مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
مرداد ۱۳۸۸، شماره‌ی چهل و نهم، ص. ۴۷-۵۵

ارائه‌ی مدلی برای تخمین کارایی براساس تکنیک تحلیل پوششی داده‌های تصادفی با اوزان فازی

مقصود امیری (استادیار)
دانشکده‌ی مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبایی
علی یعقوبی (کارشناس ارشد)
حمیدرضا مشاط‌زادگان (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین
جمشید صالحی صدقیانی (دانشیار)
دانشکده‌ی مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبایی

تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی است مبتنی بر استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی برای ساخت سطح یا مرز غیرپارامتری به‌صورت خط شکسته بر فراز داده‌ها، که از این مرز برای محاسبه‌ی کارایی نسبی استفاده می‌شود. در این نوشتار برای ارزیابی کارایی واحدها مدلی ارائه شده که با در نظر داشتن مزایای استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[1] سعی در رفع مهم‌ترین مشکلات آن ـ عدم امکان تخمین کارایی، توزیع غیرواقعی اوزان به ورودی‌ها و خروجی‌های مدل و تعدد شعب کارا ـ دارد. مدل ارائه‌شده در این نوشتار (مدل تحلیل پوششی داده‌های آینده‌نگر با اوزان فازی) به‌منظور واردسازی تأثیرات تصادفی عوامل محیطی بر ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تحت بررسی، به‌هنگام تخمین کارایی و همچنین اعمال اوزان فازی بر آنها، مبتنی است برتکنیک تحلیل پوششی داده‌های تصادفی ($SDEA$)[2] با اوزان فازی، که نقاط ضعف مذکور را مرتفع خواهد ساخت. در پایان به‌منظور درک بهترِ مدل پیشنهادی، ضمن حل یک مثال عددی، صحت مدل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تحلیل پوششی داده‌های تصادفی، تحلیل پوششی داده‌های آینده‌نگر، کارایی، اوزان فازی.

mg_amiri@ie.sharif.edu
aliygi8041@yahoo.com
hamid_00936@yahoo.com
salehisadaghiyani@yahoo.com

۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین وظایف مدیران سازمان‌ها، کنترل و ارزیابی عملکرد واحدهای سازمان است. از مهم‌ترین ابزارهای مقایسه‌ی کارایی نسبی این واحدها می‌توان به استفاده از یک رویکرد کمی، دقیق و توان‌مند به‌نام «تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها» اشاره کرد. این تکنیک نه‌تنها در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده، بلکه درکمک به مدیریت، برای شناخت دقیق‌تر واحدهای تحت مدیریتش مطرح است. همچنین این روش که امروزه در تعیین کارایی و ارزیابی عملکرد سازمان‌ها، به‌ویژه مؤسسات خدماتی کاربرد گسترده‌یی یافته است، از نواقص عمده‌یی نیز برخوردار است که ازمهم‌ترین این مشکلات می‌توان به عدم امکان پیش‌بینی کارایی، توزیع غیرواقعی اوزان به ورودی‌ها و خروجی‌های مدل، و تعدد شعب کارا اشاره کرد. از این رو با وارد کردن تأثیرات تصادفی عوامل محیطی بر ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تحت بررسی هنگام تخمین کارایی، می‌توان از یک مدل ریاضیِ مبتنی بر مدل تحلیل پوششی داده‌های تصادفی ($SDEA$) بهره برد. همچنین به‌منظور رفع مشکل عدم توزیع غیرواقعی اوزان بر روی ورودی‌ها و خروجی‌ها، می‌توان از نظر کارشناسان در محدودکردن اوزان ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده کرد. اما از آنجا که نظر کارشناسان به‌صورت دقیق و قطعی نیست، استفاده از اوزان فازی در سنجش اندازه‌ی کارایی و محدودکردن اوزان ورودی‌ها و خروجی‌ها به نظر مطلوب می‌رسد.

سازمان‌دهی این نوشتار عبارت است از: در بخش ۲ بررسی ادبیات موضوع و تحقیقاتِ صورت‌یافته در این زمینه ارائه شده است. در بخش ۳ نیز تعاریف و اصطلاحات مورد استفاده در نوشتار، و در بخش ۴ تعریف مسئله ارائه شده است. در بخش ۵ مدل پیشنهادی معرفی شده است و در بخش‌های ۶ و۷ به‌ترتیب به حل یک مثال عددی به‌منظور بررسی صحت مدل ارائه شده و نتیجه‌گیری از مباحث مطرح شده در این نوشتار پرداخته‌ایم.

۲. مرور ادبیات

تحقیقات انجام شده در ارتباط با اوزان ورودی‌ها و خروجی‌ها در DEA محدود بوده و از مهم‌ترین آنها می‌توان به مقالات دایسون و تاناسولیس[1] در سال ۱۹۸۸،

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۴/۳، داوری ۱۳۸۶/۱۱/۲۱، پذیرش ۱۳۸۷/۲/۱۰.

چارنز و همکارانش[۲] در سال ۱۹۸۹، رول و گولونی[۳] در سال ۱۹۹۳، و جهانشاه‌لو و همکاران[۴] در سال ۱۹۹۷ اشاره کرد.

در روش‌های ارائه‌شده در بررسی‌های فوق از داده‌های معین و قطعی استفاده شده‌است، در حالی که در واقعیت با داده‌های غیرقطعی و نادقیق مواجه هستیم. ساعتی و همکارانش (۲۰۰۳) برای به‌دست آوردن مجموعه‌یی مشترک از وزن نهاده‌ها و ستاده‌های فازی روشی ارائه کرده‌اند. آنها ابتدا مدل خود را برای داده‌های قطعی پیشنهاد، و سپس آن را برای داده‌های فازی توسعه دادند.[۵]

در سال ۱۹۵۹چارنز و کوپر برنامه‌ریزی با محدودیت‌های تصادفی را برای اولین‌بار در زمینه‌ی «تحقیق در عملیات» وارد کردند. آنها به‌همراه رودز بحث تحلیل پوششی داده‌ها را در سال ۱۹۷۸ برای محاسبه‌ی کارایی بیان کردند.[۶]

برنامه‌ریزی محدود شده به قیود تصادفی یک روش بسیار مهم و مفید در برنامه‌ریزی تصادفی است که در سال ۱۹۵۹ توسط چارنز و کوپر به‌منظور در نظر گرفتن مفاهیم آماری ـ ازجمله متغیرهای تصادفی و خطاهای اندازه‌گیری آنها در برنامه‌ریزی خطی ـ مطرح شد.

در سال ۱۹۸۲ سنگوپتا و همکارانش مدل‌های DEA تصادفی را مطرح کردند.[۷] به‌عبارت دیگر، این محققان برای نخستین‌بار مدل‌تحلیل پوششی داده‌ها را با برنامه‌ریزی با محدودیت‌های تصادفی (CCP)[۳] تلفیق، و از مدل‌های تصادفی به‌دست آمده برای تخمین کارایی و در نظرگرفتن خطای اندازه‌گیری متغیرهای ورودی و خروجی استفاده کردند.

در سال ۱۹۹۳ لند و همکارانش مدل مشهور LLT[۴] را مطرح کردند.[۸] آنها در این مدل هر دو محدودیت فرم پوششی مدل CCR[۵] را به‌عنوان متغیرهایی تصادفی در نظر گرفتند. پس از مطرح شدن مدل LLT، کوپر و همکارانش طی مقاله‌یی در سال ۱۹۹۶، با به‌کارگیری رضایت‌بخشی سایمون مدلی جدید مطرح کردند. این مدل جدید تلفیق مفهوم تصمیم‌گیری رضایت‌بخشی با مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با محدودیت‌های تصادفی $(CCDEA)$[۶] است.[۹]

فتی و جکسون در سال ۲۰۰۱ با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های تصادفی به تخمین کارایی در بازار آزاد پرداختند.[۱۰] کوپر و همکارانش در سال ۲۰۰۲ با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی محدودیت‌های تصادفی به تجزیه و تحلیل کارایی تکنیکی پرداختند.[۱۱] هوانگ و همکارانش در سال ۲۰۰۴ نیز مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌های تصادفی و برنامه‌ریزی محدودیت تصادفی را مطرح کردند.[۱۲]

در سال ۲۰۰۶ نیز آخرین مدل مطرح‌شده در زمینه‌ی $SDEA$ ارائه شد. در این مدل با به‌کارگیری مفاهیم مطرح شده در مدل BCC[۷] و فرض تصادفی‌بودن ورودی‌ها و خروجی‌ها و توزیع نرمال برای آنها، مدل تصادفی BCC خروجی‌گرا مطرح شد.[۱۳]

۳. تعاریف و اصطلاحات

۱.۳. مفاهیم پایه در تحلیل پوششی داده‌ها

مدل تحلیل پوششی داده‌ها، یکی از روش‌های سنجش کارایی شناخته‌شده و مورد استفاده در ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری مشابه است.

واحد تصمیم گیرنده (DMU): یک واحد سازمانی مجزا است که توسط مدیر، رئیس یا مسئول اداره می‌شود و دارای فرایندی نظام‌مند است.

داده: ورودی‌های یک سازمان را داده یا نهاده گویند.

ستاده: خروجی‌های یک سازمان را ستاده یا ستانده گویند.

مدل اولیه‌ی $DEA-CCR$:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & E_k = \sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rk} \\
st: & \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ik} = 1 \\
& \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij}} \le 1 \qquad j = 1, \dots, n \\
& u_r, v_i \ge 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

در رابطه‌ی ۱ j بیان‌گر تعداد واحدهای تحت ارزیابی، i تعداد ورودی‌ها و r تعداد خروجی‌های مدل است. همچنین نمادهای v_i و u_r بیان‌گر وزن‌هایی است که به هریک از ورودی‌ها و خروجی‌ها اختصاص می‌یابد. x_{ik} و y_{rk} نیز به‌ترتیب بیان‌گر iامین ورودی و rامین خروجی مربوط به واحد تصمیم‌گیری kام است. همچنین E_k بیان‌گر کارایی واحد kام یعنی واحد تحت بررسی، و محدودیت‌های مطرح‌شده بیان‌گر نسبت خروجی‌های مجازی به ورودی‌های مجازی است؛ این نسبت برای هر واحد تصمیم‌گیری نباید بیشتر از ۱ شود.[۶]

۲.۳. مروری بر نظریه‌ی اعداد فازی[۱۴و۱۵]

۱.۲.۳. برش α مجموعه‌ی فازی A

برش α مجموعه‌ی فازی A عبارت است از مجموعه‌ی قطعی A_α، که عناصری از مجموعه‌ی جهانی X را شامل می‌شود؛ عناصر این مجموعه دارای درجه‌ی عضویتی بزرگ‌تر یا مساوی مقدار مشخص α هستند. در واقع:

$$A_\alpha = \{x | \mu(x) \ge \alpha, x \in X\}$$

مجموعه‌ی فازی A را محدب گویند، اگر وتنها اگر هریک از برش‌های α آن یک مجموعه‌ی محدب باشد.

$$\mu(\lambda r + (1-\lambda)s) \ge \min[\mu(r), \mu(s)] \quad \lambda \in [0, 1], r, s \in R^n$$

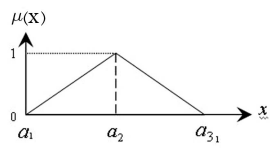
۲.۲.۳. عدد فازی مثلثی

یک عدد فازی مثلثی را به‌وسیله‌ی سه‌تایی مرتب مانند $A = (a_1, a_2, a_3)$ می‌توان نشان داد که تابع عضویت آن به‌صورت شکل ۱ می‌باشد.

۳.۳. تحلیل سلسله‌مراتبی گروهی

در تحلیل سلسله‌مراتبی گروهی، مقایسات زوجی به‌ازاء یک تصمیم‌گیرنده انجام می‌پذیرد، ولی گاهی ممکن است در یک تصمیم‌گیری بخواهیم به جای یک تصمیم‌گیرنده نظرات چندین تصمیم‌گیرنده را در نظر بگیریم. در این مورد از تصمیم‌گیری

$$
\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ (x-a_1)/(a_2-a_1) & a_1 \le x \le a_2 \\ (a_3-x)/(a_3-a_2) & a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & x > a_3 \end{cases}
$$



شکل ۱. عدد فازی مثلثی $A = (a_1, a_2, a_3)$.

گروهی می‌توان استفاده کرد که در آن ماتریس D، ماتریس مقایسات زوجی چندین تصمیم‌گیرنده خواهد بود. عناصرماتریس $D(a'_{ij})$ مطابق رابطه‌ی ۲ محاسبه می‌شوند:

$$(a'_{ij}) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_{ijk}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad k = 1, 2, ..., n \qquad i \neq j \qquad (2)$$

که در آن n تعداد تصمیم گیرندگان، k شماره‌ی تصمیم گیرنده‌ی kام و a_{ijk} نشان‌دهنده‌ی ترجیح عنصر iام به عنصر jام است که توسط تصمیم گیرنده‌ی kام ارزش‌گذاری شده است.[۱۶]

۴. تعریف مسئله

چنان‌که پیش‌تر مطرح شد، از مهم‌ترین مشکلات روش تحلیل پوششی داده‌ها، عدم امکان تخمین کارایی، توزیع غیرواقعی اوزان به ورودی‌ها وخروجی‌های مدل، و تعدد شعب کارا پس از حل روش مذکور است. هدف این تحقیق ارائه‌ی مدلی است که ضمن رفع مشکلات فوق، تأثیرات تصادفی عوامل محیطی بر ورودی‌ها و خروجی‌ها را در نظر بگیرد و با اعمال میزان درجه‌ی ارجحیت کارشناسان نسبت به هریک از ورودی‌ها و خروجی‌ها، موجب کاهش تعداد شعب کارا و درنتیجه افزایش قدرت تفکیک‌پذیری بین کارایی واحدها شود، و همچنین مشکل گذشته‌نگر بودن این روش را حل کند و تخمین کارایی واحدها را در یک دوره‌ی پیش‌بینی انجام دهد.

۵. مدل پیشنهادی

۱.۵. مدل DEA آینده‌نگر

برای تشریح مدل DEA آینده‌نگر فرض کنید که تعداد n واحد تصمیم‌گیرنده (DMU)[۸] وجود دارد که کل مجموعه‌ی آن با حرف j نشان داده می‌شود. کارایی هر DMU، یعنی به‌کارگیری m ورودی برای تولید s خروجی و در مقایسه با سایر DMUها مشخص می‌شود. همچنین فرض بر این است که تمام DMUها دارای بردارهای ورودی و خروجی‌اند و تمام اجزای این بردارها نیز مثبت‌اند. نکته‌ی قابل توجه این‌که در این مدل‌برنامه‌ریزی آینده تحت شرایطی است که ورودی‌ها را به‌عنوان متغیرهای تصمیم کنترل می‌کنیم ولی قادر به کنترل برخی از خروجی‌ها نخواهیم بود، چراکه مقادیر آنها بستگی به عوامل خارجی ـ همچون شرایط کلان اقتصادی، تغییرات مردم‌شناختی و دیگر عوامل اقتصادی ـ اجتماعی ـ دارد. بدین‌ترتیب ورودی‌ها به‌عنوان مقادیری قطعی، و خروجی‌ها به‌عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. برای تشریح ساختار تحلیلی، مدل اولیه‌ی DEA آینده‌نگر را با استفاده از مدل قطعی DEA (رابطه‌ی ۱) اثبات می‌کنیم.

مدل اولیه‌ی DEA آینده‌نگر:

$$\begin{aligned} Max \quad & E(E_k = \sum_{r=1}^{s} u_r \widehat{y}_{rk}) \\ & st: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\ & P_r[\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \widehat{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq \beta_j] \geq 1 - \alpha_j \qquad j = 1, ..., n \\ & u_r, v_i \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

در رابطه‌ی ۳، P_r بیانگر احتمال و $\widehat{y}_{rj}$ یک متغیر تصادفی است. β_j نیز یک مقدار تجویزی از ۰ تا ۱۰۰٪ و بیانگر سطح کارایی مورد انتظار واحد تصمیم گیرنده‌ی jام است. مقدار α_j به‌عنوان ریسک‌پذیری تصمیم گیرنده در نظر گرفته می‌شود؛ به‌عبارت دیگر $(1 - \alpha_j)$ بیانگر احتمال دست‌یابی به سطح مطلوب β_j است.

بنابر آنچه بیان شد، می‌توان اظهار داشت تابع هدف و صورت کسر در محدودیت دوم رابطه‌ی ۳ به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر است که حالت غیرخطی به خود می‌گیرد.

فرمول‌بندی مجدد مدل DEA آینده‌نگر:

می‌توان به‌یقین بیان داشت که رابطه‌ی ۳ مربوط به‌مدل DEA آینده‌نگر برای ایجاد سهولت در محاسبات مدل، نیازمند فرمول‌بندی مجدد است. لذا محدودیت رابطه‌ی ۳ را به‌صورت رابطه‌ی ۴ بازنویسی می‌کنیم:

$$P_r \left\{ \sum_{r=1}^{s} u_r \widehat{y}_{rj} \leq \beta_j (\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}) \right\} \geq 1 - \alpha_j \qquad (4)$$

حال اگر از طرفین نامعادله مقدار $\sum u_r \overline{y}_{rj}$ کسر و بر $\sqrt{V_j}$ تقسیم شود، خواهیم داشت:

$$P_r \left\{ \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r (\widehat{y}_{rj} - \overline{y}_{rj})}{\sqrt{V_j}} \leq \frac{\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj}}{\sqrt{V_j}} \right\} \geq 1 - \alpha_j \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} & E(\sum u_r \widehat{y}_{rj}) = \sum u_r \overline{y}_{rj} \\ & Var(\sum u_r \widehat{y}_{rj}) = V_j \end{aligned} \qquad (6)$$

که در آن‌ها، $\overline{y}_{rj}$ بیانگر ارزش مورد انتظار و V_j بیانگر واریانس مربوط به واحد تصمیم گیرنده‌ی jام است .

$$\widehat{z}_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r (\widehat{y}_{rj} - \overline{y}_{rj})}{\sqrt{V_j}} \qquad j = 1, ..., n \qquad (7)$$

در صورت قبول فرض نرمال برای توزیع احتمال متغیر تصادفی $\widehat{y}_{rj}$ می‌توان چنین استنباط کرد که متغیر $\widehat{z}_j$ از توزیع نرمال استاندارد تبعیت می‌کند. با جایگذاری رابطه‌ی ۷ در رابطه‌ی ۵، به رابطه‌ی کلی ۸ دست می‌یابیم:

$$P_r \left\{ \widehat{z}_j \leq \frac{\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj}}{\sqrt{V_j}} \right\} \geq 1 - \alpha_j \qquad (8)$$

در اینجا نیز $\widehat{z}_j$ از توزیع نرمال پیروی می‌کند. معکوس‌شده‌ی رابطه‌ی ۸ عبارت است از:

$$\frac{\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj}}{\sqrt{V_j}} \geq F^{-1}(1 - \alpha_j), \quad j = 1, ..., n \qquad (9)$$

در اینجا وجود F بیانگر به کارگیری تابع توزیع تجمعی براساس توزیع نرمال و F^{-1} نشان‌گر تابع معکوس آن است. مدل آینده‌نگر DEA با جایگزین‌کردن رابطه‌ی ۴ در

رابطه‌ی ۹ به‌دست می‌آید؛ براین اساس شکل کلی رابطه‌ی ۹ عبارت خواهد بود از:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & E(\sum_{r=1}^{s} u_r \widehat{y}_{rk}) \\
& st: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj} \geq \sqrt{V_j} F^{-1}(1-\alpha_j), j = 1, ..., n \\
& u_r \geq 0 \ , r = 1, ..., s \ , v_i \geq 0 \ , i = 1, ..., m
\end{aligned} \qquad (10)
$$

با این حال رابطه‌ی ۱۰ همچنان دو مشکل محاسباتی دارد:

الف) تابع تولید به‌وسیله‌ی ارزش انتظاری ازکل مقدار $\sum_{r=1}^{s} u_r \widehat{y}_{rk}$ بیان می‌شود؛

ب) یکی از محدودیت‌ها شامل واریانس (v_j) است که به‌وسیله‌ی یک عبارت درجه دوم فرموله می‌شود.

برای استخراج یک رابطه‌ی برنامه‌ریزی خطی از رابطه‌ی ۱۰، فرض می‌کنیم که مقدار یک متغیر تصادفی $\widehat{y}_{rj}$ که درمورد تمام ستاده‌ها صدق می‌کند، از رابطه‌ی ۱۱ به‌دست می‌آید:

$$\widehat{y}_{rj} = \overline{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta \ , r = 1, ..., s \ , j = 1, ..., n \qquad (11)$$

در اینجا $\overline{y}_{rj}$ عبارت است از مقدار منتظره از خروجی jام (میانگین) و b_{rj} عبارت از انحراف معیار آن مقدار است. ζ نیز بیانگر یک متغیر تصادفی است که از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 پیروی می‌کند. تحت این مفروضات مقدار V_j مطابق رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Var(\widehat{y}_{rj}) = Var(\overline{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta) \\
& Var(\widehat{y}_{rj}) = b_{rj}^2 \sigma^2 \\
& V_j = Var(\widehat{y}_j) = (\sum_{r=1}^{s} u_r b_{rj} \sigma)^2
\end{aligned} \qquad (12)
$$

از ادغام معادلات ۱۰ و ۱۲ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
Max \ & E(\sum_{r=1}^{s} u_r \widehat{y}_{rk}) \\
& st: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj} \geq (\sum_{r=1}^{s} u_r b_{rj} \sigma) F^{-1}(1-\alpha_j), \\
& j = 1, ..., n \\
& u_r \geq 0 \ , r = 1, ..., s \ , v_i \geq 0 \ , i = 1, ..., m
\end{aligned} \qquad (13)
$$

چنان که پیش‌تر نیز اشاره شد، $\widehat{y}_{rj} = \overline{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta$؛ بنابراین می‌توانیم تابع هدف رابطه‌ی ۱۳ را چنین بازنویسی کنیم:

$$
\begin{aligned}
& Max \ E(\sum_{r=1}^{s} u_r \widehat{y}_{rk}) = E(\sum_{r=1}^{s} u_r (\overline{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta)) = \\
& E(\sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rk} \pm \sum_{r=1}^{s} u_r b_{rk} \zeta) = \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rk}
\end{aligned} \qquad (14)
$$

که در آن به‌علت این‌که ζ متغیری تصادفی با میانگین صفر و واریانس (σ^2) است، داریم:

$$E(\sum_{r=1}^{s} u_r b_{rk} \zeta) = 0$$

مدل نهایی DEA آینده‌نگر:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rk} \\
& st: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i (\beta_j x_{ij}) - \sum_{r=1}^{s} u_r \{\overline{y}_{rj} + b_{rj} \sigma F^{-1}(1-\alpha_j)\} \geq 0, \\
& j = 1, ..., n \\
& u_r \geq 0 \ , r+1, ..., s \ , v_i \geq 0 \ , i = 1, ..., m
\end{aligned} \qquad (15)
$$

۱.۱.۵. پیش‌بینی خروجی‌ها در مدل DEA آینده‌نگر

روشی که در این نوشتار برای تخمین متغیرهای خروجی مورد استفاده قرار گرفت، روش پیش‌بینی کیفی براساس تکنیک $PERT/CPM$ است که غالباً در مباحث برنامه‌ریزی وکنترل پروژه مورد استفاده قرار می‌گیرد.[۲] در پیش‌بینی مقادیر خروجی‌های تصادفی به‌منظور استفاده از مدل آینده‌نگر DEA، محاسبه‌ی $\overline{y}_{rj}$ (مقادیر انتظاری خروجی‌ها) و b_{rj} (انحراف معیار مربوط به برآورد خروجی‌های تصادفی) ضرورت می‌یابد. برای تعیین $\overline{y}_{rj}$ و b_{rj} به‌منظور تخمین خروجی‌ها (تخمین $\widehat{y}_{rj}$) مطابق این روش، نیازمند بررسی سه نوع حالت از تخمین خروجی‌ها است که براین اساس پرسش‌نامه‌هایی برای تخمین خروجی‌ها بین تصمیم‌گیرندگان توزیع می‌شود و در نهایت با محاسبه‌ی میانگین نظرات ارائه‌شده، در سه حالت خوش‌بینانه (OP_{rj})، بدبینانه (PE_{rj}) و محتمل (ML_{rj}) به‌صورت مقادیری مشخص و واحد تهیه می‌شوند.[۱۷]

- (ML_{rj}) عبارت است از نزدیک‌ترین تخمین مقدار $\widehat{y}_{rj}$ به واقعیت؛
- (OP_{rj}) مقدار خروجی ممکن اما با احتمال وقوع کم و تحت شرایطی که همه‌چیز خوب پیش برود. بنابراین، این حالت به‌عنوان تخمینی از حد بالای توزیع احتمال مورد بررسی قرار می‌گیرد؛
- (PE_{rj}) مقدار ستاده‌ی ممکن اما با وقوع احتمال کم و تحت شرایطی است که همه‌چیز بد پیش برود؛ بنابراین، این حالت به‌عنوان تخمینی از حد پایین توزیع احتمال مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ارزش انتظاری خروجی‌ها در این روش مطابق رابطه‌ی ۱۶ است:

$$\overline{y}_{rj} = (OP_{rj} + 4ML_{rj} + PE_{rj})/6 \qquad (16)$$

واریانس درونی $\widehat{y}_{rj}$ نیز از رابطه‌ی ۱۷ محاسبه خواهد شد:

$$b_{rj}^2 = (OP_{rj} - PE_{rj})^2/36 \qquad (17)$$

۲.۵. مدل DEA آینده‌نگر با اوزان فازی

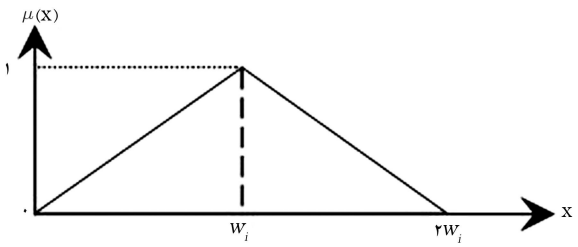
مسئله‌ی ضعف قدرت تفکیک، زمانی رخ می‌دهد که تعداد واحدهای تحت ارزیابی در مقایسه با مجموع تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌طور معنی‌داری بزرگ نباشند.

اعمال وزن برای ورودی‌ها و خروجی‌ها سبب افزایش قدرت تفکیک مدل می‌شود (البته مشرط بر این‌که اعمال وزن سبب غیرموجه شدن مدل نشود). هر اندازه اوزان ورودی‌ها و خروجی‌ها محدودتر باشند، میزان کارایی که با استفاده از مدل‌های ریاضی کسب می‌کنند کم‌تر خواهد بود، و بنابراین قدرت تفکیک مدل افزایش می‌یابد. به‌علاوه، اعمال تقریبی اوزان برای ورودی‌ها و خروجی‌ها سبب می‌شود تا واحد تحت بررسی نتواند با اعمال وزن بیشتر به خروجی‌هایی که به‌طور قابل ملاحظه‌یی تولید می‌کند (و بالعکس) و اعمال وزن بسیارکم به ورودی‌هایی که از آنها بسیار زیاد مصرف می‌کنند (و بالعکس)، کارایی خود را به‌طور نامعقولی زیاد نشان دهد. همچنین مدیریت ممکن است وزن‌دهی صورت‌گرفته توسط مدل را قبول نداشته و برای بعضی از ورودی‌ها و خروجی‌ها ـ از لحاظ تأثیر برکارایی ـ اهمیت خاصی قائل باشد. برای حل این مشکل و در جهت لحاظ داشتن اولویت‌های ذهنی مدیریت، به محدودسازی اوزان پرداخته می‌شود.

در برخی از تحقیقات به‌عمل آمده، برای تعیین اهمیت نسبی اوزان در تعیین کارایی واحدهای تصمیم‌گیری، و با استفاده از روش تحلیل سلسله‌مراتبی گروهی، اوزان متغیرها به‌دست آورده شده است. برای در نظرگرفتن نظر کارشناسان با استفاده از این روش (رابطه‌ی ۲) وزن‌هایی برای ورودی‌ها و خروجی‌های مدل به‌دست آمده و با فرض این‌که کم‌ترین وزن تخصیص داده‌شده به هریک از ورودی‌ها و خروجی‌های مدل برابر صفر باشد و بیشترین وزن آن نیز برابر با دو برابر اوزان داده شده به هریک از آنها باشد، می‌توان آن را به‌صورت یک عدد فازی مثلثی نمایش داد. مثلاً وزن ورودی iام در مدل به‌جای عدد قطعی w_i (که با استفاده از تحلیل سلسله‌مراتبی گروهی به‌دست آمده است) به‌صورت عدد فازی مثلثی $(۰, w_i, ۲w_i)$ بیان می‌شود (شکل ۲).

اگر اوزان فوق را در مدل قرار دهیم، میزان کارایی قطعی هر واحد با در نظرگرفتن نظر کارشناسان به‌دست می‌آید. اما از آنجا که با قراردادن این اوزان در مدل، ممکن است مسئله به صورتی غیر موجه تبدیل شود، برای اوزان به‌دست آمده‌ی فوق باید یک ناحیه‌ی اطمینان در نظرگرفت. ولی با توجه به این که نمی‌توان دریافت مسئله در چه منطقه‌ی اطمینانی موجه است، بهتر است یک دامنه‌ی وسیع را به‌عنوان منطقه‌ی اطمینان در نظرگرفت، که این منطقه با تغییر مقدار α تغییر خواهد کرد. به‌عبارت دیگر، هرچه مقدار α به ۱ نزدیک‌تر باشد، کارایی محاسبه شده قطعی‌تر و نظر کارشناسان دقیق‌تر اعمال می‌شود و هرچه مقدار α به صفر نزدیک‌تر باشد، کارایی محاسبه‌شده فازی‌تر است و نظر کارشناسان در بازه وسیع‌تری از اوزان لحاظ می‌شود. به‌عنوان مثال برای ورودی iام(v_i)، از برش α ، مطابق رابطه‌ی ۱۸ استفاده می‌شود:

$$w_i - w_i(۱-\alpha) \le v_i \le w_i + w_i(۱-\alpha) \qquad (۱۸)$$



شکل ۲. عدد فازی مثلثی.

با ساده‌کردن محدودیت کران‌دار فوق می‌توان آن را به‌صورت دو محدودیت نوشت:

$$v_i \ge w_i\alpha$$
$$v_i \ge ۲w_i - w_i\alpha \qquad (۱۹)$$

به‌طور مشابه، برای خروجی‌ها (با در نظرگرفتن وزن خروجی rام به‌عنوان w'_r، که با استفاده از تحلیل سلسله‌مراتبی گروهی به‌دست آمده است) داریم:

$$u_r \ge w'_r\alpha$$
$$u_r \le ۲w'_r - w'_r\alpha \qquad (۲۰)$$

علت دیگر استفاده از اوزان فازی در سنجش اندازه‌ی کارایی این است که اگر اوزان فازی و تقریبی کارشناسان را به‌صورت اوزان قطعی و معین تبدیل و وارد مدل کنیم، مدل غیرموجه خواهد شد. این در حالی است که با فازی‌شدن اوزان ورودی‌ها و خروجی‌ها در یک بازه مشخص، انعطاف‌پذیری مدل بیشتر شده و احتمال غیرموجه شدن مدل کاهش می‌یابد.

حال با اضافه‌کردن محدودیت‌های فوق به مدل DEA آینده‌نگر، مدل جدیدی به نام مدل DEA آینده‌نگر با اوزان فازی تعریف می‌شود که عبارت است از:

$$\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{r=۱}^{s} u_r\overline{y}_{rk} \\
st: & \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ik} = ۱ \\
& \sum_{i=۱}^{m} v_i(\beta_j x_{ij}) - \sum_{r=۱}^{s} u_r\{\overline{y}_{rj} + b_{rj}\sigma F^{-۱}(۱-\alpha_j)\} \ge ۰, \\
& j = ۱, ..., n \\
& v_i \ge w_i.\alpha \\
& v_i \le ۲w_i - w_i.\alpha \\
& u_r \ge w'_r\alpha \\
& u_r \le ۲w'_r - w'_r\alpha \\
& u_r \ge ۰ \ , r = ۱, ..., s \ , v_i \ge ۰ \ , i = ۱, ..., m
\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

در حل مدل، ابتدا مقدار α را معادل ۱ در نظرگرفته، و مدل را حل می‌کنیم. اگر مقدار کارایی یکی از واحدهای مورد بررسی ناموجه شد، مقدار α را کاهش داده $(\alpha = ۰/۹)$ و مجدداً آن را حل می‌کنیم. با این کار ضمن افزایش دامنه‌ی انتخاب اوزان پارامترها، احتمال غیرموجه شدن مدل کاهش می‌یابد، ولی عیب آن این است که نظر کارشناسان به‌طور دقیق اعمال نمی‌شود. این کاهش مقدار α آن‌قدر ادامه می‌یابد تا هیچ واحدی غیرموجه نشود.[۱۸]

لازم به‌ذکر است مدل‌های به‌دست آمده‌ی فوق با فرض نرمال‌بودن داده‌های مدل (ورودی‌ها و خروجی‌ها) به اثبات رسیده و طبیعی است تغییر در توزیع تصادفی داده‌ها در روند اثبات مدل‌ها تأثیرگذار خواهد بود.

۶. مثال عددی

فرض کنید بانکی دارای ۱۰ شعبه است و مدیریت آن قصد دارد کارایی شعب خود را برای سال مالی آتی پیش‌بینی کند. لازم به‌ذکر است که در این سیستم،

جدول ۱. مقادیر ورودی‌های بودجه‌بندی شده و خروجی‌های نظرسنجی شده شعب.

کد شعبه	ورودی‌ها			خروجی‌ها					
	هزینه‌های اداری	هزینه‌های پرنسلی	هزینه اجاره	تسهیلات اعطایی $\widehat{y}_1$			خدمات بین بانکی $\widehat{y}_2$		
				OP	ML	PE	OP	ML	PE
۱	۲۴	۴۶	۲۹۸	۵۸۰۰	۵۰۲۷	۴۸۰۰	۴۱۰	۳۶۲	۳۰۰
۲	۲۵	۴۱	۲۹۵	۵۹۲۰	۴۹۷۲	۴۹۱۰	۴۳۰	۳۵۶	۳۱۰
۳	۳۲	۴۰	۳۰۰	۵۷۵۰	۵۰۱۹	۴۹۵۲	۴۲۱	۳۵۳	۳۲۰
۴	۳۳	۴۴	۳۰۵	۵۶۱۰	۵۰۸۳	۴۸۲۳	۴۱۲	۳۵۴	۳۱۳
۵	۲۷	۴۶	۲۹۶	۵۵۲۰	۵۰۸۸	۴۸۹۹	۴۱۸	۳۶۷	۳۰۴
۶	۲۱	۴۲	۲۹۷	۵۷۴۲	۵۰۱۰	۴۹۶۲	۴۲۹	۳۴۷	۳۱۰
۷	۱۹	۳۸	۳۰۱	۵۸۲۵	۵۰۱۷	۴۸۹۸	۴۳۲	۳۴۶	۳۱۷
۸	۲۲	۳۹	۲۹۲	۵۹۱۲	۴۹۷۰	۴۹۹۲	۴۰۹	۳۵۳	۳۲۶
۹	۲۴	۴۵	۲۹۴	۵۸۵۲	۴۹۹۴	۴۹۰۱	۳۹۹	۳۵۲	۳۰۹
۱۰	۲۰	۱۴	۳۰۶	۵۷۱۲	۵۰۳۱	۴۹۲۵	۴۱۵	۳۴۹	۳۱۱

ورودی‌های شعب ـ هزینه‌های پرسنلی، هزینه‌ی اداری و هزینه‌ی اجاره‌ی محل، با فرض استیجاری‌بودن مکان شعب ـ در پایان هر سال برای سال مالی آینده، در قالب نظام بودجه‌بندی، برنامه‌ریزی می‌شود. ولی درمورد خروجی‌های شعب (میزان تسهیلات اعطایی و گردش خدمات بین بانکی)، پیش‌بینی برمبنای تکنیک $PERT/CPM$ بااستفاده از مقادیر خروجی‌های هریک از شعبه‌ها در سال‌های مالی گذشته انجام می‌گیرد. ورودی‌های شعب و خروجی‌های تخمینی از سوی سرپرستی در قالب خوش‌بینانه‌ترین (OP)، محتمل‌ترین (ML) و بدبینانه‌ترین حالت (PE) به‌صورت اطلاعات ارائه شده در جدول ۱ است. مدیریت قصد دارد با تخمین کارایی هر شعبه برای سال مالی آینده، پیشاپیش اقدامات اصلاحی را در راستای بهبود کارایی مجموعه تحت مدیریتش انجام دهد. کارایی مورد انتظار سرپرستی (β) برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیری معادل ۱، و ریسک سرپرست شعب (α) برای تمامی واحدهای تصمیم گیری معادل ۵۰درصد است.

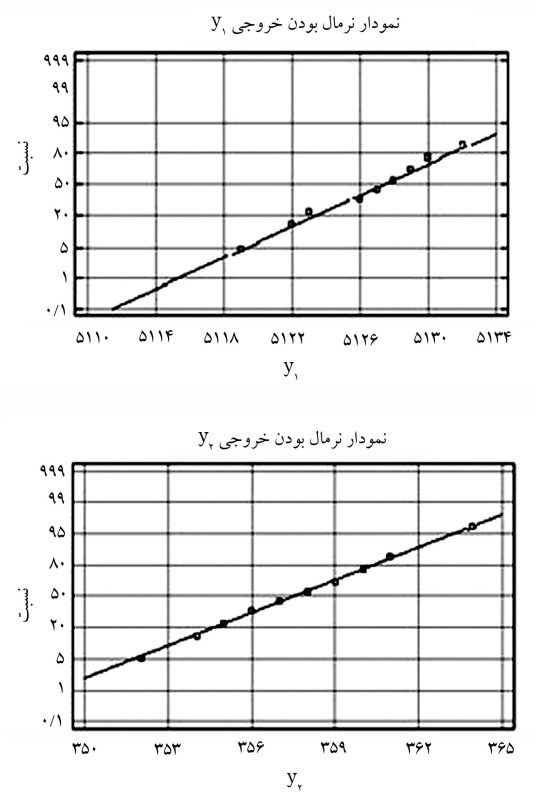
حل: تخمین کارایی با استفاده از مدل DEA آینده‌نگر

با توجه به این‌که ورودی‌های شعب به‌دلیل بودجه‌بندی انجام‌شده ثابت و قطعی‌اند، برای به‌دست آوردن مدلی که عوامل تصادفی در خروجی‌ها را در نظر بگیرد، از مدل DEA آینده‌نگر با تمرکز بر ورودی‌ها استفاده می‌کنیم، چرا که به‌دلیل ماهیت تصادفی و تأثیرگذاری عوامل محیطی، برنامه‌ریزی منطقی برای افزایش خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌تواند توسط این عوامل محیطی خنثی شود. لذا منطقی است که مدیریت به‌منظور افزایش کارایی هریک از واحدهای تصمیم‌گیرنده (شعب) به‌جای تمرکز بر افزایش خروجی‌های تصادفی بر کاهش ورودی‌های غیرتصادفی متمرکز شود. بنابراین مدل مورد استفاده ماهیتاً تمرکز بر کاهش ورودی‌ها، برای افزایش کارایی خواهد بود (حالت ورودی‌محور). ارزش انتظاری خروجی‌ها $(\bar{y}_{rj})$ و انحراف معیار درونی (b_{rj}) آنها با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) به شرح جدول ۲ می‌باشد.

از آنجا که مدل پیشنهادی مبتنی‌بر نرمال‌بودن خروجی‌ها است، لذا برای استفاده از مدل ابتدا باید نرمال‌بودن خروجی‌های شعب بررسی شوند که بدین‌منظور از نمودار «احتمال استاندارد» $(Normal\ Probability\ Plot)$ استفاده شده است.(شکل ۳) نمودارهای شکل ۳ حاکی از نرمال‌بودن خروجی‌های Y_2, Y_1 است.

جدول ۲. ارزش انتظاری خروجی ها و انحراف معیارهای خروجی‌های شعب.

کد شعبه	$\bar{y}_{1j}$	$\bar{y}_{2j}$	b_{1j}	b_{2j}
۱	۵۱۱۸	۳۶۰	۱۲٫۹	۴٫۲۸
۲	۵۱۲۰	۳۶۱	۱۲٫۹	۴٫۴۷
۳	۵۱۳۰	۳۵۹	۱۱٫۵	۴٫۱۰
۴	۵۱۲۸	۳۵۷	۱۱٫۴	۴٫۰۶
۵	۵۱۲۹	۳۶۵	۱۰٫۱	۴٫۳۵
۶	۵۱۲۴	۳۵۵	۱۱٫۴	۴٫۴۵
۷	۵۱۳۲	۳۵۶	۱۲٫۴	۴٫۳۷
۸	۵۱۳۱	۳۵۸	۱۲٫۳	۳٫۷۱
۹	۵۱۲۲	۳۵۳	۱۲٫۵۳	۳٫۸۷
۱۰	۵۱۲۷	۳۵۴	۱۱٫۴	۴٫۱۶



شکل ۳. نمودار نرمال بودن Y_2, Y_1.

جدول ۳. مقادیر کارایی شعب حاصل از مدل DEA آینده‌نگر.

کد شعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
کارایی	۱	۰/۹۷۸	۰/۹۸۹	۱	۱	۰/۹۷۲	۰/۹۸۶	۰/۹۶۰	۰/۹۸۴	۱

جدول ۴. اوزان خروجی‌ها.

خروجی‌ها	وزن ترجیحی(W_r^l)
تسهیلات اعطایی	۰/۵۶
خدمات بین بانکی	۰/۳۵

هستند. از آنجا که ζ متغیری تصادفی با میانگین صفر و واریانس (σ^2) است، به‌منظور سادگی محاسبات درحل مدل، ζ متغیر تصادفی استاندارد، درنظر گرفته شده است. از آنجا که ورودی‌های مدل ماهیت هزینه‌یی (منفی) و خروجی‌های آن ماهیت درآمدی (مثبت) دارند، لذا برای حل مدل ابتدا باید تمامی ورودی‌ها و خروجی‌ها را بی‌مقیاس کرد. بدین منظور از روش بی‌مقیاس‌سازی زیر استفاده شده است: ورودی‌های مدل استفاده شده است:

$$r_{ij} = \frac{MIN(X_{ij})}{X_{ij}} \quad i = ۱,۲,۳ \quad j = ۱,۲,...,۱۰;\ \forall i \qquad (۲۲)$$

X_{ij}: ورودی iام از شعبه jام.

مقادیر کارایی، برای مثال عدد مورد نظر با استفاده از مدل DEA آینده‌نگر به شرح جدول ۳ می‌باشد.

تخمین کارایی شعب با استفاده از مدل DEA آینده‌نگر با اوزان فازی

به‌منظور اطلاع از ترجیحات ذهنی کارشناسان درخصوص وزن هریک از خروجی‌ها، نسبت به تهیه‌ی پرسش‌نامه‌ی مقایسات زوجی و توزیع آن بین چهار نفر از معاونین هم‌رده‌ی سرپرستی بانک اقدام شد که در نهایت وزن ترجیحی هریک از خروجی‌ها با استفاده از روش تحلیل سلسله‌مراتبی گروهی (رابطه‌ی ۲) به‌صورت جدول ۴ دست می‌آید. برای هر کدام از خروجی‌ها محدودیت کران‌دار اوزان (با توجه به برش α) به‌صورت دو محدودیت نمایش داده می‌شود:

محدودیت‌های مربوط به‌خروجی اول ($\widehat{y}_1$)
$$\left.\begin{array}{l} u_1 \geq ۰/۵۶\alpha \\ u_1 \leq ۲ \times ۰/۵۶ - ۰/۵۶\alpha \end{array}\right\}$$

محدودیت‌های مربوط به‌خروجی دوم ($\widehat{y}_2$)
$$\left.\begin{array}{l} u_2 \geq ۰/۳۵\alpha \\ u_2 \leq ۲ \times ۰/۳۵ - ۰/۳۵\alpha \end{array}\right\}$$

با اجرای مدل DEA آینده‌نگر با اوزان فازی (رابطه ۲۱) (با در نظر گرفتن محدودیت‌های فوق) نتایج ذیل حاصل می‌شود:

مقادیر کارایی برای مثال عددی مورد نظر با استفاده از مدل DEA آینده نگر با اوزان فازی به شرح جدول ۵ می‌باشد. همان‌طورکه ذکرگردید، هرچه میزان α به عدد یک نزدیک‌تر باشد، نشان‌دهنده‌ی قطعی‌تر بودن مدل واعمال دقیق‌تر نظر خبرگان است. اما ممکن است با این مقدار، مدل سنجش کارایی برای تمام یا برخی از شعب

جدول ۵. مقادیر کارایی شعب حاصل از مدل DEA آینده‌نگر با اوزان فازی.

شعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
کارایی	۰/۹۹۴	۰/۹۷۰	۰/۹۸۵	۰/۹۹۲	۱	۰/۹۷۱	۰/۹۸۶	۰/۹۵۸	۰/۹۷۵	۰/۹۸

جدول ۶. مقایسه کارایی واقعی شعب با کارایی تخمینی و ضریب همبستگی بین آنها.

شعبه‌کد	تسهیلات اعطایی(y_1)	خدمات بین بانکی (y_2)	کارایی واقعی	کارایی تخمینی
۱	۵۱۳۲	۳۷۱	۰/۹۹۵	۰/۹۹۴
۲	۵۱۳۴	۳۷۲	۰/۹۷۱	۰/۹۷۰
۳	۵۱۴۴	۳۷۰	۰/۹۸۶	۰/۹۸۵
۴	۵۱۴۲	۳۶۸	۰/۹۹۶	۰/۹۹۲
۵	۵۱۴۳	۳۷۶	۱	۱
۶	۵۱۳۸	۳۶۶	۰/۹۷۲	۰/۹۷۱
۷	۵۱۴۶	۳۶۷	۰/۹۸۷	۰/۹۸۶
۸	۵۱۴۵	۳۶۹	۰/۹۵۹	۰/۹۵۸
۹	۵۱۳۶	۳۶۴	۰/۹۷۶	۰/۹۷۵
۱۰	۵۱۴۱	۳۶۵	۰/۹۸۹	۰/۹۸
ضریب همبستگی بین کارایی واقعی و کارایی تخمینی			۰/۹۷۹۱۸۲	

ناموجه شود. بنابراین در حل مدل ابتدا α را برابر یک گرفته و مدل حل می‌شود. اگر مقدار کارایی شعب بانک ناموجه گردید، مقدار α را تقلیل داده ($\alpha = ۰/۹$) و مجددا مدل حل می‌گردد. با این کار دامنه‌ی انتخاب اوزان پارامترها افزایش می‌یابد و از احتمال غیرموجه شدن مدل کاسته می‌شود، ولی عیب آن، این است که نظر خبرگان به طور دقیق اعمال نمی‌شود. این کاهش مقدار α آنقدر ادامه دارد تا جایی که کارایی هیچ واحدی غیرموجه نگردد. این حالت در این مثال با میزان ($\alpha = ۰/۹$) رخ داد. میزان کارایی شعب با حل این مدل و در سطح ($\alpha = ۰/۹$) در جدول ۵ آمده است. مقادیر کارایی برای مثال عددی مورد نظر با استفاده از مدل DEA آینده نگر با اوزان فازی به شرح جدول ۵ می‌باشد.

همان طورکه مشاهده می‌شود، تعداد واحدهای کارا با استفاده از این مدل کاهش یافته و فقط ۱ واحد کارا است که این نشان‌دهنده‌ی قدرت تفکیک بهتر این مدل نسبت به مدل ۱۵ است.

به‌منظور بررسی صحت نتایج به‌دست آمده از مدل ۲۱، به‌کمک خروجی‌های واقعی به‌دست آمده در پایان سال دوره تخمین کارایی، با استفاده از مدل کلاسیک تحلیل پوششی داده‌های ($DEA-CCR$) ورودی محور و اعمال نظر کارشناسان بانک (اوزان فازی (رابطه‌ی ۲۰))، کارایی واقعی شعب را به‌دست آورده و با کارایی تخمینی مورد مقایسه قرار می‌دهیم (جدول ۶). همبستگی بالای بین نتایج کارایی پیش‌بینی شده و کارایی واقعی، (توسط نرم افزار $Stat\,Graphics$) بیانگر صحت مدل ارائه شده وتوانایی بالای آن است.

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله شکل جدیدی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های تصادفی، برای پیش‌بینی کارایی تحت عنوان مدل DEA آینده‌نگر با اوزان فازی، ارائه شد. به‌طوری که از مهم‌ترین مشکلات DEA، یعنی عدم امکان تخمین کارایی، توزیع غیرواقعی اوزان به ورودی‌ها و خروجی‌های مدل را رفع می‌کند و با کاهش تعداد شعب کارا، قدرت تفکیک کارایی بین شعب را افزایش می‌دهد. در انتهای نوشتار به‌منظور بررسی صحت مدل ارائه‌شده به حل یک مثال عددی پرداخته شد، که در آن کارایی تخمینی با کارایی واقعی شعب مقایسه شد. همبستگی بالای بین نتایج حاکی از عملکرد و دقت بالای تخمینی مدل پیشنهادی است.

پانوشت

1. data envelopment analysis (DEA)
2. stochastic data envelopment analysis (SDEA)
3. chance constraint programming (CCP)
4. land, lovell, thore
5. charns, cooper, rouds
6. chance constraint data envelopment analysis
7. banker charnes cooper
8. decision making unit

منابع

1. Dyson R.G., and Thanassoulis, E. "Reducing weight flexibility in data envelopment analysis", *Journal of Operational Research Society,* **39**, pp. 563-576 (1988).
2. Charnes, A.; Cooper, W.W.; Wei, Q.L., and Huang, Z.M. "Cone-ratio data envelopment analysis and multiobjective programming", *Int. J. Syst. Sci.,* **20**, pp. 1099-1118 (1989).
3. Roll Y., and Golany, B. "Alternate methods of treating factor weights in DEA", *Omega,* **21**, pp. 99-109 (1993).
4. Jahanshahloo G.; Alirezaee, M.; Saati, S., and Mehrabian, S. "The role of bounds on multipliers in DEA; with an empirical study", *Journal of Sciences, Islamic Azad University,* **19**, pp. 331-347, (1997).
5. Saati S.; Memariani, A., and Jahanshahloo, G.R. "A procedure for finding a common set of weights in fuzzy DEA", Fuzzy Sets and Systems, forthcoming (2003).
6. Charns, C., and Rouds, K. "Data envelopment analysis", References and DEA solver software, Kluwer Academic Press (1978).
7. Sengupta, JK. "Stochastic programming," *International journal of system science,* **7**, pp. 822-835 (1982).
8. Land, K.; Lovell, C.A.K., and Thore, S. "Chance constrained data envelopment analysis," Managerial and decisional economics, 14, pp. 541-544 (1993).
9. Cooper, W.W.; Huang, Z.M., and Li, SX. "Satisfying DEA models under chance constraints," *Annals of operation research,* **66**, pp. 279-296 (1996).
10. Fethi, M.; Jackson, P., and Jones, W. "European airlines: a stochastic DEA study of efficiency with market liberalization," European workshop of efficiency and productivity analysis (2001).
11. Cooper, W.W.; Deng, H.; Huang, Z., and Li, SX. "Chance constrained programming approach to technical efficiencies", *Journal of the Operational Research Society,* **53**, PP 1347-1354 (2002).

12. Huang, Z.M., and SX, Li. "Chance constrained programming and stochastic DEA models," *Proceeding of the Decision Sciences Institute*, pp. 447-449 (2004).

13. Cooper, W.W.; Huang, Z.M.; Lelas, V.; Li, SX., and Olesen, OB. "Chance constrained programming formulations for stochastic characterizations of efficiency and dominance in DEA," *Journal of productivity analysis,* **9**, pp. 53-79 (2006).

14. POP, H.S. "Data analysis with Fuzzy sets: a short survey", Studio University babes-bolyai, informatica, **x1cx**(2) (2004).

15. Shavandi, H. Fuzzy Set Theory Application in Industrial Engineering and Management, first edition, Tehran: Publisher: Gostares olome paye (1385).

16. Azar, A. and Rajabzadeh, A. Applied Decision Making With MADM Approach, first edition, Tehran: Publisher: Negahe danesh (1381).

17. Sabzeparvar, M. Project Control, first edition, Tehran: Publisher: Khaniran (1381).

18. Lai Young-Jon, and Hwang ching-lai. "Fuzzy mathematical programming methods and applications," Springer-verlag (1992).