مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
مرداد ۱۳۸۸، شماره‌ی چهل و نهم، ص. ۳-۱۴

برنامه‌ریزی تولید در سیستم تولید پیوسته با تقاضای غیر قطعی با هدف بیشینه‌سازی تطابق تولید با تقاضا

مرتضی عباسی (دکتری)
محمود هوشمند (دانشیار)
سیدتقی اخوان‌نیاکی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار برنامه‌ریزی تولید در صنایع پردازشی با تقاضای غیرقطعی بازار مورد بررسی قرارگرفته، و مدلی برای افزایش تطابق تولید با تقاضای غیرقطعی بازار ارائه شده است. هدف این مدل کمینه‌سازی امید ریاضی هزینه‌های کمبود و نگه‌داری موجودی است. در این پژوهش با توجه به ویژگی‌های خاص صنایع پردازشی، به‌صورت هدف‌مند یک دیدگاه تناوبی به امر تولید ارائه شده است. با توجه به این مفهوم، یک مدل ابتکاری دومرحله‌یی به‌منظور برنامه‌ریزی تولید محصولات مختلف ارائه شده است. در مرحله‌ی اول، سطح موجودی هریک از محصولات در ابتدای یک دوره‌ی تناوب به‌گونه‌یی تعیین می‌شود که امید ریاضی هزینه‌های کمبود و نگه‌داری موجودی در آن دوره، کمینه شود. این مقادیر به‌عنوان آرمان در مرحله‌ی دوم مدل لحاظ می‌شوند. بدین‌ترتیب که با توجه به سطح موجودی در دسترس واقعی هریک از محصولات در ابتدای یک دوره‌ی تولید، ترکیب تولیدات به‌گونه‌یی تعیین می‌شود که امید ریاضی سطح موجودی هریک از محصولات در انتهای دوره‌ی تولیدی تا حد امکان به مقادیر آرمانی خود، که در مرحله‌ی اول تعیین می‌شوند، نزدیک شوند. این امر به کمینه‌شدن هزینه‌ها در دوره‌ی بعدی تولید منجر می‌شود. برای تصمیم‌گیری در این خصوص مدل‌های ریاضی غیرخطی توسعه داده شده است که فضای جواب و تابع هدف آن محدب است. برای تشریح مدل تصمیم‌گیری یک مثال عددی ارائه شده است.

واژگان کلیدی: صنایع پردازشی، تولید دسته‌یی، تولید چندمحصولی، تقاضای غیر قطعی، ترکیب بهینه‌ی تولیدات.

abbasi@alum.sharif.edu
hoshmand@sharif.edu
niaki@sharif.edu

۱. مقدمه

مواد گسسته موادی هستند که با قرارگرفتن در یک ظرف، یا در یک بسته‌بندی خاص (یا خارج از آن)، حالت جامد خود را حفظ کنند. ولی مواد پیوسته موادی هستند که اگر در یک محفظه نباشند، پخش، تبخیر یا خشک می‌شوند. مایعات، گازها، خمیرها و پودرها از جمله‌ی مواد پیوسته هستند. با توجه به این تعریف، صنایع تولیدی را می‌توان به دو گروه کلی «صنایع ساخت گسسته» و «صنایع پردازشی» دسته‌بندی کرد. در واژه‌نامه‌ی اپیکس[۱] صنایع پردازشی چنین تعریف شده است: «تولیدی که در طی آن، از طریق مخلوط‌کردن، جداسازی، شکل‌دهی یا واکنش‌های شیمیاییِ پیوسته یا دسته‌یی ارزش ایجاد می‌شود». در این واژه‌نامه صنایع پردازشی به دو دسته‌ی کلی ــ صنایع پردازش دسته‌یی و صنایع پردازش پیوسته ــ دسته‌بندی شده‌اند. پردازش دسته‌یی روش ساختی است که در آن مواد جمع‌شده و یک‌باره در قالب دسته‌ی تولیدی پردازش می‌شوند. در پردازش پیوسته، مواد به‌صورت دسته‌یی تفکیک نمی‌شوند و درحالی‌که جریان دارند، پردازش بر روی آنها انجام می‌شود. در زمینه‌ی مدیریت تولید در صنایع پردازشی تحقیقات محدودی صورت گرفته است. بسیاری از محققان بر وجوه تمایز تولید پردازشی و ساخت گسسته متمرکز شده‌اند و مفاهیم جدیدی را برای حل مسائل مدیریت تولید در این نوع صنایع، ارائه کرده‌اند.

پانتل و همکارانش یک متدولوژی دو مرحله‌یی برای حل مسئله‌ی زمان‌بندی کارگاه شیمیایی، توسعه داده‌اند.[1] در مرحله‌ی اولِ این متدولوژی، برای بررسی رفتار نظام تولیدی از شبیه‌سازی زمان گسسته استفاده شده است. در مرحله‌ی دوم، از الگوریتم ژنتیک برای زمان‌بندی تولید استفاده شده است. هدف متدولوژی آنها کاهش زمان تکمیل کار دسته‌های تولیدی در کارگاهی است که در آن، چند محصول با تجهیزات چندمنظوره تولید می‌شوند. فلادس و لین یک مدل غیرخطی عدد صحیح با زمان پیوسته برای زمان‌بندی صنایع شیمیایی با تجهیزات چندمنظوره و محصولات

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۱/۱۸، داوری ۱۳۸۶/۴/۲۷، پذیرش ۱۳۸۶/۸/۷.

مختلف ارائه کرده‌اند.[۲] آنها یک دسته‌بندی کلی از مدل‌های زمان‌بندی برحسب تابع هدف، محدودیت‌ها، گسستگی یا پیوستگی زمان، نوع و توزیع تقاضا ارائه کرده‌اند.

جیا و ایراپتریتو مدلی را برای زمان‌بندی در یک پالایشگاه ارائه، و مسئله را به سه زیرمسئله تفکیک کردند.[۳] این سه زیرمسئله عبارت‌اند از: بارگیری نفت خام از تجهیزات انبارش مواد اولیه به تجهیزات تولید از طریق لوله‌های رابط؛ زمان‌بندی انجام فرایندها توسط تجهیزات تولید؛ مخلوط‌کردن محصولات نهایی و حمل آنها. (در تحقیق آنها، هریک از این سه زیرمسئله با زمان پیوسته مدل و حل شده‌اند.) کِلی در مقاله‌ی خود نحوه‌ی مدل‌سازی برنامه‌ریزی تولید در صنایع پالایشگاهی و پتروشیمی را شرح داده است.[۴] وی پیچیدگی مدل‌های برنامه‌ریزی تولید در این نوع صنایع و نیز نحوه‌ی حل مدل‌های غیرخطی با روش حل مسائل بزرگ به‌کمک برنامه‌ریزی خطی متوالی[۲] را شرح داده است.

مندز و گروسمن یک مدل عدد صحیح غیرخطی را برای زمان‌بندی مخلوط‌کردن مواد در یک پالایشگاه توسعه داده‌اند.[۵] در مدل آنها، زمان را می‌توان به‌صورت گسسته یا پیوسته منظور کرد. پینتو و همکارانش یک مدل غیرخطی عدد صحیح برای برنامه‌ریزی و زمان‌بندی فرایندهای یک پالایشگاه توسعه داده‌اند.[۶] در این مدل یک توپولوژیِ عمومیِ غیر خطی برای زمان واکنش‌های شیمیایی، تخلیه و بارگیری از طریق خطوط لوله منظور شده است. زمان در این مدل ممکن است به‌صورت گسسته یا پیوسته منظور شود. هدف این مدل تعریف سیاست بهینه‌ی تولید، کنترل موجودی‌ها و توزیع مواد است.

راجارام و کارمارکار در تحقیق خود بحث بازگشت برخی از خروجی‌های فرایندها را به مراحل قبلی‌شان مورد توجه قرار داده‌اند.[۷] آنها مدلی را توسعه داده‌اند که مشخص می‌کند در هر مرحله چه‌میزان محصول تولید شود تا هزینه‌های کل راه‌اندازی، تولید و انبار کمینه شود. در این رابطه محدودیت تجهیزات انبارش، برگشت مواد به مراحل قبلی با درصدهای تصادفی، منظور شده است. شولز و انگل زمان‌بندی در صنایع پلیمر با تولیدات دسته‌یی و زمان پردازش غیرخطی را مطالعه کرده‌اند و دو مدل عدد صحیح غیرخطی را توسعه داده‌اند که در یکی زمان به‌صورت پیوسته و در دیگری به‌صورت گسسته منظور شده است.[۸] هدف این دو مدل تعیین سیاست بهینه‌ی تولید با لحاظ‌کردن محدودیت‌های سیستم است.

ین و همکارانش بحث عدم قطعیت در زمان انجام فعالیت‌ها و تقاضا را مطالعه کرده‌اند و مسئله‌ی تعیین برنامه‌ی‌تولید را با استفاده از زنجیره‌ی مارکوفی، مدل کرده‌اند.[۹] هدف این مدل کاهش هزینه‌های تولید است. آنها از این مدل در صنعت تولید کاغذ استفاده کرده‌اند. سمباسیوان و یحیی یک مدل ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژی برای تعیین اندازه‌ی دسته‌ی تولیدی در کارگاهی با تجهیزات چندمنظوره توسعه داده‌اند.[۱۰] در این مدل هزینه‌ی‌حمل‌ونقل بین واحدهای مختلف، امکان تفکیک، ترکیب و انتقال دسته‌های تولیدی، مورد توجه قرار گرفته است. آنها مدل خود را در کارگاه نورد استیل به کارگرفته‌اند.

ویژگی‌های خاص صنایع پردازشی ازجمله نوع مواد اولیه، تجهیزات، فرایندهای تولیدی و بازار مصرف باعث شده است که صنایع پردازشی به مصداق بارز تولید انبوه تبدیل شود. در سال‌های اخیر افزایش سطح رقابت در بازارهای جهانی و نیز افزایش تنوع محصولات باعث شده است که تقاضای محصولات این صنایع ناپایدار شود. از این‌رو مفهوم انعطاف‌پذیری و تطابق تولید با تقاضای بازار مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

در این نوشتار، مدیریت تولید در یک واحد پتروشیمی مورد بررسی قرار گرفته است. فرض بر آن است که مقدار تقاضای بازار برای محصولات مختلف و نیز زمان انجام فرایندها تصادفی است. هدف تطابق حداکثری خروجی تولید با تقاضای ورودی به‌گونه‌یی است که کل هزینه‌های سیستم کمینه شود. از آنجا که پارامترهای تصادفی یا احتمالی را نمی‌توان مستقیماً در مدل‌های ریاضی لحاظ کرد، به‌کمک تحلیل‌های آماری اثرات این پارامترها بر متغیرهای مهمِ تصمیم‌گیری مانند سطح موجودی، میزان تولید و هزینه‌های سیستم، تخمین زده می‌شود. سپس به‌کمک معادلات تخمین‌زننده و به‌روشی ابتکاری، برنامه‌ی تولید به‌گونه‌یی تعیین شود که هزینه‌های سیستم کمینه و تطابق تولید با تقاضا بیشینه شود.

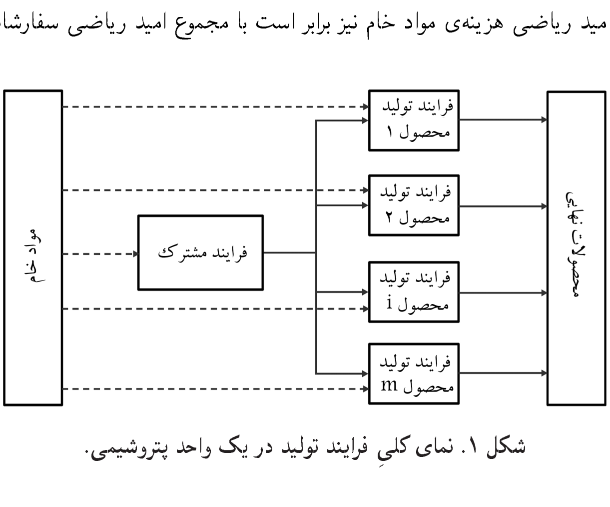
۲. شرح مسئله

فرایند تولید در یک واحد پتروشیمی معمولاً با یک فرایند مشترک میان تمام محصولات شروع می‌شود. برای مثال فرایند الفین فرایند مشترک میان اغلب محصولات نهایی یک واحد پتروشیمی است: فرایند تولید با ورود مواد اولیه به فرایند مشترک شروع می‌شود. سپس خروجی این فرایند به‌صورت دسته‌های تولیدی به بخش‌های مختلف تولید ارسال، و فرایندهای خاص تولید محصولات مختلف دنبال می‌شود. فرایند مشترک و فرایندهای خاص هریک از محصولات نیز به‌نوبه‌ی خود چندین زیرفرایند را شامل می‌شوند که در شکل ۱ به‌اختصار با یک جعبه نمایش داده شده‌اند. در این صنایع مواد به‌صورت دسته‌یی پردازش می‌شوند و حمل‌ونقل بین واحدهای تولیدی به‌وسیله‌ی لوله‌های ارتباطی صورت می‌پذیرد. از این‌رو موجودی پای کار در این نوع از سیستم‌ها وجود ندارد.

فرض کنید در این سیستم m محصول نهایی تولید می‌شود، برای هر محصول i، $i = 1, ..., m$ جریان ورود تقاضا از توزیع پواسون با نرخ λ_i تبعیت می‌کند، و هزینه‌ی نگه‌داری هر واحد کالا برابر h_i و هزینه‌ی کمبود آن برابر π_i است. زمان انجام فرایند خاص محصول i، از توزیع $f_i(t)$ و نیز زمان انجام فرایند مشترک از توزیع $f_{Com}(t)$ تبعیت می‌کند. بیشینه‌ی ظرفیت پردازش هریک از فرایندهای خاص (i) در هر بارگیری برابر با C_i و بیشینه‌ی ظرفیت فرایند مشترک C_{Com} است.

فرض بر آن است که ظرفیت فرایندهای تولیدی از امید ریاضی تقاضای ورودی بیشتر است، و از سوی دیگر امکان به تأخیر انداختن سفارشات وجود دارد، از این‌رو هیچ‌یک از سفارشات رد نمی‌شوند. ولی از آنجا که ورود تقاضا و زمان انجام فرایندها تصادفی است و نیز تولیدات به‌صورت دسته‌یی انجام می‌شود، امکان وقوع کمبود و یا موجودی کالای مازاد بر نیاز فعلی وجود دارد که به‌نوبه‌ی خود این موارد هزینه‌هایی را تحمیل می‌کنند.

از آنجا که هیچ‌یک از سفارشات رد نمی‌شوند، امید ریاضی فروش برابر است با مجموع امید ریاضی سفارشات ورودی × قیمت فروش هریک از محصولات، و امید ریاضی هزینه‌ی مواد خام نیز برابر است با مجموع امید ریاضی سفارشات



شکل ۱. نمای کلیِ فرایند تولید در یک واحد پتروشیمی.

ورودی × هزینه‌ی مواد اولیه‌ی هر واحد محصول. از طرفی در تولید دسته‌یی، هزینه‌ی انجام هریک از فرایندهای تولید اغلب مستقل از حجم تولید است. بنابراین ملاحظه می‌شود که با ارائه‌ی برنامه‌های مختلف تولید، امید ریاضی درآمد حاصل از فروش، امید ریاضی هزینه‌ی مواد و هزینه‌ی انجام فرایندها ثابت است و فقط هزینه‌های مربوط به کمبود و نگه‌داری موجودی کالا متغیر است. از این‌رو هدف این نوشتار ارائه‌ی راهکاری برای برنامه‌ریزی تولید در این نوع از سیستم‌های تولیدی است، به‌گونه‌یی که مجموع امید ریاضی هزینه‌های کمبود و نگه‌داری موجودی کمینه شود ـ به‌عبارت دیگر بیشترین تطابق میان تقاضای ورودی و خروجی تولید حاصل شود.

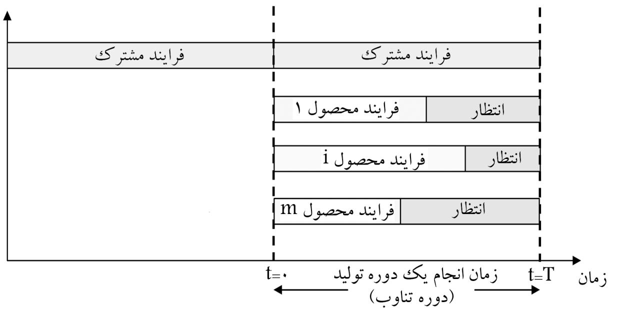
۳. روش پیشنهادی برای برنامه‌ریزی تولید

۱.۳. ارائه‌ی دیدگاه تناوبی به تولید

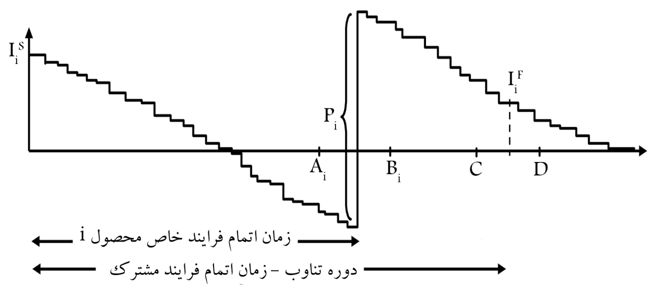
در اغلب صنایع پردازشی زمان انجام فرایند مشترک بزرگ‌تر از زمان انجام فرایندهای خاص محصولات است. از این‌رو می‌توان مفهوم دوره‌ی تناوب یا دوره‌ی تولید را برای این‌گونه صنایع متصور شد، و آن را چنین تعریف کرد: «دوره‌ی تناوب یا چرخه‌ی تولید از بارگذاری فرایند مشترک آغاز می‌شود و تا تخلیه‌ی مواد پردازش‌شده از آن ادامه می‌یابد.» این چرخه‌ی تولید بارها در خلال کار تولید تکرار می‌شود. طی هر چرخه‌ی تولید، فرایندهای خاص محصولات نیز به اتمام می‌رسند و منتظر ورود مواد جدید از فرایند مشترک می‌شوند (شکل ۲).

شکل ۲ نشان می‌دهد که بلافاصله پس از اتمام یک فرایند مشترک، فرایندهای خاص محصولات مختلف و نیز دور بعدی فرایند مشترک شروع می‌شود. فرایندهای خاص اغلب زودتر از فرایند مشترک به پایان می‌رسند و منتظر اتمام فرایند مشترک و ورود مواد پردازش‌شده‌ی آن می‌مانند.

شکل ۳ سطح موجودی را برای محصول i نشان می‌دهد. چنانچه در ابتدای



شکل ۲. زمان دوره‌ی تناوب و زمان اتمام هریک از فرایندها به‌صورت احتمالی.



شکل ۳. تغییرات سطح موجودی برای یک محصول خاص.

دوره‌ی تناوب سطح موجودی در دسترس برای این محصول I_i^S باشد، زمان اتمام فرایند مشترک (یا به‌عبارتی طول دوره‌ی تناوب)، از توزیع یکنواخت $U(C,D)$ و مدت زمان انجامِ فرایند خاصِ محصول i از توزیع یکنواخت $U(A_i,B_i)$ تبعیت می‌کند.

همان‌گونه که در شکل ۳ مشخص است، سطح موجودی کالا با توجه به نرخ تقاضای ورودی، به‌صورت تصادفی کاهش می‌یابد و پس از اتمام فرایند خاص و ورود دسته‌ی جدیدی از محصولات نهایی، به‌میزان اندازه‌ی دسته‌ی تولیدی (P_i) افزایش، و سپس تا انتهای دوره‌ی تناوب کاهش می‌یابد. سطح موجودی در پایان دوره‌ی تناوب (I_i^F)، برابر با سطح موجودی اول دوره برای دوره‌ی بعدی تولید است.

چنان که در بخش ۲ اشاره شد، طبق فرضیات و مشخصات سیستم، درآمد فروش و هزینه‌های تولید ثابت فرض شده‌اند و برنامه‌های مختلف تولید فقط بر هزینه‌های کمبود و نگه‌داری موجودی اثر می‌گذارند. از این‌رو در بخش بعدی برای تصمیم‌گیری درمورد برنامه‌ی تولید، اثرات تقاضای تصادفی و زمان پردازش تصادفی بر هزینه‌های کمبود و نگه‌داری بررسی می‌شود.

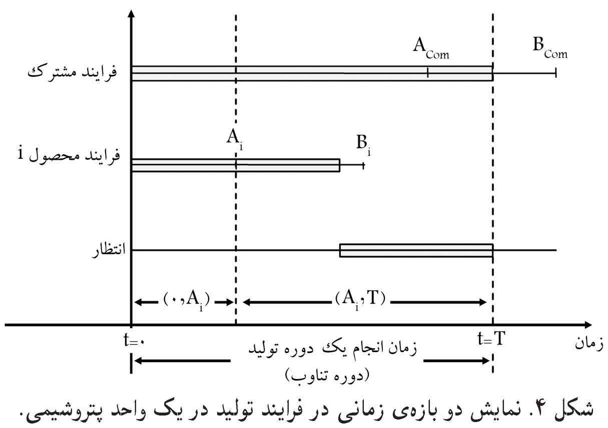
۲.۳. محاسبه‌ی امید ریاضی هزینه‌های کمبود و نگه‌داری موجودی در یک دوره

فرض کنید زمان انجام فرایندهای خاص محصول i از توزیع یکنواخت $U(A_i,B_i)$، و زمان انجام فرایند مشترک نیز از توزیع $U(A_{Com},B_{Com})$ تبعیت کند. برای بررسی رفتار سیستم در یک دوره‌ی تناوب فرض می‌شود که در زمان $t=۰$ فرایند مشترک محصولات در چرخه‌ی قبلی پایان یافته و فرایندهای مشترک در چرخه‌ی جاری و نیز فرایندهای خاص هریک از محصولات، شروع شود. سطح موجودی ابتدای دوره که می‌تواند منفی یا مثبت باشد برای هریک از محصولات برابر I_i^S است. با این فرض امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری وکمبود تا پایان دوره‌ی تناوب و شروع مرحله‌ی بعدی تولید محاسبه می‌شود. برای این منظور برای هر محصول i دو بازه‌ی زمانی به‌شرح زیر در نظر گرفته می‌شود (شکل ۴):

الف) از زمان شروع یک دوره‌ی تناوب تا ابتدای زمان انتظار قطعی برای اتمام فرایند خاص محصول i $(i=۱,...,m)$: $(۰,A_i)$؛

ب) از ابتدای زمان محتمل برای اتمام فرایند خاص تا زمان اتمام دوره‌ی تناوب یا شروع چرخه‌ی بعدی تولید$(A_i,T=B_{Com})$.

برای بررسی هزینه‌های کمبود و نگه‌داری موجودی کالا در این دو بازه‌ی زمانی متغیرهای زیر در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۴. نمایش دو بازه‌ی زمانی در فرایند تولید در یک واحد پتروشیمی.

- X_i^t : میزان تقاضای رسیده برای محصول i در دوره‌ی زمانی $t = 0$ تا t؛
- I_i^S : سطح موجودی ابتدای دوره‌ی جاری برای محصول i که مثبت یا منفی است؛
- I_i^F : سطح موجودی انتهای دوره‌ی جاری برای محصول i که برابر موجودی در ابتدای دوره‌ی بعدی است؛
- $H_i(a,b)$: امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری موجودی در بازه زمانی (a,b)؛
- $B_i(a,b)$: امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی کمبود در بازه زمانی (a,b).

۳.۲.۱. محاسبه‌ی امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود در بازه زمانی $(0, \mathbf{A}_i)$

در این بازه زمانی فرایند خاص تولید محصول i به اتمام نرسیده است، و از این‌رو موجودی در دست در مقطع بسیارکوچک زمانی t برابر با موجودی ابتدای دوره منهای سفارشات رسیده برای آن محصول $(I_i^S - X_i^t)$ است. این مقدار ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر تا مقطع زمانی t سفارشات رسیده کم‌تر از موجودی ابتدای دوره باشد، سطح موجودی نگه‌داری‌شده در این لحظه از زمان به میزان $I_i^S - X_i^t$ خواهد بود. در غیر این‌صورت سیستم در این لحظه‌ی زمانی با کمبودی معادل $X_i^t - I_i^S$ مواجه است. برای به‌دست آمدن امید ریاضی هزینه‌ها، مقادیر کمبود یا موجودی در هزینه‌های مرتبط و نیز احتمال وقوع آنها ضرب می‌شود.

در محاسبات فوق، فرض بر آن است که در لحظه‌ی زمانی بسیارکوچک t قرار داریم، لذا برای محاسبه‌ی امید ریاضی بر مقدار t شرط شده است. برای حذف این شرط، روی مقادیر t انتگرال گرفته می‌شود (شکل ۵). درنتیجه امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود در بازه زمانی $(0, A_i)$ به‌ترتیب مطابق روابط ۱ و ۲ محاسبه می‌شود:

$$E(H_{i(0,A_i)}) = h_i \int_0^{A_i} E((I_i^S - X_i^t)/t, X_i^t \le I_i^S)dt \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (1)$$

$$E(B_{i(0,A_i)}) = \pi_i \int_0^{A_i} E((X_i^t - I_i^S)/t, I_i^S < X_i^t)dt \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (2)$$

از آنجا که فرض شده است تقاضای ورودی برای هریک از محصولات از توزیع پواسون با نرخ λ_i تبعیت کند، براساس خاصیت بازسازی توزیع پواسون، مجموع تقاضای ورودی در یک بازه زمانی به‌طول t (X_i^t) از تابع توزیع پواسون با نرخ $\lambda_i t$ تبعیت می‌کند. از طرفی برای حذف شرط $X_i^t \le I_i^S$ در معادله‌ی ۱ از تابع جمع استفاده شده است، از این‌رو معادلات ۳ و ۴ حاصل می‌شوند:

$$E(H_{i(0,A_i)}) = h_i \int_0^{A_i} (\sum_{X_i^t=0}^{I_i^s} (I_i^s - X_i^t) \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t} e^{-\lambda t}}{X_i^t!} dt \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (3)$$

$$E(B_{i(0,A_i)}) = \pi_i \int_0^{A_i} (\sum_{X_i^t=I_i^s+1}^{\infty} (X_i^t - I_i^s) \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t} e^{-\lambda_i t}}{X_i^t!})dt \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (4)$$

قضیه‌ی ۱: بین معادلات ۳ و ۴ رابطه‌ی ۵ صادق است که در آن، K_i با توجه به پارامترهای مسئله و مقدار موجودی ابتدای دوره محاسبه می‌شود.

$$E(B_{i(0,A_i)}) = K_i + \frac{\pi_i}{h_i} E(H_{i(0,A)}) \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (5)$$

اثبات: در پیوست ارائه شده است.

۳.۲.۲. محاسبه‌ی امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود در بازه زمانی $(\mathbf{A}_i, \mathbf{T} = \mathbf{B}_{Com})$

بازه زمانی $(A_i, T = B_{Com})$ را می‌توان به سه زیربازه تفکیک کرد:

الف) از شروع زمان محتمل برای اتمام فرایند خاص تا زمان اتمام فرایند خاص؛

ب) از زمان اتمام فرایند خاص تا ابتدای زمان محتمل برای اتمام فرایند مشترک؛

ج) از شروع زمان محتمل برای اتمام فرایند خاص تا زمان اتمام دوره‌ی تناوب.

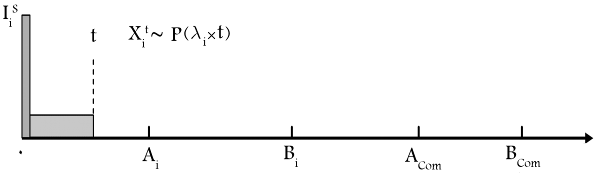
الف) امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود در بازه زمانی $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$

فرض کنید که در مقطع زمانی t، و زمان اتمام فرایند خاص v_i قرار داریم (شکل ۶). در این صورت امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری مطابق رابطه‌ی ۶ خواهد بود. با توجه به شکل ۶، ملاحظه می‌شود که حد بالای مقطع زمانی t برابر v_i است.

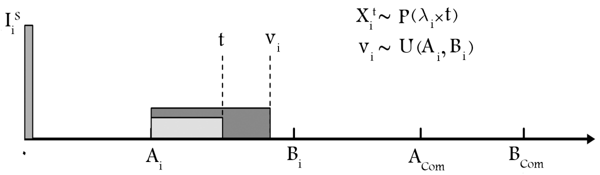
$$E(H_{i(A_i,B_i)})/v_i = h_i E((I_i^S - X_i^t)|t, X_i^t \le I_i^S)/v_i = h_i \int_{A_i}^{v_i} \sum_{X_i^t=0}^{I_i^S} ((I_i^S - X_i^t) P(\lambda_i t)/v_i)dt \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (6)$$

در معادله‌ی ۶ بر روی زمان اتمام فرایند خاص v_i شرط شده است. از آنجا که این زمان از توزیع یکنواخت تبعیت می‌کند، می‌توان معادله‌ی ۶ را به‌صورت معادله‌ی ۷ نوشت:

$$E(H_{i(A_i,B_i)}) = h_i \int_{A_i}^{B_i} (\int_{A_i}^{v_i} \sum_{X_i^t=0}^{I_i^S} (I_i^S - X_i^t) P(\lambda_i t)dt) \frac{1}{B_i - A_i} dv_i \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (7)$$



شکل ۵. نمایش گرافیکی فرضیات محاسبات در بازه زمانی $(0, A_i)$.



شکل ۶. نمایش گرافیکی فرضیات محاسبات در بازه زمانی (A_i, B_i).

به‌طریق مشابه برای امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی کمبود نیز داریم:

$$E(B_{i(A_i,B_i)}) = \pi_i \int_{A_i}^{B_i} (\int_{A_i}^{v_i} \sum_{X_i^t = I_i^S+1}^{\infty} (X_i^t - I_i^S) P(\lambda_i t) dt)$$
$$\frac{1}{B_i - A_i} dv_i \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۸)$$

با توجه به قضیه‌ی ۱ می‌توان رابطه‌ی ۹ را برای امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی کمبود ثابت کرد.

$$E(B_{i(A_i,B_i)}) = \pi_i \int_{A_i}^{B_i} (\int_{A_i}^{v_i} (\lambda_i t - I_i^S) dt) \frac{1}{B_i - A_i} dv_i +$$
$$\frac{\pi_i}{h_i} E(H_{i(A_i,B_i)}) \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۹)$$

ب) امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود در بازه زمانی $(\mathbf{B}_i, \mathbf{A}_{Com})$

فرض کنید که در مقطع زمانی t، و زمان اتمام فرایند خاص v_i قرار داریم (شکل ۷). در این بازه زمانی تولید محصولات انجام شده، و به‌میزان P_i به موجودی در دست محصول i اضافه شده است. در این صورت امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری مطابق رابطه‌ی ۱۰ خواهد بود. با توجه به شکل ۷، ملاحظه می‌شود که در این مرحله حد پایین مقطع زمانی t مقدار v_iاست.

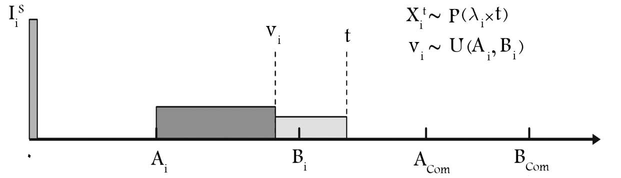
$$E(H_{i(B_i,A_{Com})})/v_i = E((I_i^S + P_i - X_i^t)|t, X_i^t \leq I_i^S + P_i)/v_i$$
$$= \int_{v_i}^{A_{Com}} \sum_{X_i^t=0}^{I_i^S+P_i} ((I_i^S + P_i - X_i^t) P(\lambda_i t)/v_i) dt$$
$$for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۰)$$

در معادله‌ی ۱۰ بر روی زمان اتمام فرایند خاص v_i شرط شده است. از آنجا که این زمان از توزیع یکنواخت تبعیت می‌کند، می‌توان معادله‌ی ۱۰ را چنین نوشت:

$$E(H_{i(B_i,A_{Com})}) = h_i \int_{A_i}^{B_i} (\int_{V_i}^{A_{Com}} \sum_{X_i^t=0}^{I_i^S+P_i} (I_i^S + P_i - X_i^t)$$
$$P(\lambda_i t) dt) \frac{1}{B_i - A_i} dv_i \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۱)$$

به طریق مشابه برای امید ریاضی تجمیعی هزینه کمبود نیز داریم:

$$E(B_{i(B_i,A_{Com})}) = \pi_i \int_{A_i}^{B_i} (\int_{v_i}^{A_{Com}} \sum_{X_i^t = I_i^S+P_i+1}^{\infty} (X_i^t - I_i^S - P_i)$$
$$P(\lambda_i t) dt) \frac{1}{B_i - A_i} dv_i \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۲)$$



شکل ۷. نمایش گرافیکی فرضیات محاسبات در بازه زمانی (B_i, A_{Com}).

در این بازه زمانی نیز با توجه به قضیه‌ی ۱، می‌توان رابطه‌ی ۱۳ را برای امید ریاضی تجمیعی هزینه کمبود ثابت کرد.

$$E(B_{i(B_i,A_{Com})}) = \pi_i \int_{A_i}^{B_i} (\int_{v_i}^{A_{Com}} (\lambda_i t - I_i^S - P_i) dt)$$
$$\frac{1}{B_i - A_i} dv_i + \frac{\pi_i}{h_i} E(H_{i(B_i,A_{Com})}) \quad for \quad i = 1, ..., m \quad (۱۳)$$

ج) امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود در بازه زمانی $(\mathbf{A}_{Com}, \mathbf{B}_{Com})$

فرض کنید که در مقطع زمانی t و زمان اتمام فرایند مشترک V_C قرار داریم (شکل ۸). در این صورت امید ریاضی تجمیعی هزینه نگه‌داری مطابق رابطه‌ی ۱۴ خواهد بود. دقت شود که در این مرحله حد بالای مقطع زمانی t مقدار V_C است.

$$E(H_{i(A_{Com},B_{Com})})/V_C = h_i E((I_i^S + P_i - X_i^t)|t, X_i^t \leq I_i^s +$$
$$P_i)/V_C = h_i \int_{A_i}^{V_C} \sum_{X_i^t=0}^{I_i^S+P_i} ((I_i^S - X_i^t) P(\lambda_i t)/V_C) dt$$
$$for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۴)$$

در معادله‌ی ۱۴ بر روی زمان اتمام فرایند مشترک V_C شرط شده است. از آنجا که این زمان از توزیع یکنواخت تبعیت می‌کند، می‌توان معادله‌ی ۱۴ را چنین نوشت:

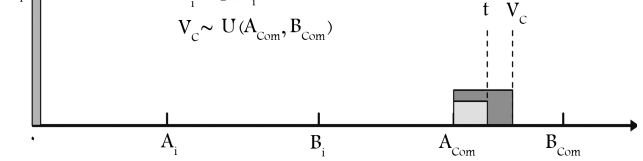
$$E(H_{i(A_{Com},B_{Com})}) = h_i \int_{A_{Com}}^{B_{Com}} (\int_{A_{Com}}^{V_C} \sum_{X_i^t=0}^{I_i^S+P_i} (I_i^S + P_i - X_i^t)$$
$$P(\lambda_i t) dt) \frac{1}{B_i - A_i} dV_C \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۵)$$

برای امید ریاضی تجمیعی هزینه کمبود نیز داریم:

$$E(B_{i(A_{Com},B_{Com})}) = \pi_i \int_{A_{Com}}^{B_{Com}} (\int_{A_{Com}}^{V_C} \sum_{X_i^t = I_i^S+P_i+1}^{\infty}$$
$$(X_i^t - I_i^S - P_i) P(\lambda_i t) dt) \frac{1}{B_i - A_i} dV_C \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۶)$$

در این بازه زمانی نیز با توجه به قضیه‌ی ۱، می‌توان رابطه‌ی ۱۷ را برای امید ریاضی تجمیعی هزینه کمبود ثابت کرد.

$$E(B_{i(A_{Com},B_{Com})}) = \pi_i \int_{A_{Com}}^{B_{Com}} (\int_{A_{Com}}^{V_C} (\lambda_i t - I_i^S - P_i) dt)$$
$$\frac{1}{B_i - A_i} dV_C + \frac{\pi_i}{h_i} E(H_{i(A_{Com},B_{Com})}) \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۷)$$



شکل ۸. نمایش گرافیکی فرضیات محاسبات در بازه زمانی (A_{Com}, B_{Com}).

امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی کمبود در طول دوره‌ی تناوب فرایند تولید (اتمام فرایند مشترک)، از جمع امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ها در دو بازه زمانی $(0, A_i)$ و $(A_i, T = B_{Com})$ به‌دست می‌آید. از این‌رو امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود برای کل دوره‌ی تناوب به‌ترتیب عبارت خواهد بود از:

$$E(H_i) = E(H_{i(0,A_i)}) + E(H_{i(A_i,B_i)}) + E(H_{i(B_i,A_{Com})}) + E(H_{i(A_{Com},B_{Com})}) \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۸)$$

$$E(B_i) = E(B_{i(0,A_i)}) + E(B_{i(A_i,B_i)}) + E(B_{i(B_i,A_{Com})}) + E(B_{i(A_{Com},B_{Com})}) = K_i + \frac{\pi_i}{h_i} E(H_i) \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۱۹)$$

ملاحظه می‌شود که امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی کمبود برابر امید ریاضی تجمیعی هزینه نگه‌داری به‌علاوه‌ی مقدار ثابت K_i است. مقدار K_i به پارامترهای سیستم نظیر زمان اتمام فرایندها و نرخ ورود تقاضا و غیره، بستگی دارد. با توجه به معادلات ۱۸ و ۱۹ مجموع امید ریاضی تجمیعی هزینه‌ی نگه‌داری موجودی و کمبود برای یک دوره‌ی تناوب مشخص عبارت است از:

$$E(Total\ Cost) = \sum_{i=1}^{m} E(H_i) + \sum_{i=1}^{m} E(B_i) \qquad (۲۰)$$

چنان که اشاره شد، فرض بر این است که ظرفیت سیستم تولیدی برابر یا بیشتر از امید ریاضی تقاضای ورودی است؛ لذا فروش از دست رفته وجود ندارد اما امکان وقوع سفارشات به‌تعویق افتاده وجود دارد. از این‌رو درآمد سیستم تولیدی ثابت است و از طرفی هزینه‌های مرتبط با تولید نیز ثابت در نظر گرفته شده است. برای افزایش سود کافی است هزینه‌های مرتبط با نگه‌داری موجودی و کمبود کالا کمینه شود. در بخش بعدی روش پیشنهادی برای یافتن برنامه‌ی تولید بهینه یا نزدیک به بهینه تشریح می‌شود.

۳.۳. مدل‌سازی مسئله‌ی برنامه‌ریزی تولید

در بخش ۱.۳ دیدگاه تناوبی به امر تولید ارائه شد. این دیدگاه که به‌صورت هدف‌مند تعریف شده است به مدل‌سازی کارا و دقیق مسئله کمک می‌کند. چنان‌که اشاره شد هر دوره‌ی تناوب با ورود مواد خام به فرایند مشترک آغاز می‌شود، و تا پایان تخلیه‌ی مواد از آن ادامه می‌یابد. پس از اتمام یک فرایند مشترک، به‌طور همزمان فرایند مشترک دور بعدی و نیز فرایندهای خاص آغاز می‌شوند. در این بخش یک روش ابتکاری دومرحله‌یی برای تعیین برنامه‌ی تولید بهینه ارائه می‌شود.

در این مقاله برای بهینه‌سازی رفتار سطح موجودی با هدف کمینه‌کردن هزینه‌های نگه‌داری و کمبود، به‌طورکلی دو نوع متغیر سطح موجودی ابتدای هر دوره از تولید و میزان تولید از هر یک از محصولات، مورد بررسی قرارگرفته است. در مرحله‌ی اول تصمیم‌گیری یک دیدگاه بلندمدت به مسئله‌ی تعیین برنامه‌ی تولید ارائه می‌شود. در این دیدگاه دو نوع متغیر مذکور به‌گونه‌یی تعیین می‌شوند که رفتار بلندمدت سیستم بهینه شود. در مرحله‌ی دوم تصمیم‌گیری و در مواجهه با شرایط عملی سیستم، به‌عبارتی سطح موجودی ابتدای دوره‌ی واقعی، روشی پیشنهاد می‌شود که رفتار سطح موجودی به رفتار بهینه‌ی بلندمدت خود که در مرحله‌ی اول تعیین شده، نزدیک شود.

۱.۳.۳. مرحله‌ی اول تصمیم‌گیری

هدف این مرحله بررسی رفتار موجودی محصولات مختلف در دیدگاه کلی و بلندمدت است. برای همگرایی تولیدات سیستم با تقاضای ورودی، بدیهی است که امید ریاضی مقادیر تولید از هر محصول در هر دوره از تولید با امید ریاضی تقاضای ورودی برابر باشد. در غیر این صورت اگر امید ریاضی تولیدات در هر دوره از امید تقاضای ورودی بیشتر باشد، در بلندمدت سیستم با سطح موجودی فزاینده روبه‌رو خواهد شد و به‌عکس متحمل کمبود فزاینده خواهد شد.

از آنجا که سفارشات ورودی از توزیع پواسون تبعیت می‌کنند، جمع سفارشات رسیده در یک بازه زمانی نیز توزیع پواسون دارد. از طرفی زمان اتمام فرایند مشترک از توزیع یکنواخت تبعیت می‌کند و امید ریاضی طول آن عبارت است از $\frac{A_{Com}+B_{Com}}{2}$، لذا برای امید ریاضی تقاضای وارد شده در یک دوره داریم:

$$E(Demand(i)) = E(Cycle\,Time) * Arrival\,Rate(i) = \frac{A_{Com} + B_{Com}}{2} \lambda_i \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۲۱)$$

چنان که‌اشاره شد، در بلندمدت امید ریاضی تولید از هر محصول در هر دوره از تولید برابر با امید ریاضی تقاضای ورودی است که به‌کمک معادله‌ی ۲۱ محاسبه می‌شود. با این فرض سطح موجودی ابتدای دوره‌ی محصولات (I_i^S) نقش تعیین‌کننده‌یی در هزینه‌های نگه‌داری و کمبود دارد. اگر سطح موجودی محصولی در ابتدای یک دوره از تولید زیاد باشد، امید ریاضی هزینه‌ی نگه‌داری آن دوره افزایش یافته و در مقابل احتمال کمبود و هزینه‌های مربوطه کاهش می‌یابد و در صورتی‌که سطح موجودی در ابتدای آن دوره کاهش یابد، امید ریاضی هزینه‌های نگه‌داری آن دوره کاهش یافته و در مقابل امید ریاضی هزینه‌های کمبود افزایش می‌یابد.

بررسی‌های عددی نشان می‌دهد که با تغییر سطح موجودی ابتدای دوره، امید ریاضی هزینه‌های نگه‌داری یا کمبود با روندی یکنوا تغییر می‌کنند. از این‌رو برای مقدار مشخصی از موجودی ابتدای دوره، میان هزینه‌های نگه‌داری و کمبود توازن ایجاد شده و مجموع هزینه‌های نگه‌داری و کمبود در آن دوره کمینه می‌شود. به این مقادیر موجودی بهینه ابتدای دوره (I_i^{S*}) اطلاق می‌شود. از طرفی در این مرحله می‌توان هریک از محصولات را مستقل از یکدیگر مورد بررسی قرار داد. گرچه وابستگی آنها در استفاده از تجهیزات مشترک است، ولی این وابستگی با فرض تولید به مقدار امید ریاضی تقاضا در طول دوره تناوب و وجود ظرفیت برابر یا بیشتر از این میزان رفع شده است. این نکات امکان تصمیم‌گیری مستقل درمورد موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره‌ی هریک از محصولات را می‌دهد. مدل تصمیم‌گیری این مرحله چنین است:

$$\textbf{Min } E(total\ Cost) = \sum_{i=1}^{m} E(H_i(I_i^S)) + \sum_{i=1}^{m} E(B_i(I_i^S))$$

$$\textbf{Subject to}: \quad I_i^S is\, free \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۲۲)$$

اگر در یک دوره از تولید، سطح موجودی ابتدای دوره برابر با مقادیر بهینه‌ی خود (I_i^{S*}) باشد، طبق مسئله‌ی ۲۲ امید ریاضی هزینه‌ها در آن دوره کمینه خواهد بود. نکته‌ی حائز توجه دیگر این است که با فرض برابری امید ریاضی تولیدات با تقاضای ورودی، طبق معادله‌ی ۲۳ امید ریاضی موجودی پایان دوره هریک از محصولات برابر با موجودی ابتدای آن دوره خواهد شد.

$$E(I_i^F) = I_i^S + E(P_i) - E(Demand(i)) = I_i^S \quad for \quad i = 1, ..., m \qquad (۲۳)$$

از آنجا که موجودی پایان یک دوره برابر با موجودی ابتدای دوره‌ی بعدی است، برای هریک از محصولات، امید ریاضی موجودی ابتدای دوره (I_i^S) در تمامی دوره‌ها برابر خواهد شد. با تنظیم موجودی ابتدای دوره‌ی سیستم بر مقادیر بهینه‌ی آن (I_i^{S*})، امید ریاضی هزینه‌ها در تمامی دوره‌های بعدی تولید کمینه خواهد بود. به‌عبارتی کمینه‌شدن هزینه‌ها در یک دوره از تولید را می‌توان به کل افق برنامه‌ریزی تسری داد.

۲.۳.۳. مرحله‌ی دوم تصمیم‌گیری

اگر روشی برای برنامه‌ریزی تولید ارائه شود تا تضمین کند موجودی ابتدای هریک از مراحل تولید برابر مقادیر بهینه (I_i^{S*}) شود، امید ریاضی رفتار هزینه‌یی سیستم در بلندمدت بهینه می‌شود. از آنجا که بعضی از پارامترها تصادفی‌اند، در عمل تحقق این حالت ایده‌آل میسر نیست و در آن انحرافاتی به‌وجود می‌آید. در مرحله‌ی دوم تصمیم‌گیری روشی پیشنهاد می‌شود تا سیستم نسبت به انحرافات خود از حالت ایده‌آل حساس شود و درصدد جبران آنها باشد.

فرض کنید که در ابتدای یک دوره‌ی تولید، سطح موجودی هریک از محصولات معین است. حال مقادیر تولید هریک از محصولات باید به‌گونه‌یی تعیین شود که امید ریاضی موجودی پایان دوره‌ی آنها برابر مقادیر موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره (I_i^{S*}) شود. در این راستا محدودیت‌های سیستم، نظیر محدودیت ظرفیت، لحاظ می‌شود. اگر ظرفیت کافی برای تحقق این امر وجود نداشته باشد، پارامترهایی مانند ضریب هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود، اولویت تخصیص منابع تولیدی را مشخص می‌کنند. مثلاً محصولاتی اولویت می‌یابند که موجودی در دست کم‌تری دارند و هزینه‌ی کمبود آنها بیشتر است. به‌عبارت دیگر درصورت اولویت نیافتن آنها، سیستم متحمل هزینه‌های بیشتری خواهد شد.

این تصمیم‌گیری به‌کمک مدل ریاضی که به این منظور توسعه یافته، انجام می‌پذیرد. در این مدل ریاضی تابع هدف عبارت است از مجموع هزینه‌های کمبود و موجودی و محدودیت‌های مسئله شامل محدودیت ظرفیت است. موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره (I_i^{S*}) به‌صورت یک آرمان برای امید ریاضی موجودی پایان دوره در نظر گرفته شده است. بدیهی است هزینه‌ی تخطی از این آرمان، در تابع هدف منظور می‌شود. مدل تصمیم‌گیری در این مرحله عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Min } E(Total\ \ Cost)=\sum_{i=1}^{m}E(H_i(P_i))+E(B_i(P_i))+\\
&\qquad\qquad \delta_i^+\alpha_i^+ + \delta_i^-\alpha_i^-\\
&\textbf{Subject to}: \quad \sum_{i=1}^{m}\beta_i P_i \le C_{Com}\\
&\qquad P_i\le C_i \qquad\qquad i=1,\dots,m\\
&\qquad P_i+I_i^S-\lambda_i\frac{B_{Com}+A_{Com}}{2}-\alpha_i^+ +\alpha_i^-\\
&\qquad =I_i^{S*} \qquad\qquad i=1,\dots,m\\
&\qquad P_i\ge 0 \qquad\qquad i=1,\dots,m
\end{aligned}\tag{24}$$

که در آن:

β_i: تعداد واحد مواد پردازش شده در تجهیزات فرایند مشترک که برای تولید یک واحد محصول نهایی، i، لازم است؛

I_i^{s*}: سطح بهینه‌ی موجودی ابتدای دوره که در مرحله‌ی اول مدل محاسبه می‌شود؛

$\delta_i^+(\delta_i^-)$: میزان جریمه به‌ازای هر واحد تخطی مثبت (منفی) از سطح بهینه‌ی موجودی ابتدای دوره (I_i^{S*}).

جدول ۱. اطلاعات محصولات در یک واحد پتروشیمی.

ردیف	محصول	نرخ تقاضا λ_i	ضریب حجمی	هزینه‌ی کمبود*	هزینه‌ی نگه‌داری*
۱	محصول ۱	۳	۱٫۲	۳	۱
۲	محصول ۲	۴	۱٫۵	۴	۲
۳	محصول ۳	۲	۱٫۷	۵	۳
۴	محصول ۴	۵	۲	۴	۲

* واحد محصول در واحد زمان

جدول ۲. اطلاعات فرایندهای تولید در یک واحد پتروشیمی.

ردیف	فرایند	زمان فرایند خاص	ظرفیت (بر حسب واحد محصول)	ظرفیت / امید تقاضا
۱	محصول ۱	U(۳,۴)	۱۸	٪۱۳۳
۲	محصول ۲	U(۲,۴)	۲۵	٪۱۳۹
۳	محصول ۳	U(۱,۲)	۱۵	٪۱۶۶
۴	محصول ۴	U(۱,۳)	۳۰	٪۱۳۳
۵	مشترک	U(۴,۵)	۱۳۰	٪۱۱۰

جریمه‌های تخطی از آرمان ـ موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره (I_i^{S*}) ـ به‌صورت کارا و با دقت از تابع هدف مسئله مرحله‌ی اول تصمیم‌گیری ۲۲ منتج می‌شود. بدین‌ترتیب که تابع هدف مسئله‌ی ۲۲ به‌ازای I_i^{S*} کمینه خواهد بود و هر واحد انحراف از این مقدار باعث ازدیاد مقدار آن خواهد شد. از این‌رو به‌راحتی می‌توان اثر مقدار مشخصی از انحراف از مقادیر بهینه (α_i^+ یا α_i^-) بر تابع هدف (δ_i^+ یا δ_i^-) را محاسبه کرد. این مقادیر مبین مقدار واقعی جریمه به‌ازای مقدار مشخصی از انحراف خواهند بود. در واقع جریمه‌ی انحراف از آرمان برابر مقدار هزینه‌ی اضافی است که در مرحله‌ی بعدی تولید به‌علت انحراف از مقدار بهینه‌ی موجودی ابتدای دوره، به سیستم تحمیل خواهد شد.

۴. مثال عددی

در این بخش با ذکر یک مثال عددی، روش پیشنهادی را تشریح می‌کنیم. فرض کنید در یک واحد پتروشیمی چهار محصول تولید می‌شود (شکل ۱). اطلاعات مربوط به محصولات مختلف و فرایندهای تولید خاص و مشترک آنها در جدول ۱ آورده شده است. لازم به‌ذکر است که فرایند حل مسئله نسبت به اطلاعات ورودی کاملاً منعطف است و عامل مهم تأثیرگذار در فرایند محاسبات تعداد محصولات است. چنان که اشاره شد، تقاضا از توزیع پواسون و زمان تکمیل فرایندها از توزیع یکنواخت تبعیت می‌کند. ظرفیت تولید نیز پاسخ‌گوی امید ریاضی تقاضای رسیده برای محصولات مختلف در یک دوره‌ی تناوب سیستم است، در غیر این‌صورت رفتار سیستم واگرا خواهد شد زیرا سازوکاری برای رد سفارشات منظور نشده است، و فرض شده که به همه‌ی سفارشات پاسخ داده می‌شود. با توجه به تصادفی‌بودن تقاضای بازار و زمان تکمیل فرایندها، ظرفیت مازاد بر امید ریاضی تقاضای بازار

تعبیه شده است تا جواب‌گوی تغییرات ناگهانی باشد. نسبت ظرفیت موجود و امید ریاضی تقاضا برای محصولات مختلف در ستون آخر جدول ۲ آورده شده است. ظرفیت‌های مازاد متناسب با هزینه‌های کمبود منظور شده‌اند.

۱.۴. مرحله‌ی اول مدل برنامه‌ریزی تولید

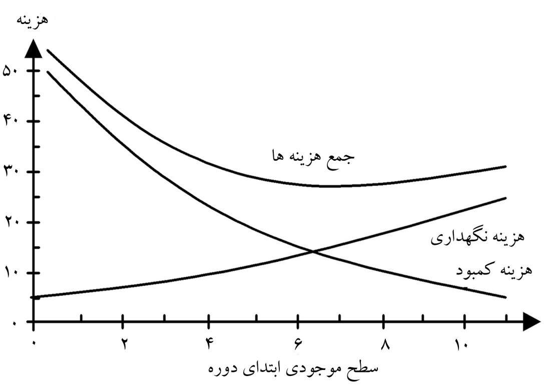
در این مرحله هدف تعیین سطح بهینه‌ی موجودی ابتدای دوره برای هریک از محصولات است. برای این منظور میزان تولید برای هریک از محصولات را برابر امید ریاضی مقدار تقاضای ورودی در یک دوره از تولید، قرار می‌دهیم. در این مرحله با فرض تولید حجم مشخصی از محصولات (امید ریاضی تقاضا در دوره تناوب) که با محدودیت ظرفیت تولید نیز روبه‌رو نیست، می‌توان رفتار هزینه‌یی محصولات مختلف را مستقل از یکدیگر بررسی کرد.

برای هریک از محصولات مجموع هزینه‌های موجودی وکمبود براساس معادله‌ی ۲۰ به‌دست می‌آید. محاسبات مربوطه به‌کمک نرم‌افزار $Mathematica$۵٫۱ انجام شد. در شکل ۹ تا ۱۲ به‌تفکیک نمودار هزینه ـ موجودی ابتدای دوره برای محصولات مختلف نشان داده شده است. خاطرنشان می‌شود که فرضیات و ویژگی‌های سیستم امکان بررسی مستقل محصولات را فراهم آورده است.

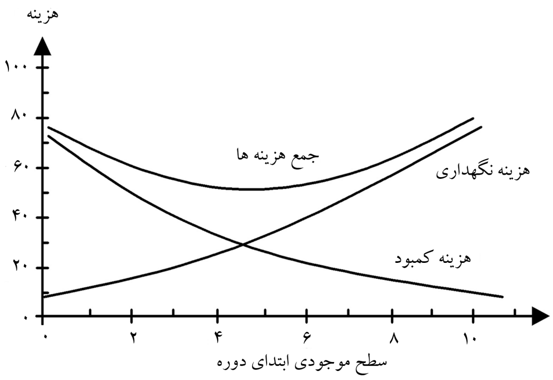
مطابق انتظار، اگر موجودی ابتدای دوره زیاد شود هزینه‌ی نگه‌داری موجودی افزایش، و هزینه‌ی کمبود کاهش می‌یابد، و بالعکس اگر این مقدار کاهش یابد هزینه‌ی موجودی کاهش و هزینه‌ی کمبود افزایش می‌یابد. ملاحظه می‌شود که توابع هزینه‌ی موجودی یک‌نوا صعودی و تابع هزینه‌ی کمبود یک‌نوا نزولی‌اند. از این‌رو نقطه‌ی بهینه‌ی محدودی وجود دارد و برای هریک از محصولات منطبق بر نقطه‌ی تقاطع دو منحنی هزینه‌ی نگه‌داری و هزینه‌ی کمبود آنها است.

از نمودارهای شکل‌های ۹ تا ۱۲ و محاسبات مربوطه نتیجه می‌شود که سطح بهینه‌ی موجودی اولیه برای هریک از محصولات به‌ترتیب عبارت خواهد بود از: $I_1^{S*} = ۶٫۵$ و $I_2^{S*} = ۴٫۵$ و $I_3^{S*} \approx ۰$ و $I_4^{S*} = ۱٫۵$. برای محصول ۳، نسبت هزینه‌ی نگه‌داری به هزینه‌ی کمبود بزرگ است و از طرفی زمان اتمام فرایند خاص آن نیزکوتاه‌تر از سایر محصولات است؛ لذا منطقی است که موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره‌ی آن کوچک باشد. در مقابل برای محصول ۱، هزینه‌ی نگه‌داری خیلی کم‌تر از هزینه‌ی کمبود است و نیز زمان اتمام فرایند خاص آن نیز زیاد است. در مجموع بدیهی است که موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره برای این محصول باید بزرگ‌تر باشد.

با کمی دقت در نمودارهای فوق، می‌توان دریافت که اگر موجودی ابتدای دوره یک یا چند واحد کم‌تر (بیشتر) از موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره باشد، چه

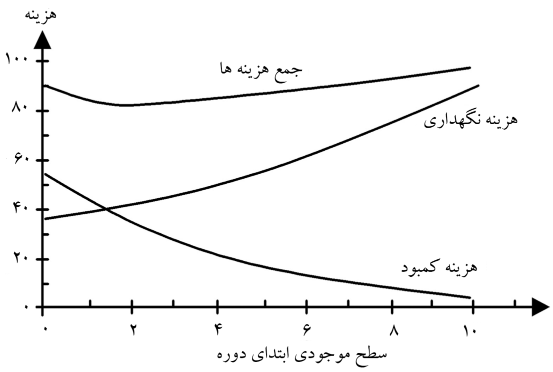


شکل ۹. نمودار هزینه ـ موجودی ابتدای دوره برای محصول ۱.



شکل ۱۰. نمودار هزینه ـ موجودی ابتدای دوره برای محصول ۲.

شکل ۱۱. نمودار هزینه ـ موجودی ابتدای دوره برای محصول ۳.



شکل ۱۲. نمودار هزینه ـ موجودی ابتدای دوره برای محصول ۴.

میزان هزینه‌ی مازاد (جریمه) نسبت به حالت بهینه به سیستم تحمیل می‌شود. این مقادیر، جریمه‌ی انحراف از آرمان را در مرحله‌ی دوم تصمیم‌گیری تعیین می‌کنند.

۲.۴. مرحله‌ی دوم مدل برنامه‌ریزی تولید

در این مرحله فرض می‌شود که در شرایط واقعی تولید قرار داریم. در ابتدای هر دوره از تولید با یک سطح موجودی واقعی روبه‌رو خواهیم بود که می‌تواند منفی یا مثبت به‌منزله‌ی کمبود یا موجودی مازاد باشد. حال باید تصمیم گرفت که مواد پردازش‌شده توسط فرایند مشترک را به چه ترتیبی میان فرایندهای خاص توزیع کنیم؛ و به‌عبارت دیگر میزان تولید از هریک از محصولات به چه میزان باشد تا محدودیت‌های سیستم

ارضاء شود و نیز هزینه‌های موجودی و کمبود کمینه شوند. راه حل پیشنهادی استفاده از مدل ریاضی آرمانی است که در بخش ۲.۳.۳. به آن اشاره شد. فرایند تخصیص مواد به فرایندها باید به‌گونه‌یی باشد که امید ریاضی موجودی پایان دوره محصولات تا حد امکان نزدیک به موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره‌شان شوند.

آرمان برای امید ریاضی موجودی در پایان دوره برابر موجودی ابتدای دوره‌ی بهینه (I_i^{S*}) است که در مرحله‌ی اول تصمیم‌گیری تعیین شده است. امید ریاضی موجودی پایان دوره نیز عبارت است از موجودی ابتدای دوره به‌علاوه‌ی میزان تولید در دوره‌ی جاری منهای امید ریاضی تقاضای ورودی. به‌کمک این آرمان می‌توان مقدار متغیرهای تصمیم‌گیری را به‌گونه‌یی تعیین کرد که مجموع امید ریاضی هزینه‌های نگه‌داری و کمبود در مرحله‌ی فعلی و هزینه‌ی انحراف از آرمان که در مرحله‌ی بعدی تولید تحمیل خواهد شد، کمینه شود.

برای مثال، برای تصمیم‌گیری درمورد میزان تولید فرض می‌کنیم که سطح موجودی ابتدای دوره برای تمام محصولات برابر صفر باشد. شکل‌های ۱۳ تا ۱۶ که با نرم‌افزار $Mathematica$۵٫۱ به‌دست آمد میزان هزینه‌های موجودی و کمبود را برای محصولات مختلف به‌ازای مقادیر مختلف تولید نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در ترسیم این نمودارها هریک از محصولات مستقل در نظر گرفته شده‌اند، ولی به‌علت استفاده از تجهیزات مشترک، این استقلال وجود ندارد (برخلاف مرحله‌ی اول که میزان تولید مفروض و ثابت بود). در گام بعدی وابستگی این مقادیر مورد توجه قرار می‌گیرد.

شکل‌های ۱۳ تا ۱۶ نشان می‌دهند که با افزایش میزان تولید یک محصول در یک دوره، هزینه‌ی موجودی افزایش و کمبود کاهش می‌یابد. معادلات مربوط به این نمودارها بسیار پیچیده‌اند و نمی‌توان آنها را به‌راحتی وارد مدل تصمیم‌گیری کرد. ولی ملاحظه می‌شود که این معادلات پیچیده، رفتاری یک‌نوا صعودی یا یک‌نوا نزولی دارند. به‌سادگی می‌توان این معادلات پیچیده را با توابع ساده‌یی که حداکثر از درجه‌ی ۳ هستند، جایگزین کرد تا رفتارهای این توابع برای تصمیم‌گیری، به‌طور مناسبی وارد مدل ریاضی شود.

برای ساده‌سازی معادلات پیچیده‌ی هزینه‌های کمبود و نگه‌داری، این معادلات به‌کمک توابع درجه ۳، با استفاده از تحلیل رگرسیون برآورد شده‌اند. ملاحظه می‌شود که برای تمامی توابع مقدار ضریب تعیین (R^2) بزرگ‌تر از ۰٫۹۹ است. برای $i = 1, \dots, 4$ توابع $F_I(I_i^S)$ رفتار منحنی هزینه‌ی کل ـ موجودی ابتدای دوره (شکل ۹ تا ۱۲)، و توابع $F_P(I_i^S)$ نیز رفتار منحنی هزینه‌ی کل ـ میزان تولید (شکل ۱۳ تا ۱۶) را تخمین می‌زنند.

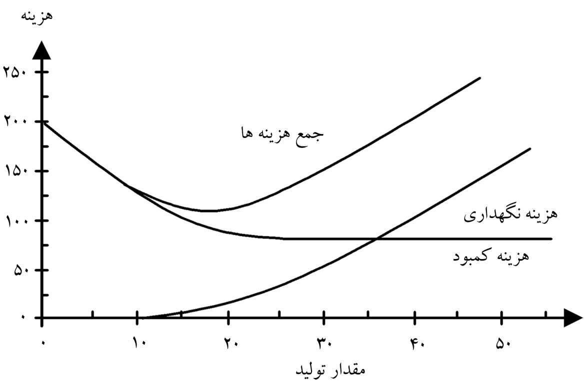
$$F_I(I_1^S) = -0.0084(I_1^S)^3 + 0.6094(I_1^S)^2 - 7.4874\, I_1^S + 59.23 \qquad R^2 = 0.9961 \qquad (25)$$

$$F_I(I_2^S) = -0.0071(I_2^S)^3 + 0.7665(I_2^S)^2 - 8.4571\, I_2^S + 97.711 \qquad R^2 = 0.9933 \qquad (26)$$

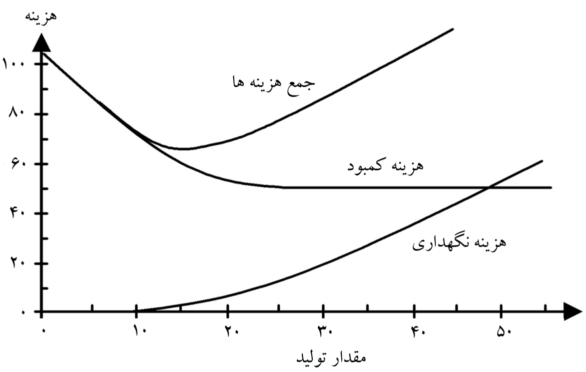
$$F_I(I_3^S) = -0.0361(I_3^S)^3 + 1.317(I_3^S)^2 + 0.7661\, I_3^S + 61.63 \qquad R^2 = 0.9929 \qquad (27)$$

$$F_I(I_4^S) = -0.0079(I_4^S)^3 + 0.666(I_4^S)^2 - 4.6717\, I_4^S + 94.875 \qquad R^2 = 0.9942 \qquad (28)$$

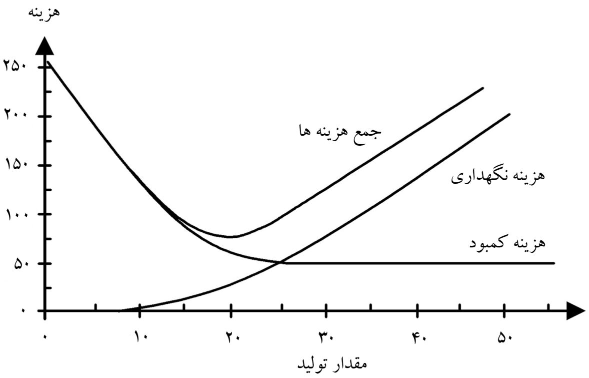
$$F_P(P_1) = -0.0036\, P_1^3 + 0.3231\, P_1^2 - 7.6224\, P_1 + 118.46 \qquad R^2 = 0.9900 \qquad (29)$$



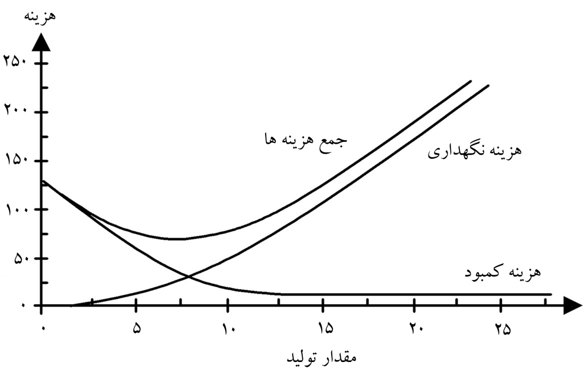
شکل ۱۳. نمودار هزینه ـ میزان تولید برای محصول ۱.



شکل ۱۴. نمودار هزینه ـ میزان تولید برای محصول ۲.



شکل ۱۵. نمودار هزینه ـ میزان تولید برای محصول ۳.



شکل ۱۶. نمودار هزینه ـ میزان تولید برای محصول ۴.

$$F_P(P_۲) = ۰٫۳۰۹۲\, P_۲^۲ - ۱۱٫۶۵۵\, P_۲ + ۲۰۷٫۸۳ \qquad R^۲ = ۰٫۹۹۲۶ \tag{۳۰}$$

$$F_P(P_۳) = -۰٫۰۲۵۵\, P_۳^۳ + ۱٫۵۴۳۵\, P_۳^۲ - ۱۸٫۹۶۴\, P_۳ + ۱۱۹٫۳۲ \qquad R^۲ = ۰٫۹۹۶۲ \tag{۳۱}$$

$$F_P(P_۴) = ۰٫۴۰۵۸\, P_۴^۲ - ۱۶٫۷۸۹\, P_۴ + ۲۶۱٫۱۱ \qquad R^۲ = ۰٫۹۹۷۱ \tag{۳۲}$$

به‌صورت ابتکاری، و به‌کمک توابع $F_I(I_i^S)$ می‌توان مقدار جریمه‌ی انحراف از آرمان را تعیین کرد. اگر امید ریاضی موجودی پایان دوره برابر I_i^F باشد، مقدار جریمه‌ی تخطی از آرمان آن عبارت است از: $F_G(I_i^F)$که مطابق رابطه‌ی ۳۳ محاسبه می‌شود:

$$F_G(I_i^F) = F_I(I_i^F) - F_I(I_i^{S*}) \qquad for \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \tag{۳۳}$$

چنان که اشاره شد موجودی بهینه‌ی ابتدای دوره (I_i^{S*}) متناظر با کمینه‌ی تابع $F_I(I_i^S)$ است؛ لذا تابع $F_G(I_i^F)$ همواره مثبت است و کم‌ترین مقدار آن برابر صفر است و زمانی رخ می‌دهد که $I_i^F = I_i^{S*}$ باشد.

تابع هدف مرحله‌ی دوم مدل عبارت است از هزینه‌های نگه‌داری و موجودی به‌علاوه‌ی هزینه‌های انحراف از آرمان، و برای این مثال عددی عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Min } T = \sum_{i=۱}^{m} F_P(P_i) + \sum_{i=۱}^{m} F_G(I_i^F) \\
&\textbf{Subject to:} \quad \sum_{i=۱}^{m} \beta_i P_i \le C_{Com} \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
&\qquad P_i \le C_i \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
&\qquad I_i^F = P_i + I_i^S - \lambda_i \frac{B_{Com} + A_{Com}}{۲} \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
&\qquad P_i \ge ۰ \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

با توجه به این‌که موجودی ابتدای دوره‌ی همه محصولات برابر صفر فرض شد، برای محدودیت سوم که آرمان مسئله را اعمال می‌کند، داریم:

$$I_۱^F = P_۱ + ۰ - ۱۳٫۵; \quad I_۲^F = P_۲ + ۰ - ۱۸; \quad I_۳^F = P_۳ + ۰ - ۹; \quad I_۴^F = P_۴ + ۰ - ۲۲٫۵ \tag{۳۵}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در توابع ۲۵ تا ۲۸ می‌توان این توابع را برحسب میزان تولید نوشت. با قراردادن توابع ۲۵ تا ۳۲ در مسئله‌ی ۳۴، مسئله‌ی ساده‌شده‌ی ۳۶ حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
\textbf{Min } T = {} & ۲۳۵۳٫۳۲ - ۳۶٫۱۶\, P_۱ + ۱٫۲۷\, P_۱^۲ - ۰٫۰۱\, P_۱^۳ - \\
& ۵۴٫۶۱\, P_۲ + ۱٫۴۶\, P_۲^۲ - ۰٫۰۰۷ P_۲^۳ - ۵۰٫۶۸\, P_۳ + ۳٫۸۴\, P_۳^۲ \\
& - ۰٫۰۶\, P_۳^۳ - ۶۳٫۴۳\, P_۴ + ۱٫۶۱\, P_۴^۲ - ۰٫۰۰۸\, P_۴^۳
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{Subject to:} \\
&۱٫۲\, P_۱ + ۱٫۵\, P_۲ + ۱٫۷\, P_۳ + ۲\, P_۴ \le ۱۱۰ \\
&P_۱ \le ۱۸ \\
&P_۲ \le ۲۵ \\
&P_۳ \le ۱۵ \\
&P_۴ \le ۳۰ \\
&P_۱, P_۲, P_۳, P_۴ \ge ۰
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

تابع هدف مسئله‌ی ۳۶، جمع هشت تابع ۲۵ تا ۳۲ منهای مقادیر ثابت $F_I(I_i^{S*})$ است، که همگی با توجه به شکل‌های ۹ تا ۱۶ محدب‌اند؛ از این‌رو می‌توان نتیجه گرفت که این تابع هدف نیز محدب است. از طرفی محدودیت‌ها همگی خطی‌اند، و لذا جواب به‌دست آمده برای این مسئله جواب بهینه‌ی عام مسئله خواهد بود. از طرفی با محاسبه‌ی ماتریس هشین این تابع درمی‌یابیم که اگر $۳۵ \le P_۱$، $۶۸ \le P_۲$، $۲۰ \le P_۳$ و $۶۷ \le P_۴$ باشد، این ماتریس اکیداً مثبت خواهد بود. ملاحظه می‌شود که این مقادیر در محدوده‌ی فضای موجه مسئله قرار دارند. این موضوع نیز مؤید بهینگی جواب به‌دست آمده برای مسئله‌ی ۳۶ است. بدیهی است که به‌علت تقریب‌ها و تخمین‌های صورت‌گرفته، این جواب‌ها جواب بهینه‌ی مسئله‌ی اصلی نیستند ولی به‌شدت به آن نزدیک‌اند. این جواب عبارت است از:

$$P_۱^* = ۱۸٫۰۰۰۰۰ \qquad P_۲^* = ۲۲٫۳۶۲۸۹ \qquad P_۳^* = ۸٫۲۴۴۲۳۲ \qquad P_۴^* = ۲۴٫۰۱۶۹۸ \tag{۳۷}$$

انتظار می‌رود درصورتی که محدودیت ظرفیت، جواب بهینه را محدود نکند، میزان تولید به‌گونه‌یی تعیین شود که امید ریاضی موجودی پایان دوره برابر با موجودی ابتدای دوره‌ی بهینه (I_i^{S*}) شود. برای محصول ۱، به‌دلیل این‌که تولید این محصول با محدودیت ظرفیت فرایندهای خاص مواجه شده است، این وضعیت رخ نداده است. ولی برای سایر محصولات با توجه به این‌که محدودیت ظرفیت فرایند مشترک نیز وجود نداشته، تولید به‌میزانی انجام شده که امید ریاضی موجودی پایان دوره برابر موجودی ابتدای دوره بهینه شود.

۵. نتیجه‌گیری

در این مطالعه یک مدل برنامه‌ریزی برای صنایع پردازشی (صنایع پتروشیمی) پیشنهاد، و فرض شد که نرخ ورود تقاضا از توزیع پواسون و زمان انجام فعالیت‌ها از توزیع یکنواخت تبعیت کند و فرایند تولید محصولات مختلف از دو سری فرایند به‌صورت مشترک و فرایندهای خاص، تشکیل شود. فرایندهای مشترک به‌دلیل اهمیت و زمان‌بر بودن، دوره‌ی تناوب یا تکرار تولید را معین می‌کنند.

با این فرضیات یک مدل دو مرحله‌یی ابتکاری ارائه شد تا به‌کمک آن در هر مرحله از تولید، ترکیب بهینه‌ی محصولات تعیین شود تا اولاً امید ریاضی هزینه‌های کمبود و موجودی حداقل شود و ثانیاً محدودیت‌های ظرفیت اعمال شود. به‌منظور کمینه‌سازی هزینه‌های کمبود و موجودی، در مرحله‌ی اول سطح بهینه‌ی موجودی ابتدای دوره برای هریک از محصولات تعیین شد. اگر موجودی ابتدای دوره‌ی محصولی برابر سطح بهینه باشد، امید ریاضی هزینه‌های موجودی و کمبود در آن دوره کمینه خواهد بود. از طرف دیگر، چون امید ریاضی موجودی پایان دوره نیز برابر موجودی ابتدای همان دوره خواهد شد و این مقدار مبین موجودی ابتدای دوره

مرحله بعدی تولید است، لذا بهینه‌شدن هزینه‌های دوره جاری را می‌توان به دوره‌های بعدی تسری داد. در مرحله‌ی دوم مشخص شد که در هر دوره از تولید، با توجه به موجودی دردست در ابتدای دوره، از هر محصول به چه میزان تولید شود تا امید ریاضی موجودی انتهای دوره برابر موجودی ابتدای دوره بهینه شود و مطابق آنچه که گفته شد، امید ریاضی رفتار موجودی و هزینه‌های آن در دوره‌ی بعدی تولید بهینه شود و نتایج آن به دوره‌های بعدی تولید تسری یابد. به‌اختصار، در مرحله‌ی اول تصمیم‌گیری یک روند کلی ایده‌آل برای سیستم تصویر شد که کمینه‌شدن هزینه‌ها در بلندمدت را مد نظر دارد. با توجه به تصادفی‌بودن برخی از پارامترها، انحراف از این روند ایده‌آل بدیهی است. در مرحله‌ی دوم تصمیم‌گیری سیستم درصدد رفع انحرافات احتمالی برمی‌آید.

لازم به‌ذکر است که جواب‌های به‌دست آمده برای زیرمسئله‌ها بهینه‌اند ولی در کل به‌علت تقریب‌ها و تخمین‌های صورت پذیرفته، جواب‌های بهینه‌ی کل سیستم نیستند بلکه به‌آن نزدیک‌اند. در این مقاله به‌علت نزدیکی زیاد جواب‌ها به جواب بهینه، و نیز برای اختصار عبارت «بهینه» جایگزین عبارت «بسیار نزدیک به بهینه» شده است.

برای اجرای این مدل از نرم افزارهای $Mathematica ۵/۱$، $Excel$ و $Lingo ۸/۰$ استفاده شد. به‌کارگیری مدل ساده است و این قابلیت را دارد تا برای هر واحد تولیدی یک بار به کارگرفته شود و نتایج حاصله به‌صورت جدول یا نمودار استخراج شوند. به‌کمک این جداول یا نمودارها می‌توان در هر مرحله از تصمیم‌گیری (دوره تناوب)، ترکیب بهینه‌ی تولیدات را به‌دست آورد.

محدودیت‌های ساده‌ی خطی، تابع هدف محدب و دقت محاسبات از قابلیت‌های این مدل است. از طرفی زمان انجام بسیاری از فرایندهای شیمیایی از توزیع‌های غیر خطی تبعیت می‌کنند. این مدل این قابلیت را دارد که به‌سادگی این نوع فرایندها را نیز در بر بگیرد.

روش پیشنهادی بسیار منعطف است و می‌توان سایر فرضیات و شرایط خاص سیستم را به‌راحتی در آن منظور کرد. برای مثال موارد ذیل برای تحقیقات بعدی پیشنهاد می‌شود: دوره‌ی تناوب سیستم را فرایند دیگری به‌غیر از فرایند مشترک تعیین می‌کند؛ امکان تولید همه‌ی محصولات در تمامی مراحل وجود ندارد؛ امکان انبارش مواد پردازش شده وجود دارد؛ زمان پردازش از توزیع غیر خطی وابسته به حجم تولید تبعیت می‌کند؛ همراه با محصول اصلی، محصولات همزاد نیز تولید می‌شوند؛ زمان حمل و نقل در برنامه‌ریزی تولید منظورمی‌شود؛ زمان آماده‌سازی/راه اندازی وجود دارد.

پانوشت

1. APICS dictionary
2. successive linear programming

منابع

1. Pantel, C.A., Haro, L.B., and Baudet, P. "A two-stage methodology for short-term batch plant scheduling: discrete-event simulation and genetic algorithm"; Laboratoire de Génie chimique (2000).
2. Floudas, C.A., and Lin, X.; "Continuous-time versus discrete-time approaches for scheduling of chemical processes: a review", *Computers and Chemical Engineering,* **28**, pp. 2109–2129 (2004).
3. Jia, Z., and Ierapetritou, M. "Efficient short-term scheduling of refinery operations based on a continuous time formulation", *Computers and Chemical Engineering,* **28**, pp. 1001-1019 (2004).
4. Kelly, J.D. "on the formulation of petroleum and petrochemical planning optimization models", Honeywell Hi-Spec Solutions, 300 Yorkland Blvd., Toronto, Ontario, Canada (2003).
5. Mendez, C.A., and Grossmann, I.E. "Optimization techniques for blending and scheduling of oil-refinery operations", *Department of Chemical Engineering-Carnegie Mellon University Pittsburgh, USA* (2004).
6. Pinto, J.M.; Joly, M., and Moro, L.F.L. "Planning and scheduling models for refinery operations", *Computers and Chemical Engineering,* **24**, PP. 2259-2276 (2000).
7. Rajaram, K., and Karmarkar, U.S. "Product cycling with uncertain yields: analysis and application to the process industry", Decision, Operations, and Technology Management, The Anderson School, University of California at Los Angeles (2001).
8. Schulz, C., and Engell, S. "Scheduling of a multi-product polymer batch plant", Process Control Group, University of Dortmund, Germany (1996).
9. Yin, K.K.; Liu, H., and Yin, G.G. "Stochastic models and numerical solutions for production planning with applications to the paper industry", *Computers and Chemical Engineering,* **27**, pp. 1693-1706 (2003).
10. Sambasivan, M., and Yahya, S. "A lagrangean-based heuristic for multi-plant, multi-item, multi-period capacitated lot-sizing problems with inter-plant transfers", *Computers and Operations Research,* **32**, pp. 537-555 (2005).

پیوست

قضیه: بین معادلات ۳ و ۴ رابطه‌ی ۵ صادق است که در آن K_i ثابت است و با توجه به پارامترهای مسئله محاسبه می‌شود.

$$E(B_{i(0,A_i)}) = K_i + \frac{\pi_i}{h_i}E(H_{i(0,A)}) \qquad for \qquad i=1,...,m \qquad (5)$$

اثبات: معادله‌ی ۳ را می‌توان چنین نوشت:

$$E(H_{i(0,A_i)}) = h_i \int_0^{A_i} (\sum_{X_i^t=0}^{I_i^S} (I_i)\frac{(t\lambda_i)^{X_i^t} e^{-\lambda t}}{X_i^t!})dt - h_i$$
$$\int_0^{A_i}(\sum_{X_i^t=0}^{I_i^S} X_i^t \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!}dt \qquad for \qquad i=1,...,m \qquad (38)$$

با انجام عملیات ریاضی مشابه برای معادله‌ی ۴ داریم:

$$E(B_{i(0,A_i)}) = \pi_i \int_0^{A_i} \sum_{X_i^t=I_i^S+1}^{\infty} X_i^t \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!}dt - \pi_i$$
$$\int_0^{A_i} \sum_{X_i^t=I_i^S+1}^{\infty} I_i \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!}dt \qquad for \qquad i=1,...,m \qquad (39)$$

از طرفی با توجه به خواص توزیع پواسون و میانگین آن داریم:

$$\sum_{X_i^t=I_i+1}^{\infty} X_i^t \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!} + \sum_{X=0}^{I_i} X_i^t \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!}) =$$
$$E(X_i^t) = t\lambda_i \qquad (40)$$

$$\sum_{X_i^t=I_i+1}^{\infty} I_i \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!} + \sum_{X_i^t=0}^{I_i} I_i \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!}) =$$
$$E(I_i) = I_i \qquad (41)$$

با توجه به معادلات ۳۹ و ۴۰ داریم:

$$\sum_{X_i^t=I_i+1}^{\infty} X_i^t \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!} = t\lambda_i - \sum_{x_i^t=0}^{I_i} X_i^t \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!}) =$$
$$for \qquad i=1,...,m \qquad (42)$$

$$\sum_{X_i^t=I_i+1}^{\infty} I_i \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!} = I_i - \sum_{X_i^t=0}^{I_i} I_i \frac{(t\lambda_i)^{X_i^t}e^{-\lambda t}}{X_i^t!}) =$$
$$for \qquad i=1,...,m \qquad (43)$$

با جایگذاری معادلات ۴۱ و ۴۲ در معادله‌ی ۳۸ و اعمال انتگرال بر روی آن و نیز با توجه به معادله‌ی ۳۷ نتیجه می‌شود:

$$E(B_{i(0,A_i)}) = \pi_i \int_0^{A_i} (t\lambda_i - I_i^S)dt + \frac{\pi_i}{h_i}E(H_{i(0,A_i)})$$
$$for \qquad i=1,...,m \qquad (44)$$

همانطورکه ملاحظه می‌شود $\pi_i(\frac{\lambda_i A_i^2}{2} - I_i^S A_i)$ ترکیبی از پارامترهای سیستم و موجودی ابتدای دوره است.