

طراحی یک نمودار کنترل بی نیاز از مدل برای پایش فرایندهای چندمتغیره خودهمبسته

رضا مروت‌دار (کارشناس ارشد)

سیدتقی اخوان‌نیاکی (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

برای پایش^۱ فرایندهای خودهمبسته^۲ یک متغیره و همچنین کنترل فرایندهای چندمتغیره نمودارهای زیادی ارائه شده است، ولی با وجود کاربرد نسبتاً فراوان، نمودارهای چندمتغیره در حالت خودهمبسته کم‌تر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این نوشتار با استفاده از روشی جدید به منظور کاهش خودهمبستگی مشاهدات، یک نمودار کنترل به نام نمودار میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده‌ی چندمتغیره ($MGBM$)^۳ برای پایش بردار میانگین فرایندهای چندمتغیره خودهمبسته ارائه می‌شود. نمودار کنترل پیشنهاد شده در زمره نمودارهای کنترل بی نیاز از مدل است که در آن پارامترها در حضور داده‌های اتورگرسیو برداری درجه‌ی اول بررسی، و پیشنهاداتی نیز برای تعیین مقدار بهینه‌ی آنها ارائه شده است. همچنین کارایی نمودار پیشنهادی در قالب متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل و خارج از کنترل و در حضور انحرافات مختلف در میانگین، بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی: کنترل کیفیت، فرایندهای چندمتغیره، خودهمبستگی، نمودار کنترل بی نیاز از مدل.

morovatdar@mehr.sharif.edu
Niaki@Sharif.edu

۱. مقدمه

نمودارهای کنترل یکی از مهم‌ترین ابزارهای کنترل فرایند آماری به شمار می‌آیند. این در حالی است که در ابتدا این نمودارها برای فرایندهای یک‌متغیره پیشنهاد شدند، اما در عمل بسیاری از فرایندها شامل بیش از یک متغیرند و دو یا چند مشخصه از محصول یا فرایند باید به‌طور هم‌زمان کنترل شوند. براین اساس، مطالعات فراوانی پیرامون نمودارهای کنترل چندمتغیره صورت گرفته و انواع مختلفی از آن - نظیر هتلینگ^۴ T^2 ، جمع تجمعی چندمتغیره ($MCUSUM$)^۴ و میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره ($MEWMA$)^۵ - ارائه شده‌اند. این نمودارها معمولاً بر دو فرض اصلی استوارند: «نرمال بودن» و «مستقل بودن مشاهدات حاصل از فرایند در طول زمان». به عبارت دیگر اولاً داده‌های تولید شده از یک فرایند در حالت کنترل به‌طور مستقل توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین μ و ماتریس واریانس - کواریانس Σ دارند و ثانیاً داده‌های فرایند در طول زمان مستقلاً توزیع شده‌اند. مهم‌ترین فرض در نمودارهای کنترل، فرض استقلال مشاهدات است. متأسفانه این فرض معمولاً در انواع زیادی از فرایندهای تولیدی نقض می‌شود. دو عامل اصلی مسبب به وجود آمدن خودهمبستگی در مشاهدات یک فرایند، اولین عامل، پیشرفت قابل ملاحظه‌ی فناوری اندازه‌گیری و جمع‌آوری داده است که سبب شده بازرسی بیشتر و در بعضی موارد بازرسی قطعه به قطعه صورت گیرد. با افزایش تعداد بازرسی‌ها زمان بین نمونه‌گیری‌ها کاهش یافته و خودهمبستگی داده‌ها افزایش می‌یابد.

از جمله‌ی این فرایندها می‌توان به فرایندهای تولید منقطع قطعات حساسی همچون کیت‌های الکترونیکی اشاره کرد. مثال دیگر صنایع با تکنولوژی بالاست. مثلاً در تولید فیبرهای نوری که تولید انبوه و دقیق دارند، میله‌های SiO_2 از طریق میعان گاز اکسیژن و سیلیکون تولید می‌شوند که در آن کنترل هم‌زمان دما، فشار و غلظت بسیار مهم است.^[۱] خروجی این نوع فرایندها معمولاً از یک مدل سری زمانی چندمتغیره ناشی می‌شوند.

عامل دوم به‌وجود آمدن خودهمبستگی، خصوصیات ذاتی برخی از فرایندهاست. در فرایندهای تولید پیوسته مانند فرایندهای شیمیایی، مشاهدات ناشی از فرایند، به دلیل خاصیت پیوسته بودن فرایند به شدت خودهمبسته‌اند. به بیان دیگر در فرایندهای تولید پیوسته برخلاف فرایندهای تولید گسسته تغییرات تصادفی در طول جریان تولید به تدریج محو می‌شوند. فرایندهای مشابهی در صنایع تولید مواد نیمه‌رسانا نیز وجود دارد. در این‌گونه فرایندها وابستگی بین متغیرها بسیار زیاد است و تجزیه و تحلیل چندمتغیره برای نمایش و کنترل فرایند لازم است. علاوه بر این این متغیرها نسبت به زمان و فاصله نیز وابستگی دارند که لزوم استفاده از نمودارهای خاص را برای این فرایندها مشخص می‌کند.

نمودارهای کنترل کیفیت یک‌متغیره که برای پایش یک مشخصه‌ی کیفی با خصوصیت خودهمبستگی پیشنهاد شده‌اند برای فرایندهای چندمتغیره خودهمبسته کارایی لازم را ندارند. در سال ۱۹۹۵، لوری و موتنگومری بر این باور بودند که: «با وجود اهمیت کاربردی زیاد موضوع کنترل فرایند چندمتغیره خودهمبسته، مطالعات اندکی در این باره گزارش شده است.»^[۲] به باور ما، برخی از انواع تصویرکردن متغیرهای

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۴/۱۱، داوری ۱۳۸۶/۸/۱۶، پذیرش ۱۳۸۶/۱۱/۱۰.

اصلی فرایند به ساختار نهفته^۶ آنها می‌تواند راه حل مناسبی برای این موضوع باشد.»

یکی از مشکلات توسعه‌ی روش جدید برای تحلیل فرایندهای چندمتغیره خودهمبسته، تولید داده‌های مناسب برای این کار است. مسترانجلو و فورست یک برنامه‌ی کامپیوتری به زبان C پیشنهاد داده‌اند که با استفاده از آن می‌توان به تولید داده‌های چندمتغیره‌ی برخوردار از یک مدل اتورگرسیو برداری^۷ نوع اول با انحراف در بردار میانگین اغتشاشات^۸ پرداخت. [۲] بدین ترتیب می‌توان از این داده‌ها به منظور مقایسه‌ی کارایی نمودارهای مختلف در تشخیص انحراف از معیار فرایند چندمتغیره خودهمبسته بهره جست. همچنین بیلر و نلسون به تولید مشاهدات چندمتغیره خودهمبسته برای استفاده در داده‌های ورودی شبیه‌سازی پرداخته‌اند. [۳] از این روش نیز مانند روش مسترانجلو و فورست می‌توان برای تولید داده‌های چندمتغیره خودهمبسته در نمودارهای کنترل استفاده کرد.

اولین تلاش‌ها برای توسعه‌ی نموداری به منظور کنترل مشاهدات چندمتغیره خودهمبسته توسط تودوسیو انجام شد. [۴] وی یک نمودار جمع‌تجمعی (MCUSUM) برای این منظور پیشنهاد داد. کارمارو و شمید نیز نموداری برای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره (MEWMA) به منظور نمایش فرایندهایی که از یک مدل سری زمانی چندمتغیره برخوردارند، ارائه کردند. [۴] کالگوندا و کولکارنی نیز نمودار کنترلی به نام نمودار Z معرفی کردند. [۵] این نمودار مبتنی است بر آزمون تقاطع متناهی تک‌مرحله‌بی^۹، که توسط تیم پیشنهاد شده است. [۸] خصوصیت اصلی نمودار Z این است که نه تنها حالت خارج از کنترل فرایند را تشخیص می‌دهد، بلکه به تعیین متغیرهایی که مسبب این امر بوده‌اند نیز کمک می‌کند.

جارت و پن نیز با معرفی یک نمودار کنترل به نام «نمودار اتورگرسیو برداری» سعی کرده‌اند که داده‌های چندمتغیره خودهمبسته را کنترل کنند. [۱] این نمودار ترکیبی از نمودار باقی‌مانده‌های یک‌متغیره برای فرایندهای خودهمبسته و نمودار چندمتغیره برای فرایندهای مستقل است و بر اساس تخمین مدل اتورگرسیو درجه p (AR(p)) و محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ها ساخته می‌شود. ایده‌ی اصلی در این تحقیق این است که با به دست آوردن تخمین بردار باقی‌مانده‌ها و محاسبه‌ی ماتریس واریانس - کواریانس آن می‌توان نمودار کنترل هلتینگ T^۲ را برای باقی‌مانده‌ها رسم کرد.

تحقیقات انجام‌شده در زمینه‌ی پایش فرایندهای خودهمبسته‌ی چندمتغیره، تماماً به توسعه‌ی نمودارهای کنترلی پرداخته‌اند که طراحی آنها وابسته به فرضی است مبنی بر این که مشاهدات از یک مدل سری زمانی ناشی می‌شوند (به اصطلاح نیازمند مدل‌اند). برای پایش فرایندهای خودهمبسته‌ی یک‌متغیره چند روش بی‌نیاز از مدل پیشنهاد شده است، [۹] اما تاکنون هیچ نمودار کنترلی بی‌نیاز از مدلی برای فرایندهای چندمتغیره معرفی نشده است. در این تحقیق با ایده‌گرفتن از نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل مرسوم در کنترل کیفیت یک‌متغیره - به خصوص نمودار کنترل میانگین‌های گروهی (معرفی شده توسط رانگر و ویلمین) [۱۰] - و نیز با انجام اصلاحاتی در این نمودارها، نمودار کنترلی به نام «نمودار کنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده چندمتغیره» (MGBM) [۱۱] ارائه می‌شود. خصوصیت اصلی این نمودار بی‌نیازی از تخمین مدل برای خودهمبستگی است.

در ادامه، ابتدا در بخش ۲ به معرفی روش‌های کاهش خودهمبستگی می‌پردازیم. سپس در بخش ۳ نمودار میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده طراحی می‌شود. بخش ۴ به ارزیابی کارایی نمودار پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی اختصاص دارد و در پایان (در بخش ۵) به نتیجه‌گیری مطالب ارائه‌شده خواهیم پرداخت.

۲. کاهش خودهمبستگی

تحقیقات مرسوم در طراحی نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل استفاده از روش‌هایی است که از خودهمبستگی بین داده‌ها می‌کاهد یا آن را از بین می‌برد. پیش‌درآمد اکثر این روش‌ها مطالعاتی است که در تحلیل ستاده‌های شبیه‌سازی برای تخمین فاصله‌ی اطمینان میانگین ستاده‌ها انجام شده است. این تحقیقات در تحلیل ستاده‌های شبیه‌سازی طی چهار دهه‌ی اخیر روش‌هایی مانند تکرارهای مستقل^{۱۱}، میانگین‌های گروهی^{۱۲}، آنالیز طیفی^{۱۳}، و اتورگرسیو^{۱۴} و غیره را در بر داشته‌اند. [۱۱] در این میان، روش میانگین‌های گروهی ساده‌تر از بقیه بوده و در عمل نیز کاربرد بیشتری پیدا کرده است.

الون و رادسون، با تولید گروه‌های کوچک یا متوسطی از داده‌ها، از پیشگامان استفاده از روش میانگین‌های گروهی در کنترل فرایند به‌شمار می‌روند. [۱۲] از آنجا که این گروه‌ها کاهنده‌ی خوبی برای اثر خودهمبستگی - به‌ویژه برای ضرایب خودهمبستگی بالا - نیستند بین گروه‌ها فاصله ایجاد کردند؛ به بیان دیگر تعداد ثابتی از مشاهدات بین هر دو گروه را از دامنه‌ی محاسبات حذف کردند. این محققین سپس با استفاده از میانگین‌های گروه‌های باقی‌مانده نمودارهای معمول کنترل را ترسیم کردند.

در ادامه، رانگر و ویلمین به این نتیجه رسیدند که به جای استفاده از گروه‌های کوچک و ایجاد فاصله بین این گروه‌ها، اگر از گروه‌هایی با اندازه‌ی بزرگ‌تر و بدون ایجاد فاصله استفاده شود نتایج بهتری به دست خواهد آمد. [۱۰] در روش الون و رادسون از مشاهدات استفاده‌ی بهینه نمی‌شود. زیرا داده‌ها که ارزش زیادی دارند، در این روش به دور ریخته می‌شوند. روش رانگر و ویلمین نیز نیازمند تعداد زیادی مشاهده در درون هر گروه است که با افزایش ضریب خودهمبستگی نیز بر تعداد مشاهده‌ی مورد نیاز افزوده خواهد شد. [۱۰] بنابراین از پیش قابل تشخیص است که این روش در برخورد با انحرافات متوسط و بزرگ در میانگین فرایند چندان کارآمد نخواهد بود.

در اکثر روش‌های کاهش خودهمبستگی، در صورتی که ضریب خودهمبستگی کم‌تر از ۰/۱ باشد، فرض بر این است که خودهمبستگی وجود ندارد و مشاهدات مستقل از هم هستند. الون با بررسی تأثیر خودهمبستگی بر نمودارهای شوهارت، و نیز با استفاده از تجربه‌ی عملی بیان کرد که اگر ضریب خودهمبستگی با تأخیر ۱ در حدود ۰/۱ باشد به نمودار شوهارت استاندارد آسیب جدی نمی‌رسد. [۱۳] هدف این تحقیق این است که با استفاده از گروه‌هایی با اندازه‌ی کوچک و بدون حذف هیچ داده‌ی اثر خودهمبستگی رفع شود تا بتوان نمودارهای کنترل معمول را برای میانگین گروه‌ها رسم کرد. در این روش به جای آنکه سعی شود ضریب خودهمبستگی با تأخیر ۱ کاهش یافته و به ۰/۱ برسد از ضرایب خودهمبستگی با تأخیرهای بالاتر نیز استفاده می‌شود.

۳. نمودار گروه‌های دسته‌بندی شده برای کنترل میانگین

اگر X_1, X_2, \dots, X_n بردار مشاهدات به‌دست آمده از یک فرایند چندمتغیره‌ی خودهمبسته باشد، با تقسیم این مشاهدات به k گروه که هر گروه دارای b مشاهده است ($n = bk$) بردار میانگین گروه نام به صورت رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود.

$$Y_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b X_{(i-1)b+j} \quad (1)$$

میانگین‌های گروهی هر دسته کم‌تر شود تخمین‌های انجام‌گرفته از مدل بر مبنای این دسته، نادقیق‌تر خواهد بود. بنابراین توصیه می‌شود که تعداد دسته از یک حد بالای از پیش تعیین شده تجاوز نکند. با تعیین اندازه‌ی گروه و تعداد دسته می‌توان مقدار l را نیز محاسبه کرد.

برای تعیین پارامترهای مجهول یادشده (اندازه‌ی گروه و تعداد دسته) از یک روش ابتکاری جدید استفاده می‌شود. بدین ترتیب که ابتدا یک حد بالا برای تعداد دسته در نظر گرفته می‌شود. سپس حداقل اندازه‌ی گروه چنان در نظر گرفته می‌شود که تعداد دسته در آن از حد بالای تعداد دسته بیشتر نشود و نیز خودهمبستگی با تأخیر ۱ برای هر یک از متغیرهای درون هر دسته کم‌تر از 0.1 باشد. به بیان دیگر، رعایت ۳ عامل اصلی در تعیین پارامترهای مجهول ضروری است: ۱. خودهمبستگی درون هر دسته کم‌تر از 0.1 باشد؛ ۲. از کم‌ترین تعداد مشاهده‌ی ممکن در هر گروه استفاده شود؛ ۳. تعداد دسته‌های تعیین شده از حد بالای تعداد دسته تجاوز نکند.

گروه نمودار کنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده (MGBM) با استفاده از همه‌ی روش‌های معمول در کنترل فرایند چندمتغیره برای مشاهدات منفرد قابل ترسیم است، ولی نمودار کنترل هتلینگ T^2 برای مشاهدات منفرد، به دلیل کاربرد فراگیر و سادگی نسبی، برای این منظور پیشنهاد می‌شود. [۱۴] آماره‌ی هتلینگ از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید:

$$D^T = (Y_i - \bar{X})^T \sum_{i=1}^k (Y_i - \bar{X}) \quad (4)$$

که در آن Y_i بردار میانگین گروه i ام ($i = 1, 2, \dots, k$)، \bar{X} بردار میانگین کلی فرایند، و \sum تخمین ماتریس واریانس - کواریانس فرایند است. برای ترسیم نمودار کنترل پیشنهادی می‌توان از میانگین هر گروه به عنوان یک مشاهده‌ی تکی استفاده کرد و برای به دست آوردن تخمین \sum از روش هلمز و مرگن به شرح زیر برای هر دسته استفاده می‌شود. [۱۵] بر این اساس ابتدا بردار نفاضل دو مشاهده‌ی متوالی برای دسته‌ی j ام $j = 1, 2, \dots, m$ محاسبه می‌شود.

$$v_{j,h} = Y_{mh+j} - Y_{m(h-1)+j} = Z_{j,h+1} - Z_{j,h}, \quad h = 1, 2, \dots, l-1$$

سیس بردارهای $v_{j,h}$ به دست آمده برای دسته‌ی j ام $j = 1, 2, \dots, m$ در یک ماتریس V_j جمع می‌شوند.

$$V_j = [v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,l-1}]^T$$

آنگاه تخمین \sum_j برای هر یک از دسته‌ها مطابق رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود.

$$\sum_j = \frac{1}{2} \frac{V_j^T V_j}{(l-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

بدین ترتیب تخمین ماتریس واریانس - کواریانس بردارهای تکی (میانگین‌های گروهی) عبارت خواهد بود از:

$$\sum = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_j \quad (6)$$

با استفاده از تخمین واریانس - کواریانس و استفاده از آماره‌ی D^T در رابطه‌ی ۴، نمودار کنترل گروه‌های دسته‌بندی شده چندمتغیره طراحی می‌شود که در آن حدود کنترل همان حدود کنترل نمودار هتلینگ T^2 در نظر گرفته می‌شود.

رابطه‌ی ۱ توسعه‌ی روش میانگین‌های گروهی تک‌متغیره به حالت چندمتغیره برای مقابله با خودهمبستگی است. حال اگر Y_1, Y_2, \dots, Y_k بردار میانگین‌های گروهی به دست آمده از رابطه‌ی ۱ باشد، روش میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده با تعریف m دسته طبق رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{دسته ۱: } & Y_1, Y_{m+1}, \dots, Y_{m(l-1)+1} \\ \text{دسته ۲: } & Y_2, Y_{m+2}, \dots, Y_{m(l-1)+2} \\ & \vdots \\ \text{دسته } m: & Y_m, Y_{2m}, \dots, Y_{ml} \end{aligned} \quad (2)$$

در این روش میانگین‌های گروهی به m دسته تقسیم می‌شوند که هر دسته شامل l میانگین گروه است ($k = ml$). به بیان دیگر، هر b مشاهده از n مشاهده‌ی اولیه تشکیل یک گروه می‌دهند و پس از میانگین‌گیری در هر گروه، هر l میانگین گروه نیز تشکیل یک دسته می‌دهند تا بدین ترتیب m دسته حاصل شود ($n = bk = blm$). رابطه‌ی ۲ را می‌توان به صورت یک ماتریس $m \times l$ که هر سطر آن بیان‌گر یک دسته است نمایش داد. در این صورت رابطه‌ی ۳ نوع دیگری از نمایش دسته‌بندی میانگین‌های گروهی خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} Y_1 & \dots & Y_{m(l-1)+1} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_m & \dots & Y_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m,1} & \dots & Z_{m,l} \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن $Z_{i,j}$ میانگین گروه j ام ($j = 1, 2, \dots, l$ و $i = 1, 2, \dots, m$) است و $Z_{i,j} = Y_{m(j-1)+i}$.

هرچند خودهمبستگی با تأخیر ۱ ممکن است بین میانگین‌های گروه‌های Y_1, Y_2, \dots, Y_k قابل توجه باشد ولی خودهمبستگی با تأخیر m یا بیشتر یقیناً کم‌تر است و با افزایش m کاهش می‌یابد. حال m به گونه‌ی تعیین می‌شود که خودهمبستگی با تأخیر m در سری میانگین‌های گروهی Y_1, Y_2, \dots, Y_k کم‌تر از 0.1 باشد. از آنجا که میانگین‌های گروهی به m دسته تقسیم می‌شوند، خودهمبستگی با تأخیر m در سری میانگین‌های گروهی Y_1, Y_2, \dots, Y_k معادل خودهمبستگی با تأخیر ۱ در میانگین‌های گروهی درون هر دسته $Z_{i,1}, Z_{i,2}, \dots, Z_{i,l}$ است. چنانچه خودهمبستگی میانگین‌های گروه‌ها در هر دسته از مقدار 0.1 کم‌تر باشد می‌توان از هر کدام از دسته‌ها برای تخمین انحراف معیار میانگین فرایند استفاده کرد.

باید توجه داشت که رابطه‌ی ۱ فقط حالتی خاص از رابطه‌ی ۲ پیشنهادی است که در این تحقیق مطرح شده است. به بیان دیگر توسعه‌ی روش میانگین‌های گروهی (توصیه‌شده توسط رانگر و ویلمین) به حالت چندمتغیره، حالت خاصی از روش میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده چندمتغیره در این تحقیق است.

با ثابت در نظر گرفتن تعداد مشاهدات ($n = blm$)، پارامترهای مجهول در روش میانگین‌های گروهی مشتمل است بر اندازه‌ی گروه (b)، اندازه‌ی دسته (l) و تعداد دسته (m). افزایش اندازه‌ی گروه موجب افزایش یافتن تعداد مشاهدات به کار رفته برای محاسبه‌ی میانگین هر گروه شده و در نتیجه به کاهش خودهمبستگی بین میانگین‌های گروهی Y_1, Y_2, \dots, Y_k می‌انجامد. همچنین زیاد شدن تعداد دسته‌ها به افزایش فاصله‌ی بین میانگین‌های گروهی هر دسته می‌انجامد و بنابراین با در نظر نگرفتن تعداد بیشتری میانگین گروهی در بین هر دو میانگین گروه در هر دسته، خودهمبستگی نیز کاهش بیشتری می‌یابد. باید دقت کرد که افزایش بسیار زیاد تعداد دسته موجب می‌شود که تعداد میانگین‌های گروهی به کار رفته در هر دسته (یا به صورت معادل تعداد مشاهده‌ی به کار رفته در هر دسته) کاهش یابد، و هرچه تعداد

۴. کارایی نمودار MGBM

ابزارهای اندازه‌گیری مختلفی برای ارزیابی کارایی نمودارهای کنترل پیشنهاد شده است. مشهورترین این ابزارها متوسط طول دنباله (ARL) است که مبتنی بر توزیع طول دنباله است. در ادامه، کارایی نمودار کنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده برای پایش میانگین یک فرایند چندمتغیره‌ی خودهمبسته، با استفاده از این ابزار و به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو برآورد می‌شود.

برای به دست آوردن متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترل $MGBM$ از مشاهدات یک مدل سری زمانی اتورگرسیو برداری درجه اول $VAR(1)$ استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۷):

$$X_{t+1} = \xi + \Phi(B)X_t + \varepsilon_t \quad (7)$$

که در آن X_t برای $t = 1, 2, \dots, n$ سری بردارهای مشاهدات خودهمبسته برای دو متغیر خودهمبسته‌ی X_1 و X_2 ، ξ بردار میانگین فرایند، $\Phi(B)$ ماتریس ضریب اتورگرسیو درجه اول و ε_t برای $t = 1, 2, \dots, n$ بردارهای مستقل تصادفی با میانگین صفر و ماتریس واریانس - کواریانس Σ است. از آنجا که حالت‌های مختلفی برای مدل $VAR(1)$ وجود دارد و ماتریس‌های واریانس - کواریانس و اتورگرسیو متفاوتی را می‌توان برای این مدل تعریف کرد، در این تحقیق کارایی نمودار $MGBM$ فقط برای یک حالت خاص با استفاده از شبیه‌سازی تخمین زده می‌شود. در این حالت یک فرایند $VAR(1)$ در نظر گرفته شده که در آن بردار میانگین برابر صفر، ماتریس واریانس - کواریانس برابر I ، و سه ماتریس ضریب اتورگرسیو درجه‌ی اول به صورت‌های $\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ در سه حالت خودهمبستگی

کم، متوسط و زیاد برای دو متغیر خودهمبسته‌ی X_1 و X_2 تعریف می‌شود. برای روش پیشنهادی، نتایج متوسط طول دنباله و انحراف استاندارد آن برای هر یک از این حالات به ترتیب در جداول ۱، ۲ و ۳ آورده شده است.

در این جداول حدود کنترل با استفاده از ۱۰۰۰ گروه از مشاهدات به دست آمده و سپس به کمک این حدود و با استفاده از ۱۰۰ طول دنباله، متوسط طول دنباله محاسبه شده است. برای انجام مقایسه‌ی ARL خارج از کنترل بین حالات مختلف فرایند که به‌ازاء تغییرات میانگین فرایند برحسب ضریبی از انحراف استاندارد تعیین شده، سعی شده است که ARL تحت کنترل در مقدار 370.4 ثابت شود. برای این منظور با انجام ۵۰۰۰ بار تکرار در محاسبه‌ی ARL برای مقادیر مختلف پارامترهای نمودار کنترل، این مقادیر به‌گونه‌ی ثابت در نظر گرفته شده‌اند که ARL تحت کنترل معادل 370.4 باشد. پس از تعیین پارامترهای نمودار کنترل، ARL خارج از کنترل با استفاده از ۱۰۰ بار تکرار محاسبه شده است.

برای حالتی که حد بالای تعداد دسته برابر ۱ است، یعنی همان حالت گروهی کردن مشاهدات برای رفع خودهمبستگی (توسعه‌ی روش توصیه‌شده‌ی رانگرو و بلمین برای حالت چندمتغیره)، خطای نوع اول بسیار بالا است و عملاً نمودار کنترل $MGBM$ را در این حالت ناکارآمد می‌سازد. تعداد دسته‌ی ۱ برای انحرافات کوچک کاراتر از بقیه است و تعداد دسته‌ی ۲ برای انحرافات بزرگ، کارایی متوسط طول دنباله (ARL) بیشتر است. همچنین با افزایش ضریب اتورگرسیو درجه‌ی اول کارایی نسبی نمودار کنترل $MGBM$ در تشخیص انحرافات کوچک افزایش می‌یابد. بنابراین از آنجا که تعداد دسته‌ی ۱ دارای خطای نوع اول زیادی است استفاده از آن مقدر نیست (مگر آن‌که ARL تحت کنترل افزایش چشمگیری پیدا کند) و برای

جدول ۱. ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM برای $\Phi(B) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$

ضریب اتورگرسیو	انحراف در X_1	انحراف در X_2	حد بالایی تعداد دسته=۱	حد بالایی تعداد دسته=۲	حد بالایی تعداد دسته=۳
	۰	۰	۳۷۶٫۹۳	۳۶۷٫۷۲	۳۶۹٫۷۳
	۰٫۵	۰٫۵	۸۵٫۱۴	۱۳۰٫۰۱	۱۲۸٫۷۷
	۱	۱	۱۴٫۷۴	۲۹٫۰۲	۲۸٫۴۵
	۲	۲	۲٫۵۷	۳٫۵۱	۳٫۴۹
	۳	۳	۱٫۸۰	۱٫۳۷	۱٫۳۹
	۰٫۵	۰٫۵	۱۵۱٫۹۶	۲۰۰٫۵۷	۲۰۱٫۸۶
	۱	۱	۳۸٫۷۹	۶۸٫۵۷	۶۷٫۷۳
	۲	۲	۵٫۵۸	۱۰٫۰۰	۱۰٫۲۴
	۳	۳	۲٫۳۲	۳٫۰۰	۲٫۹۶
	۰٫۵	۰٫۵	۸۶٫۷۴	۱۲۸٫۵۲	۱۲۹٫۰۵
	۱	۱	۱۴٫۹۷	۲۸٫۷۴	۲۸٫۸۷
	۲	۲	۲٫۵۶	۳٫۴۷	۳٫۴۷
	۳	۳	۱٫۸۰	۱٫۳۹	۱٫۳۹
اندازه گروه			۱٫۷۷	۱	۱
تعداد دسته			۱	۱٫۷	۱٫۷۸
تخمین α			۰٫۲۰۰۳۹	۰٫۰۰۳۰۳۵	۰٫۰۰۲۹۹۶۸

جدول ۲. ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM برای $\Phi(B) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$.

حد بالای تعداد دسته=۳	حد بالای تعداد دسته=۲	حد بالای تعداد دسته=۱	انحراف در X_2	انحراف در X_1	ضریب اتورگرسیو
۳۷۷,۰	۳۷۲,۸۹	۳۷۸,۰۰	۰	۰	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
۱۴۹,۸	۱۵۱,۹۱	۱۳۵,۶۷	۰,۵	۰,۵	
۳۸,۵۶	۴۱,۲۰	۳۴,۵۸	۱	۱	
۵,۳۱	۷,۸۶	۷,۰۲	۲	۲	
۱,۶۹	۳,۸۳	۳,۴۰	۳	۳	
۲۲۰,۷	۲۱۸,۱۴	۲۰۸,۸۷	۰	۰,۵	
۸۲,۷۴	۸۴,۷۹	۷۴,۳۶	۰	۱	
۱۴,۷۷	۱۷,۵۹	۱۴,۷۹	۰	۲	
۴,۴۱	۶,۹۱	۶,۳۰	۰	۳	
۱۴۶,۹	۱۴۹,۷۸	۱۳۳,۷۴	-۰,۵	۰,۵	
۳۹,۲۸	۴۱,۱۵	۳۴,۷۹	-۱	۱	
۵,۵۶	۷,۹۳	۷,۰۳	-۲	۲	
۱,۷۰	۳,۷۹	۳,۴۲	-۳	۳	
۲	۲,۵۶	۱۰,۱۵	اندازه گروه		
۲,۶	۲	۱	تعداد دسته		
۰,۰۰۰۷۵۸۸۲	۰,۰۳۴۴۰۵	۰,۸۷۸۶۴	تخمین α		

جدول ۳. ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM برای $\Phi(B) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$.

حد بالای تعداد دسته=۳	حد بالای تعداد دسته=۲	حد بالای تعداد دسته=۱	انحراف در X_2	انحراف در X_1	ضریب اتورگرسیو
۱۳۶۱	۳۶۹,۳۳	۳۷۰,۹۶	۰	۰	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
۶۵۹,۹	۲۵۹,۳۱	۲۱۶,۸۵	۰,۵	۰,۵	
۳۱۵,۴	۱۵۶,۹۲	۱۱۳,۷۳	۱	۱	
۷۳,۹۵	۶۳,۹۷	۵۰,۳۷	۲	۲	
۲۷,۷۵	۳۶,۴۷	۳۲,۷۸	۳	۳	
۷۶۱,۴	۲۹۲,۰۴	۲۵۴,۰۳	۰	۰,۵	
۳۸۱,۳	۱۹۸,۹۴	۱۶۱,۲۳	۰	۱	
۱۳۳,۱	۹۸,۹۲	۷۷,۰۵	۰	۲	
۵۷,۱۷	۵۷,۸۹	۴۷,۳۰	۰	۳	
۵۷۷,۹	۲۵۵,۸۵	۲۰۴,۲۹	-۰,۵	۰,۵	
۲۷۰,۱	۱۵۱,۶۵	۱۱۰,۱۸	-۱	۱	
۷۰,۸۵	۶۴,۶۲	۵۰,۱۸	-۲	۲	
۲۶,۷۱	۳۶,۲۴	۳۲,۷۱	-۳	۳	
۱۱,۶۳	۱۷,۸۲	۶۱,۲۱	اندازه گروه		
۲,۹۷	۲	۱	تعداد دسته		
۴,۶۷۰۹*E-۱۰	۲,۵۴۹۲*E-۶	۰,۳۰۳۳۱	تخمین α		

انتظاری میبوی بر بهتر بودن کارایی این نمودارها نسبت به نمودارهایی که برای یک مدل سری زمانی خاص طراحی شده‌اند وجود ندارد. نمودار MGBM نیز یک نمودار کنترل بی‌نیاز از مدل است و با توجه به این که تاکنون هیچ نمودار کنترل بی‌نیاز از مدلی برای فرایندهای چندمتغیره خودهمبسته پیشنهاد نشده است، در این تحقیق کارایی این نمودار را فقط با نمودار T^2 برای مشاهدات تکمی مقایسه کرده‌ایم.

انحرافات مختلف در میانگین فرایند $VAR(1)$ تعداد دسته‌ی ۲ کارایی بیشتری دارد. در ادبیات کنترل فرایند آماری، هیچ‌یک از نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل با نمودارهای کنترل نیازمند مدل مقایسه نمی‌شوند، زیرا هر یک کاربرد ویژه‌ی دارند. به بیان دیگر با توجه به سهولت ترسیم و تفسیر نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل، هیچ

نتایج مقایسه‌ی نمودار کنترل $MGBM$ با نمودار هتلینگ T^T در حضور داده‌های چندمتغیره‌ی خودهمبسته، در جداول ۴، ۵ و ۶ ارائه شده‌است. نتایج این جداول نشان می‌دهد که با افزایش ضریب خودهمبستگی کارایی نمودار $MGBM$ نسبت به نمودار T^T افزایش می‌یابد، تا جایی که برای ضریب اتورگرسیو $[\begin{smallmatrix} 0.9 \\ 0.9 \end{smallmatrix}]$ ، نمودار $MGBM$ موجب افزایش ۴۰ درصدی کارایی نمودار T^T در برخورد با داده‌های چندمتغیره‌ی خودهمبسته می‌شود.

جدول ۴. مقایسه‌ی ARL و (SDRL) نمودار کنترل $MGBM$ و T^T برای $\Phi(B) = [\begin{smallmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{smallmatrix}]$

ضریب اتورگرسیو	انحراف در X_1	انحراف در X_2	MGBM	T^T	درصد بهبود	میانگین درصد بهبود
[$\begin{smallmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{smallmatrix}$]	۰	۰	۳۶۷,۷۲	۳۷۳,۴۷	۱,۵۴	۱,۵۴
	۰,۵	۰,۵	۱۳۰,۰۱	۱۳۱,۹۱	۱,۴۴	۱,۴۴
	۱	۱	۲۹,۰۲	۲۸,۷۲	-۱,۰۴	-۱,۰۴
	۲	۲	۳,۵۱	۳,۵۶	۱,۶۶	۱,۶۶
	۳	۳	۱,۳۷	۱,۴۰	۲,۰۴	۲,۰۴
	۰,۵	۰,۵	۲۰۰,۵۷	۲۰۶,۸۰	۳,۰۱	۳,۰۱
	۱	۱	۶۸,۵۷	۶۹,۶۹	۱,۶۱	۱,۶۱
	۲	۲	۱۰,۰۰	۱۰,۱۸	۱,۷۶	۱,۷۶
	۳	۳	۳,۰۰	۳,۰۵	۱,۵۴	۱,۵۴
	۰,۵	۰,۵	۱۲۸,۵۲	۱۳۳,۶۶	۳,۸۵	۳,۸۵
	۱	۱	۲۸,۷۴	۲۸,۹۴	۰,۷۰	۰,۷۰
	۲	۲	۳,۴۷	۳,۵۲	۱,۴۷	۱,۴۷
۳	۳	۱,۳۹	۱,۳۹	۰,۳۸	۰,۳۸	

جدول ۵. مقایسه‌ی ARL و (SDRL) نمودار کنترل $MGBM$ و T^T برای $\Phi(B) = [\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{smallmatrix}]$

ضریب اتورگرسیو	انحراف در X_1	انحراف در X_2	MGBM	T^T	درصد بهبود	میانگین درصد بهبود
[$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{smallmatrix}$]	۰	۰	۳۷۸,۰۰	۳۶۶,۶۹	-۳,۰۸	-۳,۰۸
	۰,۵	۰,۵	۱۳۵,۶۷	۱۶۷,۸۱	۱۹,۱۵	۱۹,۱۵
	۱	۱	۳۴,۵۸	۵۱,۳۳	۳۲,۶۳	۳۲,۶۳
	۲	۲	۷,۰۲	۸,۶۰	۱۸,۴۱	۱۸,۴۱
	۳	۳	۳,۴۰	۳,۵۷	۴,۶۰	۴,۶۰
	۰,۵	۰,۵	۲۰۸,۸۷	۲۴۴,۱	۱۴,۱۱	۱۴,۱۱
	۱	۱	۷۴,۳۶	۱۰۲,۹۷	۲۷,۷۸	۲۷,۷۸
	۲	۲	۱۴,۷۹	۲۱,۳۳	۳۰,۶۵	۳۰,۶۵
	۳	۳	۶,۳۰	۷,۵۴	۱۶,۵۳	۱۶,۵۳
	۰,۵	۰,۵	۱۳۳,۷۴	۱۷۱,۱۴	۲۱,۸۵	۲۱,۸۵
	۱	۱	۳۴,۷۹	۵۰,۳۵	۳۰,۹۱	۳۰,۹۱
	۲	۲	۷,۰۳	۸,۸۹	۲۰,۹۱	۲۰,۹۱
۳	۳	۳,۴۲	۳,۶۴	۶,۰۵	۶,۰۵	

جدول ۶. مقایسه‌ی ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM و T^2 برای $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 \end{bmatrix}$.

ضریب اتورگرسیو	انحراف در X_1	انحراف در X_2	MGBM	T^2	درصد بهبود	میانگین درصد بهبود
$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 \end{bmatrix}$	0	0	370,96 (20,11)	367,96 (374,38)	-0,81	39,37
	0,5	0,5	216,85 (87,06)	312,07 (312,42)	30,51	
	1	1	113,73 (271,4)	218,89 (214,15)	48,04	
	2	2	50,37 (52,01)	93,14 (85,89)	45,92	
	3	3	32,78 (19,44)	46,07 (37,20)	28,85	
	0,5	0,5	254,03 (10,40)	338,06 (337,76)	24,86	
	1	1	161,23 (514,5)	278,84 (281,89)	42,18	
	2	2	77,05 (120,7)	153,32 (150,12)	49,75	
	3	3	47,30 (43,43)	83,21 (74,35)	43,16	
	0,5	0,5	204,29 (68,02)	316,58 (320,2)	35,47	
	1	1	110,18 (238,3)	220,67 (219,86)	50,07	
	2	2	50,18 (50,27)	92,94 (87,21)	46,01	
	3	3	32,71 (19,21)	45,18 (37,04)	27,59	

۵. نتیجه‌گیری

بیشتر نمودارهای پیشنهاد شده برای فرایندهای خودهمبسته نمودارهایی هستند که در آنها فقط یک متغیر مطرح است و به فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته کم‌تر پرداخته شده است. در معهود نمودارهای کنترل پیشنهادشده نیز یک فرض اصلی مبنی بر این‌که داده‌ها از مدلی خاص برخوردارند (به اصطلاح روش‌های نیازمند مدل) برقرار بوده است. در این تحقیق یک نمودار چندمتغیره‌ی جدید به نام نمودار کنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده (MGBM) برای تشخیص انحرافات میانگین پیشنهاد شد. این نمودار بی‌نیاز از مدل بوده و برخلاف سایر نمودارهای ارائه شده برای فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته به سادگی قابل ترسیم و تفسیر است. کارایی متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترل MGBM با استفاده از شبیه‌سازی برای سه حد بالای مختلف تعداد دسته به دست آمد. نتایج حاصل بیان‌گر این نکته‌اند که تعداد دسته‌ی ۱ (توسعه‌ی روش توصیه‌شده‌ی رانگرو و بلمین برای حالت چندمتغیره)

خطای نوع اول بالایی دارد. همچنین تعداد دسته‌ی ۲ در ضرایب خودهمبستگی پایین تنها در تشخیص انحرافات بزرگ میانگین کارایی بهتری نسبت به تعداد دسته‌ی ۱ دارد، ولی کارایی آن با افزایش ضریب خودهمبستگی افزایش می‌یابد. مقایسه‌ی کارایی نمودار کنترل MGBM با نمودار کنترل T^2 در حضور مشاهدات چندمتغیره‌ی خودهمبسته نیز نشان داد که نمودار کنترل MGBM که بر پایه‌ی نمودار کنترل T^2 ساخته شده است می‌تواند در حالت خودهمبستگی مثبت مشاهدات، کارایی نمودار کنترل T^2 را به میزان چشم‌گیری بهبود دهد. همچنین با افزایش ضریب خودهمبستگی میزان این بهبود افزایش می‌یابد.

با استفاده از روش پیشنهادی جدید برای کاهش خودهمبستگی فرایندهای چندمتغیره، می‌توان تخمین خوبی برای ماتریس واریانس - کواریانس (انحراف استاندارد) و در نتیجه فاصله‌ی اطمینان مناسبی برای بردار میانگین مشاهدات یافت. این روش را در تجزیه و تحلیل داده‌های خروجی چندمتغیره‌ی شبیه‌سازی نیز می‌توان به‌کار برد.

پانویس

1. monitoring
2. autocorrelated
3. multivariate grouped batched means
4. multivariate cumulative SUM
5. multivariate exponentially weighted moving average
6. latent structure
7. vector auto-regressive
8. noise series
9. single step finite intersection test
10. multivariate grouped batch means
11. independent replications method
12. batch means method

13. spectral analysis method
14. autoregressive method
15. Average Run Length

منابع

1. Jarrett, J. E., and Pan, X. "The quality control chart for monitoring multivariate auto-correlated processes," *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, pp. 3862-3870 (2007).
2. Lowry, C. A., and Montgomery, D.C. "A review of multivariate control charts," *IIE Transactions*, **27**, pp. 800-810 (1995).

3. Mastrangelo, C.M, and Forrest, D.R. "Multivariate auto-correlated processes: data and shift generation," *Journal of Quality Technology*, **34**, pp. 216-220 (2002).
4. Biller, B., and Nelson, B.L. "Modeling and generating multivariate time-series input processes using a vector autoregressive technique," *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, **13**, pp. 211-237 (2003).
5. Theodossiou, P.T. "Predicting shifts in the mean of multivariate time series process: an application in predicting business failures," *Journal of the American Statistical Association*, **88**, pp. 441-447 (1993).
6. Kramer, H. G., and Schmid, W. "EWMA charts for multivariate time series," *Sequential Analysis*, **16**, pp. 131-154 (1997).
7. Kalgonda, A.A., and Kulkarni, S.R. "Multivariate quality control chart for auto-correlated processes," *Journal of Applied Statistics*, **31**, pp. 317-327 (2004).
8. Timm, N.H. "Multivariate quality control using finite intersection tests," *Journal of Quality Technology*, **28**, pp. 233-243 (1996).
9. Morovatdar, R., and Niaki, S.T.A. "A grouped batch means approach in monitoring autocorrelated processes," In *the Proceedings of the 37th International Conference on Computers & Industrial Engineering*, Alexandria, Egypt, (October 20-23, 2007).
10. Runger G.C., and Willemain T.R. "Batch-means control charts for auto-correlated data," *IIE Transactions*, **28**, pp. 483-487 (1996).
11. Niaki, S.T.A., and Iskander, W.H. "A principal-components approach to assign confidence intervals in steady-state simulation," *IIE Transactions*, **38**, pp. 117-126 (2006).
12. Alwan, L.C., and Radson, D. "Time-series investigation of sub-sample mean charts," *IIE Transactions*, **24**, pp. 66-80 (1992).
13. Alwan, L.C. "Effects of autocorrelation on control chart performance," *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **21**, pp. 1025-1049 (1992).
14. Hotelling, H. *Multivariate quality control-illustrated by the air testing of sample bombsights*, *Techniques of Statistical Analysis*, Eisenhart, C., Hastay, M.W., Wallis, W. A. (eds.), New York: McGraw-Hill, pp. 111-184 (1947).
15. Holmes, D.S., and Mergen, A.E. "Improving the performance of the T^2 control chart," *Quality Engineering*, **5**, pp. 619-625 (1993).