مهندسی صنایع و مدیریت شریف
دوره‌ی ۱ - ۲۶، شماره‌ی ۲، ص. ۵۹-۶۴

الگوریتمی برای تحلیل پایداری و تعیین منطقه‌ی پایداری با استفاده از تغییر در مجموعه‌ی مرجع در تحلیل پوششی داده‌ها

حسین نیک‌زینت متین (کارشناس ارشد)
محمد مدرس (استاد)
ناصر سلماسی (استادیار)
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

Hosein_matin@alum.sharif.edu
modarres@sharif.edu
nsalmasi@sharif.edu

در این تحقیق روشی برای تحلیل حساسیت و پایداری واحدها در روش تحلیل پوششی داده‌ها توسعه می‌یابد. ابتدا مدلی ارائه می‌شود که به‌وسیله‌ی آن می‌توان نزدیک‌ترین مرزی را که واحد مورد بررسی با تغییر در داده‌هایش روی آن تصویر می‌شود به‌دست آورد. اهمیت این مدل در این است که در به‌دست آوردن منطقه‌ی پایداری واحدها می‌تواند بسیار مؤثر باشد. سپس با استفاده از این مدل، الگوریتمی برای تعیین منطقه‌ی پایداری واحد مورد بررسی ارائه می‌شود. دراین رویکرد حجم محاسبات به‌میزان قابل ملاحظه‌یی کاهش می‌یابد، در حالی که بسیاری از پیش‌شرط‌ها و محدودیت‌های رویکردهای دیگر را نیز نخواهد داشت.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تحلیل حساسیت، منطقه‌ی پایداری.

مقدمه

در روش تحلیل پوششی داده‌ها، محاسبه‌ی کارایی یک واحد تصمیم‌گیری (DMU)[1] در مقایسه با سایر واحدها هدف قرارگرفته است. در این روش، تحلیل حساسیت و پایداری یک واحد همواره از مباحثی بوده که بسیار مورد توجه محققان قرارگرفته است. دلیل اهمیت این بحث آن است که داده‌ها معمولاً قطعی نیستند و مرتب دچار تغییر می‌شوند. رویکردهای مختلفی برای بررسی این تغییرات وجود دارند. در برخی از تحقیقات چنین تغییراتی به‌صورت متغیرهای تصادفی مورد توجه قرارگرفته‌اند و محققان به‌دنبال یافتن توزیع‌های احتمالی مناسب برای این تغییرات بوده‌اند، اما در برخی دیگر از تحقیقات این تغییرات در قالب تحلیل حساسیت و پایداری داده‌ها مورد بررسی قرارگرفته‌اند. در اولین بررسی تغییرات روی یک تک‌خروجی مورد توجه بوده است.[۱] سپس در مطالعات بعدی شرط کافی برای تغییرات همزمان روی ورودی‌ها و خروجی‌های یک واحد کارا مورد بررسی قرارگرفت به‌طوری که کارایی آن حفظ شود.[۲] منطقه‌ی پایداری برای یک واحد کارا با تغییر در ورودی‌ها یا به‌تنهایی در خروجی‌ها و همچنین تغییرات همزمان در ورودی‌ها و خروجی‌های آن واحد مورد مطالعه قرارگرفت[۳] که نتایج آن برای شرایط خاصی برقرار است. در مطالعات بعدی این بررسی‌ها عمومیت بیشتری یافت اگرچه نیازمند حل تعداد زیادی از مدل‌های ریاضی بوده است.[۴] برای رتبه‌بندی واحدهای کارا رویکردی ارائه شده است که در آن واحد مورد بررسی از مجموعه واحدها حذف و کارایی محاسبه می‌شود.[۵] محققان زیادی از این رویکرد برای مواردی غیر از رتبه‌بندی واحدها استفاده کرده‌اند. در یکی از بررسی‌ها منطقه‌ی پایداری برای یک واحد کارای گوشه به‌دست آورده شد.[۶] در این رویکرد واحدهای کارا تعیین و سپس واحد کارای مورد بررسی حذف شده و واحدهای ناکارا مجدداً مورد بررسی قرار می‌گیرند تا مشخص شود که کدام یک از آنها در نبود واحد مورد بررسی به یک واحد کارا تبدیل شده است. سپس با تعیین ابرصفحه‌های وجهی گذرنده از این واحدها منطقه‌ی پایداری برای واحد مورد بررسی مشخص می‌شود. این کار نیازمند حل تعداد زیادی از مدل‌های ریاضی است و طبیعتاً هرقدر تعداد واحدهای ناکارا بیشتر باشد تعداد مدل‌های ریاضی مورد نیاز نیز بیشتر می‌شود.

در این تحقیق ابتدا مدل جدیدی ارائه می‌شود که به‌وسیله‌ی آن می‌توان به نزدیک‌ترین مرزی که واحد مورد بررسی را می‌توان با تغییر در داده‌هایش روی آن تصویر کرد دست یافت. به‌دست آوردن این مرز از این لحاظ حائز اهمیت است که چنین مرزی در حقیقت محدودیتی است برای تغییرات مجاز ورودی‌ها و خروجی‌های واحدها در تعیین منطقه‌ی پایداری برای آنها. سپس با استفاده از این مدل الگوریتمی برای تعیین منطقه‌ی پایداری مربوط به یک واحد کارای مورد بررسی ارائه می‌شود که نسبت به رویکردهای ارائه‌شده نیازمند حل کم‌ترین تعداد مدل‌های ریاضی است. درحقیقت این الگوریتم با استفاده از مدل ارائه‌شده مرزهای محدودکننده‌ی تغییرات داده‌های مربوط به واحد مورد بررسی را به‌دست می‌آورد.

در این نوشتار ابتدا مباحث مقدماتی و مدل‌های اولیه را مرور می‌کنیم. سپس

تاریخ: دریافت ۱۳۸۷/۱۰/۲۹، داوری ۱۳۸۸/۶/۲۵، پذیرش ۱۳۸۹/۶/۱۳.

تعریفی از ابرصفحه‌های حامی و ابرصفحه‌های وجهی و تفاوت بین آنها ارائه می‌شود و بعد مدل ریاضی جدیدی برای به‌دست آوردن نزدیک‌ترین مرزهای کارایی برای تصویرکردن یک واحد کارای مورد بررسی توسعه می‌یابد. در ادامه، الگوریتمی ارائه می‌شود که به‌وسیله‌ی آن می‌توان منطقه‌ی پایداری را برای یک واحد کارا تعیین کرد. با استفاده از دو مثال عددی رویکرد پیشنهادی مورد بررسی بیشتر قرار می‌گیرد و در نهایت جمع‌بندی نتایج حاصله ارائه خواهد شد.

مباحث مقدماتی

فرض‌کنیم $DMU_j,\ j=1,2,...,n$ دارای بردارورودی $x_j=[x_{1j},...,x_{mj}]$ و بردار خروجی $y_j=[y_{1j},...,y_{sj}]$ است و به‌صورت $DMU_j=(x_j,y_j)$ نشان داده می‌شود. با این پیش‌فرض، برخی از مدل‌های ریاضی که در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارت‌اند از:

الف) مدل افزایشی[7]

$$\max \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \tag{1}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=x_{io};\quad i=1,...,m \tag{2}$$

$$\sum_j \lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{ro} \tag{3}$$

$$\sum_j \lambda_j=1 \tag{4}$$

$$s_i^-\geq 0,\ s_r^+\geq 0.\ \lambda_j\geq 0;\ i=1,...,m;\ r=1,...,s;\ j=1,...,n$$

ب) مدل مضربی BCC [2] [8]

$$\max U^T Y_o+u_o \tag{5}$$

$$s.t.\ U^TY_j-V^YX_j+u_o\leq 0 \tag{6}$$

$$V^TX_o=1 \tag{7}$$

$$U,V>0;\ \ u_o: free\, in\, sign \tag{8}$$

که در آن $U^T=(u_1,...,u_s)$ بردار ضرایب مربوط به خروجی‌هاست و $V^T=(v_1,...,v_m)$ نیز بردار ضرایب مربوط به ورودی‌هاست که با استفاده از این مدل تعیین می‌شوند. مدل BCC دارای جهت است یعنی یا ورودی‌محور است یا خروجی‌محور، در صورتی که مدل افزایشی[3] چنین نیست زیرا تابع هدف آن فقط براساس متغیرهای کمکی نوشته شده است. اگرچه هر دو مدل تعیین‌کننده‌ی واحدهای کارا و ناکارا هستند ولی مدل افزایشی قادر به تشخیص ضرایب ارائه‌شده در مدل BCC نیست. دلیل اهمیت این ضرایب در این است که از آنها در تعریف ابرصفحه‌های حامی و ابرصفحه‌های وجهی استفاده می‌شود. در این تحقیق از مدل افزایشی در مشخص‌کردن کارایی یا ناکارایی یک واحد استفاده می‌شود و از مدل BCC نیز در تعریف ابرصفحه‌های حامی و ابرصفحه‌های وجهی.

تعریف ۱: اگر هر $DMU_j=(X_j,Y_j)$ را یک فعالیت تعریف کنیم، مجموعه فعالیت‌های موجه را «مجموعه امکان تولید[4]» می‌نامند و آن را با نماد PPSنمایش می‌دهند. بنابراین می‌توان گفت:

$$PPS=\{(x,y)|y\, can\, be\, produced\, by\, x\}$$

برای مجموعه‌ی فوق می‌توان ویژگی‌هایی برشمرد:[8]

الف) فعالیت‌های مشاهده شده‌ی (x_j,y_j) به‌ازای همه‌ی مقادیر j متعلق به مجموعه‌ی PPS است.

ب) اگر فعالیت (x,y) متعلق به مجموعه‌ی PPS باشد، آنگاه فعالیت (tx,ty) نیز برای تمام مقادیر t متعلق به مجموعه‌ی PPS است. این ویژگی را «بازده به مقیاس ثابت» می‌نامند.

ج) برای فعالیت (x,y) در PPS، هر فعالیت نیمه‌مثبت، $(\bar{x},\bar{y})$، $\bar{x},\bar{y}\geq 0$ و دستکم یک مؤلفه از هرکدام از این بردارها غیر صفر باشد، که در آن $\bar{x}\geq x, \bar{y}\leq y$ باشد در PPS خواهد بود.

د) حاصل هر ترکیب آفین از فعالیت‌های PPS نیز در PPS خواهد بود.

تعریف ۲: مجموعه‌ی امکان $PPS(T_c)$ را که دارای تمام ویژگی‌های الف تا د باشد، می‌توان چنین بیان کرد:

$$PPS(T_c)=\left\{(x,y)\middle| x\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j,\, y\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j,\, \lambda_j\geq 0,\ j=1,...,n\right\}$$

تعریف ۳: درصورتی که شرایط بازده به مقیاس ثابت (شرط ب) از مجموعه ویژگی‌های فوق حذف شود، مجموعه‌ی $PPS(T_v)$ که بیانگر مجموعه امکان تولید برای بازده به مقیاس متغیر است چنین بیان می‌شود:[8]

$$PPS(T_v)=\left\{(x,y)\middle| x\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j,\, y\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j,\, \sum_j\lambda_j=1,\ \lambda_j\geq 0,\ \ j=1,...,n\right\}$$

در این تحقیق مجموعه‌ی امکان تولید $PPS(T_v)$ مورد نظر است.

ابرصفحه‌های حامی و ابرصفحه‌های وجهی[5]

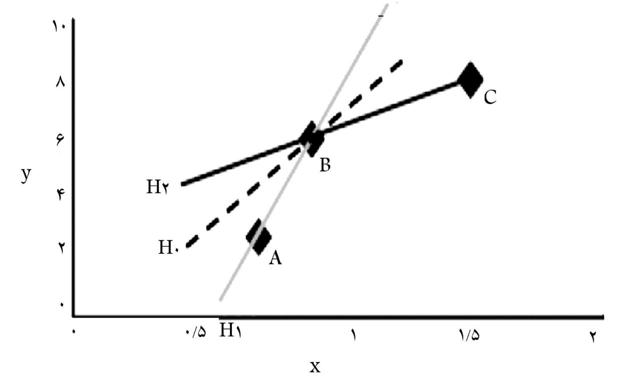
هر ابرصفحه فضا را به دو قسمت تقسیم می‌کند. ابرصفحه‌ی $H_k: U^Ty_k-V^Tx_k+u_o=0$ یک «ابرصفحه‌ی حامی» در نقطه‌ی (x_k,y_k) نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $j=1,...,n$ داشته باشیم:

$$U^Ty_j-V^Tx_j+u_o\leq 0,\qquad (u,v)\geq 0$$

تمام نقاط PPS دریک طرف ابرصفحه‌ی حامی قرار دارند.

در این تحقیق الگوریتمی که در ادامه‌ی مطلب ارائه‌شده، مبتنی بر تشخیص ابرصفحه‌های وجهی مربوط به مجموعه امکان تولید و تفکیک آن از ابرصفحه‌های حامی است، و بنابراین برای این کار در ادامه توضیحاتی ارائه شده است.

هرگاه مدل مضربی BBC(روابط ۵ تا ۸) را برای یک واحد کارای گوشه حل کنیم هر جواب بهینه‌ی آن به‌صورت (U^*,V^*,u_o^*) نشانگر یک ابرصفحه‌ی حامی



شکل ۱. ابرصفحه‌های وجهی و ابرصفحه‌های حامی.

است.[۷] از یک واحد کارای گوشه بی‌شمار ابرصفحه‌ی حامی می‌گذرد که هرکدام از این ابرصفحه‌ها یک جواب بهینه برای مدل مضربی BCC است. اما فقط تعدادی از این ابرصفحه‌های حامی وجوه تشکیل‌دهنده‌ی PPS هستند.[۹]

در شکل ۱ واحدهای A، B و C مورد بررسی قرار گرفته‌اند و ابرصفحه‌های ABو BC نشان‌دهنده‌ی مرزهای مجموعه‌ی PPS هستند. ابرصفحه‌های H۱ و H۲ ابرصفحه‌های وجهی برای مجموعه امکان تولید هستند و هر ترکیب خطی از این دو ابرصفحه مانند H۰ یک ابرصفحه‌ی حامی برای این مجموعه است که دست‌کم در یک نقطه با این مجموعه برخورد دارد (در این شکل در نقطه‌ی B تلاقی دارد) و چنان که در شکل ۱ مشخص است بی نهایت ابرصفحه‌ی حامی وجود دارد که از این نقطه می‌گذرند.

برای تعیین وجوه کارای معرف مجموعه‌ی امکان تولید روشی بیان شده[۹] که در این تحقیق از آن برای به‌دست آوردن وجوه کارای مورد نظر به‌منظور دست‌یابی به منطقه‌ی پایداری استفاده می‌شود.

ارائه‌ی مدلی برای تعیین نزدیک‌ترین مرزی که تصویر واحد کارای مورد بررسی با تغییر داده‌ها روی آن قرار می‌گیرد

چنان که در شکل ۲ مشخص است اگر ورودی‌ها و خروجی‌های واحد B را تغییر دهیم (برخی از ورودی‌ها بزرگ‌تر و برخی از خروجی‌ها کوچک‌تر شوند) آنگاه این واحد به سمت مرزهای کارای حاصل از سایر واحدهای A، E، C، D حرکت می‌کند. اما از لحاظ فاصله‌ی اقلیدسی مرز ED نزدیک‌ترین مرز به واحد B است. در اینجا هدف این است که با استفاده از مدلی بتوانیم این نزدیک‌ترین مرز را به‌دست آوریم.

با این فرض که $DMU_\circ = (x_\circ, y_\circ) = (x_{1\circ}, ..., x_{m\circ}, y_{1\circ}, ..., y_{s\circ})$ واحد کارای مورد بررسی برای تعیین منطقه‌ی پایداری باشد، هر تغییری در ورودی‌ها و خروجی‌های این واحد را می‌توان با استفاده از روابط ۹ و ۱۰ نشان داد:

$$\hat{x}_{k\circ} = \beta_k x_{k\circ};\quad k = 1, ..., m, \beta_k \geq 1 \qquad (9)$$

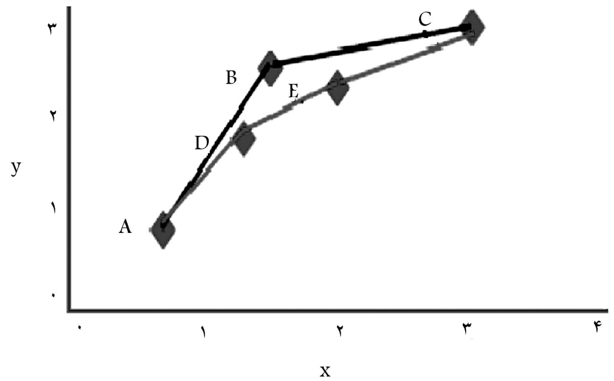
$$\hat{y}_{r\circ} = \alpha_r y_{r\circ};\quad r = 1, ..., s, \alpha_r \geq 1$$

$$\widehat{DMU}_\circ = (\hat{x}_\circ, \hat{y}_\circ) \qquad (10)$$

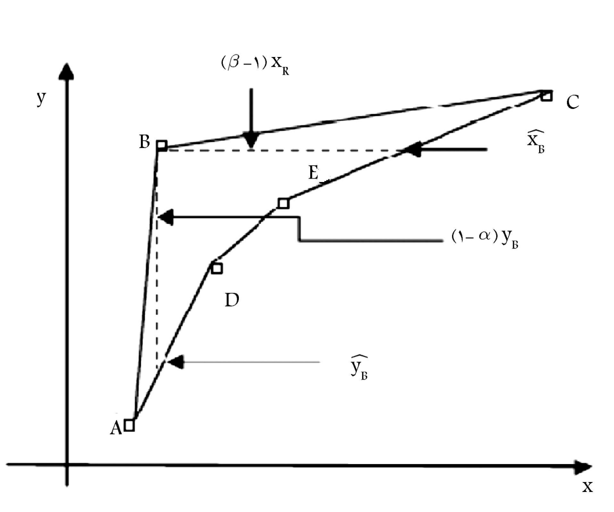
این مقادیر در ضرایب عددی β_k, α_r حاصل می‌شوند. بنابراین با توجه به تعریف ارائه‌شده از این ضرایب عددی که در روابط ۹ و ۱۰ داده شده، ورودی‌های مربوط به واحد مورد بررسی بزرگ‌تر و خروجی‌های مربوط به این واحد کوچک‌تر می‌شوند.

در برخی از منابع موجود روش‌های مختلفی برای به‌دست آوردن مقادیر مربوط به ضرایب فوق ارائه شده است،[۳] اما آنچه در این تحقیق نشان داده می‌شود مدلی است که مقادیر این ضرایب را به‌گونه‌یی به‌دست می‌آورد که $\widehat{DMU}_\circ$ روی نزدیک‌ترین مرز کارای حاصل از سایر واحدها قرار گیرد، به‌طوری که واحد مورد بررسی دارای کم‌ترین فاصله از واحد تصویرشده باشد. این کار را به‌وسیله‌ی روابط ۱۱ تا ۱۹ می‌توان انجام داد (شکل ۳). مشخص است که اگر مقدار ورودی واحد B را افزایش دهیم تصویر این واحد روی مرز EC قرار می‌گیرد؛ طول این واحد تا تصویر آن (مقدار افزایش لازم در ورودی) که در شکل با خط‌چین نشان داده شده است برابر $(\beta - 1)x_B$ است و اگر فقط خروجی این واحد را با کاهش دهیم این واحد روی مرز ADقرار می‌گیرد که طول آن برابر $(1 - \alpha)y_B$ خواهد بود (مقدار کاهش لازم در خروجی). در مدل ارائه‌شده در این تحقیق که در روابط ۱۱ تا ۱۹ نشان داده شده، برای این که این تصویر روی مرز ED قرار بگیرد چنین استدلال شده است که باید از افزایش نامتناسب هر یک از این طول‌ها جلوگیری شود. در حقیقت این مدل از نوع مسائل Min-Max است.

در این روابط $(\beta_i - 1)x_{i\circ}, i = 1, ..., m$ مقدار افزایشی است که در ورودی iام واحد $DMU_\circ$ حاصل می‌شود تا تصویر این واحد روی مرز کارای حاصل از



شکل ۲. مرزهای کارایی که واحد B با تغییر در داده‌ها به سمت آنها حرکت می‌کند.



شکل ۳. یافتن نزدیک‌ترین مرز کارایی برای تصویر واحد B.

سایر واحدها قرارگیرد و درمورد $(1-\alpha_r)y_{r0}$ نیز مقدارکاهش در خروجی را نشان می‌دهد.

$$\min \ w \tag{11}$$
$$\sum_{j\neq 0} \lambda_j x_{ij} \leq \beta_i x_{i0};\ \forall i \tag{12}$$
$$\sum_{j\neq 0} \lambda_j y_{ij} \leq \alpha_r y_{i0};\ \forall r \tag{13}$$
$$p \geq (\beta_i - 1)x_{i0};\ \forall i \tag{14}$$
$$q \geq (1-\alpha_r)y_{r0};\ \forall_r \tag{15}$$
$$w \geq p \tag{16}$$
$$w \geq q \tag{17}$$
$$\sum_{j\neq 0} \lambda_j = 1 \tag{18}$$
$$\beta_i \geq 1;\ 0 \leq \alpha_r \leq 1 \tag{19}$$

الگوریتمی برای یافتن منطقه‌ی پایداری مربوط به یک واحد کارای گوشه

تا اینجا مدلی ارائه‌شد که به‌وسیله‌ی آن می‌توانیم نزدیک‌ترین مرزی را که واحد مورد بررسی می‌تواند روی آن تصویر شود به‌دست آوریم. در ادامه نیز الگوریتمی ارائه می‌شود که می‌توان از طریق آن منطقه‌ی پایداری را برای یک واحد کارای گوشه به‌دست آورد.

گام اول) با استفاده از روابط ۱ تا ۴ کارایی تمام واحدها ارزیابی می‌شود.

گام دوم) فرض کنیم DMU_0 یک واحد کارای گوشه باشد که تعیین منطقه‌ی پایداری آن مورد نظر است. روابط ۱۱ تا ۱۹ را برای آن مدل می‌کنیم و مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$T_1 = \left\{ j \middle| \lambda_i^* > 0 \text{ یک واحد ناکارا است } DMU_j \right\}$$
$$T_2 = \left\{ j \middle| \lambda_i^* > 0 \text{ یک واحد کارا است } DMU_j \right\}$$

در حقیقت اعضای مجموعه‌ی T_1 واحدهای ناکارایی هستند که با حذف واحد DMU_0 به واحدهای کارا تبدیل شده‌اند. در این متن به چنین واحدهایی واحدهای کارای ثانویه گفته می‌شود. اعضای مجموعه‌های T_1 و T_2 واحدهای مرجع برای نقطه‌ی تصویرشده نامیده می‌شوند.

گام سوم) مدل زیر را فرموله می‌کنیم:

$$\min \ w \tag{20}$$
$$\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\notin T_i}} \lambda_j x_{ij} \leq \beta_i x_{i0};\ \forall i \tag{21}$$
$$\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\notin T_i}} \lambda_j y_{ij} \leq \alpha_r y_{i0};\ \forall r \tag{22}$$
$$p \geq (\beta_i - 1)x_{i0};\ \forall i \tag{23}$$
$$q \geq (1-\alpha_r)y_{r0};\ \forall_r \tag{24}$$
$$w \geq p \tag{25}$$
$$w \geq q \tag{26}$$
$$\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\notin T_i}} \lambda_j = 1 \tag{27}$$
$$\beta_i \geq 1;\ 0 \leq \alpha_r \leq 1 \tag{28}$$

روابط ۲۰ تا ۲۸ درحقیقت همان روابط قبلی هستند با این تفاوت که واحدهای کارای ثانویه‌یی که در مجموعه‌ی T_1 به‌دست آمده‌اند از مجموعه واحدها حذف شده‌اند. به این ترتیب با حذف این واحدها، واحدهای کارای ثانویه‌ی جدید شناسایی می‌شوند. عناصر مجموعه‌های T_1 و T_2 را چنین به‌هنگام می‌کنیم:

$$T_1 = T_1 \cup \left\{ j \middle| \lambda_i > 0 \text{ ، واحدی ناکارا باشد } DMU_j;\ j \neq 0 \right\}$$
$$T_2 = T_2 \cup \left\{ j \middle| \lambda_i > 0 \text{ ، واحدی کارا باشد } DMU_j;\ j \neq 0 \right\};$$

گام چهارم) اگر واحدهای مرجع فقط واحدهای کارا باشند، یعنی مجموعه‌ی T_1 تغییری نداشته باشد، الگوریتم توقف می‌کند در غیر این‌صورت به گام ۳ برمی‌گردیم زیرا از روی شکل ۳ نیز واضح است که در این‌صورت هیچ واحد کارای ثانویه‌یی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

مجموعه‌های جدیدی به‌صورت $\Omega_1 = T_1 \cup T_2$ و $\Omega_2 = T_2 \cup \{DMU_0\}$ تعریف می‌کنیم.

گام پنجم) با استفاده از الگوریتم ارائه‌شده‌ی قبلی،[9] ابرصفحه‌های وجهی معرف PPS برای هرکدام از مجموعه‌های Ω_1 و Ω_2 به‌دست می‌آیند. اگر مجموعه ابرصفحه‌های معرف PPS برای مجموعه‌ی Ω_1 را با H_ℓ که در آن $\ell = 1, \ldots, t$ و نیز مجموعه ابرصفحه‌های معرف PPS برای مجموعه‌ی Ω_2 را با H_f که در آن $f = 1, \ldots, t'$ ، نشان داده شوند و نیم‌صفحه‌های H_l^+ و H_f^- نیز به‌صورت:

$$H_l^+ : U_l^{*T} y - v_l^{*T} x + u_l^* \geq 0\ ;\ \forall l$$
$$H_f^- : U_f^{*T} y - v_f^{*T} x + u_f^* \leq 0\ ;\ \forall f$$

تعریف شوند و نیز:

$$S_1 = \bigcup_{l=1}^{t} H_l^+, S_2 = \bigcap_{f=1}^{t'} H_f^-$$

در این‌صورت $S = S_1 \cap S_2$ منطقه‌ی پایداری برای واحد مورد بررسی خواهد بود. در ادامه دو مثال عددی با استفاده از رویکرد ارائه‌شده، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱: در این مثال تعداد ۸ واحد با یک ورودی و یک خروجی مورد بررسی قرار می‌گیرند.[6] در جدول ۱ داده‌های مربوط به این واحدها آورده شده است.

جدول ۱. داده‌های مربوط به مثال عددی ۱.

	A	B	C	D	E	F	G	H
خروجی	۲	۶	۸	۶	۴/۵	۵	۳	۴
ورودی	۲	۳	۷	۴/۴	۳/۳	۶	۴	۸

۱. با به‌کارگیری روابط ۱ تا ۴ مشخص می‌شود که واحدهای A، B و C واحدهای کارای اولیه و سایر واحدها واحدهای ناکارا هستند. فرض کنیم که هدف تعیین منطقه‌ی پایداری برای واحد B است.

۲. بنابراین روابط ۱۱ تا ۱۹ برای این واحد فرموله می‌شوند.

۳. نتیجه نشان می‌دهد که واحدهای E و D واحدهای مرجع‌اند. بنابراین $T_۱ = \{DMU_E, DMU_D\}$ و $T_۲ = \phi$.

۴. با به‌کارگیری روابط ۲۰ تا ۲۸ مشخص می‌شود که واحدهای مرجع بعدی A و C خواهند بود؛ بنابراین می‌توان گفت $T_۱ = \{DMU_E, DMU_D\}$ و $T_۲ = \{DMU_A, DMU_B\}$ است.

۵. توقف الگوریتم.

۶. $\Omega_۱ = \{A, C, E, D\}$ و $\Omega_۲ = \{A, B, C\}$.

۷. اکنون ابرصفحه‌های وجهی گذرنده از واحدهای فوق عبارت خواهند بود از:

$$S_{۱B} = \begin{cases} U^* = ۰٫۱۶۷ \\ V^* = ۰٫۳۳ \qquad B \in H_{B۱} \\ u_۰^* = ۰ \end{cases}$$

$$S_{۲B} = \begin{cases} U^* = ۰٫۰۸۳ \\ V^* = ۰٫۳۳ \qquad B, A \in H_{B۲} \\ u_۰^* = ۰٫۵ \end{cases}$$

$$S_{۳B} = \begin{cases} U^* = ۰٫۶۷ \\ V^* = ۰٫۳۳ \qquad B, C \in H_{B۳} \\ u_۰^* = -۳ \end{cases}$$

$$S_{۱D} = \begin{cases} U^* = ۰٫۱۶۷ \\ V^* = ۰٫۲۳ \qquad D, E \in H_{B۲} \\ u_۰^* = ۰ \end{cases}$$

$$S_{۲D} = \begin{cases} U^* = ۰٫۳ \\ V^* = ۰٫۲۳ \qquad C, D \in H_{B۳} \\ u_۰^* = -۰٫۷۷ \end{cases}$$

$$S_{۱E} = \begin{cases} U^* = ۰٫۲۲ \\ V^* = ۰٫۳ \qquad D, E \in H_{۱E} \\ u_۰^* = ۰ \end{cases}$$

$$S_{۲E} = \begin{cases} U^* = ۰٫۱۶ \\ V^* = ۰٫۳ \qquad A, E \in H_{B۳} \\ u_۰^* = ۰٫۳ \end{cases}$$

چنان که مشخص است جواب $S_{۱B}$ به‌دلیل اینکه فقط یک واحد کارا روی آن قرار دارد نمی‌تواند یک ابرصفحه‌ی وجهی معرف برای PPS این مسئله باشد.

تفاوت بین دو مدل:

۱. با توجه به رویکرد ارائه‌شده[۶] باید برای تشخیص واحدهای کارای ثانویه E و D تعداد ۵ مدل ریاضی حل شود زیرا تعداد ۵ واحد ناکارا وجود دارد، و به‌ازای هر واحد ناکارا باید یک مدل ریاضی فرموله شود، در حالی که در رویکرد ارائه‌شده در این مقاله فقط ۱ مدل ریاضی حل شده است.

۲. برخی از ابرصفحه‌های وجهی حاصل در رویکرد ارائه شده[۶] صحیح نیستند.

مثال ۲: در این مثال تعداد ۱۱ واحد، با دو واحد ورودی و دو واحد خروجی در جدول ۲ آورده شده است.

۱. با استفاده از روابط ۱ تا ۴ واحدهای کارای اولیه عبارت‌اند از: $\{۱, ۲, ۴, ۵\}$. حال می‌خواهیم برای واحد ۱ منطقه‌ی پایداری را مورد بررسی قرار دهیم.

۲. با استفاده از روابط ۱۱ تا ۱۹ واحدهای مرجع عبارت‌اند از: $\{۵, ۶\}$. بنابراین $T_۱ = \{DMU_۶\}$ و $T_۲ = \{DMU_۵\}$.

۳. با استفاده از روابط ۲۰ تا ۲۸ واحدهای مرجع عبارت‌اند از: $\{۲, ۵\}$. بنابراین توقف می‌کنیم و $T_۱ = \{DMU_۶\}$ و $T_۲ = \{DMU_۲, DMU_۵\}$.

۴. در این‌صورت:

$$\Omega_۱ = \{DMU_۲, DMU_۵, DMU_۶\} \quad \text{و}$$
$$\Omega_۲ = \{DMU_۱, DMU_۲, DMU_۵\}.$$

۵. با استفاده از الگوریتم ارائه‌شده،[۹] ابرصفحه‌ی وجهی معرفِ مجموعه‌ی $\Omega_۱$ جواب‌های بهینه‌ی چندگانه‌یی حاصل می‌شوند که از بین آنها فقط جواب زیر می‌تواند یک وجه معرف برای مجموعه امکان تولید باشد:

$$S_۱ = \begin{cases} U_۱^* = ۰٫۰۰۴۶ \\ U_۲^* = ۰٫۰۵۵ \\ V_۱^* = ۰٫۰۱۲۸ \qquad DMU_{۲,۴,۵,۶} \in H \\ V_۲^* = ۰٫۰۱۲۲ \\ u_۰^* = ۰٫۱۰۴ \end{cases}$$

جدول ۲. داده‌های مربوط به مثال ۲.

واحد تصمیم گیری	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی ۱	خروجی ۲
۱	۴۰	۳۰	۱۶۰	۱۰۰
۲	۳۰	۶۰	۱۸۰	۷۰
۳	۹۳	۴۰	۱۷۰	۶۰
۴	۵۰	۷۰	۱۹۰	۱۳۰
۵	۸۰	۳۰	۱۸۰	۱۲۰
۶	۳۵	۴۵	۱۴۰	۸۲
۷	۱۰۵	۷۵	۱۲۰	۹۰
۸	۹۷	۶۷	۱۰۰	۸۲
۹	۱۰۰	۵۰	۱۴۰	۴۰
۱۰	۹۰	۶۰	۱۴۰	۱۰۵
۱۱	۹۸	۶۵	۱۴۰	۵۰

همچنین برای ابرصفحه‌ی وجهی معرفِ مجموعه‌ی $\Omega_۲$ جواب زیر حاصل می‌شوند.

$$S_۲ = \begin{cases} U_۱^* = ۰/۰۲۲ \\ U_۲^* = ۰/۰۰۳ \\ V_۱^* = ۰/۰۱۳ \\ V_۲^* = ۰/۰۱۶ \\ u_۰^* = -۲/۹۳ \end{cases} \quad DMU_{۱,۲,۴,۵} \in H$$

تفاوت بین رویکردها:

با استفاده از رویکرد ارائه‌شده‌ی قبلی[۶] تعداد ۷ مدل ریاضی برای تعیین واحد کارای ثانویه‌ی ۶ باید فرموله شود و با استفاده از رویکرد ارائه‌شده در این تحقیق فقط با حل یک مدل ریاضی این واحد کارای ثانویه شناسایی شد.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق الگوریتمی ارائه شد که به‌وسیله‌ی آن می‌توان منطقه‌ی پایداری را برای یک واحد کاملاً کارا به‌دست آورد. این امر با استفاده از تغییر در مجموعه‌ی مرجع این واحد زمانی که ورودی‌ها و خروجی‌های آن را به سمت مرزهای کارای سایر واحد حرکت می‌دهیم حاصل می‌شود. با توجه به مدلی که برای این کار ارائه شد، و همین‌طور با توجه به این که نشان داده شد برای به‌دست آوردن ابرصفحه‌های کارای گذرنده از واحد مورد بررسی، کافی است واحدهای کارای مجاور این واحد را مورد بررسی قرار دهیم و نه تمام واحدهای کارای موجود را، این روش می‌تواند به‌خصوص در مواردی که تعداد واحدهای مورد بررسی زیاد است روشی سریع‌تر از سایر روش‌های موجود باشد.

چنان که نشان داده شد، در این تحقیق فرض شده است که داده‌های مربوط به سایر واحدها بدون تغییر باشند. بنابراین می‌توان در تحقیقات بعدی حالت‌هایی را مورد بررسی قرار داد که داده‌های مربوط به سایر واحدها نیز هم‌زمان بتوانند تغییر کنند.

پانوشت

1. decision making unit (DMU)
2. banker, charnes, cooper model (BCC model)
3. additive
4. production possibility set
5. supporting and facet hyper planes

منابع

1. Charnes, A.; Cooper, W.W,; Lewin, A.Y.; Morey, R.C. and Rousseau, J. "Sensitivity a stability analysis in DEA", *Annals of Operations Research,* **2**, pp. 139-156 (1985).
2. Charnes, A. and Neralic L. "Sensitivity analysis of additive model in data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research,* **48**, pp. 332-341 (1990).
3. Zhu, J. "Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis", *European Journal of operational Research,* **90**, pp. 451-460 (1996).
4. Seiford, L.M. and Zhu, J. "Stability region for maintaining efficiency in data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research,* **108**, pp. 127-139 (1998).
5. Anderson, p. and Peterson, N.C. "A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis", *Management Science,* **39**(10), pp. 1261-1294 (1993).
6. Jahanshahloo, G.R. et al. "Sensitivity and Stability analysis in DEA", *Applied Mathematics and Computation,* **169**, pp. 897-904 (2005).
7. Cooper, W.W.; Seiford, L.M. and Tone, K., *Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models, Applications, References,* Second edition, Springer, Chapter 4 (2007).
8. Banker, R.D.; Charnes, A. and Cooper, W.W. "Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis", *Management Science,* **30**, pp. 1078-1092 (1984).
9. Jahanshahloo, G.R.; Shirzadi, A. and Mirdehghan, S.M. "Finding strong defining hyperplanes of PPS using multiplier form", *European Journal of Operational Research,* **194**, pp. 933-938 (2009).