

ارائه‌ی روشی جدید در مدل‌کردن اثرات دینامیکی میدان مغناطیسی

بر مواد فرومغناطیس، با روش اجزاء محدود

اسماعیل فلاح‌جولایی (دانشجوی دکتری)
جواد شکرالهی‌مغانی (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اغلب سیستم‌های الکترومغناطیسی تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی متغیر با زمان قرار دارند. تغییر میدان مغناطیسی نسبت به زمان اگر به‌اندازه‌ی کافی سریع باشد، موجب بروز پدیده‌هایی در مواد فرومغناطیس می‌شود که در اصطلاح «اثرات دینامیکی» نام دارد. «جریان گردابی» و «تلفات اضافی» از جمله‌ی این پدیده‌ها هستند، و در این نوشتار ضمن حل میدانی سیستم‌های الکترومغناطیسی به روش اجزاء محدود برای مدل‌کردن آن‌ها روشی ارائه شده است. در مدل ارائه شده، بر مبنای روابط موجود میان جریان گردابی و تلفات اضافی عبارتی برای شدت میدان معادل بیان می‌شود که می‌تواند پهن‌تر شدن حلقه‌ی هیستریزس و افزایش تلفات هسته بر اثر پدیده‌های دینامیکی را مدل کند. همچنین، ضمن مدل‌سازی یک سیستم نمونه به کمک روش ارائه شده، اثر پارامترهایی نظیر «ضریب استراحت» و «گام زمانی» بر پایداری و نرخ همگرایی فرایند حل مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه‌ی نتایج مدل‌سازی و آزمایش مؤید صحت کار مدل‌سازی است.

۱. مقدمه

فعال در مغناطیس‌شدگی ماده، در اثر پدیده‌ی جریان‌های گردابی را عامل آن خوانند. پدیده‌های «جریان گردابی» و «تلفات اضافی» به علت وابستگی به نرخ تغییرات میدان مغناطیسی، به‌عنوان اثرات دینامیکی تغییر میدان مغناطیسی شناخته می‌شوند.

با توجه به پیچیدگی‌های رفتاری مواد فرومغناطیسی، ارائه‌ی مدلی جامع که بتواند همه‌ی پدیده‌های مرتبط با مواد فرومغناطیسی را لحاظ کند از دغدغه‌های اساسی محققین در سال‌های اخیر بوده است. برخی از محققین لحاظ کردن اثرات دینامیکی را از طریق اصلاح مدل‌های هیستریزس موجود دنبال کرده‌اند. در این زمینه می‌توان به روش پیشنهادی مایرگویز برای واردکردن اثرات دینامیکی اشاره کرد، که در آن تابع چگالی احتمال مدل پریزاک را وابسته به نرخ تغییرات مغناطیس‌شدگی در نظر گرفته است.^[۱] در این روش ماهیت فیزیکی پدیده‌های دینامیکی در نظر گرفته نمی‌شود و فقط تأثیر آنها در پهن‌تر کردن حلقه‌ی هیستریزس مورد مدل‌سازی ریاضی قرار می‌گیرد. روش دیگری نیز توسط Bertotti برای وارد کردن اثرات دینامیکی در مدل پریزاک ابداع شده است، که در آن تغییر وضعیت دوقطبی‌های مغناطیسی در مدل پریزاک با سرعت محدودی انجام می‌گیرد که بستگی به تفاوت میدان اعمال شده با میدان آستانه‌ی تغییر وضعیت آن دوقطبی دارد.^[۴] با این اصلاح، مدل پریزاک قادر به مدل‌کردن پدیده‌ی تلفات اضافی خواهد بود. شیوه‌ی دیگری که توسط محققان برای لحاظ کردن اثرات دینامیکی ابداع شده است استفاده از مدل سه‌جمله‌ی تلفات هسته

در طراحی بهینه‌ی سیستم‌های الکترومغناطیسی، مدل‌کردن دقیق رفتار مواد فرومغناطیسی از اهمیت زیادی برخوردار است. این مواد در مقابل تغییرات میدان مغناطیسی رفتار پیچیده‌ی از خود نشان می‌دهند. نمونه‌ی بارز این رفتار، پدیده‌ی هیستریزس است که در آن میزان مغناطیس‌شدگی ماده علاوه بر شدت میدان اعمالی، به تاریخچه‌ی مغناطیس‌شدگی یا منحنی مغناطیسی طی شده توسط ماده بستگی دارد.^[۱] از طرف دیگر اغلب مواد فرومغناطیسی هادی جریان الکتریکی نیز هستند. این امر موجب می‌شود که با قرارگرفتن در یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان پدیده‌ی جریان‌های گردابی در جهت مخالف تغییرات میدان خارجی در آنها به‌وجود آید. بروز پدیده‌ی «جریان گردابی» موجب به‌وجود آمدن یک مولفه‌ی تلفاتی در هسته‌ی سیستم‌های الکترومغناطیسی می‌شود که ضمن افزایش جریان مغناطیس‌کنندگی باعث پهن‌تر شدن حلقه‌ی هیستریزس می‌شود. تلفات هیستریزس در حالت شبه ایستا (زمانی که فرکانس تغییرات میدان پایین باشد) با رابطه‌ی تجربی اشتین‌متز به خوبی تخمین زده می‌شود.^[۲] برای محاسبه‌ی تلفات ناشی از جریان‌های گردابی نیز روابط تحلیلی مناسبی وجود دارد.^[۲] اما میزان تلفات هسته در فرکانس‌های بالا (بیشتر از ۵ هرتز)، معمولاً بسیار بیشتر از مجموع تلفات هیستریزس و گردابی (که از فرمول‌های موجود تخمین زده می‌شود)، برآورد می‌شود. برای اولین بار Bertotti توضیحی برای منشأ این تلفات اضافی بیان کرد^[۳] و افزایش حوزه‌های مغناطیسی

Δt است. رابطه‌ی فوق را می‌توان با تقریب به‌صورت رابطه‌ی ۲ ساده کرد:

$$W^{edd} = \frac{\sigma d^2}{12} \int_{\Delta t} \frac{\Delta B}{\Delta t} dB \quad (2)$$

می‌توان رابطه‌ی انرژی تلف شده توسط جریان‌های گردابی را به‌صورت رابطه‌ی ۳ نیز بیان کرد:

$$W^{edd} = \int_{\Delta t} H^{edd} dB \quad (3)$$

که در آن H^{edd} شدت میدان مغناطیسی ناشی از جریان‌های گردابی است. با مقایسه‌ی روابط ۲ و ۳ می‌توان رابطه‌ی ۴ را برای شدت میدان مغناطیسی ناشی از جریان‌های گردابی به‌دست آورد:

$$H^{edd} = \frac{\sigma d^2}{12} \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (4)$$

انرژی تلف شده مربوط به پدیده‌ی «تلفات اضافی» نیز طبق گفته‌ی برتوتی با رابطه‌ی ۵ تخمین زده می‌شود: [۸]

$$W^{exc} = \sqrt{\sigma G V_0 S} \int_{\Delta t} \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right|^{1/2} dt \quad (5)$$

که در آن W^{exc} انرژی تلف شده‌ی مربوط به پدیده‌ی تلفات اضافی بر واحد حجم، S سطح مقطع ورق، و پارامترهای G و V_0 مقادیر ثابتی هستند که به ساختمان بلوری ماده‌ی فرومغناطیس بستگی دارند. رابطه‌ی ۵ را نیز می‌توان با تقریب به‌صورت رابطه‌ی ۶ ساده کرد:

$$W^{exc} = \sqrt{\sigma G V_0 S} \int_{\Delta t} \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|^{1/2} dB \quad (6)$$

اگر H^{exc} شدت میدان مغناطیسی ناشی از پدیده‌ی تلفات اضافی باشد، می‌توان انرژی تلف شده در اثر این پدیده را چنین بیان کرد:

$$W^{exc} = \int_{\Delta t} H^{exc} dB \quad (7)$$

از مقایسه‌ی روابط ۶ و ۷ می‌توان H^{exc} را چنین تعریف کرد:

$$H^{exc} = \sqrt{\sigma G V_0 S} \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|^{1/2} \quad (8)$$

اینک، مطابق مدل سه‌جمله‌یی تلفات، می‌توان رابطه‌ی ۹ را برای تلفات کل هسته بیان کرد:

$$W^t = W^{hys} + W^{edd} + W^{exc} \quad (9)$$

که در آن W^t تلفات کل هسته و W^{hys} تلفات ناشی از پدیده‌ی هیستریزس است. به‌کمک این رابطه می‌توان شدت میدان مغناطیسی معادل را چنان تعریف کرد که بتواند همان تلفات توان W^t را ایجاد کند:

$$H^{eq} = H^{hys} + H^{edd} + H^{exc} \quad (10)$$

است. در این روش براساس مدل سه‌جمله‌یی Bertotti برای تلفات هسته [۳]، بیانی برای شدت میدان معادل به‌دست می‌آید که بتواند همان میزان تلفات را در هسته ایجاد کند. این روش در مدل کردن پدیده‌های دینامیکی، چه اثرات جریان گردابی و چه پدیده تلفات اضافی، از سادگی و جامعیت خوبی برخوردار است. مبتکران این روش آن را در تحلیل اجزاء محدود یک قاب اپشتاین به‌کار گرفتند. [۵] روش مورد استفاده‌ی آنها برای پیاده‌کردن این مدل در معادلات اجزاء محدود، بر مبنای تعریف یک ضریب مقاومت مغناطیسی (رلوکتیویته‌ی) معادل قرار داشت که از عبارت شدت میدان مغناطیسی معادل به‌دست می‌آمد. این کار منتهی به ماتریس سختی می‌شود که به مقادیر چگالی شار در نقاط مختلف وابسته است. به‌همین دلیل در هر تکرار تا رسیدن به جواب لازم است که این ماتریس محاسبه و معکوس شود، و در نتیجه حجم محاسبات و زمان لازم برای اجرای آنها زیاد می‌شود. در این نوشتار روش دیگری برای واردکردن مدل دینامیکی در معادلات اجزاء محدود پیشنهاد شده است که مبتنی بر استفاده‌ی مستقیم از عبارت شدت میدان معادل در روابط به‌دست آمده از روش «نقطه‌ی ثابت» است. استفاده از روش نقطه‌ی ثابت بر طرف‌کننده‌ی نیاز به محاسبه و معکوس کردن ماتریس سختی در هر تکرار است. [۷] همچنین با بررسی اثر برخی پارامترهای حل عددی، نظیر ضریب استراحت^۱ و گام زمانی، مقادیر مناسب آن‌ها برای پایداری فرایند حل، و نیز افزایش سرعت همگرایی مورد بحث قرار گرفته است. در بخش اول این نوشتار مدل دینامیکی مبتنی بر مدل سه‌جمله‌یی تلفات به‌اختصار توضیح داده شده است. در بخش دوم، روش سادوسکی به‌همراه روش پیشنهادی برای واردکردن مدل دینامیکی در معادلات اجزاء محدود مورد بحث قرار گرفته‌اند. در بخش سوم نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی در مدل‌سازی یک سیستم نمونه آورده شده است و تأثیر پارامترهای حل بر پایداری و سرعت همگرایی این روش مورد بررسی قرار گرفته است. برای تعیین اعتبار مدل، نتایج مدل‌سازی با نتایج به‌دست آمده از آزمایش مقایسه شده‌اند که نشان‌دهنده‌ی دقت خوب مدل‌سازی انجام شده است.

۲. مدل دینامیکی هسته

برای مواد موقر فرومغناطیسی، که ضخامت ورق آن در مقایسه با ابعاد دیگرش کوچک باشد، می‌توان انرژی تلف شده‌ی ناشی از جریان‌های گردابی را چنین بیان کرد: [۸]

$$W^{edd} = \frac{\sigma d^2}{12} \int_{\Delta t} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 dt \quad (1)$$

که در آن σ هدایت الکتریکی ورق، d ضخامت ورق، B چگالی شار عبوری از ورق و W^{edd} انرژی تلف شده بر واحد حجم در بازه‌ی زمانی

که در آن ν_{eq} ، ضریب مقاومت مغناطیسی معادل، چنین تعریف می‌شود:

$$\nu_{eq} = \nu_d + \frac{\sigma d^2}{12 \Delta t} + \frac{\sqrt{\sigma G V_0 S}}{\Delta t^{0.5} |\Delta B|^{0.5}} \quad (19)$$

به‌کمک روش اجزاء محدود، معادله‌ی ۱۸ به یک دستگاه معادلات ماتریسی تبدیل می‌شود:

$$[SSd]_{t+\Delta t} [A]_{t+\Delta t} = [J_s]_{t+\Delta t} + [SSd]_t [A]_t - [\nabla \times \bar{H}^{hys}]_t \quad (20)$$

در هر لحظه با شروع از یک ν_{eq} اولیه، ماتریس سختی $[SSd]$ مربوط به آن لحظه محاسبه می‌شود و در یک روند تکراری تا رسیدن به همگرایی، مقدار نهایی $[A]$ در لحظه‌ی $t + \Delta t$ به‌دست می‌آید. در محاسبه‌ی ν_{eq} مقدار $|\Delta t|$ از تفاوت بین چگالی شار محاسبه شده در هر تکرار نسبت به مقدار چگالی شار گام زمانی قبلی بدست می‌آید. لزوم محاسبه‌ی ماتریس سختی و معکوس کردن آن در هر تکرار موجب هزینه‌بر شدن این روش از نظر محاسباتی، و صرف زمان زیاد برای انجام محاسبات آن خواهد شد.

۲.۳. روش پیشنهادی برای پیاده‌سازی مدل دینامیکی

در این نوشتار، برای پیاده‌کردن مدل دینامیکی در معادلات اجزاء محدود روش جدیدی ارائه شده است که مبتنی بر به‌کارگیری نقطه‌ی ثابت در بیان معادلات حاکم بر سیستم است. در این روش معادله‌ی حاکم بر یک ماده‌ی فرومغناطیسی چنین خطی‌سازی می‌شود:

$$H = \nu B - R \quad (21)$$

که در آن ν یک ضریب ثابت است و معمولاً مقدار آن به‌گونه‌ی انتخاب می‌شود که سرعت همگرایی را بیشینه کند. متغیر R نیز با توجه به رابطه‌ی غیرخطی (هیستریزس) بین H و B در هر نقطه از منحنی مغناطیسی تعیین می‌شود. از ترکیب رابطه‌ی ۲۱ با روابط ۱۶ و ۱۷، معادلات حاکم بر سیستم چنین بیان می‌شود:

$$\nu \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \bar{J}_s + \nabla \times \bar{R} \quad (22)$$

در سیستم‌های الکترومغناطیسی دوبعدی، معادله‌ی ۲۲ را می‌توان چنین خلاصه کرد:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) = J_{sz} + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \quad (23)$$

با اعمال روش «باقی‌مانده‌های موزون گالرکین»، معادله‌ی دیفرانسیلی فوق تبدیل به معادله‌ی ماتریسی زیر می‌شود:

$$[K] [A] = [J_s] + [G([A])] \quad (24)$$

که در آن H^{eq} شدت میدان مغناطیسی معادل و H^{hys} شدت میدان ناشی از پدیده‌ی هیستریزس است. با توجه به روابط ۴ و ۸ می‌توان رابطه‌ی ۱۰ را در قالب رابطه‌ی ۱۱ بیان کرد:

$$H^{eq} = H^{hys} + \frac{\sigma d^2}{12} \frac{\Delta B}{\Delta t} + \sqrt{\sigma G V_0 S} \sqrt{\frac{\Delta B}{\Delta t}} \quad (11)$$

به این ترتیب می‌توان هر سه پدیده‌ی هیستریزس، جریان گردابی و تلفات اضافی را با در نظر گرفتن شدت میدان معادل، چنان که در رابطه‌ی ۱۱ بیان شده است، مدل کرد.

۳. پیاده‌سازی مدل دینامیکی هسته در معادلات

اجزاء محدود

۳.۱. پیاده‌سازی به‌کمک ضریب مقاومت مغناطیسی معادل روشی که سادوسکی و همکاران برای واردکردن رابطه‌ی ۱۱ در معادلات اجزاء محدود به‌کار گرفتند بر تعریف یک ضریب مقاومت مغناطیسی معادل از روی رابطه‌ی شدت میدان معادل مبتنی بود. در این روش H^{exc} و H^{edd} ، H^{hys} چنین بیان می‌شوند: [۵]

$$H^{hys}(t + \Delta t) = \nu_d \Delta B + H^{hys}(t) \quad (12)$$

که در آن ν_d ضریب مقاومت مغناطیسی دیفرانسیلی است و برای هر نقطه از منحنی هیستریزس چنین محاسبه می‌شود:

$$\nu_d = \frac{\Delta H^{hys}}{\Delta B} \quad (13)$$

$$H^{edd}(t + \Delta t) = \left(\frac{\sigma d^2}{12 \Delta t} \right) \Delta B \quad (14)$$

$$H^{exc}(t + \Delta t) = \left(\frac{\sqrt{\sigma G V_0 S}}{\Delta t^{0.5} |\Delta B|^{0.5}} \right) \Delta B \quad (15)$$

از سوی دیگر، روابط ۱۶ و ۱۷ بر هر سیستم الکترومغناطیسی حاکم است:

$$\nabla \times \bar{H}^{eq} = \bar{J}_s \quad (16)$$

$$\nabla \times \bar{A} = \bar{B} \quad (17)$$

که در آن \bar{J}_s بردار چگالی شدت جریان و \bar{A} پتانسیل مغناطیسی برداری است. ترکیب روابط ۱۲ تا ۱۷ به بیان رابطه‌ی ۱۸ برای معادله‌ی حاکم بر سیستم می‌انجامد:

$$\nu_{eq} \nabla \times \nabla \times \bar{A}(t + \Delta t) = \bar{J}_s + \nu_{eq} \nabla \times \nabla \times \bar{A}(t) - \nabla \times \bar{H}^{hys}(t) \quad (18)$$

که در آن:

$$K_{ij} = \nu \sum_e \iint_{S_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (25)$$

$$J_{si} = \sum_e \iint_{S_e} N_i J_{sz} dx dy \quad (26)$$

$$G_i = \sum_e \iint_{S_e} \left(R_y \frac{\partial N_i}{\partial x} - R_x \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy \quad (27)$$

در این معادله‌ها، N_i تابع شکل و S_e سطح یک المان است. در رابطه‌ی ۲۴، ماتریس $[K]$ که یک ماتریس ثابت است و می‌توان یک بار خارج از حلقه‌های تکرار آن را محاسبه و معکوس کرد، و سپس ذخیره کرد. به این ترتیب در محاسبات تا اندازه‌ی زیادی صرفه‌جویی خواهد شد. براساس این روابط می‌توان الگوریتم زیر را برای مدل‌سازی سیستم پیشنهاد کرد:

گام ۱: تشکیل ماتریس $[K]$ و معکوس محاسبه و ذخیره‌سازی آن؛
 گام ۲: محاسبه‌ی بردار چگالی جریان منبع $[J_s]^t$ برای لحظه‌ی زمانی t ؛
 گام ۳: بردار $[G([A])]$ با مقادیر پتانسیل محاسبه شده در لحظه‌ی زمانی قبل، یعنی $[A]^{t-1}$ ، مقداردهی اولیه شود.

گام ۴: برای هر گام زمانی مراحل زیر باید تکرار شوند تا معیار همگرایی برآورده شود (خطای همگرایی کوچک‌تر از مقدار دلخواه شود):

گام ۱.۴: محاسبه‌ی بردار پتانسیل هر تکرار $[A]_i$ از طریق رابطه‌ی $[K][A]_i = [J_s]^t + [G([A]_{i-1})]$

گام ۲.۴: محاسبه‌ی چگالی شار هر تکرار (B_i) برای همه‌ی عناصر ماده‌ی مغناطیسی از طریق رابطه‌ی $B_i = \nabla \times A_i$

گام ۳.۴: محاسبه‌ی مؤلفه‌ی شدت میدان مربوط به پدیده‌ی هیستریزیس به کمک مدل پریزاک معکوس (رجوع شود به ضمیمه)، برای همه‌ی عناصر ماده‌ی مغناطیسی.

گام ۴.۴: محاسبه‌ی تغییرات چگالی شار در هر تکرار، از رابطه‌ی $\Delta B = B_i - B^t$

گام ۵.۴: محاسبه‌ی مؤلفه‌ی شدت میدان مربوط به جریان گردابی. (H_i^{edd}) به کمک رابطه‌ی ۴، برای همه‌ی عناصر ماده‌ی مغناطیسی.

گام ۶.۴: محاسبه‌ی مؤلفه‌ی شدت میدان مربوط به پدیده‌ی تلفات اضافی، (H_i^{exc}) به کمک رابطه‌ی ۸ برای همه‌ی عناصر ماده‌ی مغناطیسی.

گام ۷.۴: محاسبه‌ی شدت میدان معادل H_i^{eq} از رابطه‌ی ۱۰ برای همه‌ی عناصر ماده‌ی مغناطیسی.

گام ۸.۴: استفاده از یک ضریب استراحت مناسب برای جایگزینی مقدار جدید H_i^{eq} به جای مقدار قبلی آن از رابطه‌ی $H_i^{eq} = H_i^{eq-1} + \omega(H_i^{eq} - H_i^{eq-1})$ ، که در آن ω ضریب استراحت است.

گام ۹.۴: محاسبه‌ی متغیر R_i برای همه‌ی عناصر ماده‌ی مغناطیسی از رابطه‌ی $R_i = \nu B_i - H_i^{eq}$

گام ۱۰.۴: محاسبه‌ی بردار $[G([A]_i)]$ از رابطه‌ی ۲۷.

گام ۱۱.۴: محاسبه‌ی خطای همگرایی از رابطه‌ی ۲۸.

$$e = \sum_{element} \frac{|H_i^{eq} - H_{i-1}^{eq}|}{|H_i^{eq}|} \quad (28)$$

گام ۵: در صورت برآورده شدن معیار همگرایی، زمان یک گام به جلو برود و فرایند حل به گام ۲ بازگردد.

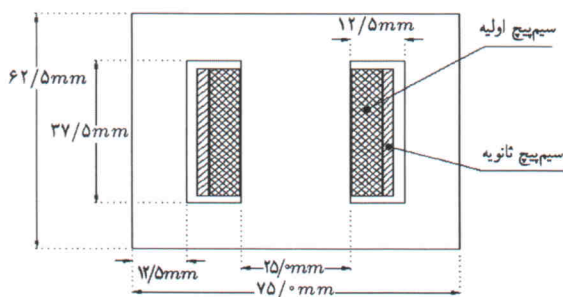
مزیت این روش در این است که فرایند زمان‌بر محاسبه و معکوس کردن ماتریس $[K]$ ، فقط یک بار در خارج از حلقه‌های تکرار انجام می‌گیرد. از طرف دیگر می‌توان با انتخاب مناسب ضریب ثابت ν و ضریب استراحت ω ، سرعت همگرایی سیستم را افزایش داد.

۴. پیاده‌سازی روش پیشنهادی در مدل‌سازی یک

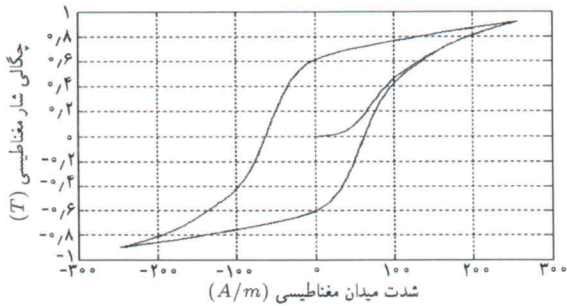
سیستم نمونه

برای پیاده‌سازی مدل پیشنهادی، یک ترانسفورماتور تک‌فاز زرهی، ۶۷/۲۲۰ به عنوان سیستم نمونه، انتخاب شد (شکل ۱).

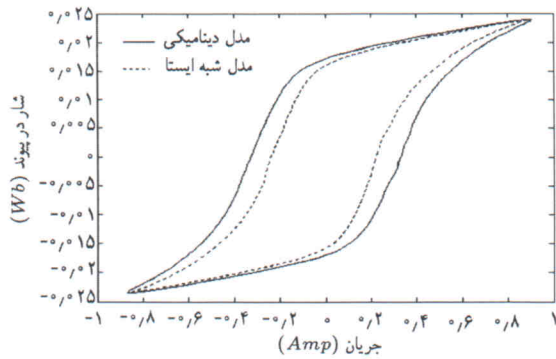
پارامترهای مدل ماده‌ی فرومغناطیسی هسته با انجام آزمایش‌هایی بر سیم‌پیچ ترانسفورماتور تعیین شد. شرح آزمایش‌ها و روش‌های به‌کار گرفته شده برای شناسایی پارامترها در بخش ضمیمه آورده شده است. یک برنامه‌ی رایانه‌ی براساس الگوریتم بیان شده در بخش ۳ نوشته شد و به کمک آن مدل اجزاء محدود سیستم پیاده‌سازی شد. مش‌بندی مدل اجزاء محدود این سیستم در شکل ۲ نشان داده شده است. برای کاهش حجم محاسبات، با استفاده از تقارن‌های موجود در سیستم تنها یک چهارم آن برای مدل‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است.



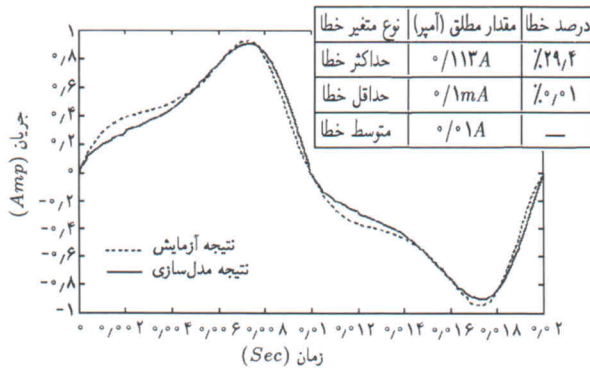
شکل ۱. ابعاد یک ترانسفورماتور تک‌فاز زرهی.



شکل ۳. منحنی مغناطیسی، برای المان پررنگ شده در شکل ۳.

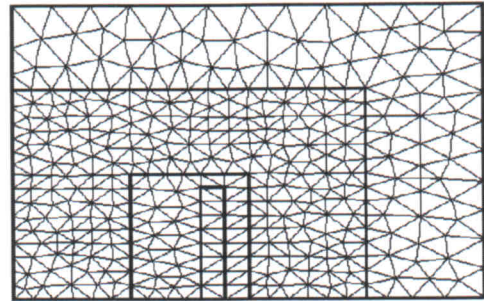


شکل ۴. نمودار شار در پیوند با سیم پیچی نسبت به جریان.



شکل ۵. جریان سیم پیچی در حالت دائمی.

مطالعه قرار گرفت. در شکل ۷ اثر انتخاب ضریب استراحت بر متوسط تعداد تکرار تا رسیدن به همگرایی نشان داده شده است. نمودار نشان می‌دهد که انتخاب نامناسب ضریب استراحت ممکن است به واگرایی و ناپایدار شدن فرایند حل منجر شود. مطابق نتایج به دست آمده، هرچه سطح ولتاژ تحریک کوچک‌تر باشد ناپایداری به ازای ضرایب استراحت کوچک‌تری اتفاق می‌افتد. اگر بتوان سطح ولتاژ را معیاری برای میزان وارد شدن هسته به اشباع در نظر گرفت، به ازای سطح ولتاژ کم‌تر، هسته کم‌تر به اشباع می‌رود و در نتیجه مقادیر ΔB به طور متوسط بزرگ‌تر خواهند بود. به همین دلیل اثر H_{exc} و H_{edd} در جهت مخالف ΔB نیز بزرگ‌تر خواهد بود. بزرگ بودن ضریب استراحت در این وضعیت به عنوان تشدیدکننده اثر H_{exc} و H_{edd} عمل می‌کند. مجموعه‌ی

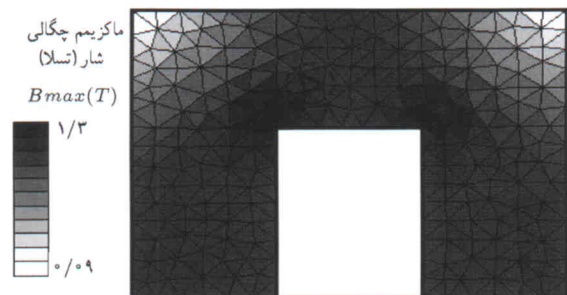


شکل ۶. مش بندی مدل اجزاء محدود ترانسفورماتور تک فاز زرهی.

با ترکیب معادله‌ی حاکم بر مدار خارجی و معادلات اجزاء محدود، امکان اتصال به مدار خارجی در برنامه‌ی رایانه‌ی نوشته شده لحاظ شد. برای افزایش دقت در نتایج آزمایش و همچنین محاسبات پس از آن، سیم پیچ ثانویه ترانس که محدوده‌ی جریانی بالاتری نسبت به سیم پیچ اولیه‌ی آن دارد مورد تحریک قرار گرفت. با این توصیف، سیم پیچ ثانویه ترانس به یک منبع ولتاژ سینوسی با فرکانس $\approx 50\text{ Hz}$ و دامنه‌ی ولتاژ $U = 7/5V$ متصل شد. نتایج تحلیل سیستم در شکل‌های ۳ تا ۶ آورده شده است. در شکل ۳، بیشینه‌ی چگالی شار نقاط مختلف هسته رسم شده است.

در شکل ۴ نمونه‌ی از مسیر مغناطیسی برای المان پررنگ شده در شکل ۳ نمایش داده شده است. در شکل ۵ شار در پیوند با سیم پیچی، نسبت به جریان عبوری از آن رسم شده است. حلقه‌ی هیستریزس به دست آمده از این طریق با حلقه‌ی هیستریزس به دست آمده در حالت شبه ایستا مقایسه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود لحاظ کردن پدیده‌های دینامیکی (جریان گردابی و تلفات اضافی) موجب پهن‌تر شدن حلقه‌ی هیستریزس شده است. برای اطمینان از صحت مدل‌سازی، جریان سیم پیچ ترانس در حالت دائمی، به دست آمده از مدل‌سازی و اندازه‌گیری شده از آزمایش، با هم مقایسه شده‌اند. مقایسه‌ی این دو نشان‌دهنده‌ی دقت خوب نتایج مدل‌سازی است (شکل ۶).

همچنین اثر پارامترهای حل نظیر ضریب استراحت (w) و گام زمانی (Δt) بر روی پایداری و سرعت همگرایی روش ارائه شده مورد

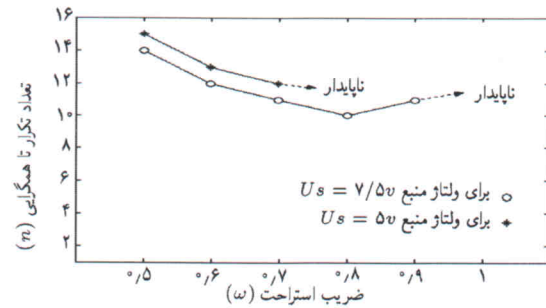


شکل ۷. چگالی شار نقاط مختلف هسته.

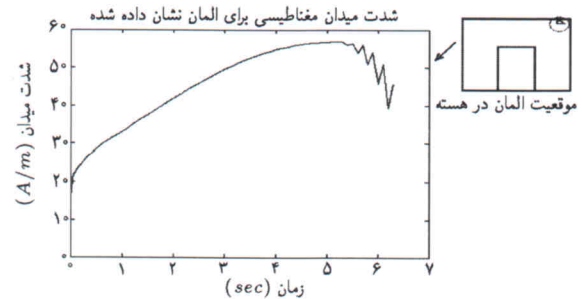
مطلوب‌تر خواهد بود. این موضوع با مقایسه‌ی تعداد کل تکرارها در فرایند حل، برای $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$ و $\Delta t = 0.2 \text{ ms}$ قابل درک است.

۵. نتیجه‌گیری

پیش‌بینی دقیق رفتار سیستم‌های الکترومغناطیسی مستلزم به‌کارگیری مدل‌های جامع و دقیق، برای مواد فرومغناطیسی به‌کار رفته در آنها است. در این نوشتار روشی جدید برای مدل‌کردن پدیده‌های دینامیکی مرتبط با مواد فرومغناطیسی (پدیده‌های جریان‌های گردابی و تلفات اضافی که به نرخ تغییرات میدان مغناطیسی وابسته‌اند) ارائه شد. مدل دینامیکی به‌کار گرفته شده مبتنی است بر مدل سه‌جمله‌یی تلفات هسته که تلفات هسته را مجموع سه مولفه‌ی تلفاتی هیستریزس، جریان گردابی و تلفات اضافی معرفی می‌کند. بر مبنای این مدل، برای شدت میدان مغناطیسی معادل بیانی به‌دست آمد که بتواند تلفاتی معادل با بیان سه‌جمله‌یی تلفات هسته ایجاد کند. در گذشته، برای واردکردن این مدل در معادلات اجزاء محدود از یک ضریب مقاومت مغناطیسی معادل استفاده می‌شد که به‌علت وابسته‌کردن ماتریس سختی معادلات اجزاء محدود به چگالی شار نقاط مختلف، لازم بود این ماتریس در تکرارهای متوالی محاسبه و معکوس شود. در این نوشتار به‌عنوان یک روش جدید، عبارت شدت میدان معادل به‌همراه روش نقطه‌ی ثابت مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از این شیوه باعث رفع نیاز به محاسبه و معکوس کردن ماتریس سختی در تکرارهای متوالی می‌شود. به همین دلیل در روش پیشنهادی هزینه‌ی محاسباتی (حجم و زمان محاسبات برای پیشروی به اندازه‌ی یک گام زمانی) به میزان قابل توجهی از روش قبلی کم‌تر است. در به‌کارگیری این روش، به‌کارگیری ضریب استراحت و گام زمانی مناسب از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. هر قدر ماده‌ی هسته کم‌تر و اشباع مغناطیسی شود استفاده از ضرایب استراحت کوچک‌تر مناسب‌تر خواهد بود. انتخاب ضریب استراحت بزرگ در این حالت، با تقویت اثر پدیده‌های دینامیکی، که سعی در مخالفت با تغییرات میدان دارند، موجب نوسان جواب و نهایتاً ناپایداری فرایند حل می‌شود. به‌علت وابستگی پدیده‌های جریان گردابی و تلفات اضافی به نرخ تغییرات میدان مغناطیسی، شدت میدان معادل نیز به نرخ تغییرات میدان وابسته می‌شود. از آنجا که نرخ تغییرات میدان با مشتق‌گیری عددی به دست می‌آید، انتخاب گام زمانی مناسب اهمیت زیادی پیدا می‌کند. به‌کار بردن گام زمانی کوچک می‌تواند خطاهای کوچک در محاسبه‌ی چگالی شار را در محاسبه‌ی شدت میدان معادل به شدت تقویت کند و به‌همین علت موجب ناپایداری فرایند حل شود. بنابراین استفاده از گام زمانی بزرگ‌تر تا جایی که باعث زیاد شدن خطای گسسته‌سازی نشود، مناسب‌تر خواهد بود.



شکل ۷. اثر ضریب استراحت بر همگرایی فرایند حل.



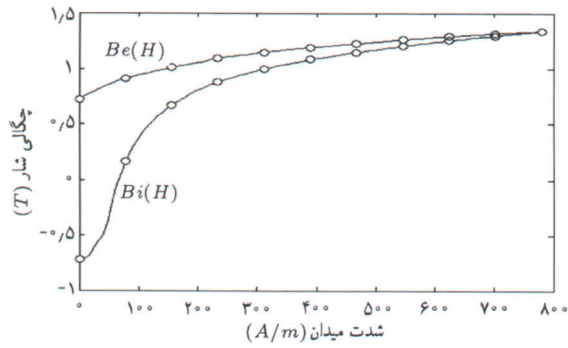
شکل ۸. نمونه‌یی از ناپایداری شدن جواب به‌ازای ولتاژ تحریک $U = 5V$ ، ضریب استراحت $\omega = 0.8$.

این عوامل ممکن است موجب بروز نوسان در جواب شود. در شکل ۸ یک نمونه از ناپایداری شدن جواب به‌ازای ولتاژ تحریک $U = 5V$ و ضریب استراحت $\omega = 0.8$ نشان داده شده است. در این حالت H_{exc} و H_{edd} یک بار بر خلاف H_{hys} در جهت افزایش B ، و بار دیگر به میزان بیشتری در جهت کاهش آن عمل می‌کنند تا جایی که در نهایت موجب واگرایی و ناپایداری شدن جواب می‌شوند.

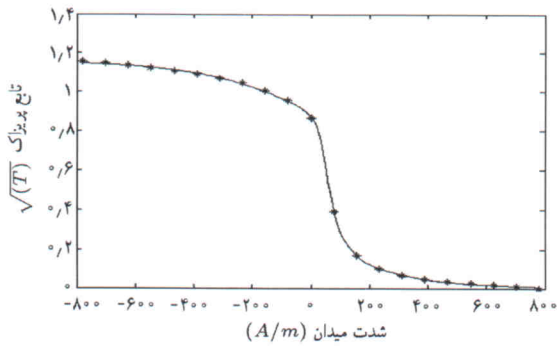
به‌طور مشابه اثر انتخاب گام زمانی Δt ، بر سرعت همگرایی و پایداری فرایند حل مورد مطالعه قرار گرفت. خلاصه‌یی از نتایج این بررسی در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. اثر گام زمانی بر پایداری و سرعت همگرایی به‌ازای ولتاژ تحریک $U = 7/5V$ و ضریب استراحت $\omega = 0.8$.

Δt	$50 \mu\text{sec}$	0.1 msec	0.2 msec
متوسط تکرار	۱۰	۱۲	
کل تکرارها	۱۹۳۱	۱۲۰۷	



شکل ۱۰. بزرگ‌ترین حلقه‌ی هیستریزس ورق ترانس، به دست آمده از آزمایش؛ حداقل اطلاعات لازم برای شناسایی تابع $F(H)$.



شکل ۱۱. تابع $F(H)$ به دست آمده از آزمایش.

در بخش ۳، در بیان الگوریتم پیاده‌سازی مدل اجزاء محدود، به مدل پریزاک معکوس اشاره شده (گام ۴-۳)، که ورودی آن چگالی شار B و خروجی آن شدت میدان H است. همان‌طور که دیده می‌شود در رابطه‌های ۲۹ تا ۳۲ عکس این حالت وجود دارد. به همین دلیل این روابط مستقیماً قابل استفاده در مدل اجزاء محدود نیستند. به این منظور، مدل پریزاک معکوس توسط مؤلفین ابداع، و به کار گرفته شد.^[۱۰]

۲. شناسایی پارامترهای مدل دینامیکی

پارامترهای مدل دینامیکی دو دسته‌اند: یک دسته پارامترهای مدل تلفات گردابی هستند که مطابق رابطه‌ی ۱ عبارت‌اند از هدایت الکتریکی ورق (σ) و ضخامت ورق (d). این دو پارامتر به راحتی قابل اندازه‌گیری‌اند و مقادیر آنها برای ورق ترانس به کار گرفته شده در این آزمایش عبارت است از: $d = 0.5 \text{ mm}$ و $\sigma = 2.3 \times 10^6 \text{ sim/m}$. تلفات اضافی است که مطابق رابطه‌ی ۵ عبارت‌اند از V ، G ، σ و S که تعریف

جدول ۲. مقادیر تلفات هسته‌ی اندازه‌گیری شده.

$P_t \text{ (W/m}^2\text{)}$	$B_m \text{ (T)}$
$2/05 \times 10^2$	۰٫۳
$6/67 \times 10^2$	۰٫۶
$13/9 \times 10^2$	۰٫۹
$24/1 \times 10^2$	۱٫۲

ضمائم

۱. مدل پریزاک اسکالر

در این نوشتار برای مدل‌کردن پدیده‌ی هیستریزس در حالت شبه ایستا از مدل پریزاک اسکالر استفاده شده است. در این مدل فرض می‌شود که ماده‌ی مغناطیسی از تعداد زیادی دوقطبی مغناطیسی مستقل از هم تشکیل شده است که مشخصه‌ی مغناطیسی هریک از آنها به صورت حلقه‌ی هیستریزس ایده‌آل است.^[۱] بیان‌های متفاوتی برای این مدل وجود دارد که در این نوشتار از شکل ساده شده‌ی آن استفاده شده است.^[۹] خلاصه‌ی از این بیان در این قسمت آورده شده است. اگر قسمت‌های مختلف حلقه‌ی هیستریزس مطابق شکل ۹ نامگذاری شوند، قسمت پایین‌رونده‌ی آن چنین بیان می‌شود:

$$B_e(H) = \begin{cases} [F(H_{max}) - F(-H)]^2 \dots \dots \dots \leq H \leq H_{max} \\ [F(H_{max}) - F(-H)]^2 - \\ - [F(H) - F(-H)]^2 \dots \dots \dots - H_{max} \leq h \leq 0 \end{cases} \quad (29)$$

تابع $F(H)$ در رابطه‌ی ۲۹ به صورت رابطه‌ی ۳۰ قابل شناسایی است:

$$F(H) = \begin{cases} \frac{B_e^{out}(H) - B_i^{out}(H)}{2\sqrt{B_e^{out}(H)}} & 0 < H < H_{sat} \\ \sqrt{B_e^{out}(-H)} & -H_{sat} < H < 0 \end{cases} \quad (30)$$

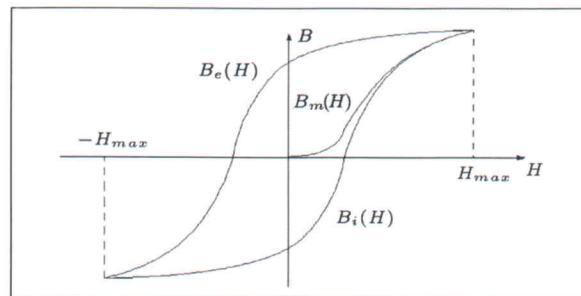
که در آن $B_e^{out}(H)$ و $B_i^{out}(H)$ به ترتیب قسمت‌های پایین‌رونده و بالا‌رونده بزرگ‌ترین حلقه‌ی هیستریزس هستند. در شکل ۱۰ اطلاعات به دست آمده از آزمایش، مربوط به بزرگ‌ترین حلقه‌ی هیستریزس، نشان داده شده است؛ به کمک این اطلاعات تابع $F(H)$ به صورتی که در شکل ۱۱ نشان داده شده، تعیین شد.

به علت تقارن حلقه‌ی هیستریزس، رابطه‌ی قسمت بالا‌رونده‌ی این منحنی به صورت رابطه‌ی ۳۱ قابل بیان است:

$$B_i(H) = -B_e(-H) \quad (31)$$

رابطه‌ی قسمت مغناطیس شدن ابتدایی هم به صورت رابطه‌ی ۳۲ قابل بیان است:

$$B_m(H) = \frac{(B_e(H) + B_i(H))^2}{4B_e(H)} \quad (32)$$



شکل ۹. نامگذاری قسمت‌های مختلف حلقه‌ی هیستریزس.

عبارت P_t تلفات کل هسته بر واحد حجم است که در آن f فرکانس تحریک سینوسی و B_m بیشینه‌ی چگالی شار است. مقادیر k_{hys} و α طبق رابطه‌ی اشتین متر ثابت‌اند و فقط به جنس ماده‌ی فرومغناطیس بستگی دارند. ضریب k_{exc} نیز با پارامترهای σ ، G ، V_0 و S در رابطه‌اند: [۸]

$$k_{exc} = \lambda_f \gamma \sqrt{\sigma G V_0 S} \quad (34)$$

با اعمال ولتاژ سینوسی با فرکانس $f = 50 \text{ Hz}$ و دامنه‌های مختلف، توان تلف شده در هسته‌ی ترانس اندازه‌گیری شد که نتایج آن در جدول ۲ آمده است.

به کمک شیوه‌های برازش منحنی، پارامترهای k_{hys} ، α و k_{exc} طوری تعیین شدند که تلفات محاسبه شده از رابطه‌ی ۳۳، دارای کم‌ترین خطا نسبت به مقادیر اندازه‌گیری شده باشد. به این ترتیب مقادیر محاسبه شده برای k_{hys} ،

α و k_{exc} عبارت‌اند از:

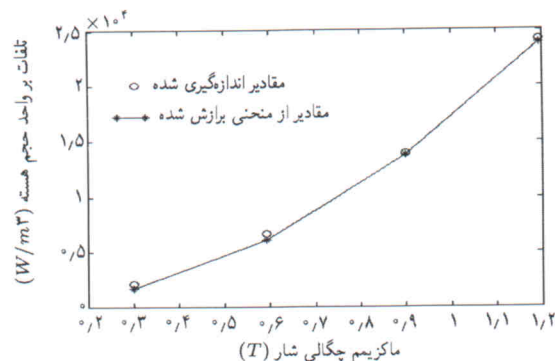
$$245/45 = k_{hys}$$

$$2/0.2 = \alpha$$

$$6/4 = k_{exc}$$

در شکل ۱۲ منحنی تلفات به دست آمده از این پارامترها با مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی تلفات مقایسه شده است که نشان دهنده‌ی نزدیکی خوب این دو است. با توجه به رابطه‌ی ۳۴ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\sigma G V_0 S} = k_{exc} / \lambda_f \gamma = 0.73 \quad (35)$$



شکل ۱۲. مقایسه‌ی منحنی برازش شده با مقادیر اندازه‌گیری.

آنها در بخش ۲ آمده است. از این چهار پارامتر دو پارامتر هدایت‌الکتریکی ورق (σ) و سطح مقطع ورق (S)، به راحتی قابل اندازه‌گیری‌اند، در حالی که دو پارامتر G و V_0 که با ساختار بلوری ورق مرتبط‌اند، به آسانی قابل اندازه‌گیری نیستند. از آنجا که جذر حاصل ضرب این پارامترها در رابطه‌ی ۵ ظاهر می‌شود، در این نوشتار روشی برای تعیین این عبارت حاصل ضرب، ابداع شده است که نیاز به دانستن مقادیر تک تک پارامترها را رفع می‌کند. در این روش از عبارت سه جمله‌ی تلفات هسته در حالت دائمی سینوسی، استفاده شده است:

$$P_t = k_{hys} f B_m^\alpha + \frac{\sigma \pi^2 d^2}{6} f^2 B_m^2 + k_{exc} f^{\frac{1}{2}} B_m^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

پانویس

1. relaxation factor

منابع

1. Springer-Verlag, (1991). Mayergoyz, I.D. *Mathematical Models of Hysteresis*, New York:
2. Slemon, G.R. and Straughen, A. *Electric Machines*, Addison-Wesley, (1980).
3. Bertotti, G. "General properties of power losses in soft ferromagnetic materials", *IEEE Trans. on Magnetics*, **24**, pp. 621-630 (1988).
4. Bertotti, G. "Dynamic generalization of the scalar Preisach model of hysteresis", *IEEE Trans. on Magnetics*, **28**(5), pp. 2599-2601 (1992).
5. Sadowski, N. Batistela, N.J., Bastos, J.P.A., Lajoie, M. "An inverse jiles-atherton model to take into account hysteresis in time-stepping finite element calculations," *IEEE Trans. on Magnetics*, **38**(2), pp. 797-800 (2002).
6. Chiampi, M. Chiarabaglio, D. Repetto, M. "A jiles-atherton and fixed point combined technique for time periodic magnetic field problems with hysteresis", *IEEE Trans. on Magnetics*, **31**(6), pp. 4306-4311 (1995).
7. Bottauscio, O. Chiampi, M. Ragusa, C. "Modeling magnetic laminations under arbitrary starting state and flux waveform", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **290-291**, part 2, (2005).
8. Bastos, J.P.A. Sadowski, N. *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*, Marcel-Dekker (2003).
9. Naidu, S.R. "Simulation of the hysteresis phenomenon using prisach's theory", *IEE Proceedings*, **137**(2), pp. 73-79 (1990).
10. Fallah, E.F. Moghani, J.S. "Modeling of magnetic hysteresis in field solution of electromagnetic systems by FEM" *Amirkabir Journal of Science & Technology*, to be published.