫۳۴	۲۴٫۶۷	۲۴٫۹۸	۲۴٫۹۸	۳۰٫۵۰	۳۰٫۵۰	۳۰٫۵۰
$P(Min)$						٪۳۶	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰



شکل ۵. مقایسه‌ی روند مقادیر وزن‌های حاصل از مدل بهینه‌سازی پایدار در دو ماتریس $\mathbf{A}_{۱۱}$ و $\mathbf{A}_{۱۲}$ مثال ۱.



شکل ۶. روند معیارهای حاصله براساس مدل بهینه‌سازی پایدار در دو ماتریس $\mathbf{A}_{۱۱}$ و $\mathbf{A}_{۱۲}$ مثال ۱.

معیار تطابق در هردو حالت سازگاری و ناسازگاری ماتریس ورودی در حد مناسبی است و تفاوت زیادی نیز ندارند؛ وزن‌های تخمینی نیز روند مشابهی دارند و تضمین احتمالی مدل برابر بیشترین مقدار تعیین‌شده است.

با حل ماتریس‌های $A_{۱۱}$ و $A_{۱۲}$ مثال ۱ و با به کارگیری دو مدل پیشنهادی می‌توان نتیجه گرفت که عملکرد مدل برنامه‌ریزی آرمانی ارائه‌شده در حالتی که وزن خطا برابر ۱ و بیشتر درنظر گرفته می‌شود پایدار است و در مدل ارائه‌شده براساس بهینه‌سازی پایدار نیز در کم‌ترین مقدار Γ_i که بیشترین تضمین احتمالی عملی ماندن مدل فراهم می‌شود و برابر است با $\sqrt{J_i}$، عملکرد مدل پایدار است.

مثال ۲: برای بررسی توانمندی مدل‌های پیشنهادی در استخراج وزن‌های مناسب از ماتریس‌های مقایسات زوجی دقیق (غیربازه‌یی)، و به‌منظور استخراج وزن از دو ماتریس $A_{۲۱}$ و $A_{۲۲}$، از دو روش پیشنهادی استفاده شده و نتایج حاصل از آنها با نتایج روش‌های بردار ویژه و روش سوگی‌هارا[۱۷] مقایسه شده است. ماتریس $A_{۲۱}$ ماتریسی کاملاً سازگار است ($CI = ۰$) و ماتریس $A_{۲۲}$ یک ماتریس ناسازگار است ($CR = ۰٫۳۱, CI = ۰٫۲۸$) در واقع این ماتریس تغییر یافته ماتریس $A_{۲۱}$ است:

$$A_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۰٫۵ & ۰٫۵ & ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۲۵ & ۰٫۲۵ & ۱ & ۲ \\ ۰٫۱۲۵ & ۰٫۱۲۵ & ۰٫۲۵ & ۰٫۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & ۰٫۵ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۰٫۵ & ۰٫۵ & ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۲۵ & ۰٫۲۵ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰٫۱۲۵ & ۰٫۲۵ & ۰٫۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل ماتریس $\mathbf{A}_{۲۱}$: مدل پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی ـ با توجه به این‌که برای استخراج وزن‌های بازه‌یی ارائه شده است ـ به‌راحتی با قراردادن مقادیر پایین و بالای بازه‌ها برابر با مقدار ارائه شده در ماتریس مقایسات زوجی قابل تبدیل به مدلی برای استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی غیربازه‌یی است، اما روش بهینه‌سازی پایدار برای استخراج تخمین‌های نقطه‌یی ارائه شده است و در این روش فقط مقداری برای تغییر از مقدار اسمی بازه‌ها می‌بایست درنظرگرفته شود. لذا در این مدل نیز با اعمال مقدار تغییر مجاز برای تمامی بازه‌ها (در حالت ناسازگاری بهتر است مقدار تغییر مجاز را بیشتر درنظرگرفت) می‌توان این مدل را نیز برای استخراج وزن از ماتریس‌های مقایسات زوجی دقیق به کارگرفت.

در جدول ۵ نتایج حاصل از حل ماتریس سازگار ($A_{۲۱}$) به‌وسیله‌ی دو مدل موجود در ادبیات موضوع و دو مدل پیشنهادی ارائه شده است. براین اساس می‌توان مشاهده کرد که هر چهار مدل توانایی استخراج مقادیر صحیح وزن‌ها را از ماتریس مقایسات زوجی دقیق دارند. شایان ذکر است که در مدل بهینه‌سازی پایدار، مسئله با در نظرگرفتن دو حالت حل شده است: ۱. تغییرات مجاز به میزان ۰٫۵ از مقدار اسمی برای تمامی مقایسات زوجی ($\widehat{a}_{ij} = ۰٫۵$)؛ ۲. تغییرات به میزان ۱٫۵ از مقدار اسمی برای تمامی مقایسات زوجی ($\widehat{a}_{ij} = ۱٫۵$). ملاحظه می‌شود که در هر دو حالت جواب یکسانی حاصل شده است.

حل ماتریس $\mathbf{A}_{۲۲}$: با اعمال ناسازگاری در ماتریس مقایسات زوجی ($A_{۲۱}$)، این انتظار وجود دارد که مدل‌های پایدار ارائه شده بتوانند پاسخ‌هایی برابر یا نزدیک به پاسخ‌های حاصل از ماتریس بدون خطا و ناسازگاری ($A_{۲۱}$) ایجاد کنند. برای آزمون این امر، ماتریس ناسازگار ($A_{۲۲}$) که توسط دو مدل موجود در ادبیات موضوع حل شده با استفاده از دو مدل پیشنهادی نیز حل شده است. نتایج حاصل از به‌کارگیری دو مدل موجود و مدل پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی در جدول ۶ ارائه شده است. شایان ذکر است که مقادیر استخراج شده برای وزن‌ها در روش پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی نسبت به تغییر وزن خطا حساسیتی نداشته‌اند.

با توجه به نتایج ارائه‌شده در جدول ۶ و با درنظرگیری مقدار معیار تطابق که براساس ماتریس سازگار ($A_{۲۱}$) به‌دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی براساس برنامه‌ریزی آرمانی عملکردی بسیار بهتر از دو روش دیگر داشته است و توانسته از عهده‌ی ناسازگاری موجود در ماتریس برآید و تطابق با ماتریس سازگار را حفظ کند؛ این امر نشانه‌ی عملکرد پایدار این مدل است.

اما نتایج حاصل از حل ماتریس ناسازگار ($A_{۲۲}$) در مدل بهینه‌سازی پایدار پیشنهادی، نسبت به مقادیر درنظرگرفته‌شده برای Γ_i و $\widehat{a}_{ij}$ حساس است؛ لذا در

جدول ۵. نتایج به دست آمده از مدل‌های موجود و مدل‌های پیشنهادی از حل ماتریس $\mathbf{A}_{۲۱}$ مثال ۲.

روش پیشنهادی (بهینه‌سازی پایدار - فاصله ۱٫۵ یا ۰٫۵ برای هر یک از قضاوت‌ها)	روش پیشنهادی (برنامه‌ریزی آرمانی)	روش سوگی‌هارا PAHPC	روش بردار ویژه EV(CI=۰٫۰)	گزینه /معیار
۰٫۳۴۸	۰٫۳۴۸	۰٫۳۴۷۸	۰٫۳۴۷۸	$W_۱$
۰٫۳۴۸	۰٫۳۴۸	۰٫۳۴۷۸	۰٫۳۴۷۸	$W_۲$
۰٫۱۷۴	۰٫۱۷۴	۰٫۱۷۳۹	۰٫۱۷۳۹	$W_۳$
۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۷۰	$W_۴$
۰٫۰۴۳	۰٫۰۴۳	۰٫۰۴۳۵	۰٫۰۴۳۵	$W_۵$
۰٫۱۶۵	۰٫۱۶۵	۰٫۱۶۵	۰٫۱۶۵	$Criteria$

جدول ۶. مثال ۲ نتایج به دست آمده از حل ماتریس $\mathbf{A}_{۲۲}$.

روش پیشنهادی (برنامه‌ریزی آرمانی - برای کلیه مقادیر P)	روش سوگی‌هارا PAHPC	روش بردار ویژه EV (CI=۰٫۲۸۱۲)	گزینه /معیار
۰٫۲۸۳	[۰٫۱۳۰۴و۰٫۳۴۷۸]	۰٫۲۲۹۹	$W_۱$
۰٫۳۷۹	۰٫۳۴۷۸	۰٫۳۷۳۲	$W_۲$
۰٫۱۸۹	۰٫۱۷۳۹	۰٫۱۸۶۶	$W_۳$
۰٫۰۸۵	۰٫۰۸۷۰	۰٫۰۹۳۳	$W_۴$
۰٫۰۶۴	[۰٫۰۵۶۶و۰٫۱۰۳۸]	۰٫۰۸۲۸	$W_۵$
۳۹٫۹۳	۹۴٫۹۰	۹۴٫۹۰	$Criteria$

جداول ۷ و ۸ نتایج حاصل برای مقادیر مختلف Γ_i در دو حالت $\widehat{a}_{ij} = ۰٫۵$ و $\widehat{a}_{ij} = ۱٫۵$ محاسبه و ارائه شده است. پاسخ‌های حاصل از مدل بهینه‌سازی پایدار در حالتی که $\widehat{a}_{ij} = ۱٫۵$، نسبت به مقادیر مختلف Γ_i غیرحساس است و در هر دو مقدار در نظر گرفته شده برای $\widehat{a}_{ij}$ درصورتی که مقدار درنظرگرفته‌شده برای Γ_i برابر $\sqrt{J_i}$ باشد رفتار مدل پایدار است و بیشترین تضمین احتمالی نیز وجود دارد.

مطابق جداول ۷ و ۸ می‌توان مشاهده کرد که در حالتی که میزان تغییرات مجاز در بازه‌ها مناسب انتخاب شده است ($\widehat{a}_{ij} = ۱٫۵$) پاسخ‌های حاصل از مدل بهینه‌سازی پایدار بدون توجه به‌مقدار در نظر گرفته‌شده برای Γ_i، نسبت به حالت سازگاری کامل، کاملاً بدون تغییر است، و معیار تطابق نیز بهترین مقدار خود را دارد.

براساس نتایج حاصل از حل ماتریس‌های $A_{۲۱}$ و $A_{۲۲}$، می‌توان نتیجه گرفت که هر دو مدل پیشنهادی را می‌توان با اطمینان کافی نسبت به پایداری پاسخ‌های حاصل از آنها برای استخراج وزن از ماتریس‌های مقایسات زوجی دقیق (غیربازه‌یی) سازگار و ناسازگار (بهتر است $CR < ۰٫۳$ باشد) به کار برد. البته درمورد مدل بهینه‌سازی پایدار باید به عوامل تأثیرگذاری همچون $\widehat{a}_{ij}$ و Γ_i نیز توجه کرد.

۷. ویژگی‌های مدل‌های پیشنهادشده

ویژگی‌های دو مدل پایدار طراحی‌شده برای استخراج وزن‌از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی در روش AHP به‌طور خلاصه عبارت است از:

۱. **سادگی مدل‌ها:** دو مدل‌پیشنهادی درنهایت منجر به حل مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌شوند و با حل یک بار مدل می‌توان به پاسخ‌های تخمینی مناسبی دست یافت.

۲. **قابلیت انجام آنالیز حساسیت:** هر مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی امکان انجام آنالیز حساسیت بر روی ورودی داده‌ها را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد.

۳. **قابلیت‌کاربرد برای قضاوت‌های بازه‌یی، غیربازه‌یی و مخلوط:** هر دو مدل پیشنهادی قابلیت کاربرد برای انواع مختلف ارائه قضاوت‌ها را دارند.

۴. **کاهش احتمال تغییر اولویت‌ها:** در مدل پیشنهادی، براساس برنامه‌ریزی آرمانی کمینه‌سازی طول بازه‌های استخراجی از مدل در تابع هدف منظور شده است که این امر منجر به کاهش احتمال هم‌پوشانی بازه‌ها و درنتیجه کاهش احتمال تغییر اولویت‌ها می‌شود. در مدل بهینه‌سازی پایدار نیز تخمین‌های نقطه‌یی به دست می‌آید.

۵. **فراهم‌آوردن امکان تصمیم‌گیری قطعی‌تر براساس نتایج حاصل از این دو مدل:** کاهش طول بازه‌های استخراجی از ماتریس مقایسات زوجی موجب کاهش احتمال تغییر اولویت‌ها و درنتیجه تسهیل تصمیم‌گیری می‌شود؛ پاسخ‌های حاصل از مدل پیشنهادی براساس روش بهینه‌سازی پایدار نیز ماهیتاً به‌صورت تخمین نقطه‌یی است که تصمیم‌گیری را ساده‌تر می‌سازد.

۶. **فراهم‌شدن تضمین احتمالی برای پاسخ‌های حاصل از مدل ارائه‌شده براساس بهینه‌سازی پایدار:** در ادبیات موضوع هیچ مدلی وجود ندارد که بتواند تضمین احتمالی برای معتبربودن وزن‌های استخراجی فراهم کند. اما به‌کارگیری مدل بهینه‌سازی پایدار با رویکرد عدم قطعیت بودجه‌یی امکان محاسبه‌ی کم‌ترین احتمال معتبربودن پاسخ‌ها با توجه به بازه‌های تعیین‌شده در ماتریس مقایسات زوجی را فراهم آورده است.

۷. **فراهم‌آوردن امکان تبادل میان بهینه‌بودن و پایداری مدل در روش ارائه‌شده براساس برنامه‌ریزی آرمانی:** از آنجا که با کاهش طول بازه‌ها و نزدیک‌شدن به تخمین‌های نقطه‌یی، خطاهای ناشی از تخطی از محدودیت‌ها افزایش می‌یابد، لذا با درنظرگیری وزن مناسب می‌توان بین بهینه‌بودن و پایداری مدل تبادل مناسبی ایجاد کرد. شایان ذکر است در شرایط ناسازگاری ماتریس ورودی، با تخصیص وزن بالاتر به خطاها، پایداری مدل به‌طور مناسب‌تری فراهم می‌شود.

۸. **مفروضات خاص در مدل پیشنهادی براساس روش بهینه‌سازی پایدار با رویکرد عدم قطعیت بودجه‌یی:** در مدل پیشنهادی فرض بر این است

جدول ۷. نتایج حاصل از حل ماتریس $\mathbf{A}_{۲۲}$ در مثال ۲، با استفاده از روش پیشنهادی بهینه‌سازی پایدار - $\widehat{a}_{ij} = ۰/۵$ و $(\mathbf{CR}\leq ۰/۱)$.

گزینه/معیار	Γ_i										
	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴
W_1	۰/۳۱۴	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۲۲	۰/۳۲۱	۰/۳۱۷
W_2	۰/۳۶۶	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۶۱	۰/۳۶۲	۰/۳۶۴
W_3	۰/۱۸۳	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۸۱	۰/۱۸۱	۰/۱۸۲
W_4	۰/۰۹۲	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۹۰	۰/۰۹۱	۰/۰۹۱
W_5	۰/۰۴۶	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۵	۰/۰۴۵	۰/۰۴۶
$\sum E$	۲/۶۲۴	۲/۳۳۸	۲/۰۳۴	۱/۸۸۵	۱/۷۵۵	۱/۶۹۸	۱/۶۵۴	۳/۰۱۲	۲/۹۵۶	۲/۸۹۹	۲/۷۶۲
$Criteria$	۳/۸۵	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۲/۰۷	۲/۲۶	۳/۳۶
$Pr(Min)$					٪۲۰	٪۳۶	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰

جدول ۸. نتایج حاصل از حل ماتریس $\mathbf{A}_{۲۲}$ در مثال ۲، با استفاده از روش پیشنهادی بهینه‌سازی پایدار - $\widehat{a}_{ij} = ۱/۵$ و $(\mathbf{CR}\leq ۰/۱)$.

گزینه/معیار	Γ_i										
	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴
W_1	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸
W_2	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸	۰/۳۴۸
W_3	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴	۰/۱۷۴
W_4	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷
W_5	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳
$\sum E$	۱/۶۵۴	۱/۸۸۵	۲/۳۸۲	۲/۹۰۳	۳/۴۶۵	۴/۵۰۹	۵/۵۵۲	۶/۰۰۹	۲/۸۹۹	۶/۶۶۱	۶/۸۵۶
$Criteria$	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۷
$Pr(Min)$					٪۲۰	٪۳۶	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰	٪۵۰

که محتمل‌ترین مقدار در بازه‌های ارائه‌شده در ماتریس مقایسات زوجی مقدار اسمی تعیین شده است بنابراین با این فرض می‌بایست با حداقل تغییرات ممکن در مقادیر ضرایب نسبت به مقدار اسمی تعیین‌شده برای آنها، بیشترین تضمین احتمالی ممکن در مدل را به دست آورد. لذا در مدل ارائه‌شده با درنظرگیری $\Gamma_i = \sqrt{J_i}$ می‌توان پاسخ‌های پایدار با بیشترین تضمین احتمال پایداری مدل را به دست آورد.

۹. **شرایط حفظ پایداری توسط مدل‌های پیشنهادی:** پایداری در مدل‌های پیشنهادی از طریق کمینه‌سازی خطاهای تخطی از محدودیت‌ها فراهم می‌شود. در واقع مدل با این منطق طراحی شده است که در صورت بروز ناسازگاری برای حفظ پایداری پاسخ‌ها، مدل باید با توجه به تابع هدف به‌جای تخطی از سایر محدودیت‌ها، نادیده‌گرفتن محدودیت‌های مربوط به عوامل خطا را برگزیند؛ این مسئله زمانی رخ می‌دهد که ناسازگاری اعمال‌شده در مدل عمده نباشد. به‌طور مثال درمورد ماتریس‌های مقایسات زوجی غیربازه‌یی مدل‌های پیشنهادی در ناسازگاری‌های تا $CR < ۰/۳$ پایدار عمل می‌کنند.

۸. نتیجه‌گیری

استفاده از مقایسات زوجی برای تولید وزن در آنالیز تصمیم‌گیری چندمعیاره، نیازمند قضاوت‌های انسانی است و به‌دلیل پیچیدگی مسائل تصمیم‌گیری در دنیای واقعی و ماهیت ذهنی‌بودن قضاوت‌های انسانی، ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی می‌تواند چارچوب و قالب واقع‌گرایانه‌تری را برای عدم قطعیت‌های موجود در قضاوت‌های انسانی فراهم کند. در این مطالعه، دو مدل با توجه به تحلیل رگرسیون و تعاریف ارائه‌شده برای پایداری، به‌منظور استخراج وزن از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی در روش AHP پیشنهاد شد که در مدل‌سازی آنها از روش برنامه‌ریزی آرمانی و

بهینه‌سازی پایدار استفاده شده است. با حل چند مثال و با بهره‌گیری از شاخص‌های ارزیابی پایداری مدل، عملکرد این دو مدل در انواع ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی و غیربازه‌یی، سازگار و ناسازگار مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفت. براین اساس عملکرد این دو مدل در مقایسه با سایر مدل‌های موجود در ادبیات موضوع مناسب‌تر و مطلوب‌تر بوده است. اما چگونگی استخراج وزن‌های مناسب و پایدار از ماتریس مقایسات زوجی بازه‌یی، به‌ویژه ماتریس‌های مقایسات زوجی ناسازگار، موضوعی است که به بررسی‌های بیشتری نیاز دارد. در این راستا موضوعات زیر برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود:

- اعتبارسنجی مدل‌های پیشنهادی با استفاده از مسائل تصمیم‌گیری واقعی که در آنها امکان تعامل با تصمیم‌گیرنده برای تعیین اعتبار پاسخ‌های استخراج شده وجود دارد.
- یافتن الگوریتم‌های ابتکاری و فرابتکاری برای استخراج وزن‌های پایدار از ماتریس‌های مقایسات زوجی بازه‌یی ناسازگار.
- به‌کارگیری مدل‌های پیشنهادی در تصمیم‌گیری‌های گروهی.
- به‌کارگیری روش‌های رگرسیون پایدار.
- طراحی روشی مناسب (پایدار) برای ترکیب‌کردن وزن‌های بازه‌یی.

پانوشت

1. data envelopment analysis
2. linear programming method for generating most favorable weights
3. least upper approximation approach
4. multicriteria preference synthesis (MPS)
5. euclidean distance (ED)
6. minimum violation (MV)
7. hypothetical equivalents and inequivalents method
8. robust multiattribute decision making (RASM)
9. lexicographic goal programming (LGP)
10. possibilistic AHP for crisp data
11. lower model and upper model
12. two-stage logarithmic goal programming (TLGP)
13. multiple criteria decision making-(MCDM)
14. Zimmermann
15. stochastic optimization
16. random consistency index
17. goal programming
18. degree of preference

منابع

1. Omkarprasad, S.V., and Sushil, K. "Analytic hierarchy process: An overview of applications", *European Journal of Operational Research,* **169**, pp. 1-29 (2006).
2. Saaty, T.L., and Vargas, L.G. "Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process", *European Journal of Operational Research,* **32**, pp. 107-117 (1987).
3. Saaty, T.L. *Fundamentals of decision making and priority theory with the analytic hierarchy process,* **VI**, RWS Publications, (1994).
4. Dong, Y.; Xu, Y.; Li, H., and Dai, M. "A comparative study of the numerical Scales and the prioritization methods in AHP", *European Journal of Operational Research,* **186**, pp. 229-242 (2007).
5. Wang, Y.M.; Parkan, C., and Luo, Y. "Priority estimation in the AHP through Maximization of correlation coefficient", *Applied Mathematical Modeling,* **31**, pp. 2711-2718 (2007a).
6. Wang, Y.M.; Parkan, C., and Luo, Y. "A Linear programming method for generating the favorable weights from a pairwise comparison matrix", *Computers and Operations Research,* In Press (2007b), Corrected Proof (Available online 29 May 2007).
7. Entani, T., and Tanaka, H. "Interval estimations of global weights in AHP by upper approximation", *Fuzzy Sets and Systems,* **158**, pp. 1913-1921 (2007).
8. Srdjevic, B. "Combining different prioritization methods in the analytic hierarchy process synthesis", *Computers and Operations Research,* **32**, pp. 1897-1919 (2005).
9. Lipovetsky, S., and Conklin, W.M. "Robust estimation of priorities in the AHP", *European Journal of Operational Research,* **137**, pp. 110-122 (2002).
10. Laininen, P., and Hamalainen, R. "Analyzing AHP-matrices by regression", *European Journal of Operational Research,* **148**, pp. 514-524 (2003).
11. Gurnani, A.P., and Lewis, K. "Robust multiattribute decision making under risk and uncertainty in engineering design", *Engineering Optimization,* **37**(8), pp. 813-830 (2005).
12. Salo, A., and Hamalainen, R.P. "Processing interval judgments in the analytic hierarchy process", *Proceedings of the Ninth International Conference held in Fairfax, Virginia*, August 1990, Springer, New York, PP. 359-372 (1992).
13. Salo, A., and Hamalainen, R.P. "Preference programming through approximate ratio comparisons", *European Journal of Operational Research,* **82**, pp. 458-475 (1995).
14. Haines, L.M. "A statistical to the analytic hierarchy process with interval judgments: (I) Distributions on feasible regions", *European Journal of Operational Research,* **110**, pp. 112-125 (1998).
15. Wang, Y.M.; Yang, J.B., and Xu, D.L. "Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices", *Applied Mathematics and Computation,* **167**, pp. 252-273 (2006).

16. Wang, Y.M. "On lexicographic goal programming method for generating weights from inconsistent comparison matrices", *Applied Mathematics Computation,* **173**, pp. 985-991 (2006).
17. Sugihara K., Ishii H., and Tanaka, H. "Interval priorities in AHP by interval regression analysis", *European Journal of Operational Research,* **158**, pp. 745-754 (2004).
18. Wang, Y.M.; Yang, J.B., and Xu, D.L. "A two stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices", *Fuzzy Sets and Systems,* **152**, pp. 475-498 (2005).
19. Chandran, B.; Golden, B., and Wasil, E. "Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process", *Computers & Operations Research,* **32**, pp. 2235-2254 (2005).
20. Wang, Y.M., and Elhag, T.M.S. "A goal programming Method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix", *European Journal of Operational Research,* **177**, pp. 458-471 (2007).
21. Yury, N. "Robustness in combinatorial optimization and scheduling theory: An extended annotated bibliography", Working Paper (2006).
22. Mulvey, J.M.; Vanderbei, R.J., and Zenios S.A. "Robust optimization of large- scale systems", *Operations Research,* **43**(2), pp. 264-281 (1995).
23. Soyster, A.L. "Convex programming with set inclusive constraints and applications to exact linear programming", *Operations Research,* **21**, pp. 1154-1157(1973).
24. Ben-Tal, A., and Nemirovski, A. "Robust Convex optimization", *Mathematics of Operations Research,* **23**, pp. 769-805 (1998).
25. Ben-Tal, A., and Nemirovski, A. "Robust solutions to uncertain linear programs", *Operations Research Letters,* **25**, pp. 1-13 (1999).
26. El-Ghaoui, L., and Lebret, H. "Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,* **18**, pp. 1035-1064 (1997).
27. El-Ghaoui, L.; Oustry, F., and Lebret H., "Robust solutions to uncertain semidefinite programs", *SIAM Journal Optimization,* **9**, pp. 33-52 (1998).
28. Sim, M. "Robust Optimization", Ph.D Thesis, M.I.T, (2004).
29. Bertsimas, D., and Sim, M. "The price of robustness", *Operations Research,* **52**, pp. 35-53 (2004).
30. Bertsimas, D.; Pachamanova, D., and Sim, M. "Robust optimization under general norms", *Operations Research Letters,* **32**, pp. 510-516 (2004).
31. Hillier, F.S. *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys,* Springer's international series in operations research and management (2005).
32. Pentico, D.W. "Assignment problems: A golden anniversary survey", *European Journal of Operational Research,* **176**, pp. 774-793 (2007).
33. Yaman, H.; Karasan, O., and Pinar, M. "The robust shortest path problem with interval data", Working Paper (2003).
34. Hillier, F.S., and Lieberman, G.J. *Introduction to operations research,* 7th Edition, McGraw-Hill (2002).