مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
مرداد ۱۳۸۸، شماره‌ی چهل و نهم، ص. ۵۷-۶۴

طراحی یک نمودار کنترل بی‌نیاز از مدل برای پایش فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته

رضا مروت‌دار (کارشناس ارشد)
سیدتقی اخوان‌نیاکی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

morovatdar@mehr.sharif.edu
Niaki@Sharif.edu

برای پایش[1] فرایندهای خودهمبسته‌ی[2] یک‌متغیره و همچنین کنترل فرایندهای چندمتغیره نمودارهای زیادی ارائه شده است، ولی باوجود کاربرد نسبتاً فراوان، نمودارهای چندمتغیره در حالت خودهمبسته کم‌تر مورد بررسی قرارگرفته‌اند. در این نوشتار بااستفاده از روشی جدید به‌منظور کاهش خودهمبستگی مشاهدات، یک نمودار کنترل به‌نام نمودار میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده‌ی چندمتغیره ($MGBM$)[3] برای پایش‌بردار میانگین فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته ارائه می‌شود. نمودار کنترل پیشنهادشده در زمره‌ی نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل است که در آن پارامترها در حضور داده‌های اتورگرسیو برداری درجه‌ی اول بررسی، و پیشنهاداتی نیز برای تعیین مقدار بهینه‌ی آنها ارائه شده است. همچنین کارایی نمودار پیشنهادی در قالب متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل و خارج از کنترل و در حضور انحرافات مختلف در میانگین، بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی: کنترل کیفیت، فرایندهای چندمتغیره، خودهمبستگی، نمودار کنترل بی‌نیاز از مدل.

۱. مقدمه

نمودارهای کنترل یکی از مهم‌ترین ابزارهای کنترل فرایند آماری به شمار می‌آیند. این در حالی است که در ابتدا این نمودارها برای فرایندهای یک‌متغیره پیشنهاد شدند، اما در عمل بسیاری از فرایندها شامل بیش از یک متغیرند و دو یا چند مشخصه از محصول یا فرایند باید به‌طور همزمان کنترل شوند. براین اساس، مطالعات فراوانی پیرامون نمودارهای کنترل چندمتغیره صورت گرفته و انواع مختلفی از آن ـ نظیر هتلینگ T^2، جمع تجمعی چندمتغیره ($MCUSUM$)[4] و میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره ($MEWMA$)[5] ـ ارائه شده‌اند. این نمودارها معمولاً بر دو فرض اصلی استوارند: «نرمال‌بودن» و «مستقل‌بودن مشاهداتِ حاصل از فرایند در طول زمان». به‌عبارت دیگر اولاً داده‌های تولیدشده از یک فرایند در حالت کنترل به‌طور مستقل توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین μ و ماتریس واریانس ـ کواریانس $\sum$ دارند و ثانیاً داده‌های فرایند در طول زمان مستقلاً توزیع شده‌اند.

مهم‌ترین فرض در نمودارهای کنترل، فرض استقلال مشاهدات است. متأسفانه این فرض معمولاً در انواع زیادی از فرایندهای تولیدی نقض می‌شود. دو عامل اصلی مسبب به وجودآمدن خودهمبستگی در مشاهدات یک فرایندند. اولین عامل، پیشرفت قابل ملاحظه‌ی فنّاوری اندازه‌گیری و جمع‌آوری داده است که سبب شده بازرسی بیشتر و در بعضی موارد بازرسی قطعه به قطعه صورت گیرد. باافزایش تعداد بازرسی‌ها زمان بین نمونه‌گیری‌ها کاهش یافته و خودهمبستگی داده‌ها افزایش می‌یابد.

از جمله‌ی این فرایندها می‌توان به فرایندهای تولید منقطع قطعات حساسی همچون کیت‌های الکترونیکی اشاره کرد. مثال دیگر صنایع با تکنولوژی بالاست. مثلاً در تولید فیبرهای نوری که تولید انبوه و دقیق دارند، میله‌های SiO_2 از طریق میعان گاز اکسیژن و سیلیکون تولید می‌شوند که در آن کنترل هم‌زمان دما، فشار و غلظت بسیار مهم است.[1] خروجی این نوع فرایندها معمولاً از یک مدل سری زمانی چندمتغیره ناشی می‌شوند.

عامل دوم به‌وجود آمدن خودهمبستگی، خصوصیات ذاتی برخی از فرایندهاست. در فرایندهای تولید پیوسته مانند فرایندهای شیمیایی، مشاهدات ناشی از فرایند، به‌دلیل خاصیت پیوسته‌بودن فرایند به‌شدت خودهمبسته‌اند. به‌بیان دیگر در فرایندهای تولید پیوسته برخلاف فرایندهای تولید گسسته تغییرات تصادفی در طول جریان تولید به‌تدریج محو می‌شوند. فرایندهای مشابهی در صنایع تولید مواد نیمه‌رسانا نیز وجود دارد. در این‌گونه فرایندها وابستگی بین متغیرها بسیار زیاد است و تجزیه و تحلیل چندمتغیره برای نمایش و کنترل فرایند لازم است. علاوه بر این این متغیرها نسبت به زمان و فاصله نیز وابستگی دارند که لزوم استفاده از نمودارهای خاص را برای این فرایندها مشخص می‌کند.

نمودارهای کنترل کیفیت یک‌متغیره که برای پایش‌یک مشخصه‌ی کیفی با خصوصیت خودهمبستگی پیشنهاد شده‌اند برای فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته کارایی لازم را ندارند. در سال ۱۹۹۵، لوری و مونتگومری بر این باور بودند که: «با وجود اهمیت کاربردی زیادِ موضوع کنترل فرایند چندمتغیره‌ی خودهمبسته، مطالعات اندکی در این باره گزارش شده است.[2] به باور ما، برخی از انواع تصویرکردن متغیرهای

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۴/۱۱، داوری ۱۳۸۶/۸/۱۶، پذیرش ۱۳۸۶/۱۱/۱۰.

اصلی فرایند به ساختار نهفته‌ی[۶] آنها می‌تواند راه حل مناسبی برای این موضوع باشد.».

یکی از مشکلات توسعه‌ی روش جدید برای تحلیل فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته، تولید داده‌های مناسب برای این کار است. مسترانجلو و فورست یک برنامه‌ی کامپیوتری به‌زبان C پیشنهاد داده‌اند که بااستفاده از آن می‌توان به تولید داده‌های چندمتغیره‌ی برخوردار از یک مدلِ اتورگرسیوِ برداری[۷] نوع اول با انحراف در بردار میانگین اغتشاشات[۸] پرداخت.[۳] بدین‌ترتیب می‌توان از این داده‌ها به‌منظور مقایسه‌ی کارایی نمودارهای مختلف در تشخیص انحراف از معیار فرایند چندمتغیره‌ی خودهمبسته بهره جست. همچنین بیلر و نلسون به تولید مشاهدات چندمتغیره‌ی خودهمبسته برای استفاده در داده‌های ورودی شبیه‌سازی پرداخته‌اند.[۴] از این روش نیز مانند روش مسترانجلو و فورست می‌توان برای تولید داده‌های چندمتغیره‌ی خودهمبسته در نمودارهای کنترل استفاده کرد.

اولین تلاش‌ها برای توسعه‌ی نموداری به‌منظور کنترل مشاهدات چندمتغیره‌ی خودهمبسته توسط تئودوسیوانجام شد.[۵] وی یک نمودار جمع تجمعی $(MCUSUM)$ برای این منظور پیشنهاد داد. کرامر و شمید نیز نموداری برای کنترل میانگینِ متحرکِ موزون نماییِ چندمتغیره $(MEWMA)$ به‌منظور نمایش فرایندهایی که از یک مدل سری زمانیِ چندمتغیره برخوردارند، ارائه کردند.[۶]

کالگوندا و کولکارنی نیز نمودارکنترلی به‌نام نمودار Z معرفی‌کردند.[۷] این نمودار مبتنی است برآزمون تقاطع متناهی تک‌مرحله‌یی[۹]، که توسط تیم پیشنهاد شده است.[۸] خصوصیت اصلی نمودار Z این است که نه‌تنها حالت خارج از کنترل فرایند را تشخیص می‌دهد، بلکه به تعیین متغیرهایی که مسبب این امر بوده‌اند نیز کمک می‌کند.

جارت و پن نیز با معرفی یک نمودارکنترل به‌نام «نمودار اتورگرسیوِ برداری» سعی کرده‌اند که داده‌های چندمتغیره‌ی خودهمبسته را کنترل کنند.[۱] این نمودار ترکیبی از نمودار باقی‌مانده‌های یک‌متغیره برای فرایندهای خودهمبسته و نمودار چندمتغیره برای فرایندهای مستقل است و براساس تخمین مدل اتورگرسیوِ درجه p $(AR(p))$و محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ها ساخته می‌شود. ایده‌ی اصلی در این تحقیق این است که با به‌دست آوردن تخمین بردار باقی‌مانده‌ها و محاسبه‌ی ماتریس واریانس ـ کواریانس آن می‌توان نمودار کنترل هتلینگ $T^۲$ را برای باقی‌مانده‌ها رسم کرد.

تحقیقات انجام‌شده در زمینه‌ی پایش‌فرایندهای خودهمبسته‌ی چندمتغیره، تماماً به توسعه‌ی نمودارهای کنترلی پرداخته‌اند که طراحی آنها وابسته به فرضی است مبنی بر این‌که مشاهدات از یک مدل سری زمانی ناشی می‌شوند (به‌اصطلاح نیازمندِ مدل‌اند). برای پایش فرایندهای خودهمبسته‌ی یک‌متغیره چند روش بی‌نیاز از مدل پیشنهاد شده است،[۹] اما تاکنون هیچ نمودارکنترل بی‌نیاز از مدلی برای فرایندهای چندمتغیره معرفی نشده است. در این تحقیق با ایده‌گرفتن از نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل مرسوم در کنترل کیفیت یک‌متغیره ـ به‌خصوص نمودار کنترل میانگین‌های گروهی (معرفی شده توسط رانگر و ویلمین)[۱۰] ـ و نیز با انجام اصلاحاتی در این نمودارها، نمودارکنترلی به‌نام «نمودارکنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده‌ی چندمتغیره» $(MGBM)$[۱۰] ارائه می‌شود. خصوصیت اصلی این نمودار بی‌نیازی از تخمین مدل برای خودهمبستگی است.

در ادامه، ابتدا در بخش ۲ به معرفی روش‌های کاهش خودهمبستگی می‌پردازیم. سپس در بخش ۳ نمودار میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده طراحی می‌شود. بخش ۴ به ارزیابی کارایی نمودار پیشنهادی بااستفاده از شبیه‌سازی اختصاص دارد و در پایان (در بخش ۵) به نتیجه‌گیری مطالب ارائه‌شده خواهیم پرداخت.

۲. کاهش خودهمبستگی

تحقیقات مرسوم در طراحی نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل استفاده از روش‌هایی است که از خودهمبستگی بین داده‌ها می‌کاهد یا آن‌را از بین می‌برد. پیش‌درآمد اکثر این روش‌ها مطالعاتی است که در تحلیل ستاده‌های شبیه‌سازی برای تخمین فاصله‌ی اطمینان میانگین ستاده‌ها انجام شده است. این تحقیقات در تحلیل ستاده‌های شبیه‌سازی طی چهار دهه‌ی اخیر روش‌هایی مانند تکرارهای مستقل[۱۱]، میانگین‌های گروهی[۱۲]، آنالیز طیفی[۱۳]، و اتورگرسیو[۱۴] و غیره را در بر داشته‌اند.[۱۱] در این میان، روش میانگین‌های گروهی ساده‌تر از بقیه بوده و در عمل نیز کاربرد بیشتری پیدا کرده است.

الون و رادسون، با تولید گروه‌های کوچک یا متوسطی از داده‌ها، از پیشگامان استفاده از روش میانگین‌های گروهی درکنترل فرایند به‌شمار می‌روند.[۱۲] از آنجا که این گروه‌ها کاهنده‌ی خوبی برای اثر خودهمبستگی ـ به‌ویژه برای ضرایب خودهمبستگی بالا ـ نیستند بین گروه‌ها فاصله ایجاد کردند؛ به بیان دیگر تعداد ثابتی از مشاهدات بین هر دو گروه را از دامنه‌ی محاسبات حذف کردند. این محققین سپس بااستفاده از میانگین‌های گروه‌های باقی‌مانده نمودارهای معمول کنترل را ترسیم کردند.

در ادامه، رانگر و ویلمین به این نتیجه رسیدند که به‌جای استفاده از گروه‌های کوچک و ایجاد فاصله بین این گروه‌ها، اگر از گروه‌هایی با اندازه‌ی بزرگ‌تر و بدون ایجاد فاصله استفاده شود نتایج بهتری به‌دست خواهد آمد.[۱۰] در روش الون و رادسون از مشاهدات استفاده‌ی بهینه نمی‌شود. زیرا داده‌ها که ارزش زیادی دارند، در این روش به دور ریخته می‌شوند. روش رانگر و ویلمین نیز نیازمند تعداد زیادی مشاهده در درون هر گروه است که با افزایش ضریب خودهمبستگی نیز بر تعداد مشاهده‌ی مورد نیاز افزوده خواهد شد.[۱۰] بنابراین از پیش قابل تشخیص است که این روش در برخورد با انحرافات متوسط و بزرگ در میانگین فرایند چندان کارآمد نخواهد بود.

در اکثر روش‌های کاهش خودهمبستگی، در صورتی که ضریب خودهمبستگی کم‌تر از ۰٫۱ باشد، فرض بر این است که خودهمبستگی وجود ندارد و مشاهدات مستقل از هم هستند. الون با بررسی تأثیر خودهمبستگی بر نمودارهای شوهارت، و نیز بااستفاده از تجربه‌ی عملی بیان کرد که اگر ضریب خودهمبستگی با تأخیر ۱ در حدود ۰٫۱ باشد به نمودار شوهارتِ استاندارد آسیب جدی نمی‌رسد.[۱۳]

هدف این تحقیق این است که بااستفاده از گروه‌هایی با اندازه‌ی کوچک و بدون حذف هیچ داده‌یی اثر خودهمبستگی رفع شود تا بتوان نمودارهای کنترل معمول را برای میانگین گروه‌ها رسم کرد. در این روش به جای آن‌که سعی شود ضریب خودهمبستگی با تأخیر ۱ کاهش یافته و به ۰٫۱ برسد از ضرایب خودهمبستگی با تأخیرهای بالاتر نیز استفاده می‌شود.

۳. نمودار گروه‌های دسته‌بندی شده برای کنترل میانگین

اگر $X_۱, X_۲, ..., X_n$ بردار مشاهدات به‌دست آمده از یک فرایند چندمتغیره‌ی خودهمبسته باشد، با تقسیم این مشاهدات به k گروه که هر گروه دارای b مشاهده است $(n = bk)$ بردار میانگین گروه iام به‌صورت رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود.

$$Y_i = \frac{۱}{b} \sum_{j=۱}^{b} X_{(i-۱)b+j} \qquad (۱)$$

رابطه‌ی ۱ توسعه‌ی روش میانگین‌های گروهی تک‌متغیره به حالت چندمتغیره برای مقابله با خودهمبستگی است. حال اگر $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ بردار میانگین‌های گروهی به‌دست آمده از رابطه‌ی ۱ باشد، روش میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده با تعریف m دسته طبق رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود.

$$\begin{array}{ll} \text{دسته ۱:} & Y_1, Y_{m+1}, ..., Y_{m(l-1)+1} \\ \text{دسته ۲:} & Y_2, Y_{m+2}, ..., Y_{m(l-1)+2} \\ \vdots & \vdots \\ \text{دسته m:} & Y_m, Y_{2m}, ..., Y_{ml} \end{array} \qquad (2)$$

در این روش میانگین‌های گروهی به m دسته تقسیم می‌شوند که هر دسته شامل l میانگین گروه است ($k = ml$). به بیان دیگر، هر b مشاهده از n مشاهده‌ی اولیه تشکیل یک گروه می‌دهند و پس از میانگین‌گیری در هر گروه، هر l میانگین گروه نیز تشکیل یک دسته می‌دهند تا بدین‌ترتیب m دسته حاصل شود ($n = bk = blm$). رابطه‌ی ۲ را می‌توان به‌صورت یک ماتریس $m \times l$ که هر سطر آن بیان‌گر یک دسته است نمایش داد. در این صورت رابطه‌ی ۳ نوع دیگری از نمایش دسته‌بندی میانگین‌های گروهی خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_{m(l-1)+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_m & \cdots & Y_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \cdots & Z_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{m,1} & \cdots & Z_{m,l} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

که در آن $Z_{i,j}$ ($i = 1, 2, ..., m$ و $j = 1, 2, .., l$) میانگین گروه jاُم در دسته‌ی iاُم است و $Z_{i,j} = Y_{m(j-1)+i}$.

هرچند خودهمبستگی با تأخیر ۱ ممکن است بین میانگین‌های گروه‌های $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ قابل توجه باشد ولی خودهمبستگی با تأخیر m یا بیشتر یقیناً کم‌تر است و با افزایش m کاهش می‌یابد. حال m به‌گونه‌یی تعیین می‌شود که خودهمبستگی با تأخیر m در سری میانگین‌های گروهی $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ کم‌تر از ۰٫۱ باشد. ازآنجاکه میانگین‌های گروهی به m دسته تقسیم می‌شوند، خودهمبستگی با تأخیر m در سری میانگین‌های گروهی $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ معادل خودهمبستگی با تأخیر ۱ در میانگین‌های گروهی درون هر دسته $Z_{i,1}, Z_{i,2}, ..., Z_{i,l}$ است. چنانچه خودهمبستگی میانگین‌های گروه‌ها در هر دسته از مقدار ۰٫۱ کم‌تر باشد می‌توان از هرکدام از دسته‌ها برای تخمین انحراف معیار میانگین فرایند استفاده کرد.

باید توجه داشت که رابطه‌ی ۱ فقط حالتی خاص از رابطه‌ی ۲ پیشنهادی است که در این تحقیق مطرح شده است. به‌بیان دیگر توسعه‌ی روش میانگین‌های گروهی (توصیه‌شده توسط رانگر و ویلمین) به حالت چندمتغیره، حالت خاصی از روش میانگین‌های گروهی دسته‌بندی‌شده‌ی چندمتغیره در این تحقیق است.

با ثابت در نظرگرفتن تعداد مشاهدات ($n = blm$)، پارامترهای مجهول در روش میانگین‌های گروهی مشتمل است بر اندازه‌ی گروه (b)، اندازه‌ی دسته (l) و تعداد دسته (m). افزایش اندازه‌ی گروه موجب افزایش یافتن تعداد مشاهدات به‌کار رفته برای محاسبه‌ی میانگین هر گروه شده و درنتیجه به کاهش خودهمبستگی بین میانگین‌های گروهی $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ می‌انجامد. همچنین زیادشدن تعداد دسته‌ها به افزایش فاصله‌ی بین میانگین‌های گروهی هر دسته می‌انجامد و بنابراین با در نظر نگرفتن تعداد بیشتری میانگین گروهی در بین هر دو میانگین گروه در هر دسته، خودهمبستگی نیز کاهش بیشتری می‌یابد. باید دقت کرد که افزایش بسیار زیاد تعداد دسته موجب می‌شود که تعداد میانگین‌های گروهی به کار رفته در هر دسته (یا به‌صورت معادل تعداد مشاهده‌ی به کار رفته در هر دسته) کاهش یابد، و هرچه تعداد میانگین‌های گروهی هر دسته کم‌تر شود تخمین‌های انجام‌گرفته از مدل برمبنای این دسته، نادقیق‌تر خواهد بود. بنابراین توصیه می‌شود که تعداد دسته از یک حد بالای از پیش تعیین شده تجاوز نکند. با تعیین اندازه‌ی گروه و تعداد دسته می‌توان مقدار l را نیز محاسبه کرد.

برای تعیین پارامترهای مجهول یادشده (اندازه‌ی گروه و تعداد دسته) از یک روش ابتکاریِ جدید استفاده می‌شود. بدین‌ترتیب که ابتدا یک حد بالا برای تعداد دسته در نظرگرفته می‌شود. سپس حداقل اندازه‌ی گروه چنان در نظرگرفته می‌شود که تعداد دسته در آن از حد بالای تعداد دسته بیشتر نشود و نیز خودهمبستگی با تأخیر ۱ برای هر یک از متغیرهای درون هر دسته کم‌تر از ۰٫۱ باشد. به بیان دیگر، رعایت ۳ عامل اصلی در تعیین پارامترهای مجهول ضروری است: ۱. خودهمبستگی درون هر دسته کم‌تر از ۰٫۱ باشد؛ ۲. ازکم‌ترین تعداد مشاهده‌ی ممکن در هرگروه استفاده شود؛ ۳. تعداد دسته‌های تعیین شده از حد بالای تعداد دسته تجاوز نکند.

گرچه نمودارکنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده ($MGBM$) بااستفاده از همه‌ی روش‌های معمول درکنترل فرایند چندمتغیره برای مشاهدات منفرد قابل ترسیم است، ولی نمودارکنترل هتلینگ T^2 برای مشاهدات منفرد، به‌دلیل کاربرد فراگیر و سادگی نسبی، برای این منظور پیشنهاد می‌شود.[14] آماره‌ی هتلینگ از رابطه‌ی ۴ به‌دست می‌آید:

$$D^2 = (Y_i - \overline{X})^T \hat{\sum}(Y_i - \overline{X}) \qquad (4)$$

که در آن Y_i بردار میانگین گروه iاُم ($i = 1, 2, ..., k$)، $\overline{X}$ بردار میانگین کلی فرایند، و $\hat{\sum}$ تخمین ماتریس واریانس ـ کوواریانس فرایند است. برای ترسیم نمودار کنترل پیشنهادی می‌توان از میانگین هر گروه به‌عنوان یک مشاهده‌ی تکی استفاده کرد و برای به‌دست آوردن تخمین $\sum$ از روش هلمز و مرگن به‌شرح زیر برای هر دسته استفاده می‌شود.[15] بر این اساس ابتدا بردار تفاضل دو مشاهده‌ی متوالی برای دسته‌ی jاُم $j = 1, 2, ..., m$ محاسبه می‌شود.

$$v_{j,h} = Y_{mh+j} - Y_{m(h-1)+j} = Z_{j,h+1} - Z_{j,h}, \ \ h = 1, 2, .., l-1$$

سپس بردارهای $v_{j,h}$ به‌دست آمده برای دسته‌ی jاُم $j = 1, 2, ..., m$ در یک ماتریس V_j جمع می‌شوند.

$$V_j = [v_{j,1}, v_{j,2}, ..., v_{j,l-1}]^T$$

آنگاه تخمین $\sum_j$ برای هر یک از دسته‌ها مطابق رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود.

$$\hat{\sum}_j = \frac{1}{2}\frac{V_j^T V_j}{(l-1)}, \qquad j = 1, 2, ..., m \qquad (5)$$

بدین‌ترتیب تخمین ماتریس واریانس ـ کوواریانس بردارهای تکی (میانگین‌های گروهی) عبارت خواهد بود از:

$$\hat{\sum} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\hat{\sum}_j \qquad (6)$$

بااستفاده از تخمین واریانس ـ کوواریانس و استفاده از آماره‌ی D^2 در رابطه‌ی ۴، نمودارکنترل گروه‌های دسته‌بندی شده‌ی چندمتغیره طراحی می‌شود که در آن حدود کنترل همان حدود کنترل نمودار هتلینگ T^2 در نظرگرفته می‌شود.

۴. کارایی نمودار MGBM

ابزارهای اندازه‌گیری مختلفی برای ارزیابی کارایی نمودارهای کنترل پیشنهاد شده است. مشهورترین این ابزارها متوسط طول دنباله (ARL)[۱۵] است که مبتنی بر توزیع طول دنباله است. در ادامه، کارایی نمودار کنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده برای پایش میانگین یک فرایند چندمتغیره‌ی خودهمبسته، بااستفاده از این ابزار و به‌کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو برآورد می‌شود.

برای به‌دست آوردن متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترل $MGBM$ از مشاهدات یک مدل سری زمانی اتورگرسیوِ برداری درجه اول $VAR(۱)$ استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۷):

$$X_{t+۱} = \xi + \Phi(B)X_t + \varepsilon_t \qquad (۷)$$

که در آن X_t برای $t = ۱, ۲, \ldots, n$، سری بردارهای مشاهدات خودهمبسته برای دو متغیر خودهمبسته‌ی $X_۱$ و $X_۲$، ξ بردار میانگین فرایند، $\Phi(B)$ ماتریس ضریب اتورگرسیو درجه اول و ε_t برای $t = ۱, ۲, \ldots, n$ بردارهای مستقل تصادفی با میانگین صفر و ماتریس واریانس ـ کواریانس $\sum$ است. از آنجا که حالت‌های مختلفی برای مدل $VAR(۱)$ وجود دارد و ماتریس‌های واریانس - کواریانس و اتورگرسیو متفاوتی را می‌توان برای این مدل تعریف کرد، در این تحقیق کارایی نمودار $MGBM$ فقط برای یک حالت خاص بااستفاده از شبیه‌سازی تخمین زده می‌شود. در این حالت یک فرایند $VAR(۱)$ در نظر گرفته شده که در آن بردار میانگین برابر صفر، ماتریس واریانس ـ کواریانس برابر I، و سه ماتریس ضریب اتورگرسیوِ درجه‌ی اول به‌صورت‌های $\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰/۹ & ۰ \\ ۰ & ۰/۹ \end{bmatrix}$ در سه حالت خودهمبستگی کم، متوسط و زیاد برای دو متغیر خودهمبسته‌ی $X_۱$ و $X_۲$ تعریف می‌شود. برای روش پیشنهادی، نتایج متوسط طول دنباله و انحراف استاندارد آن برای هریک از این حالات به‌ترتیب در جداول ۱، ۲ و ۳ آورده شده‌است.

در این جداول حدود کنترل بااستفاده از ۱۰۰۰ گروه از مشاهدات به‌دست آمده و سپس به‌کمک این حدود و بااستفاده از ۱۰۰ طول دنباله، متوسط طول دنباله محاسبه شده است. برای انجام مقایسه‌ی ARL خارج از کنترل بین حالات مختلف فرایند که به‌ازاء تغییرات میانگین فرایند برحسب ضریبی از انحراف استاندارد تعیین شده، سعی شده است که ARL تحت کنترل در مقدار ۳۷۰٫۴ ثابت شود. برای این منظور باانجام ۵۰۰۰ بار تکرار در محاسبه‌ی ARL برای مقادیر مختلف پارامترهای نمودار کنترل، این مقادیر به‌گونه‌یی ثابت در نظر گرفته شده‌اند که ARL تحت کنترل معادل ۳۷۰٫۴ باشد. پس از تعیین پارامترهای نمودار کنترل، ARL خارج از کنترل بااستفاده از ۱۰۰ بار تکرار محاسبه شده است.

برای حالتی که حد بالای تعداد دسته برابرِ ۱ است، یعنی همان حالت گروهی‌کردن مشاهدات برای رفع خودهمبستگی (توسعه‌ی روش توصیه‌شده‌ی رانگر و ویلمین برای حالت چندمتغیره)، خطای نوع اول بسیار بالا است و عملاً نمودار کنترل $MGBM$ را در این حالت ناکارآمد می‌سازد. تعداد دسته‌ی ۱ برای انحرافات کوچک کاراتر از بقیه است و تعداد دسته‌ی ۲ برای انحرافات بزرگ، کارایی متوسط طول دنباله (ARL) بیشتر است. همچنین باافزایش ضریب اتورگرسیو درجه‌ی اول کارایی نسبی نمودار کنترل $MGBM$ در تشخیص انحرافات کوچک افزایش می‌یابد. بنابراین از آنجاکه تعداد دسته‌ی ۱ دارای خطای نوع اول زیادی است استفاده از آن مقدور نیست (مگر آن‌که ARL تحت کنترل افزایش چشم‌گیری پیدا کند) و برای

جدول ۱. **ARL** و **(SDRL)** نمودار کنترل **MGBM** برای $\mathbf{\Phi(B)} = \begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ \end{bmatrix}$.

ضریب اتورگرسیو	انحراف در $X_۱$	انحراف در $X_۲$	حد بالای تعداد دسته=۱		حد بالای تعداد دسته=۲		حد بالای تعداد دسته=۳	
	۰	۰	۳۷۶٫۹۳	(۴۲۶٫۷)	۳۶۷٫۷۲	(۳۷۵٫۹)	۳۶۹٫۷۳	(۳۸۳٫۳)
	۰٫۵	۰٫۵	**۸۵٫۱۴**	(۹۶٫۴۰)	۱۳۰٫۰۱	(۱۳۵٫۱)	۱۲۸٫۷۷	(۱۳۰٫۵)
	۱	۱	**۱۴٫۷۴**	(۱۴٫۹۹)	۲۹٫۰۲	(۲۸٫۲۷)	۲۸٫۴۵	(۲۸٫۰۰)
	۲	۲	**۲٫۵۷**	(۱٫۴۵)	۳٫۵۱	(۲٫۷۵)	۳٫۴۹	(۲٫۷۵)
	۳	۳	۱٫۸۰	(۰٫۲۲)	**۱٫۳۷**	(۰٫۶۵)	۱٫۳۹	(۰٫۶۷)
	۰٫۵	۰	**۱۵۱٫۹۶**	(۱۷۱٫۷)	۲۰۰٫۵۷	(۲۰۴٫۶)	۲۰۱٫۸۶	(۲۰۲٫۱)
$\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ \end{bmatrix}$	۱	۰	**۳۸٫۷۹**	(۴۲٫۶۲)	۶۸٫۵۷	(۶۹٫۲۰)	۶۷٫۷۳	(۶۸٫۹۴)
	۲	۰	**۵٫۵۸**	(۴٫۷۴)	۱۰٫۰۰	(۹٫۳۴)	۱۰٫۲۴	(۹٫۶۷)
	۳	۰	**۲٫۳۲**	(۱٫۱۳)	۳٫۰۰	(۲٫۲۵)	۲٫۹۶	(۲٫۲۲)
	۰٫۵	-۰٫۵	**۸۶٫۷۴**	(۹۶٫۴۶)	۱۲۸٫۵۲	(۱۲۹٫۹)	۱۲۸٫۶۷	(۱۲۹٫۵)
	۱	-۱	**۱۴٫۹۷**	(۱۵٫۱۹)	۲۸٫۷۴	(۲۸٫۱۵)	۲۸٫۸۷	(۲۸٫۳۴)
	۲	-۲	**۲٫۵۶**	(۱٫۴۲)	۳٫۴۷	(۲٫۷۸)	۳٫۴۷	(۲٫۷۴)
	۳	-۳	۱٫۸۰	(۰٫۲۲)	**۱٫۳۹**	(۰٫۶۶)	۱٫۳۹	(۰٫۶۸)
	اندازه گروه		۱٫۷۷		۱		۱	
	تعداد دسته		۱		۱٫۷		۱٫۷۸	
	تخمین α		۰٫۲۰۰۳۹		۰٫۰۰۳۰۳۵		۰٫۰۰۲۹۹۶۸	

جدول ۲. ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBMبرای $\Phi(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$.

ضریب اتورگرسیو	انحراف در X_1	انحراف در X_2	حد بالای تعداد دسته=۱		حد بالای تعداد دسته=۲		حد بالای تعداد دسته=۳	
$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$	۰	۰	۳۷۱٫۴۴	(۶۴۹٫۲)	۳۷۸٫۰۰	(۴۵۱٫۷)	۳۷۲٫۸۹	(۳۷۷٫۰)
	۰٫۵	۰٫۵	**۲۶٫۱۸**	(۶۲٫۳۱)	۱۳۵٫۶۷	(۱۵۱٫۲)	۱۵۱٫۹۱	(۱۴۹٫۸)
	۱	۱	**۱۲٫۴۶**	(۵٫۹۶)	۳۴٫۵۸	(۳۵٫۰۸)	۴۱٫۲۰	(۳۸٫۵۶)
	۲	۲	۱۰٫۱۷	(۳٫۳۸)	**۷٫۰۲**	(۴٫۵۳)	۷٫۸۶	(۵٫۳۱)
	۳	۳	۱۰٫۱۵	(۰)	**۳٫۴۰**	(۱٫۸۵)	۳٫۸۳	(۱٫۶۹)
	۰٫۵	۰	**۳۹٫۵۶**	(۱۴۵٫۲)	۲۰۸٫۸۷	(۲۴۴٫۱)	۲۱۸٫۱۴	(۲۲۰٫۷)
	۱	۰	**۱۶٫۸۱**	(۱۴٫۵۰)	۷۴٫۳۶	(۸۱٫۵۷)	۸۴٫۷۹	(۸۲٫۷۴)
	۲	۰	**۱۰٫۵۷**	(۲٫۱۵)	۱۴٫۷۹	(۱۲٫۹۶)	۱۷٫۵۹	(۱۴٫۷۷)
	۳	۰	۱۰٫۱۶	(۰٫۲۷)	**۶٫۳۰**	(۳٫۹۶)	۶٫۹۱	(۴٫۴۱)
	۰٫۵	-۰٫۵	**۲۴٫۹۵**	(۴۸٫۷۹)	۱۳۳٫۷۴	(۱۵۵٫۱)	۱۴۹٫۷۸	(۱۴۶٫۹)
	۱	-۱	**۱۲٫۵۱**	(۵٫۷۷)	۳۴٫۷۹	(۳۵٫۴۰)	۴۱٫۱۵	(۳۹٫۲۸)
	۲	-۲	۱۰٫۱۷	(۰٫۳۸)	**۷٫۰۳**	(۴٫۶۰)	۷٫۹۳	(۵٫۵۶)
	۳	-۳	۱۰٫۱۵	(۰)	**۳٫۴۲**	(۱٫۸۸)	۳٫۷۹	(۱٫۷۰)
	اندازه گروه		۱۰٫۱۵		۲٫۵۶		۲	
	تعداد دسته		۱		۲		۲٫۶	
	تخمین α		۰٫۸۷۸۶۴		۰٫۰۳۴۴۰۵		۰٫۰۰۷۵۸۸۲	

جدول ۳. ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM برای $\Phi(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}$.

ضریب اتورگرسیو	انحراف در X_1	انحراف در X_2	حد بالای تعداد دسته=۱		حد بالای تعداد دسته=۲		حد بالای تعداد دسته=۳	
$\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}$	۰	۰	۳۷۲٫۳۶	(۲۲۷۰)	۳۷۰٫۹۶	(۲۰۱۱)	۳۶۹٫۳۳	(۱۳۶۱)
	۰٫۵	۰٫۵	**۱۶۸٫۳۹**	(۴۳۰٫۵)	۲۱۶٫۸۵	(۸۷۰٫۶)	۲۵۹٫۳۱	(۶۵۹٫۹)
	۱	۱	**۱۰۴٫۳۵**	(۱۰۲٫۹)	۱۱۳٫۷۳	(۲۷۱٫۴)	۱۵۶٫۹۲	(۳۱۵٫۴)
	۲	۲	۶۸٫۵۶	(۲۳٫۱۸)	**۵۰٫۳۷**	(۵۲٫۰۱)	۶۳٫۹۷	(۷۳٫۹۵)
	۳	۳	۶۲٫۱۳	(۷٫۲۵)	**۳۲٫۷۸**	(۱۹٫۴۴)	۳۶٫۴۷	(۲۷٫۷۵)
	۰٫۵	۰	۲۷۴٫۲۷	(۱۱۹۶)	**۲۵۴٫۰۳**	(۱۰۴۰)	۲۹۲٫۰۴	(۷۶۱٫۴)
	۱	۰	**۱۴۳٫۵۸**	(۳۰۷٫۰)	۱۶۱٫۲۳	(۵۱۴٫۵)	۱۹۸٫۹۴	(۳۸۱٫۳)
	۲	۰	۸۳٫۴۳	(۵۹٫۴۰)	**۷۷٫۰۵**	(۱۲۰٫۷)	۹۸٫۹۲	(۱۳۳٫۱)
	۳	۰	۶۷٫۳۱	(۲۱٫۸۹)	**۴۷٫۳۰**	(۴۳٫۴۳)	۵۷٫۸۹	(۵۷٫۱۷)
	۰٫۵	-۰٫۵	۲۲۴٫۵۴	(۱۰۱۸)	**۲۰۴٫۲۹**	(۶۸۰٫۲)	۲۵۵٫۸۵	(۵۷۷٫۹)
	۱	-۱	**۱۰۹٫۰۴**	(۱۸۱٫۲)	۱۱۰٫۱۸	(۲۳۸٫۳)	۱۵۱٫۶۵	(۲۷۰٫۱)
	۲	-۲	۶۸٫۹۰	(۲۷٫۷۱)	**۵۰٫۱۸**	(۵۰٫۲۷)	۶۴٫۶۲	(۷۰٫۸۵)
	۳	-۳	۶۲٫۲۳	(۷٫۵۰)	**۳۲٫۷۱**	(۱۹٫۲۱)	۳۶٫۲۴	(۲۶٫۷۱)
	اندازه گروه		۶۱٫۲۱		۱۷٫۸۲		۱۱٫۶۳	
	تعداد دسته		۱		۲		۲٫۹۷	
	تخمین α		۰٫۳۰۳۳۱		۲٫۵۴۹۲*E-۶		۴٫۶۷۰۹*E-۱۰	

انحرافات مختلف در میانگین فرایند $VAR(1)$ تعداد دسته‌ی ۲ کارآیی بیشتری دارد.

در ادبیات کنترل فرایند آماری، هیچ‌یک از نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل با نمودارهای کنترل نیازمند مدل مقایسه نمی‌شوند، زیرا هریک کاربرد ویژه‌یی دارند. به‌بیان دیگر باتوجه به سهولت ترسیم و تفسیر نمودارهای کنترل بی‌نیاز از مدل، هیچ انتظاری مبنی بر بهتر بودن کارایی این نمودارها نسبت به نمودارهایی که برای یک مدل سری زمانی خاص طراحی شده‌اند وجود ندارد. نمودار $MGBM$ نیز یک نمودارکنترل بی‌نیاز از مدل است و باتوجه به این‌که تاکنون هیچ نمودارکنترل بی‌نیاز از مدلی برای فرایندهای چندمتغیره خودهمبسته پیشنهاد نشده است، در این تحقیق کارایی این نمودار را فقط با نمودار T^2 برای مشاهدات تکی مقایسه کرده‌ایم.

نتایج مقایسه‌ی نمودار کنترل $MGBM$ با نمودار هتلینگ $T^۲$ در حضور داده‌های چندمتغیره‌ی خودهمبسته، در جداول ۴، ۵ و ۶ ارائه شده‌است. نتایج این جداول نشان می‌دهد که باافزایش ضریب خودهمبستگی کارایی نمودار $MGBM$ نسبت به نمودار $T^۲$ افزایش می‌یابد، تا جایی که برای ضریب اتورگرسیو $\begin{bmatrix} ۰٫۹ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۹ \end{bmatrix}$، نمودار $MGBM$ موجب افزایش ۴۰ درصدی کارایی نمودار $T^۲$، در برخورد با داده‌های چندمتغیره‌ی خودهمبسته می‌شود.

جدول ۴. مقایسه‌ی ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM و $\mathbf{T}^۲$ برای $\Phi(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} ۰٫۱ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۱ \end{bmatrix}$.

ضریب اتورگرسیو	انحراف در $X_۱$	انحراف در $X_۲$	MGBM	$T^۲$	درصد بهبود	میانگین درصد بهبود
	۰	۰	۳۶۷٫۷۲ (۳۷۵٫۹)	۳۷۳٫۴۷ (۳۷۵٫۷۷)	۱٫۵۴	
	۰٫۵	۰٫۵	۱۳۰٫۰۱ (۱۳۵٫۱)	۱۳۱٫۹۱ (۱۲۹٫۷۲)	۱٫۴۴	
	۱	۱	۲۹٫۰۲ (۲۸٫۲۷)	۲۸٫۷۲ (۲۸٫۰۱)	-۱٫۰۴	
	۲	۲	۳٫۵۱ (۲٫۷۵)	۳٫۵۶ (۲٫۷۹)	۱٫۶۶	
	۳	۳	۱٫۳۷ (۰٫۶۵)	۱٫۴۰ (۰٫۶۶)	۲٫۰۴	
	۰٫۵	۰	۲۰۰٫۵۷ (۲۰۴٫۶)	۲۰۶٫۸۰ (۲۰۸٫۶۷)	۳٫۰۱	
$\begin{bmatrix} ۰٫۱ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۱ \end{bmatrix}$	۱	۰	۶۸٫۵۷ (۶۹٫۲۰)	۶۹٫۶۹ (۶۸٫۹۴)	۱٫۶۱	۱٫۵۴
	۲	۰	۱۰٫۰۰ (۹٫۳۴)	۱۰٫۱۸ (۹٫۴۲)	۱٫۷۶	
	۳	۰	۳٫۰۰ (۲٫۲۵)	۳٫۰۵ (۲٫۲۵)	۱٫۵۴	
	۰٫۵	-۰٫۵	۱۲۸٫۵۲ (۱۲۹٫۹)	۱۳۳٫۶۶ (۱۳۴٫۸۱)	۳٫۸۵	
	۱	-۱	۲۸٫۷۴ (۲۸٫۱۵)	۲۸٫۹۴ (۲۸٫۴۰)	۰٫۷۰	
	۲	-۲	۳٫۴۷ (۲٫۷۸)	۳٫۵۲ (۲٫۷۸)	۱٫۴۷	
	۳	-۳	۱٫۳۹ (۰٫۶۶)	۱٫۳۹ (۰٫۶۸)	۰٫۳۸	

جدول ۵. مقایسه‌ی ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM و$\mathbf{T}^۲$ برای $\Phi(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۵ \end{bmatrix}$.

ضریب اتورگرسیو	انحراف در $X_۱$	انحراف در $X_۲$	MGBM	$T^۲$	درصد بهبود	میانگین درصد بهبود
	۰	۰	۳۷۸٫۰۰ (۴۵۱٫۷)	۳۶۶٫۶۹ (۳۶۸٫۱۱)	-۳٫۰۸	
	۰٫۵	۰٫۵	۱۳۵٫۶۷ (۱۵۱٫۲)	۱۶۷٫۸۱ (۱۶۸٫۸۸)	۱۹٫۱۵	
	۱	۱	۳۴٫۵۸ (۳۵٫۰۸)	۵۱٫۳۳ (۵۰٫۱۸)	۳۲٫۶۳	
	۲	۲	۷٫۰۲ (۴٫۵۳)	۸٫۶۰ (۶٫۶۲)	۱۸٫۴۱	
	۳	۳	۳٫۴۰ (۱٫۸۵)	۳٫۵۷ (۲٫۰۲)	۴٫۶۰	
	۰٫۵	۰	۲۰۸٫۸۷ (۲۴۴٫۱)	۲۴۳٫۱۸ (۲۴۲٫۷۴)	۱۴٫۱۱	
$\begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۵ \end{bmatrix}$	۱	۰	۷۴٫۳۶ (۸۱٫۵۷)	۱۰۲٫۹۷ (۱۰۰٫۷۶)	۲۷٫۷۸	۲۰٫۳۰
	۲	۰	۱۴٫۷۹ (۱۲٫۹۶)	۲۱٫۳۳ (۱۸٫۹۴)	۳۰٫۶۵	
	۳	۰	۶٫۳۰ (۳٫۹۶)	۷٫۵۴ (۵٫۶۶)	۱۶٫۵۳	
	۰٫۵	-۰٫۵	۱۳۳٫۷۴ (۱۵۵٫۱)	۱۷۱٫۱۴ (۱۷۰٫۱۸)	۲۱٫۸۵	
	۱	-۱	۳۴٫۷۹ (۳۵٫۴۰)	۵۰٫۳۵ (۴۸٫۱۶)	۳۰٫۹۱	
	۲	-۲	۷٫۰۳ (۴٫۶۰)	۸٫۸۹ (۶٫۸۱)	۲۰٫۹۱	
	۳	-۳	۳٫۴۲ (۱٫۸۸)	۳٫۶۴ (۲٫۰۱)	۶٫۰۵	

جدول ۶. مقایسه‌ی ARL و (SDRL) نمودار کنترل MGBM و $T^{۲}$ برای $\mathbf{\Phi(B)} = \begin{bmatrix} ۰٫۹ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۹ \end{bmatrix}$.

ضریب اتورگرسیو	انحراف در $\mathbf{X}_{۱}$	انحراف در $\mathbf{X}_{۲}$	MGBM	$\mathbf{T}^{۲}$	درصد بهبود	میانگین درصد بهبود
	۰	۰	۳۷۰٫۹۶ (۲۰۱۱)	۳۶۷٫۹۶ (۳۷۴٫۳۸)	-۰٫۸۹	
	۰٫۵	۰٫۵	۲۱۶٫۸۵ (۸۷۰٫۶)	۳۱۲٫۰۷ (۳۱۲٫۴۲)	۳۰٫۵۱	
	۱	۱	۱۱۳٫۷۳ (۲۷۱٫۴)	۲۱۸٫۸۹ (۲۱۴٫۱۵)	۴۸٫۰۴	
	۲	۲	۵۰٫۳۷ (۵۲٫۰۱)	۹۳٫۱۴ (۸۵٫۸۹)	۴۵٫۹۲	
	۳	۳	۳۲٫۷۸ (۱۹٫۴۴)	۴۶٫۰۷ (۳۷٫۲۰)	۲۸٫۸۵	
	۰٫۵	۰	۲۵۴٫۰۳ (۱۰۴۰)	۳۳۸٫۰۶ (۳۳۷٫۷۶)	۲۴٫۸۶	
$\begin{bmatrix} ۰٫۹ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۹ \end{bmatrix}$	۱	۰	۱۶۱٫۲۳ (۵۱۴٫۵)	۲۷۸٫۸۴ (۲۸۱٫۸۹)	۴۲٫۱۸	۳۹٫۳۷
	۲	۰	۷۷٫۰۵ (۱۲۰٫۷)	۱۵۳٫۳۲ (۱۵۰٫۱۲)	۴۹٫۷۵	
	۳	۰	۴۷٫۳۰ (۴۳٫۴۳)	۸۳٫۲۱ (۷۴٫۳۵)	۴۳٫۱۶	
	۰٫۵	-۰٫۵	۲۰۴٫۲۹ (۶۸۰٫۲)	۳۱۶٫۵۸ (۳۲۰٫۲)	۳۵٫۴۷	
	۱	-۱	۱۱۰٫۱۸ (۲۳۸٫۳)	۲۲۰٫۶۷ (۲۱۹٫۸۶)	۵۰٫۰۷	
	۲	-۲	۵۰٫۱۸ (۵۰٫۲۷)	۹۲٫۹۴ (۸۷٫۲۱)	۴۶٫۰۱	
	۳	-۳	۳۲٫۷۱ (۱۹٫۲۱)	۴۵٫۱۸ (۳۷٫۰۴)	۲۷٫۵۹	

۵. نتیجه‌گیری

بیشتر نمودارهای پیشنهاد شده برای فرایندهای خودهمبسته نمودارهایی هستند که در آنها فقط یک متغیر مطرح است و به فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته کم‌تر پرداخته شده است. در معدود نمودارهای کنترل پیشنهادشده نیز یک فرض اصلی مبنی بر این‌که داده‌ها از مدلی خاص برخوردارند (به‌اصطلاح روش‌های نیازمند مدل) برقرار بوده است. در این تحقیق یک نمودار چندمتغیره‌ی جدید به‌نام نمودار کنترل میانگین‌های گروهی دسته‌بندی شده ($MGBM$) برای تشخیص انحرافات میانگین پیشنهاد شد. این نمودار بی‌نیاز از مدل بوده و برخلاف سایر نمودارهای ارائه‌شده برای فرایندهای چندمتغیره‌ی خودهمبسته به‌سادگی قابل ترسیم و تفسیر است.

کارایی متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترل $MGBM$ بااستفاده از شبیه‌سازی برای سه حد بالای مختلف تعداد دسته به‌دست آمد. نتایج حاصل بیان‌گر این نکته‌اند که تعداد دسته‌ی ۱ (توسعه‌ی روش توصیه‌شده‌ی رانگر و ویلمین برای حالت چندمتغیره) خطای نوع اول بالایی دارد. همچنین تعداد دسته‌ی ۲ در ضرایب خودهمبستگی پایین تنها در تشخیص انحرافات بزرگ میانگین کارایی بهتری نسبت به تعداد دسته‌ی ۱ دارد، ولی کارایی آن باافزایش ضریب خودهمبستگی افزایش می‌یابد. مقایسه‌ی کارایی نمودارکنترل $MGBM$ با نمودارکنترل $T^{۲}$ در حضور مشاهدات چندمتغیره‌ی خودهمبسته نیز نشان داد که نمودارکنترل $MGBM$ که بر پایه‌ی نمودارکنترل $T^{۲}$ ساخته شده‌است می‌تواند در حالت خودهمبستگی مثبت مشاهدات، کارایی نمودار کنترل $T^{۲}$ را به‌میزان چشم‌گیری بهبود دهد. همچنین باافزایش ضریب خودهمبستگی میزان این بهبود افزایش می‌یابد.

بااستفاده از روش پیشنهادیِ جدید برای کاهش خودهمبستگی فرایندهای چندمتغیره، می‌توان تخمین خوبی برای ماتریس واریانس ـ کوواریانس (انحراف استاندارد) و درنتیجه فاصله‌ی اطمینان مناسبی برای بردار میانگین مشاهدات یافت. این روش را در تجزیه‌و تحلیل داده‌های خروجی چندمتغیره‌ی شبیه‌سازی نیز می‌توان به‌کار برد.

پانوشت

1. monitoring
2. autocorrelated
3. multivariate grouped batched means
4. multivariate cumulative SUM
5. multivariate exponentially weighted moving average
6. latent structure
7. vector auto-regressive
8. noise series
9. single step finite intersection test
10. multivariate grouped batch means
11. independent replications method
12. batch means method
13. spectral analysis method
14. autoregressive method
15. Average Run Length

منابع

1. Jarrett, J. E., and Pan, X. "The quality control chart for monitoring multivariate auto-correlated processes," *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, pp. 3862-3870 (2007).
2. Lowry, C. A., and Montgomery, D.C. "A review of multivariate control charts," *IIE Transactions*, **27**, pp. 800-810 (1995).

3. Mastrangelo, C.M, and Forrest, D.R. "Multivariate autocorrelated processes: data and shift generation," *Journal of Quality Technology,* **34**, pp. 216-220 (2002).

4. Biller, B., and Nelson, B.L. "Modeling and generating multivariate time-series input processes using a vector autoregressive technique," *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation,* **13**, pp. 211-237 (2003).

5. Theodossiou, P.T. "Predicting shifts in the mean of multivariate time series process: an application in predicting business failures," *Journal of the American Statistical Association,* **88**, pp. 441–447 (1993).

6. Kramer, H. G., and Schmid, W. "EWMA charts for multivariate time series," *Sequential Analysis,* **16**, pp. 131-154 (1997).

7. Kalgonda, A.A., and Kulkarni, S.R. "Multivariate quality control chart for auto-correlated processes," *Journal of Applied Statistics,* **31**, pp. 317-327 (2004).

8. Timm, N.H. "Multivariate quality control using finite intersection tests," *Journal of Quality Technology,* **28**, pp. 233-243 (1996).

9. Morovatdar, R., and Niaki, S.T.A. "A grouped batch means approach in monitoring autocorrelated processes," In *the Proceedings of the 37th International Conference on Computers & Industrial Engineering*, Alexandria, Egypt, (October 20-23, 2007).

10. Runger G.C., and Willemain T.R. "Batch-means control charts for auto-correlated data," *IIE Transactions,* **28**, pp. 483-487 (1996).

11. Niaki, S.T.A., and Iskander, W.H. "A principal-components approach to assign confidence intervals in steady-state simulation," *IIE Transactions,* **38**, pp. 117-126 (2006).

12. Alwan, L.C., and Radson, D. "Time-series investigation of sub-sample mean charts," *IIE Transactions,* **24**, pp. 66-80 (1992).

13. Alwan, L.C. "Effects of autocorrelation on control chart performance," *Communications in Statistics: Theory and Methods,* **21**, pp. 1025-1049 (1992).

14. Hotelling, H.*Multivariate quality control-illustrated by the air testing of sample bombsights, Techniques of Statistical Analysis,* Eisenhart, C., Hastay, M.W., Wallis, W. A. (eds.), New York: McGraw-Hill, pp. 111-184 (1947).

15. Holmes, D.S., and Mergen, A.E. "Improving the performance of the T^2 control chart," *Quality Engineering,* **5**, pp. 619-625 (1993).