مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
مرداد ۱۳۸۸، شماره‌ی چهل و نهم، ص. ۱۰۱-۱۰۵

بهینه‌سازی مدل مقدار اقتصادی تولید(EPQ) با تحویل سفارش به‌صورت گسسته

سیدحمیدرضا پسندیده (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین

مدل مقدار اقتصادی تولید (EPQ) یکی از مدل‌های کلاسیک کنترل موجودی است که کاربرد گسترده‌یی دارد. این مدل دارای فرضیات مختلفی است که استفاده از آن را در شرایط واقعی محدود می‌کند. هدف این پژوهش توسعه‌ی مدل مقدار اقتصادی تولید است و فرض تحویل سفارش با نرخ ثابت و پیوسته را در نظر نمی‌گیرد، و چنین فرض می‌کند که سفارش را می‌توان به‌صورت بسته‌های چندتایی تحویل گرفت. در شرایط جدید، هزینه‌های EPQ محاسبه، و مدل‌سازی جدید ارائه می‌شود. همچنین برای محاسبه‌ی مقدار بهینه‌ی سفارش و نقطه‌ی سفارش نیز الگوریتمی ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: مدل EPQ، تحویل چندگانه، بهینه‌سازی.

Shr_pasandideh@sbu.ac.ir

۱. مقدمه

مدل‌های کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی[۱] (EOQ) و مقدار اقتصادی تولید[۲] (EPQ) در زمینه‌های مختلف برای کنترل موجودی کاربرد گسترده‌یی دارند. از سوی دیگر این مدل‌ها شرایط و فرضیاتی دارند که در شرایط واقعی کم‌تر قابل قبول‌اند. به‌همین دلیل برای استفاده‌ی بهتر از نتایج، مدل‌های کلاسیک باید از جنبه‌های مختلف توسعه داده شوند. در سال‌های اخیر محققین مدل EPQ را از نقطه‌نظرهای مختلف توسعه داده‌اند. برای مثال مدل EPQ را با شرایط نرخ تولید متغیر در نظر گرفته‌اند.[۱] در این تحقیقات، محققین هزینه‌ی تولید را به‌صورت تابع خطی چندمرحله‌یی از تولید در نظر گرفته‌اند و با این شرایط مقدار اقتصادی سفارش را به‌دست آورده‌اند. در مدل EPQ فرض می‌شود که فرایند تولید دارای نرخ ثابت و بدون ضایعات است و در آن مسائل مربوط به کنترل کیفیت در نظر گرفته نمی‌شود. در یکی از تحقیقات به‌عمل آمده، این مدل در شرایطی بررسی شده است که فرایند تولید، فرایند بدون نقصی نبوده و ممکن است تولیدات معیوب هم داشته باشد.[۲] در این بررسی هزینه‌های کنترل کیفیت نیز در مدل تأثیر داده شده است.

در سال ۲۰۰۶ مدل EPQ با سفارشات تأخیرشده مورد تحلیل قرار گرفت.[۳] در این تحلیل انواع راهکارهای تأخیر درمورد یک تولیدکننده در یک زنجیره‌ی عرضه، و نیز تأثیر آنها در هزینه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در همین سال (۲۰۰۶)، مدت زمان بهینه‌ی یک دوره با توجه به ضایعات، دوباره‌کاری و توقف‌های تصادفی فرایند تولید محاسبه شد.[۴] در این تحقیق مدت‌زمان بهینه در یک محدوده‌ی دوطرفه ارائه شد. پیش‌تر، در سال ۲۰۰۳، مدت‌زمان بهینه‌ی یک دوره تحت شرایط مجاز بودن تأخیر در پرداخت‌ها محاسبه شده بود.[۵] در شرایط عادی‌در مدل EPQ به‌محض دریافت سفارش، هزینه‌ی خرید آن پرداخت می‌شود. ولی در شرایط واقعی در پرداخت‌ها امکان تأخیر وجود دارد که اصطلاحاً آن را «پریود اعتبار» می‌نامند. محققین در بررسی‌های خود تأثیر پریود اعتبار را در مقدار بهینه‌ی سفارش بررسی کردند. برخی از آنان نیز بر مبنای پریود اعتبار مدل را توسعه داده‌اند.[۶و۷] یکی دیگر از جنبه‌هایی که در توسعه‌ی مدل EPQ مورد توجه قرار گرفته است، فازی‌کردن برخی از پارامترهای آن است. در همین راستا، مدل EPQ با شرایط تقاضا و تولید فازی مورد تحلیل قرار گرفته است.[۸] فرض آنها این بود که در وضعیت‌های واقعی، نمی‌توان نرخ تولید و تقاضا را ثابت در نظر گرفت و این پارامترها معمولاً حالت فازی دارند. آنها در تحقیقات خود به این نتیجه رسیدند که کل هزینه‌های مدل EPQ تحت شرایط فازی کمی بیش از کل هزینه‌ها در شرایط قطعی است. محققین دیگری نیز مدل را با رویکرد فازی توسعه داده‌اند[۹] و با این فرض که هزینه‌ی هر واحد تولید یک پارامتر فازی باشد، به بهینه‌سازی مدل پرداختند. تحلیل حساسیت مدل نسبت به پارامترهای مختلف نیز در تحقیقات آنها انجام شد. در نهایت در سال ۲۰۰۶ اقدام به تحلیل مدل به‌صورت برنامه‌ریزی هندسی فازی شد.[۱۰] در این مطالعات، فضای انبار و پایایی فرایند را به‌عنوان محدودیت‌های مدل در نظر گرفتند.

۲. تعریف مسئله

یکی از مسائل بسیار مهم در شرکت‌هایی که از خدمات پیمانکاران بهره می‌برند، تعیین چگونگی سفارش‌دهی (شامل مقدار سفارش و نقطه‌ی سفارش محصولات)

تاریخ: دریافت ۱۳۸۵/۹/۱۸، داوری ۱۳۸۶/۱۱/۲۳، پذیرش ۱۳۸۶/۱۱/۲۹.

است. چارچوب اصلی مسئله‌ی مورد بررسی در این مقاله عبارت‌است از این که شرکتی برای تولید یکی از محصولات خود با یک پیمانکار ارتباط دارد. شرایط این ارتباط تولیدی بین دو طرف عبارت است از:

- پیمانکار محصول را با نرخ ثابت و مشخصی تولید می‌کند.
- تقاضا برای محصول نرخ ثابت و مشخصی دارد.
- هر سفارش برای محصول، در قالب چند پالت به شرکت ارسال می‌شود.
- هزینه‌ی حمل هر پالت محصول برعهده‌ی شرکت است.
- ظرفیت هر پالت و تعداد دفعات حمل آنها باید توسط شرکت تعیین شود.
- هزینه‌های ثابت سفارش‌دهی و نگه‌داری مقادیر معلوم و مشخص‌اند.
- کمبود و تأخیر در ارسال مجاز نیست.

هدف از تحلیل مسئله، تعیین مقدار سفارش، نقطه‌ی سفارش،ظرفیت هر پالت و تعداد دفعات حمل برای محصول مورد نظر است،به‌طوری که کل هزینه‌های مدل موجودی کمینه، و محدودیت‌های مدل نیز ارضاء شود.

۳. مدل‌سازی مسئله

با توجه به چارچوب مسئله و ویژگی‌های آن می‌توان برای مدل‌سازی آن از توسعه‌ی مدل EPQ استفاده کرد.[۱۱] زیرا هر دو مدل در شرایط تولیدی قرار دارند، با این تفاوت که در مدل کلاسیک EPQ سفارش با نرخ ثابت تولید و سپس تحویل شرکت مورد نظر می‌شود، ولی در مسئله‌ی مورد بررسی پیمانکار پس از تولید سفارش، آن را در چند محموله و پالت مختلف به شرکت تحویل می‌دهد.

برای مدل‌سازی مسئله پس از تعریف پارامترهای مربوطه، نمودار موجودی آن ارائه شده و سپس با محاسبه‌ی هزینه‌ها، مدل مسئله فرموله می‌شود.

۱.۳. پارامترها

با توجه به تعریف مسئله و نیز شرایط مدل EPQ می‌توان پارامترها را چنین تعریف کرد:

Q: مقدار سفارش محصول؛
r_h: نقطه‌ی سفارش محصول؛
p: نرخ تولید محصول؛
D: نرخ تقاضای محصول؛
T: مدت زمان هر دوره‌ی محصول؛
T_p: مدت زمان تولید در هر دوره‌ی محصول؛
T_d: مدت زمان مصرف خالص در هر دوره‌ی محصول؛
t: مدت زمان بین دو حمل متوالی پالت محصول؛
L: مدت زمان تدارک یا تحویل محصول؛
k: ظرفیت پالت محصول؛
m: تعداد دفعات حمل محصول در هر دوره؛
b: هزینه‌ی هر نوبت حمل پالت محصول؛
A: هزینه‌ی ثابت سفارش‌دهی هر سفارش محصول؛
h: هزینه‌ی نگه‌داری هر واحد محصول در سال؛
c: هزینه‌ی تهیه‌ی هر واحد محصول؛
TH: کل هزینه‌ی نگه‌داری سالیانه‌ی محصول؛
TT: کل هزینه‌ی حمل سالیانه‌ی محصول؛
TB: کل هزینه‌ی تهیه‌ی سالیانه‌ی محصول؛
TS: کل هزینه‌ی ثابت سفارش‌دهی محصول؛
TC: هزینه‌ی کل سالیانه‌ی محصول.

۲.۳. نمودار موجودی

با توجه به شرایط مسئله، مدل مسئله‌ی تحت بررسی به مدل EPQ نزدیک است. به‌همین دلیل شرایط کلی نمودار موجودی با شرایط این مدل یکسان است، با این تفاوت که پس از تولید محصول در هر نوبت، در قالب پالت‌های kتایی و در m دفعه تحویل داده می‌شوند. شکل کلی نمودار موجودی برای محصول در شکل ۱ ارائه شده است.

با توجه به شکل ۱ می‌توان نتیجه گرفت تنها تفاوت مدل ارائه شده با مدل کلاسیک EPQ، در مدت زمان (T_d) است. هریک از جهش‌ها در این قسمت نشان‌دهنده‌ی یک بار تحویل پالت با ظرفیت k است. بدیهی است تعداد جهش‌ها نشان‌دهنده‌ی تعداد تحویل‌های پالت‌ها در هر دوره (m) است. مثلاً چنانچه ۴ تحویل ($m = ۴$) در هر دوره وجود داشته باشد، مقدار سفارش محصول به‌اندازه‌ی $۴k$ خواهد بود. بنابراین در مدل یادشده برای محصول همواره رابطه‌ی $Q = mk$ برقرار است.

۳.۳. محاسبه‌ی هزینه‌ها

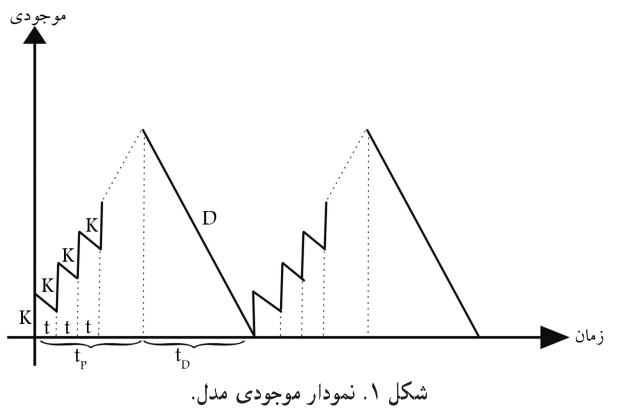
برای محاسبه‌ی هزینه‌ی کل سالیانه (TC) باید اجزاء تشکیل‌دهنده‌ی آن را محاسبه کرد. با توجه به مؤلفه‌های هزینه‌ی یک سیستم، موجودی TC را می‌توان مطابق رابطه‌ی ۱ به‌دست آورد:

$$TC = TB + TT + TS + TH \qquad (۱)$$

لازم به ذکر است که چون در مدل هزینه‌های کمبود وجود ندارد، از آن صرف نظر شده است. همچنین از آنجا که نرخ تقاضای سالیانه برای محصول کاملاً مشخص است، برای محاسبه‌ی TB از رابطه‌ی ۲ استفاده می‌شود:

$$TB = cD \qquad (۲)$$

بدیهی است هزینه‌ی حمل به تعداد دفعات حمل بستگی دارد و بنابراین در هر دوره این هزینه معادل mb خواهد بود. از سوی دیگر، چون تعداد دوره‌ها برای هر



شکل ۱. نمودار موجودی مدل.

محصول از رابطه‌ی $\frac{D}{Q}$ به‌دست می‌آید[11]، عبارت TT مطابق رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید:

$$TT = mb\frac{D}{Q} = \frac{Q}{k}b\frac{D}{Q} = b\frac{D}{k} \qquad (3)$$

چون هزینه‌ی ثابت سفارش‌دهی یک نوبت سفارش محصول معادل A در نظر گرفته شده، لذا به‌دلیل مشابه رابطه‌ی ۴ برای محاسبه‌ی هزینه‌های ثابت سفارش‌دهی مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$TS = A\frac{D}{Q} \qquad (4)$$

محاسبه‌ی هزینه‌ی نگه‌داری مدل نسبت به سایر هزینه‌ها پیچیده‌تر است. با توجه به شکل ۱، هر دوره از دو قسمت T_p و T_d تشکیل می‌شود. در قسمت T_p شکل از یک دسته ذوزنقه تشکیل می‌شود که تعداد آنها برای هر محصول به‌اندازه‌ی $m-1$ است. اگر $ls(j)$ نشان‌دهنده‌ی مساحت ذوزنقه‌ی شماره‌ی j در این ناحیه باشد،آنگاه:

$$ls(1) = (\frac{k + (k - Dt)}{2})t = (\frac{2k - Dt}{2})t \qquad (5)$$

$$ls(2) = (\frac{(k - Dt + k) + (2k - 2Dt)}{2})t = (\frac{4k - 3Dt}{2})t \qquad (6)$$

با توجه به الگوی مساحت‌های ذوزنقه، می‌توان رابطه‌ی عمومی ۷ را برای $ls(j)$ ارائه داد:

$$ls(j) = (\frac{2jk - (2j - 1)Dt}{2})t \qquad , j = 1, ..., m-1 \qquad (7)$$

چنانچه ls نشان‌دهنده‌ی کل مساحت ذوزنقه‌ها در سمت چپ دوره‌ها باشد، در این صورت ls مطابق رابطه‌ی ۸ به‌دست می‌آید:

$$ls = \sum_{j=1}^{m-1} ls(j) = (m-1)\frac{Dt^2}{2} + (kt - Dt^2)m\frac{m-1}{2} \qquad (8)$$

همچنین اگر rs نشان‌دهنده‌ی مساحت مثلث سمت راست دوره باشد، در این صورت با توجه به شکل ۱ رابطه‌ی ۹ برای rs به‌دست می‌آید:

$$rs = \frac{1}{2}(Q - (m-1)Dt)(\frac{Q}{D} - (m-1)t) \qquad (9)$$

اگر s نشان‌دهنده‌ی مساحت یک دوره باشد، در این‌صورت با توجه به روابط ۸ و ۹، s مطابق رابطه‌ی ۱۰ به‌دست می‌آید:

$$s = ls + rs = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{D} - (m-1)mkt) \qquad (10)$$

با محاسبه‌ی s به‌راحتی می‌توان هزینه‌ی نگه‌داری مدل را براساس رابطه‌ی ۱۱ محاسبه کرد:

$$TH = \frac{D}{Q}hs = \frac{h}{2}(Q - (Q-k)\frac{D}{P}) \qquad (11)$$

یادآور می‌شود که در محاسبه‌ی هزینه‌ی نگه‌داری TH، از روابط $k = pt$ و $Q = mk$ استفاده شده است. باید توجه کرد که چنانچه مدل در حالت‌های خاص قرار بگیرد، رابطه‌ی ۱۱ منجر به نتایج صحیح می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر $Q = k$ آنگاه با توجه به وجود فقط یک دریافت، مدل باید تبدیل به مدل کلاسیک EOQ شود. بنابراین هزینه‌ی نگه‌داری باید مشابه هزینه‌ی نگه‌داری مدل EOQ شود که این نتیجه با رابطه‌ی ۱۱ سازگار است. باتوجه به روابط ۲، ۳، ۴، و ۱۱، رابطه‌ی ۱ به رابطه‌ی ۱۲ تبدیل خواهد شد:

$$TC = cD + b\frac{D}{k} + A\frac{D}{Q} + \frac{h}{2}(Q - (Q-k)\frac{D}{P}) \qquad (12)$$

۴.۳. فرموله‌کردن مسئله

برای فرموله‌کردن مسئله باید توجه کرد که پرسش اساسی آن است که مقادیر سفارش و ظرفیت پالت و تعداد دفعات حمل پالت‌ها چگونه باشد تا هزینه‌ی کل به‌دست آمده از رابطه‌ی ۱۲ حداقل شده و همچنین محدودیت‌های مسئله ارضاء شوند. با توجه به ماهیت متغیرهای تصمیم بدیهی است آنها از نوع عدد صحیح خواهند بود. از سوی دیگر باید توجه کرد که دست‌کم یک پالت باید تحویل داده شود. بنابراین می‌توان مسئله را به‌صورت رابطه‌ی ۱۳ مطرح کرد:

$$\begin{aligned}
&\min\ TC = cD + b\frac{D}{k} + A\frac{D}{Q} + \frac{h}{2}(Q - (Q-k)\frac{D}{P}) \\
&\quad s.t.: \\
&\quad Q = mk \\
&\quad m \geq 1 \\
&m, k, Q \qquad \text{عدد صحیح} \qquad (13)
\end{aligned}$$

در ادامه، الگوریتمی برای حل مدل ۱۳ ارائه می‌شود.

۴. الگوریتم حل

با توجه به این‌که متغیرهای تصمیم در تابع هدف مدل ۱۳، متغیرهای Q و k هستند می‌توان بدون توجه به محدودیت‌های مدل، مقادیر بهینه‌ی آنها را با مشتق‌گیری به‌دست آورد. نتایج حاصل از مشتق‌گیری چنین خواهد بود:

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h(1 - \frac{D}{P})}} \qquad (14)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial k} = 0 \Rightarrow k^* = \sqrt{\frac{2bP}{h}} \qquad (15)$$

با استفاده از روابط ۱۴ و ۱۵ مقادیر بحرانی Q و k به‌دست می‌آیند. برای اثبات این‌که مقادیر به‌دست آمده دارای شرایط بهینه از نوع حداقل برای تابع TC هستند، می‌توان از ماتریس هشین استفاده کرد. ماتریس هشین تابع TC که با $H(TC)$ نشان داده می‌شود، عبارت خواهد بود از:

$$H(TC) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 TC}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 TC}{\partial Q \partial k} \\ \frac{\partial^2 TC}{\partial k \partial Q} & \frac{\partial^2 TC}{\partial k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2DA}{Q^3} & 0 \\ 0 & \frac{2bD}{k^3} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

با توجه به عناصر ماتریس ۱۶ می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس $H(TC)$ یک ماتریس معین مثبت است و بنابراین تابع TC یک تابع کاملاً محدب خواهد بود. بدین‌ترتیب مقادیر روابط ۱۴ و ۱۵ کمینه‌ی مطلق خواهند بود.

چون مقادیر Q^* و k^* با فرض پیوسته بودن آنها به‌دست آمده‌اند، لذا نمی‌توانند به‌عنوان جواب‌های مدل ۱۳ مورد استفاده قرار بگیرند. مطابق مدل ارائه‌شده، k باید عدد صحیح باشد و Q نیز باید مضرب صحیحی از k باشد. از طرفی چون

تابع هزینه‌ها یک تابع کاملاً محدب است، می‌توان انتظار داشت که جواب‌های عدد صحیح باید در اطراف نقطه‌ی بهینه‌ی Q^* و k^* متمرکز باشد. بنابراین جواب‌های عدد صحیح مناسب برای k عبارت‌اند از: $[k^*]$ و $[k^*] + ۱$. باید یادآور شویم که $[k^*]$ نسبت به تمام اعداد صحیح کوچک‌تر از k^* در اولویت بالاتری است، چون به k^* نزدیک‌تر است. همچنین $[k^*] + ۱$ نیز در میان تمام جواب‌های عدد صحیح بزرگ‌تر از k^* در شرایط بهتری قرار دارد. به‌طور مشابه، درمورد m نیز با توجه به رابطه‌ی $Q = mk$ می‌توان مقادیر عدد صحیح $\left[\frac{Q^*}{k^*}\right]$ و $\left[\frac{Q^*}{k^*}\right] + ۱$ را درنظر گرفت.

با توجه به توضیحات ارائه شده، جواب بهینه‌ی مدل که با Q_I^* و k_I^* نشان داده می‌شوند، با استفاده از جدول ۱ تعیین می‌شوند. ستون سوم جدول ۱ با استفاده از رابطه‌ی ۱۲ به‌دست می‌آید. بدیهی است جواب بهینه‌ی Q_I^* و k_I^* یکی از چهار سطر جدول ۱ خواهد بود که با مقایسه‌ی هزینه‌ها انتخاب می‌شود. چنانچه مقدار Q از k کم‌تر باشد، برای جلوگیری از کمبود باید مقدارِ m برابر ۱ باشد. به‌عبارت دیگر Q برابر k انتخاب می‌شود و گزینه‌ی صفر برای m حذف می‌شود. بدین ترتیب از چهار حالت جدول ۱ تنها دو حالت باقی می‌ماند. با مراجعه به این جدول نیز مشخص می‌شود که تنها سطرهای دوم و چهارم برای بررسی باقی می‌مانند.

لازم به تذکر است که در تحلیل یک مدل کنترل موجودی، علاوه بر تعیین مقدار سفارش، نقطه‌ی سفارش نیز باید مشخص شود. یعنی باید تعیین کرد که سفارش براساس چه مقدار موجودی باید انجام شود. برای انجام این کار، در هر مدلی باید به مدت زمان تحویل[۳] یا پارامتر L توجه کرد. با توجه به شکل ۱ مشخص است که چنانچه مدت زمان تحویل از مدت زمان T_d کم‌تر باشد، شرایط نقطه‌ی سفارش مشابه مدل‌های EOQ و EPQ است.[۱۱] بنابراین چنانچه n به‌صورت $\left[\frac{L}{T}\right]$ تعریف شود، نقطه‌ی سفارش به‌صورت $r_h = D(L - nT)$ خواهد بود.

چنانچه باقی‌مانده‌ی مدت زمان تحویل در ذوزنقه‌ی آخر از سمت چپ دوره‌ها ($m - ۱$) باشد، نقطه‌ی سفارش مشابه مدل EOQ است با این تفاوت که از آن باید به‌اندازه‌ی k کسر کرد. همچنین چنانچه باقی‌مانده‌ی مدت زمان تحویل در ذوزنقه‌ی ماقبل آخر (یا $m - ۲$) قرار بگیرد، آنگاه از نقطه‌ی سفارش باید به‌اندازه‌ی $۲k$ کسر کرد. بنابراین درحالت کلی اگر باقی‌مانده‌ی مدت زمان تحویل در ذوزنقه‌ی j قرار بگیرد باید از نقطه‌ی سفارش به‌اندازه‌ی k $(m - j)$ کسرکرد. بدین‌ترتیب با استفاده از رابطه‌ی ۱۷ می‌توان نقطه‌ی سفارش مدل را تعیین کرد.

$$r_h = \begin{cases} D(L - nT) & , L - nt \leq T_d \\ D(L - nT) - (m - j)k & , T_d + (m - ۱ - j)t \leq L - \\ nT \leq T_d + (m - j)t & , j = ۱, ..., m - ۱ \end{cases} \quad (۱۷)$$

که در آن t نشان‌دهنده‌ی قاعده‌ی هر ذوزنقه است.

جدول ۱. محاسبات برای تعیین نقطه‌ی بهینه.

k	Q	TC
$[k^*]$	$[k^*] \times \left[\frac{Q^*}{k^*}\right]$	$TC_۱$
$[k^*]$	$[k^*] \times (\left[\frac{Q^*}{k^*}\right] + ۱)$	$TC_۲$
$[k^*] + ۱$	$([k^*] + ۱) \times \left[\frac{Q^*}{k^*}\right]$	$TC_۳$
$[k^*] + ۱$	$([k^*] + ۱) \times (\left[\frac{Q^*}{k^*}\right] + ۱)$	$TC_۴$

جدول ۲. اطلاعات عددی مثال.

پارامتر	A	D	h	P	b	L
مقدار	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۲۰۰	۲۰۰۰	۱۰	۱

جدول ۳. محاسبات برای تعیین مقدار بهینه سفارش.

K	Q	TC
۴۴	۶۱۶	۶۷۷۴,۰۲۶
۴۴	۶۶۰	۶۷۷۷,۵۷۶
۴۵	۶۳۰	۶۷۷۱,۵۷۶
۴۵	۶۷۵	۶۷۸۵,۱۸۵

جدول ۴. محاسبات برای تعیین نقطه سفارش.

T	n	t	T_d	L-nT	D(L-nT)
۰٫۶۳۱	۱	۰٫۰۲۲۵	۰٫۳۱۵	۰٫۳۶۹	۳۶۹

۵. مثال عددی

برای تشریح حل، فرض کنید اطلاعات عددی مدل به‌صورت جدول ۲ باشد. تحت چنین شرایطی، مقادیر عددی Q^* و k^* با استفاده از روابط ۱۴ و ۱۵ به ترتیب ۶۳۲٫۴۶ و ۴۴٫۷۲۱ خواهند بود. بدین‌ترتیب برای به‌دست آوردن مقادیر بهینه‌ی Q_I^* و k_I^*، جدول ۱ به‌صورت جدول ۳ خواهد شد.

لازم به ذکر است که در محاسبات مربوط به TC، به‌دلیل ثابت‌بودن مقدار CD از آن صرف نظر شده است. با توجه به مقادیرTC، سطر سوم جدول انتخاب شده و درنتیجه مقادیر بهینه Q_I^* و k_I^* به‌ترتیب ۶۳۰ و ۴۵ خواهند بود. بدین‌ترتیب سیاست بهینه آن است که در هر نوبت ۶۳۰ واحد سفارش داده شود که در ۱۴ پالت با ظرفیت ۴۵ تایی تحویل گرفته می‌شود. با اتخاذ این سیاست توسط شرکت انتظار می‌رود که هزینه‌ی کل موجودی حداقل شود.

برای تعیین نقطه‌ی سفارش نیز با توجه به رابطه‌ی ۱۷، خلاصه‌ی محاسبات در جدول ۴ آورده شده است. با توجه به مقادیر $L - nT$ و T_d نتیجه می‌گیریم که باید از ضابطه‌ی دوم نقطه‌ی سفارش استفاده شود. درصورت استفاده از این رابطه مشخص می‌شود که نقطه‌ی سفارش در ذوزنقه‌ی یازدهم قرار داشته و از $D(L - nT)$ باید معادل $۳k$ کسر شود. بنابراین نقطه‌ی سفارش ۲۳۴ خواهد بود.

۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار به توسعه‌ی مدل EPQ پرداخته شد و علاوه بر مدل‌سازیِ مدل توسعه‌یافته، الگوریتمی برای حل آن ارائه شد. این الگوریتم با فرض پیوسته‌بودن جواب‌ها آغاز می‌شود و سپس با رویکرد جدول ۱، ازچهار نقطه‌ی براکتی برای به‌دست آوردن جواب بهینه استفاده می‌شود. یک مثال عددی نیز برای توضیح الگوریتم ارائه شد. در تحقیقات آینده نیز می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- مدل ارائه شده را می‌توان برای حالت‌های چندمحصولی و با وجود محدودیت‌های مختلف از قبیل ظرفیت انبار و سرمایه توسعه داد. در چنین شرایطی برای به‌دست آوردن مقدار بهینه‌ی سفارش می‌توان از الگوریتم‌های تکاملی[۴]، مانند الگوریتم ژنتیک[۵] استفاده کرد.

- علاوه بر تحویل چندگانه‌ی سفارش در قالب پالت‌های مختلف، می‌توان این شرایط را برای تقاضا نیز در نظر گرفت. یعنی محصول به‌صورت پالت‌ها و جعبه‌های بسته‌بندی شده در اختیار مشتریان قرار می‌گیرد و ظرفیت هر پالت و تعداد دفعات تحویل در هر دوره، پرسش‌های مدل هستند.
- در مدل می‌توان ظرفیت پالت را ثابت در نظر نگرفت، بدین‌ترتیب پارامتر k با پارامتر k_i جایگزین می‌شود و مدل‌سازی مدل نیز تغییر خواهد کرد.
- تعداد دفعات تحویل را نیز می‌توان متغیر در نظر گرفت. بدین ترتیب پارامتر m با پارامتر m_i جایگزین می‌شود و مدل‌سازی مدل نیز دچار تغییر خواهد شد.

پانوشت

1. economic order quantity(EOQ)
2. economic production quantity(EPQ)
3. lead time
4. evoloutionary algorithm
5. genetic algorithm

منابع

1. Bayindir, Z.P; Birbil, S.I., and Frenk, J.B.G. “A deterministic inventory/production model with general inventory cost rate function and piecewise linear concave production costs”, *Europrean Journal Of Operational Research*, **174**, (1), pp.114-123 (2006); doi: 10.1016/j.ejor 2006. 03.026.
2. Kuo-Lung Hou. “An EPQ model with setup cost and process quality as functions of capital expenditure”, *Applied Mathematical Modeling*, **31**, (1), pp.10-17 (2006), doi: 10.1016/j.apm. 2006.03.034.
3. Shouyang Wang, Jain Li, and Edwin Cheng, T.C. “Analysis of postponement strategy by EPQ based models with planned backorders”.*The International Journal of Management Science*, **36**, (5), pp.777-788 (2006), doi: 10.1016/ omega. 2006.03.002.
4. Singa Wang Chiu; Shan-Ling Wang, and Yuan-Shyi Peter Chiu “Determining the optimal run time for EPQ model with scrap,rework,and stochastic breakdowns”, *European Journal of Operational Research*, **180**, (2), pp.664-676 (2006), doi: 10.1016/j.ejor 2006.5.005..
5. Kun-Jen Chung, and Yung-Fu Huang “The optimal cycle time for EPQ inventory model under permissible delay in payments”, *International Journal of Production Economics*, **84**, (3), pp.307-318 (2003), doi:10.1016 /so 925-5273.
6. Drik Biskup; Drik Simons, and Hermann Jahnke “The effect of capital lockup and customer trade credits on the optimal lot size-a confirmation of the EPQ”, *Computers and operation research*, **30**, (10), pp.1509-1524 (2003), doi:10.1016/so305-0548.
7. Jui-Jung Liao “On an EPQ model for deteriorating items under permissible delay in payments”, *Applied Mathematical Modeling*, **31**, (3), pp.393-403 (2005), doi:10.1016/j.apM.2005.11.016.
8. Huey-Ming Lee, and Jing_Shing Yao “Economic production quantity for fuzzy demand quantity and fuzzy production quantity”, *European Journal of Operational Research*, **101**, (1), pp.203-211 (1998), doi: 10.1016/so377-2217.
9. Ping-Teng Chang, and Ching-Hsiang Chang “An elaborative unit cost structure-based fuzzy economic production quantity model”, *Mathematical and Computer Modeling*, **43**, (11-12), pp.1337-1356 (2006), doi:10.1016/j.mcm.2005.02.012.
10. Sahidul Ialam, and Tapan Kumar Roy “A fuzzy EPQ model with flexibility and reliability consideration and demand dependent unit production cost under a space constraint: A fuzzy geometric programming approach”, *Applied Mathematics and Computation*, **176**, (2), pp.531-544 (2006), doi: 10.1016/j.amc.2005.10.001.
11. Richard J.TersinePrinciples. “Principles of inventory and materials management”, Prentice Hall PTR; 4 edition (1993).