مهندسی صنایع و مدیریت شریف
دوره‌ی ۱ - ۲۷، شماره‌ی ۱، ص. ۱۱-۱۹

مدل مکان‌یابی میانه‌ی p قطبی چندهدفه با در نظر گرفتن صف در محیط فازی

مصطفی جعفریان (کارشناس ارشد)
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد آیت‌الله آملی
حسن شوندی (استادیار)
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف
علی ترابی (استادیار)
پردیس دانشکده فنی، دانشگاه تهران

مسئله‌ی مکان‌یابی مراکز قطبی[1] کاربرد وسیعی در دنیای واقعی ــ ازجمله در شبکه‌های ارتباطات، پستی، سیستم‌های حمل‌ونقل و خطوط هوایی ــ دارد و تحقیقات زیادی درخصوص آن انجام شده است. این مسئله به‌ویژه در وضعیت‌هایی که شدت جریان بالایی بین یک سری نقاط مبدأ و مقصد در یک شبکه وجود دارد، کاربرد پیدا می‌کند. در این حالت به‌جای ارتباط مستقیم بین این نقاط سعی می‌شود با انتخاب تعدادی از این نقاط به‌عنوان مراکز قطبی، جریان‌ها از طریق این مراکز عبور داده شوند تا از صرفه‌جویی‌های مربوطه استفاده شود. بنابراین هدف مسئله انتخاب برخی گره‌ها به‌عنوان مرکز قطبی و تخصیص گره‌های غیرقطبی به این مراکز، به‌منظور دست‌یابی به کم‌ترین هزینه برای شبکه است. در بیشتر تحقیقات انجام‌شده در این حوزه، سیستم از نقطه‌نظر برآورده‌شدن کم‌ترین هزینه مورد بررسی قرار گرفته، در حالی که زمان نیز عامل مهمی است که باید به‌عنوان یک هدف منظور شود. همچنین، مطالعات محدود به حالاتی قطعی از شدت جریان بوده است. در این تحقیق سعی شده این مدل‌ها در حالت دوهدفه (زمان انتظار و هزینه) و حالت‌های غیرقطعی (فازی) از پارامترهای شدت جریان بررسی شود. از نظریه‌ی برنامه‌ریزی فازی به‌منظور تخمین توابع هدف فازی، و از یک الگوریتم ترکیبی هوشمند فراابتکاری (متاهیوریستیک) برای حل مدل توسعه‌یافته بهره گرفته شده است.

واژگان کلیدی: مکان‌یابی مراکز قطبی، نظریه‌ی صف، برنامه‌ریزی فازی، شبیه‌سازی فازی، الگوریتم هوشمند فراابتکاری، شبیه‌سازی تبرید.

mstf.jafariaan@gmail.com
shavandi@sharif.edu
satorabi@ut.ac.ir

۱. مقدمه

مراکز قطبی تسهیلات خاصی هستند که کار تعویض جریان، حمل‌ونقل غیرمستقیم و همچنین ذخیره‌ی کالا در سیستم‌های توزیع چندبه‌چند[2] را انجام می‌دهند. به‌جای برقراری ارتباط مستقیم بین هر مبدأ و مقصد، استفاده از مراکز قطبی به‌منظور برقراری این ارتباط موجب برخورداری از صرفه‌جویی‌های اقتصادی می‌شود. جریان‌های با مبدأهای مشابه و مقصدهای متفاوت در مسیرشان به سمت مراکز قطبی یکی شده و با جریان‌هایی که مبدأهای متفاوتی دارند اما مقصدشان یکی است، ترکیب می‌شوند. این فرایند بر جریانی صورت می‌گیرد که از مبدأ به مرکز قطبی و از مرکز قطبی به مقصد و نیز میان خود این مراکز وجود دارد. مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی به مکان‌یابی تسهیلات قطبی و تخصیص گره‌های تقاضا به این مراکز قطبی مرتبط است تا از این طریق جریان ترافیکی میان جفت مبدأ و مقصدها را عبور دهند. در این‌گونه مسائل دو نوع مدل پایه وجود دارد:

۱. مدل‌های تک‌تخصیصی؛
۲. مدل‌های چندتخصیصی.

تفاوت این مسائل در طرز تخصیص گره‌های غیرقطبی به مراکز قطبی است. در حالت تک‌تخصیصی، تمامی حجم ترافیک ورودی وخروجی هر مرکز تقاضا فقط از طریق یک مرکز قطبی جریان پیدا می‌کند. در برخی از تحقیقات فقط به چگونگی تخصیص توجه شده است. اما از آنجا که تخصیص بهینه متأثر از مکان‌یابی مراکز قطبی و همچنین مکان‌یابی بهینه متأثر از تخصیصِ انجام‌شده است، مسائل مکان‌یابی و تخصیص باید به‌طور هم‌زمان در تصمیم‌گیری شبکه‌های قطبی رعایت شود. مطالعات پیرامون مسائل مراکز قطبی اغلب مبتنی بر فرضیات ذیل است:

۱. شبکه‌ی قطبی میان هر جفت مراکز قطبی ارتباط کامل برقرار می‌کند؛

تاریخ: دریافت ۱۳۸۷/۱۱/۱۶، اصلاحیه ۱۳۸۹/۱/۲۹، پذیرش ۱۳۸۹/۲/۲۲.

۲. برای استفاده از مراکز قطبی، یک صرفه‌جویی اقتصادی مرتبط با نرخ تنزیل (α) وجود دارد؛

۳. بین مراکز تقاضای غیرقطبی ارتباط مستقیم وجود ندارد.

اگرچه در برخی از مطالعات این فرضیات رعایت نشده است، اما در این تحقیق فقط به مجموعه مسائلی می‌پردازیم که مبتنی بر این فرضیات‌اند. در مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی شبکه‌یی، شبکه‌ی معینی با n گره وجود دارد که در آن مجموعه‌یی از مبدأها و مقصدها و مکان‌های قطبی بالقوّه مشخص می‌شوند.

در سال ۱۹۸۷ اولین فرمول‌بندی ریاضی برای شبکه‌های مسافربری خطوط هوایی ارائه شد.[۱] این مدل‌سازی به دسته مسائل تک‌تخصیصی مربوط می‌شود. از آن پس تحقیقات زیادی در این مسائل انجام شده است. از آنجا که در این نوشتار به بررسی مسائل میانه‌ی p قطبی در حالت فازی می‌پردازیم، بر مرور ادبیاتِ معطوف به کارهای انجام‌شده در این دسته از مسائل متمرکز می‌شویم. در سال ۱۹۹۴ اولین مدل‌سازی برنامه‌ریزی صحیح خطی برای مسائل میانه‌ی p قطبیِ تک‌تخصیصی ارائه شد.[۲] در پژوهش مذکور، بر روی جریان حدی تعریف شد که در آن کم‌ترین مقدار برای جریان، به‌منظور برقراری ارتباط معرفی شد. زمانی که حدود جریان بیشینه می‌شود، هریک از گره‌های تقاضا به یک مرکز قطبی تخصیص داده می‌شوند و مدل به مسئله‌ی میانه‌ی p قطبی تک‌تخصیصی تقلیل می‌یابد. در سال ۱۹۹۶ آزادسازی برنامه‌ریزی خطی مدل Campbell که به جواب‌های کسری خیلی بزرگ منجر می‌شد، مد نظر قرار گرفت.[۳] در همین سال محققین به ارائه‌ی مدلی پرداختند[۴] که با فرض متقارن‌بودن جریان، باعث کاهش بیشتر در اندازه‌ی مسئله شد. قابلیت این مدل کاهش‌یافته این است که غالباً به جواب‌های صحیح منتهی می‌شود. مهم‌ترین جنبه‌ی تحقیق یادشده، بحث درحساسیت جواب‌ها به عوامل کاهش درون‌قطبی α است. در سال ۱۹۹۶ نیز مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی متفاوتی ارائه شد[۵] که با تعداد متغیر و محدودیت کم‌تر به حل مسائلی با ابعاد بزرگ می‌پرداخت. بدین‌منظور، حمل‌ونقل‌هایی مد نظر قرار گرفت که به‌صورت چندکالایی[۳] هستند و هر کالا نشان‌دهنده‌ی حجم جریانی است که از یک گره خاص نشأت می‌گیرد. همچنین چگونگی استفاده از فاکتورهای تنزیل متفاوت به‌منظور جمع‌آوری و توزیع توسط پست استرالیا، مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۰۱ مدل‌سازی دیگری برای مسائل میانه‌ی p قطبی تک‌تخصیصی ارائه شد[۶] که نیازمند به $O(n^2)$ متغیر و $O(n^2)$ محدودیت است. این مدل، در مقایسه با مجموعه مسائلی که تا پیش از آن ارائه شده بودند، کم‌ترین تعداد متغیر را داشت. در حالی که زمان محاسباتی مورد نیاز برای حل این مدل در عمل بزرگ‌تر از زمان مورد نیاز برای حل مدل ارنست و کریشنامورتی بود. در سال ۱۹۹۹ محققین ثابت کردند که مسائل میانه‌ی p قطبی جزء مسائل NP-hard هستند.[۷] به‌علاوه، حتی اگر مکان‌های مراکز قطبی از قبل مشخص شده باشد، تخصیص قسمت باقی‌مانده‌ی مسئله نیز NP-hard می‌شود. در سال ۱۹۸۷ برای نخستین بار دو الگوریتم ابتکاری برای حل مسائل میانه‌ی p قطبی تک‌تخصیصی ارائه شد،[۱] که در هر دو الگوریتم تمام انتخاب‌های p مکان ممکن مراکز قطبی را مورد ارزیابی قرار می‌داد. در سال ۱۹۹۱ الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه (TS)[۴] و الگوریتم ابتکاری رویکرد جست‌وجوی تصادفی گریدی (GRASP)[۵] برای حل این مدل توسعه داده شد.[۸] در سال ۱۹۹۶ محققین الگوریتم شبیه‌سازی تبرید[۵] ــ که هم در کیفیت جواب و هم در زمان محاسباتی قابل مقایسه با الگوریتم پیشنهادیِ جست‌وجوی ممنوعه در سال ۱۹۹۴ است[۹] ــ را ارائه کردند. آنها حد بالای به‌دست آمده از طریق الگوریتم شبیه‌سازی تبرید را برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی به‌وسیله‌ی الگوریتم شاخه وکران به کار گرفتند؛ و علاوه بر الگوریتم شبیه‌سازی تبرید، شاخه وکران را نیز برای حل مجموعه داده‌های CAB به اجرا درآوردند، اما این الگوریتم‌ها توانایی حل مسائل بزرگ ($n = 50$) را نداشتند. در سال ۲۰۰۹ محققین دیگری، الگوریتم چندشروعی جست‌وجوی ممنوعه به‌همراه الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه‌ی دومرحله‌یِ ادغامی را برای حل مسئله‌ی مکان‌یابی مراکز قبلی در حالت تک‌تخصیصی نامحدود ارائه کردند.[۱۰]

در سال ۲۰۱۰ توسعه‌ی مسائل کلاسیک مکان‌یابی مراکز قطبی در حالت تک‌تخصیصی محدود مورد مطالعه قرار گرفت[۱۱] که در آن اندازه‌ی مراکز قبلی به‌عنوان قسمتی از فرایند تصمیم‌گیری در نظر گرفته شد. در این تحقیقات مجموعه‌یی از ظرفیت‌ها برای مراکز قطبی در نظر گرفته شد که یکی از آنها باید انتخاب می‌شد.

پیش‌تر، در سال ۲۰۰۹، محققین در مدل خود یک سری فرضیات را آزاد کردند[۱۲] و از یک الگوی مدل یکنواخت برای تمامی مدل‌های تک‌تخصیصی مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی در شبکه‌های مرکز قطبی ناقص بهره جستند. در مدل ارائه‌شده توسط آلومر[۱۳] در مسائل تک‌تخصیصی میانه‌ی p قطبی و مکان‌یابی ناقص مراکز قطبی با هزینه‌ی ثابت، مسائل پوششی مراکز قطبی ناقص و مسائل مرکز p قطبی ناقص تعریف شده است.

در سال ۲۰۰۹، مسائل پوششی مکان‌یابی مراکز قطبی در شبکه‌های مراکز قطبی ناقص مورد مطالعه قرار گرفت و یک مدل‌سازی ریاضی عدد صحیح ارائه شد.[۱۳] در این مدل‌سازی هدف یافتنِ مکان مراکز قطبی و پیوندهای مراکز قطبی که بین مراکز قطبی مکان‌یابی شده و در انتها تخصیص گره‌های غیرقطبی به این مراکز قطبی است تا زمان سفر بین هریک از جفت مبدأ و مقصد در یک محدوده‌ی معین قرار بگیرد. برای حل مدل نیز از الگوریتم ابتکاری جست‌وجوی ممنوعه استفاده شده است.

در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۰۹، پژوهش‌گران در مطالعه‌ی خود بر روی کاربردهای این مسائل در قسمت‌های حمل بار از مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی تمرکز کردند،[۱۴] و با توجه به مشاهدات خود در بخش حمل و نقل کشور ترکیه، مدل جدید ریاضی برای مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی ارائه کردند که در آن تمامی فرضیات مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی آزادسازی شده بود. کمینه‌سازی هزینه‌ی احداث مراکز قطبی و پیوندهای قطبی با ایجاد پیوندها بین مراکز مبدأ و مقصد در یک زمان معین (محدود) از اهداف مدل آنهاست. مدل‌سازی آنها از نوع پوششی بوده و مکان‌یابی سه مرکز قطبی در مسئله‌شان مد نظر قرار گرفت. در جدول ۱ خلاصه‌یی از مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی مسائل میانه‌ی p قطبی تک‌تخصیصی ارائه شده است.

در ادبیات موضوع، مقالاتی که حالات چندهدفه را مورد بررسی قرار دهند وجود ندارد. از آنجا که در واقعیت، هم زمان و هم هزینه برای سیستم‌های حمل‌ونقل مهم‌اند، در این تحقیق ما سعی در ارائه‌ی مسائلی از مکان‌یابی مراکز قطبی داریم که در آن هم زمان و هم هزینه مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به این که در حالات واقعی برخی پارامترها را نمی‌توان به‌صورت قطعی تعریف کرد، برای مثال در مسائل حمل‌ونقل و... همواره تخمین دقیق شدت جریان بین نقاط امکان‌پذیر نیست. به‌همین خاطر در این تحقیق ضمن رسیدگی به حالات دوهدفه (زمان و هزینه)، سعی می‌شود به واقعیت نزدیک باشیم؛ یعنی از رویکرد فازی برای پارامترهای نادقیق این مسائل بهره‌بگیریم. از نظریه‌ی برنامه‌ریزی فازی نیز برای تخمین توابع هدف فازی استفاده شده است. در ادامه نیز از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید در ترکیب با شبیه‌سازی فازی برای حل توسعه‌یافته بهره خواهیم گرفت. لازم به ذکر است که رمزگان برنامه‌ی این الگوریتم با استفاده از برنامه‌ی MATLAB نوشته شده است.

جدول ۱. مرور ادبیات مسائل میانه P قطبی تک‌تخصیصی.

عنوان تحقیق	مؤلف	سال
برنامه‌ریزی عدد صحیح کوادراتیک (الگوریتم‌های HEUR۱ , HEUR۲)	اوکلی	۱۹۷۸
رویکرد تعیین تخصیص‌های بهینه	آی‌کین	۱۹۹۰
الگوریتم ابتکاری تعویض	کلینزویچ	۱۹۹۱
الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه و الگوریتم ابتکاری GRASP	کلینزویچ	۱۹۹۲
اولین مدل‌سازی عدد صحیح خطی	کمبل	۱۹۹۴
الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه	اسکورین کاپوو	۱۹۹۴
تکنیک تعیین حد پایین	اوکلی و اسکورین کاپوو	۱۹۹۵
الگوریتم‌های ابتکاری MAXFLO و ALLFLO	کمبل	۱۹۹۶
مدل جدید، الگوریتم شبیه‌سازی تبرید و الگوریتم شاخه و کران	ارنست و همکاران	۱۹۹۶
مدل‌سازی جدید برای داده‌های با جریان متقارن	اوکلی و همکاران	۱۹۹۶
تقویت آزادسازی برنامه‌ریزی خطی به‌وسیله‌ی مدل ریاضی جدید	اسکورین کاپوو و همکاران	۱۹۹۶
الگوریتم ابتکاری شبکه‌هاپفیلد تعدیل شده	اسمیت و همکاران	۱۹۹۶
ارائه مسائل مکان‌یابی ۲ قطبی	پارک و همکاران	۱۹۹۷
الگوریتم کوتاه ترین مسیر بر پایه شاخه و کران	ارنست و همکاران	۱۹۹۸
الگوریتم ابتکاری شاخه و کران	پیرکول و همکاران	۱۹۹۸
ارائه مدل جدید برای مدل‌های با هزینه‌های متقارن	پارک و همکاران	۱۹۹۸
ارائه مسائل مکان‌یابی ۳ قطبی	پارک و همکاران	۲۰۰۰
ارائه الگوریتم شبیه‌سازی تبرید	عبدی‌نور و همکاران	۲۰۰۱
ارائه مدل جدید برای مدل‌های با P=۳ و P=۲	ابری	۲۰۰۱
کمینه‌سازی تراکم در مراکز قطبی	الهدلی و همکاران	۲۰۰۵
ارائه الگوریتم جدید جست‌وجوی ممنوع	سیلوا و همکاران	۲۰۰۹
کاربرد مسائل پوششی قطبی در مسائل حمل بار ترکیه	آلومر و همکاران	۲۰۰۹
مدل‌سازی ریاضی عدد صحیح جدید در مسائل پوششی قطبی در شبکه‌های ناقص	آلومر و همکاران	۲۰۰۹
ارائه مدل یکنواخت برای تمامی مدل‌های تک‌تخصصی مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی در شبکه‌های مرکز قطبی ناقص	کالیک و همکاران	۲۰۰۹
توسعه‌ی مسائل کلاسیک مکان‌یابی مراکز قطبی در حالت تک‌تخصیصی	کوریا و همکاران	۲۰۱۰

۲. مدل میانه‌ی p قطبی تک‌تخصیصی فازی

در این بخش به معرفی مدل پیشنهادی در مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی می‌پردازیم. چنان که در انتهای بخش مرور ادبیات اشاره شد، بیشتر مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی به حالات تک‌هدفه اختصاص دارد. عامل زمان در سیستم‌های حمل‌ونقل نقش مهمی دارد و بهینه‌سازی آن در این سیستم‌ها بسیار مهم است. برای بررسی بهتر مدل در هریک از زیربخش‌های مربوطه، به‌تفصیل به تعریف متغیرها، پارامترها، توابع هدف و محدودیت‌ها خواهیم پرداخت.

۱.۲. متغیرها و پارامترهای مسئله

در تمامی تحقیق‌های ارائه‌شده در حوزه‌ی مسائلِ مکان‌یابی مراکز قطبی، پارامترهای مسئله به‌صورت قطعی است در حالی که در سیستم‌هایی از قبیل حمل کالا، که بین یک سری نقاط شدت جریان وجود دارد، فرض غیرقطعی‌بودن پارامترها بعید نیست. بنابراین، در این تحقیق سعی می‌شود حالت‌های غیرقطعی (فازی) پارامترها مورد بررسی قرار بگیرد.

اولین متغیری که آن را فازی در نظر می‌گیریم شدت جریان بین نقاط است و دومین متغیر، میانگین نرخ خدمت‌دهی است که فازی‌بودن آن در حوزه‌ی مسائل مکان‌یابی به اجرا درآمده است.[۱۵]

۱.۱.۲. متغیرها

X_{ik} (متغیر صفر و یک): چنانچه گره i به گره k تخصیص یابد یک، و در غیر این صورت صفر است.

X_{kk} (متغیر صفر و یک): چنانچه گره k یک گره قطبی باشد، یک و در غیر این صورت صفر است.

X_{ijkm}: کسری از جریان گره i به گره j که از مراکز قطبی k و m عبور می‌کند.

۲.۱.۲. پارامترهای مدل

$\widetilde{W}_{ij} = (W^a_{ij}, W^b_{ij}, W^c_{ij})$: شدت جریان فازی از گره i به گره j که به‌صورت عدد فازی مثلثی بیان می‌شود.

$\widetilde{\mu}_k = (\mu^a_k, \mu^a_k, \mu^a_k)$: میانگین فازی نرخ خدمت‌دهی گره k که به‌صورت عدد فازی مثلثی بیان می‌شود.

α: ضریب صرفه‌جویی اقتصادی که برای جریان‌های درون قطبی[۶] در نظر گرفته می‌شود.

C_{ijkm}: هزینه‌ی انتقال جریان از گره i به گره j که از مراکز قطبی k و m عبور می‌کند.

P: تعداد مراکز قطبی که باید باز شوند.

۲.۲. محدودیت‌ها

در این مدل پنج محدودیت وجود دارد. اولین محدودیت بیانگر این نکته است که هریک از نقاط غیرقطبی فقط می‌تواند به یک مرکز قطبی تخصیص داده شود (حالت تک‌تخصیصی). این محدودیت چنین بیان می‌شود:

$$\sum_k X_{ik} = 1 \quad for\ all\ i. \tag{۱}$$

دومین محدودیت بیانگر آن است که تعداد p مرکز قطبی باید باز شوند، و به‌صورت رابطه‌ی ۲ بیان می‌شود:

$$\sum_k X_{kk} = p \tag{۲}$$

محدودیت سوم متضمن این موضوع است که گره i، مشروط بر آن که گره k یک مرکز قطبی باشد، می‌تواند به گره قطبی k تخصیص یابد؛ یعنی متغیر X_{ik} زمانی یک می‌شود که متغیر X_{kk} یک باشد. این محدودیت نیز چنین نوشته می‌شود:

$$X_{ik} \leq X_{kk} \quad for\ all\ i, k. \tag{۳}$$

محدودیت چهارم متضمن این موضوع است که زمانی که گره i به گره قطبی k تخصیص داده می‌شود، باید کل جریان گره i به گره j که از مرکز قطبی k می‌گذرد برآورده شود (یک شود). این محدودیت برای زمانی است که گره k اولین گره قطبی باشد:

$$\sum_k X_{ijkm} = X_{ik} \tag{۴}$$

محدودیت پنجم متضمن این موضوع است که زمانی که گره i به گره قطبی k تخصیص داده می‌شود، کل جریان گره i به گره j که از مرکز قطبی k و دیگر مراکز قطبی عبور می‌کند یک می‌شود. این محدودیت چنین بیان می‌شود:

$$\sum_k X_{ijkm} = X_{im} \tag{۵}$$

۳.۲. تابع زمان انتظار

کمینه‌سازی زمان انتظار در هریک از مراکز قطبی یکی از اهداف مهم این‌گونه مسائل است. از آنجا که در این تحقیق هریک از مراکز قطبی را به‌عنوان یک مدل صف M/M/۱ در نظر گرفتیم، می‌توانیم میانگین زمان انتظار را با توجه به روابط لیتل،[۱۶] چنین تعریف کنیم:

$$\omega_k = \frac{1}{\mu_k - \lambda_k} \tag{۶}$$

که در آن ω_k میانگین زمان انتظار در مرکز k، μ_k میانگین نرخ خدمت‌دهی در مرکز k، و λ_k میانگین نرخ ورود به گره k است. تنها نکته‌یی که در فرمول زمان انتظار باید مورد توجه قرار گیرد نرخ ورود به مرکز k است. با توجه به متغیرهای X_{ik} و X_{ijkm} و پارامتر W_{ij}، نرخ ورود به گره k عبارت است از:

$$\lambda_i = \sum_i \sum_m \sum_j W_{ij} X_{ijkm} X_{ik} \tag{۷}$$

از آنجا که سعی در کمینه‌سازی زمان انتظار در هریک از مراکز داریم، باید تابع هدف به‌صورت کمینه ـ بیشینه زمان انتظار در مراکز قطبی در نظر گرفته شود:

$$\min \max_k \left[\frac{1}{\mu_k - \sum_i \sum_m \sum_j W_{ij} X_{ijkm} X_{ik}} \right] \tag{۸}$$

بیشینه‌ی کسر فوق برابر با کمینه‌ی مخرج آن است و با در نظر گرفتن شدت جریان فازی $\widetilde{W}_{ij}$ و نیز میانگین نرخ ورود فازی $\widetilde{\mu_k}$، رابطه‌ی ۸ تغییر می‌یابد به:

$$\max \min_k \left[\tilde{\mu}_k - \sum_i \sum_m \sum_j \ \widetilde{W}_{ij} X_{ijkm} X_{ik} \right] \tag{۹}$$

۴.۲. تابع هزینه

هدف اصلی از ارائه‌ی مدل‌های مکان‌یابی مراکز قطبی در استفاده از صرفه‌جویی اقتصادی به وجود آمده از ایجاد این مراکز است، به‌این ترتیب که از یک ضریب کاهنده (α) برای جریان‌های درون قطبی استفاده می‌کنند. با توجه به این موضوع، هزینه‌ی انتقال جریان از گره i به گره j از طریق مراکز k و m مطابق رابطه‌ی ۱۰ محاسبه می‌شود:

$$C_{ijkm} = C_{ik} + C_{mj} + \alpha C_{km} \tag{۱۰}$$

با توجه به حالت فازی از پارامتر شدت جریان، تابع هزینه که به‌عنوان دومین تابع هدف این مدل است چنین تعریف می‌شود:

$$\min \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m \widetilde{W}_{ij} X_{ijkm} C_{ijkm} \tag{۱۱}$$

چنان که مشاهده می‌شود، توابع فوق توابع هدف بامعنی نیستند. برای مدل‌سازی این‌گونه از مسائل با پارامترهای فازی، یک چهارچوب نظری از برنامه‌ریزی فازی را به‌عنوان یک روش کارآمد در بخش بعدی پیشنهاد می‌کنیم.

۳. برنامه‌ریزی فازی مسئله میانه p قطبی

پیش از این کارهای زیادی بر مدل‌های برنامه‌ریزی فازی صورت گرفته است. در این زیربخش مدل‌های برنامه‌ریزی فازی را برای مسائل مکان‌یابی میانه‌ی p قطبی به کار خواهیم بست. قبل از مدل‌سازی فازی این مسائل به نکاتی اشاره می‌کنیم. فرض کنید که Θ یک مجموعه‌ی غیرتهی، $\mathcal{P}(\Theta)$ توان[۷] مجموعه Θ است. برای ارائه‌ی تعریفی تقریبی از اعتبار لازم است که به هر رخداد A عدد $Cr\{A\}$ را اختصاص دهید که نشان‌دهنده‌ی اعتباری است که در آن رخداد A حادث خواهد شد. آنگاه سه‌تایی $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$ را فضای اعتبار بنامید. فرض کنید که $\widetilde{W}_{ij}$ و $\widetilde{\mu}_k$ بر روی فضای اعتبار $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$ تعریف شوند و بنابراین، متغیرهای $\widetilde{W}_{ij}$ و $\widetilde{\mu}_k$ به‌صورت $\widetilde{W}_{ij}(\theta)$ برای تمام i و jها و $\widetilde{\mu}_k(\theta)$ برای تمام kهای قطبی $(\theta \in \Theta)$ تعریف می‌شوند. واضح است که بیشینه زمان انتظار در هریک از مراکز،

پس از این که شدت جریان و نرخ خدمت‌دهی فازی مراکز قطبی تحقق یافت، برآورد می‌شود. برای هر $\theta \in \Theta$ یک بیشینه زمان انتظار مرتبط داریم که عبارت است از:

$$\omega_{\max}(X_{ik}, X_{ijkm|\theta}) = \min_{k \in \mathrm{Hub}} \left[\widetilde{\mu}(\theta) - \sum_i \sum_m \sum_j \widetilde{W}_{ij}(\theta) X_{ijkm} X_{ik}\right] \tag{۱۲}$$

به‌آسانی باید پذیرفت که $\omega_{\max}(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta)$ یک متغیر فازی بر روی فضای اعتبار $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$ است.

همچنین مقدار تابع هزینه $\widetilde{C} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m \widetilde{W}_{ij}(\theta_r) X_{ijkm} C_{ijkm}$ نیز یک متغیر فازی بر روی فضای اعتبار $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$ است. بنابراین هدف مسئله‌ی ما کمینه‌سازی زمان انتظار فازی $\omega_{\max}(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta)$ و هزینه‌ی فازی $\widetilde{C}(X_{ijkm}|\theta)$ با استفاده از نظریه‌ی برنامه‌ریزی فازی است. با توجه به تعاریف قبلی، مدل پیشنهادی عبارت خواهد بود از:

$$\min \ \widetilde{\omega}_{\max}\left(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta\right) \tag{۱۳}$$

$$\min \ \widetilde{C}\left(X_{ijkm}|\theta\right) \tag{۱۴}$$

$$\text{Subject to:} \quad A \tag{۱۵}$$

که در آن A مجموعه‌ی تمام محدودیت‌های مدل است.

۱.۳. مدل کمینه‌سازی زمان انتظار و هزینه‌ی فازی مورد انتظار

در سال ۲۰۰۷، رویکرد برنامه‌ریزی فازی با کمینه‌سازی مقدار مورد انتظار اعداد فازی معرفی شد.[۱۷] با توجه به این رویکرد و جایگذاری زمان انتظار فازی $\widetilde{C}(X_{ijkm}|\theta)$ با مقدار مورد انتظار آن و هزینه‌ی فازی $\widetilde{\omega}_{\max}(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta)$ با مقدار مورد انتظار آن، تابع هدف تبدیل می‌شود به:

$$\min \left[E\left[\widetilde{\omega}_{\max}(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta)\right], E\left[\widetilde{C}(X_{ijkm}|\theta)\right]\right]$$
$$\text{Subject to:} \quad A \tag{۱۶}$$

با توجه به این که مقدار مورد انتظار فازی برابر با

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{\xi \geq r\}dr - \int_0^{+\infty} Cr\{\xi \leq r\}dr$$

است، داریم:

$$\min_{X_{ik}, X_{ijkm}} \begin{cases} \int_0^{+\infty} Cr\{0 \in \theta|\widetilde{\omega}_{\max}(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta) \geq r\}dr \\ \int_0^{+\infty} Cr\{\theta \in \Theta|\widetilde{C}(X_{ijkm}|\theta) \geq r\}dr \end{cases}$$
$$\text{Subject to:} \quad A \tag{۱۷}$$

که در آن A مجموعه‌ی محدودیت‌ها است و $\widetilde{\omega}_{\max}\left(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta\right)$ و $\widetilde{C}(X_{ijkm}|\theta)$ نیز در بخش قبلی تعریف شده‌اند.

مدل فوق مکان‌یابی مراکز قطبی و تخصیص بهینه به این مراکز را نشان می‌دهد تا از این طریق دست‌یابی به کم‌ترین مقدار مورد انتظار زمان انتظار و کم‌ترین هزینه‌ی مورد انتظار، با توجه به محدودیت‌های اعمال‌شده بر مکان‌یابی و تخصیص مراکز قطبی، مقدور شود. چون تخمین مقادیر مورد انتظار فازی فوق غیرممکن است، از شبیه‌سازی فازی.[۱۷] استفاده می‌شود.

۲.۳. شبیه‌سازی فازی در تخمین زمان انتظار و هزینه‌ی فازی مورد انتظار

در این قسمت به بررسی روند اجرای شبیه‌سازی فازی برای مدل برنامه‌ریزی فازی زمان انتظار و هزینه مورد انتظار فازی[۱۷] می‌پردازیم. برای تخمین تابع هدف مدل مورد نظر، که در زیر نشان داده می‌شود، مراحل اجرای الگوریتم شبیه‌سازی عبارت خواهد بود از:

$$U(x) : x \to \left[E\left[\widetilde{\omega}_{\max}(X_{ik}, X_{ilkm}|\theta)\right], E\left[\widetilde{C}(X_{ijkm}|\theta)\right]\right]$$

- مرحله‌ی اول: قرار دهید $e_\omega = 0$ و $e_C = 0$.
- مرحله‌ی دوم: برش α از تک‌تک پارامترهای فازی مسئله $\widetilde{W}_{ij}, \widetilde{\mu}_j$ ایجاد کنید.
- مرحله‌ی سوم: تعداد N عدد تصادفی از بازه‌های تولیدشده از برش α برای هریک از پارامترهای فازی مسئله تولید کنید، و آنها را به‌ترتیب W_{ijk} و μ_{jk} برای $k = 1, 2, \ldots, N$ بنامید. سپس قرار دهید: $v_k(W) = \mu(W_{ijk})$ که در آن μ تابع عضویت متغیر فازی $\widetilde{W}_{ij}$ و $v_k(\mu) = \mu(\mu_{jk})$ که در آن μ تابع عضویت متغیر فازی $\widetilde{\mu}_j$ است.
- مرحله‌ی چهارم: با توجه به مقادیر به‌دست آمده از پارامترها و نیز مقادیر متغیرهای تصمیم تولیدشده از الگوریتم SA [۸]، مقادیر زمان انتظار در هریک از مراکز قطبی و هزینه‌ی کل سیستم را محاسبه کنید.
- مرحله‌ی پنجم: بیشینه زمان انتظار مراکز را به‌عنوان مقدار تابع هدف زمان انتظار قرار دهید و آن را ω_k برای $k = 1, 2, \ldots, N$ بنامید.
- مرحله‌ی ششم: هزینه‌ی کل سیستم برای هر $k = 1, 2, \ldots, N$ را C_k قرار دهید.
- مرحله‌ی هفتم: دو عدد a و b را به‌صورت $a = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ و $b = \omega_1 \vee \omega_2 \vee \ldots \vee \omega_k$ محاسبه کنید.
- مرحله‌ی هشتم: عدد r را به‌طور تصادفی از بازه $[a, b]$ تولید کنید.
- مرحله‌ی نهم: قرار دهید:

$$e_\omega \leftarrow e_\omega + Cr\{\widetilde{\omega}_{max}(X_{ik}, X_{ijkm}|\theta) \geq r\}$$

- مرحله‌ی دهم: مراحل هشتم تا نهم را تا N دفعه تکرار کنید.
- مرحله‌ی یازدهم: دو عدد c و d را به‌صورت $c = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$ و $d = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$ محاسبه کنید.
- مرحله‌ی دوازدهم: عدد r را به‌طور تصادفی از بازه $[c, d]$ تولید کنید.
- مرحله سیزدهم: قرار دهید

$$e_c \leftarrow e_c + Cr\{\widetilde{C}(X_{ijkm}|\theta) \geq r\}$$

- مرحله‌ی چهاردهم: گام‌های یازدهم تا سیزدهم را تا N دفعه تکرار کنید.
- مرحله‌ی پانزدهم: قرار دهید

$$U_\omega(x) = a \vee 0 + b \wedge 0 + \left(e_\omega \times \frac{(b-a)}{N}\right)$$

- مرحله‌ی شانزدهم: قرار دهید

$$U_c(x) = c \vee 0 + d \wedge 0 + \left(e_C \times \frac{(c-d)}{N}\right)$$

۴. الگوریتم هوشمند ترکیبی

مسئله‌ی مکان‌یابی میانه‌ی p قطبی از نوع عدد صحیح مختلط است و طبیعتاً، حالت فازی این مسئله نیز یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط است. در مرور ادبیات به این نکته اشاره شد که مسائلِ در زمره‌ی برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط جزء دسته مسائل NP-hard هستند. بنابراین در این بخش برای حل مدل فازیِ ارائه‌شده، الگوریتم هوشمندِ ترکیبیِ شبیه‌سازی فازی و شبیه‌سازی تبرید (SA) ارائه می‌شود. چنان‌که در بخش قبل توضیح داده شد، از شبیه‌سازی فازی برای تخمین مقدار تابع هدفی که به‌منظور ارزیابی جواب‌های تولیدشده برحسب الگوریتم SA به کارگرفته شده، استفاده می‌کنیم. الگوریتم SA به‌عنوان الگوریتمی فراابتکاری برای حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده، به‌دلیل صرف زمان اندک و تولید جواب‌های قابل قبول کاربردهای گسترده‌یی دارد.[۱۸]

در ادامه به توصیف جزییات خاص روش SA که در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرد، پرداخته می‌شود. در الگوریتم پیشنهادی، فقط آن دسته از جواب‌ها که موجه‌اند مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

۱.۴. جواب اولیه

جواب اولیه‌ی الگوریتم برای مسئله‌ی مکان‌یابی میانه‌ی p قطبی عبارت است از: ابتدا به‌طور تصادفی تعداد p گره از گره‌های موجود را به‌عنوان گره قطبی، و باقی گره‌ها را به‌طور تصادفی به این مراکز قطبی تخصیص می‌دهیم؛ در نهایت کسری از جریان i به j را که باید از طریق مراکز قطبی عبور داده شوند، به‌طور تصادفی مشخص می‌کنیم.

۲.۴. تولید همسایگی

برای تعریف همسایگی در این مسئله به دو روش عمل می‌شود:

۱. جایگزینی مرکز قطبی: در این روش یکی از مراکز غیرقطبی را به‌طور تصادفی انتخاب و به‌جای یکی از مراکز قطبیِ موجود قرار می‌دهیم.

۲. تخصیص مجدد گره‌های غیرقطبی به گره‌های قطبی: در این روش تخصیص گره‌ها را به مراکز از پیش تعیین‌شده به‌طور تصادفی تغییر می‌دهیم.

باید توجه داشت که نوع دیگر تولید همسایگی نیز وجود دارد که تغییر در میزان کسر جریانی است که از طریق مراکز قطبی عبور داده می‌شوند. با کمی دقت می‌توان دریافت که این تغییر با تغییری که در حالت اول یا دوم صورت می‌گیرد همراه است. بنابراین در تولید همسایگی به دو حالت فوق بسنده می‌شود.

۳.۴. نحوه‌ی انتقال از جواب فعلی به جواب همسایه

برای جایگزینی یک جواب با جواب فعلی ابتدا مقدار تابع مطلوبیت را محاسبه می‌کنیم؛ در اینجا از شیوه‌ی شبیه‌سازی فازی برای تخمین این مقدار استفاده شده است. اگر مقدار به‌دست آمده از مقدار مطلوبیت جواب فعلی بهتر بود، آن مقدار را جایگزین مقدار فعلی می‌کنیم؛ و اگر از آن بهتر نبود با استفاده از نامساوی ۱۸ به مقایسه‌ی آن می‌پردازیم:

$$e^{-\left(\frac{f(S_n)-f(S_c)}{T_k}\right)} > random\,[\circ,\text{۱}] \qquad (\text{۱۸})$$

که در آن $f(S_n)$ تابع مطلوبیت حل همسایه و $f(S_c)$ تابع مطلوبیت حل فعلی است که از طریق شبیه‌سازی فازی به‌دست می‌آید. اگر نامساوی فوق برقرار شد حل فعلی جایگزین حل قبلی می‌شود، و اگر این نامساوی برقرار نبود همان حل قبلی را برای تکرار بعدی به‌عنوان حل اولیه در نظر خواهیم گرفت.

۴.۴. پارامترهای الگوریتم SA

۱.۴.۴. دمای اولیه

یکی از روش‌های تعیین دمای اولیه استفاده از روشی است که در کتاب شیوه‌های نوین ابتکاری برای مسائل ترکیبی[۱۹] ارائه شده است. رابطه‌ی مورد نظر عبارت است از:

$$T_{\circ} = \frac{\mu}{-\ln\phi} f(x^{\circ})$$

با توجه به اینکه الگوریتم SA به جواب‌های بی‌ارزش نیز شانس انتخاب می‌دهد، لذا برای تعیین دمای اولیه برطبق این رابطه تعداد ϕ درصد جواب‌هایی که μ درصد نامطلوب‌تر از مقدار مطلوبیت جواب اولیه $(f(x^{\circ}))$، هستند را برای تولید همسایگی در مرحله بعد انتخاب می‌کند. در اغلب موارد $\phi \in [\text{۲۰}\%, \text{۱۰}\%]$ و $\mu \in [\text{۱۰}\%, \text{۵}\%]$ است.

برای دست‌یابی به دمای اولیه، ابتدا با یک اجرای مقدماتی مقدار $f(X^{\circ})$ را به دست آورده و با مقادیر $\phi = \text{۱۵}\%$ و $\mu = \text{۱۰}\%$ و رابطه‌ی فوق مقدار ۶۰۰۰ را به‌دست می‌آوریم.

۲.۴.۴. تعداد انتقال‌ها (N_k) در دمای T_k

در این الگوریتم تعداد تکرار در هر دما را ثابت فرض می‌کنیم، یعنی: $N_k = N_{\circ}$ که در آن N_k بین ۶ تا ۵۰ می‌تواند باشد.

۳.۴.۴. نرخ کاهش دما

نرخ کاهش دمای مورد استفاده در این الگوریتم با استفاده از رابطه‌ی $T_{k+1} = \beta T_k$ محاسبه می‌شود که در آن $\beta \in [\text{۰٫۵}, \text{۰٫۹۹}]$ است.

۴.۴.۴. معیار توقف

معیارهای زیادی برای توقف در الگوریتم SA وجود دارد که برخی از آنها در کتاب تئوری‌های بهینه‌سازی ابتکاری مدرن (۲۰۰۷)[۱۸] معرفی شده‌اند. یکی از آن معیارها تعداد کاهش‌ها در دماست که در این تحقیق از آن استفاده شده است.

۵.۴. روند حل الگوریتم پیشنهادی

روند کلی حل الگوریتم ترکیبی SA و شبیه‌سازی فازی عبارت است از:

۱. شروع؛

۲. پارامترهای $T_{\circ}$ و $N_{\circ}$ را قرار دهید؛

۳. قرار دهید $k = \circ$؛

۴. جواب اولیه را برآورد کنید؛

۵. مقدار تابع مطلوبیت جواب را با استفاده از شبیه‌سازی فازی به‌دست بیاورید و آن $f(S_c)$ را بنامید؛

۶. روند زیر را تکرار کنید؛

۷. برای L از ۱ تا N_k؛

۸. همسایگی از حل فعلی را برآورد کنید؛

۹. مقدار تابع مطلوبیت حل همسایه را با استفاده از شبیه‌سازی فازی به دست بیاورید و آن $f(S_n)$ بنامید؛

۱۰. اگر $f(S_n) < f(S_c)$ حل همسایه را جایگزین حل فعلی کنید؛

۱۱. در غیر این صورت اگر $e^{-\left(\frac{f(S_n)-f(S_c)}{T_k}\right)} > random\,[0,1]$ حل همسایه را جایگزین حل فعلی کنید؛

۱۲. پایان حلقه؛

۱۳. قرار دهید: $k = k + 1$؛

۱۴. T_k و N_k را به‌هنگام کنید؛

۱۵. معیار توقف را بررسی کنید، اگر ارضاء نشد برو به خط ۶، در غیر این‌صورت توقف کن؛

۱۶. پایان.

۶.۴. طراحی آزمایش‌ها برای تنظیم پارامترهای الگوریتم

در این بخش برای تنظیم دقیق پارامترهای تأثیرگذارِ الگوریتمِ شبیه‌سازیِ تبرید از طراحی آزمایش‌ها استفاده می‌کنیم. به‌این ترتیب که هریک از پارامترها (دمای اولیه، نرخ کاهش دما، تعداد انتقال‌ها در هر دما و معیار توقف) را در سه سطح بالا، پایین و میانه، با توجه به جدول ۲ فرض کرده و از ترکیب آنها آزمایش‌ها را اجرا می‌کنیم. با توجه به تحلیل واریانس گرفته‌شده در محیط نرم‌افزار (SAS)، جدول ۳، الگوریتم پیشنهادی نسبت به تغییرات پارامتر نرخ کاهش دما معنی‌دار است و با توجه به ضریب منفی آن بالاترین سطح از این پارامتر کم‌ترین مقدار متغیر پاسخ را به‌همراه دارد. دیگر پارامترها نیز هرکدام با توجه به ضرایب خود (مثبت و منفی) تنظیم خواهند شد، که تأثیرگذاری آنها بر الگوریتم معنی‌دار نیست.

جدول ۲. سطوح پارامترهای الگوریتم SA.

پارامتر	علامت	پایین	میانه	بالا
دمای اولیه	To	۵۷۰۰	۶۰۰۰	۶۳۰۰
نرخ کاهش دما		۰٫۷۵	۰٫۸۵	۰٫۹۵
تعداد انتقال‌ها	maxit	۳۰	۴۰	۵۰
معیار توقف	N	۲۰	۲۵	۳۰

جدول ۳. جدول تحلیل واریانس.

منبع	DF	SS	MS	F	$Pr > F$
دمای اولیه	۱	۱۲۲۱۰۰۷	۱۲۲۱۰۰۷	۱٫۲۰۰۷۰۱	۰٫۲۷۸۸۸۶
نرخ کاهش	۲	۱۱۴۹۴۶۷۰	۵۷۴۷۳۳۵	۵٫۶۵۱۷۵	۰٫۰۰۶۳۸۷
تعداد انتقال‌ها	۲	۳۴۵۲۰۲۶	۱۷۲۶۰۱۳	۱٫۶۹۷۳۰۷	۰٫۱۹۴۴۴۶
معیار توقف	۲	۷۸۸۵۸۱٫۵	۳۹۴۲۹۰٫۷	۰٫۳۸۷۷۳۳	۰٫۶۸۰۷۹
مدل	۷	۱۶۹۵۶۲۸۵	۲۴۲۲۳۲۶	۲٫۳۸۲۰۴	۰٫۰۳۶۳۹
خطا	۴۶	۴۶۷۷۷۹۷۴	۱۰۱۶۹۱۲		
کل	۵۳	۶۳۷۳۴۲۵۹			

۵. نتایج محاسبات

با توجه به مدل پیشنهادی و الگوریتم ارائه‌شده در بخش قبل، در این قسمت به حل مسائل نمونه‌ی مکان‌یابی مراکز قطبی می‌پردازیم. با توجه به این‌که در ادبیات موضوع حالات غیرقطعی در مقادیر شدت جریان بین مراکز کار نشده است، اطلاعات مورد نیاز برای اجرای الگوریتم به‌طور تصادفی تولید می‌شوند. برای بررسی میزان عملکرد الگوریتم پیشنهادی، مدل مورد نظر در سه سطح کوچک (۱۰ گره)، متوسط (۱۵ گره) و بزرگ (۲۵ گره) اجرا و حل شده است. مثال مربوط به مسائل کوچک به‌طور کامل توضیح داده می‌شود و برای مسائل متوسط و بزرگ نتایج حاصل از اجرای الگوریتم ارائه می‌شود.

در مسئله‌یی با ۱۰ گره برای ماتریس شدت جریان، از آنجا که فرض می‌شود اعداد فازی شدت جریان به‌صورت مثلثی‌اند، ابتدا عدد وسط آن را به‌صورت یکنواخت بین (۱۵۰ و ۱۰۰) تولید و سپس برای هریک از اعداد، عددی تصادفی بین (۲۰ و ۱) تولید می‌کنیم. برای حد پایین، عدد وسط را از این عدد تصادفی کم، و برای حد بالا عدد وسط را با این عدد تصادفی جمع می‌کنیم. نمونه‌یی از این تولید را در جدول ۴ نشان می‌دهیم. برای تولید اعداد فازی تصادفیِ نرخ خدمت‌دهی نیز به‌همین ترتیب عمل می‌کنیم. نمونه‌یی از این تولید نیز در جدول ۵ نشان داده می‌شود.

خروجی نرم افزار MATLAB از اجرای الگوریتم برای مسئله‌یی با ۱۰ گره و ۳ مرکز قطبی، در جدول ۶ نشان داده شده است. در ادامه‌ی این الگوریتم ترکیبی پیشنهادی برای مسائل با ۱۵ و ۲۵ گره نیز به اجرا درآوردیم که نتایج آن در جدول ۷ ارائه شده است.

جدول ۴. اعداد تصادفی فازی مثلثی شدت جریان بین گره‌ها در شبکه‌ی ۱۰ گره‌یی.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۰ ۰ ۰	۱۲۹ ۱۳۴ ۱۳۹	۹۸ ۱۱۳ ۱۲۸	۱۳۲ ۱۴۳ ۱۵۴	۱۴۰ ۱۴۶ ۱۵۲	۱۱۹ ۱۲۲ ۱۲۵	۱۰۷ ۱۲۴ ۱۴۱	۹۸ ۱۰۴ ۱۱۰	۱۲۸ ۱۳۶ ۱۱۴	۹۸ ۱۰۱ ۱۰۴
۲	۱۲۹ ۱۳۴ ۱۳۹	۰ ۰ ۰	۹۸ ۱۱۶ ۱۳۸	۱۲۵ ۱۴۱ ۱۵۷	۱۲۳ ۱۴۱ ۱۵۹	۱۲۶ ۱۴۳ ۱۶۰	۱۲۷ ۱۴۵ ۱۶۳	۱۱۸ ۱۲۲ ۱۲۶	۱۱۴ ۱۲۳ ۱۳۲	۱۲۷ ۱۴۶ ۱۶۵
۳	۹۸ ۱۱۳ ۱۲۸	۹۸ ۱۱۶ ۱۳۸	۰ ۰ ۰	۱۴۰ ۱۴۹ ۱۵۸	۱۳۰ ۱۳۷ ۱۴۴	۹۰ ۱۰۹ ۱۲۸	۱۲۲ ۱۳۹ ۱۵۶	۱۰۶ ۱۱۲ ۱۱۸	۱۰۳ ۱۲۰ ۱۳۷	۱۴۶ ۱۴۸ ۱۵۰
۴	۱۳۲ ۱۴۳ ۱۵۴	۱۲۵ ۱۴۱ ۱۵۷	۱۴۰ ۱۴۹ ۱۵۸	۰ ۰ ۰	۹۸ ۱۱۸ ۱۳۸	۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۰	۱۲۸ ۱۳۰ ۱۳۲	۱۱۱ ۱۱۸ ۱۲۵	۱۲۰ ۱۳۳ ۱۴۶	۱۰۰ ۱۱۰ ۱۲۰
۵	۱۴۰ ۱۴۶ ۱۵۲	۱۲۳ ۱۴۱ ۱۵۹	۱۳۰ ۱۳۷ ۱۴۴	۹۸ ۱۱۸ ۱۳۸	۰ ۰ ۰	۱۰۲ ۱۲۰ ۱۳۸	۱۰۵ ۱۱۵ ۱۲۵	۱۰۷ ۱۱۶ ۱۲۵	۱۰۴ ۱۱۷ ۱۳۰	۱۲۱ ۱۳۷ ۱۵۳
۶	۱۱۹ ۱۲۲ ۱۲۵	۱۲۶ ۱۴۳ ۱۶۰	۹۰ ۱۰۹ ۱۲۸	۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۰	۱۰۲ ۱۲۰ ۱۳۸	۰ ۰ ۰	۱۱۹ ۱۲۶ ۱۳۳	۱۰۶ ۱۲۴ ۱۴۲	۱۰۷ ۱۲۱ ۱۳۵	۱۱۲ ۱۲۵ ۱۳۸
۷	۱۰۷ ۱۲۴ ۱۴۱	۱۲۷ ۱۴۵ ۱۶۳	۱۲۲ ۱۳۹ ۱۵۶	۱۲۸ ۱۳۰ ۱۳۲	۱۰۵ ۱۱۵ ۱۲۵	۱۱۹ ۱۲۶ ۱۳۳	۰ ۰ ۰	۱۰۲ ۱۱۶ ۱۳۰	۱۳۱ ۱۴۲ ۱۵۳	۹۸ ۱۱۵ ۱۳۲
۸	۹۸ ۱۰۴ ۱۱۰	۱۱۸ ۱۲۲ ۱۲۶	۱۰۶ ۱۱۲ ۱۱۸	۱۱۱ ۱۱۸ ۱۲۵	۱۰۷ ۱۱۶ ۱۲۵	۱۰۶ ۱۲۴ ۱۴۲	۱۰۲ ۱۱۶ ۱۳۰	۰ ۰ ۰	۱۰۹ ۱۲۲ ۱۳۵	۸۷ ۱۰۶ ۱۲۵
۹	۱۲۸ ۱۳۶ ۱۱۴	۱۱۴ ۱۲۳ ۱۳۲	۱۰۳ ۱۲۰ ۱۳۷	۱۲۰ ۱۳۳ ۱۴۶	۱۰۴ ۱۱۷ ۱۳۰	۱۰۷ ۱۲۱ ۱۳۵	۱۳۱ ۱۴۲ ۱۵۳	۱۰۹ ۱۲۲ ۱۳۵	۰ ۰ ۰	۱۱۶ ۱۲۸ ۱۴۰
۱۰	۹۸ ۱۰۱ ۱۰۴	۱۲۷ ۱۴۶ ۱۶۵	۱۴۶ ۱۴۸ ۱۵۰	۱۰۰ ۱۱۰ ۱۲۰	۱۲۱ ۱۳۷ ۱۵۳	۱۱۲ ۱۲۵ ۱۳۸	۹۸ ۱۱۵ ۱۳۲	۸۷ ۱۰۶ ۱۲۵	۱۱۶ ۱۲۸ ۱۴۰	۰ ۰ ۰

جدول ۵. اعداد تصادفی فازی مثلثی نرخ خدمت‌دهی.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
μ_a	۷۱۰۰	۷۳۹۵	۷۳۰۰	۷۴۰۷	۷۴۲۸	۶۹۴۸	۷۱۹۷	۶۹۰۶	۷۰۱۲	۷۳۰۲
μ_b	۷۱۰۶	۷۴۴۴	۷۳۲۹	۷۴۲۴	۷۴۸۵	۷۰۴۶	۷۲۸۲	۷۰۰۲	۷۳۵۳	۷۰۶۶
μ_c	۷۱۱۲	۷۴۹۳	۷۳۵۸	۷۴۴۱	۷۵۴۱	۷۱۴۳	۷۳۶۸	۷۰۹۹	۷۱۲۰	۷۴۰۴

جدول ۶. خروجی الگوریتم پیشنهادی برای مسئله‌ی دارای ۱۰ گره و ۳ مرکز قطبی.

Hub: (۲،۳،۹)						
$X_{83}=1$	$X_{73}=1$	$X_{63}=1$	$X_{53}=1$	$X_{43}=1$	$X_{13}=1$	$X_{102}=1$

* حداکثر زمان انتظار = ۱۴۴۰٫۳۲۸۰ دقیقه در روز هزینه کل = ۱۱۰۳۸۰۰

**تابع برازندگی = (معکوس حداکثر زمان انتظار) ×۰٫۹ +(هزینه کل)×۰٫۱ =۰/۹ × (+++۳۲۸۰) + ۰/۱ × ۱۱۰۳۸۰۰ = ۱۰۷۴۳۰

زمان حل = ″۰۰٫۰۲′, ۲۶

جدول ۷. خروجی الگوریتم پیشنهادی برای مسائل با ۱۰، ۱۵ و ۲۵ گره و ۳ مرکز قطبی.

N	P	hubs	زمان حل	حداکثر زمان انتظار	هزینه کل	برآزش کل
۱۰	۳	(۹ و ۳ و ۲)	″۰۰٫۰۲′, ۲۶	۱۴۴۰٫۳۲۸۰دقیقه در روز	۱۱۰۳۸۰۰	۱۰۷۴۳۰
۱۵	۳	(۹ و ۷ و ۳)	″۰۰٫۰۵′, ۲۴	۱۴۴۰٫۵۱۳۸دقیقه در روز	۲۸۶۰۹۰۰	۲۸۱۴۶۰
۲۵	۳	(۳ و ۹ و ۲)	″۰۰٫۱۸′, ۱۵	۱۴۴۰٫۷۷۲۲دقیقه در روز	۹۰۸۳۸۰۰	۹۰۱۴۳۰

* مقدار بیشینه زمان انتظار ۱۴۴۰٫۳۲۸۰ دقیقه در روز است.

** مقدار تابع به‌دست آمده پس از ۱۰ مرتبه اجرای الگوریتم ثبت شده است.

*** عدد به‌دست آمده همان مخرج کسر زمان انتظار است که در مدل پیشنهادی کم‌ترین مقدار آن لحاظ شد و عکس آن همان زمان ۱۴۴۰٫۳۲۸۰ دقیقه در روز است.

۶. نتیجه‌گیری

در چند سال اخیر عدم قطعیت در مسائل، تحقیقات وسیعی را به خود اختصاص داده است. مکان‌یابی مراکز قطبی نیز از این قائده مستثنی نیست. یکی از رویکردهای عدم قطعیت، استفاده از نظریه‌ی فازی است. از آنجا که«شدت جریان بین مراکز قطبی» از مهم‌ترین پارامترهای تأثیرگذار بر مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی است و نیز تخمین دقیق این پارامتر هرگز به‌درستی صورت نگرفته است، لذا تصویر این اعداد به‌صورت فازی معقول و به واقعیت نزدیک است. با توجه به این موضوع و همچنین سعی در به واقعیت نزدیک‌کردن مسائل مکان‌یابی مراکز قطبی، در این تحقیق به حالات فازی از شدت جریان بین مراکز پرداخته شده است.

یکی از مسائل مورد بحث در حوزه‌ی مکان‌یابی مراکز قطبی، زمان انتظار در مراکز قطبی است که چنان که باید در تحقیقات به آن توجه نشده، و فقط در تعداد معدودی از تحقیقات این موضوع مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق با استفاده از نظریه‌ی صف به بررسی زمان انتظار در مراکز قطبی و به‌همراه آن هزینه‌ی کل شبکه در حالت فازی از پارامترهای شدت جریان و نرخ خدمت‌دهی پرداخته شد. همچنین برای تخمین توابع فازی از روش شبیه‌سازی فازی استفاده شد که همواره به جواب‌های بهتری از مسائل فازی می‌انجامد.

برای حل این مسائل که از مجموعه مسائل NP-hard هستند، الگوریتم هوشمند ترکیبی ارائه شد که با ترکیب الگوریتم شبیه‌سازی تبرید و شبیه‌سازی فازی به بررسی مستقیم توابع فازی در مسائل برنامه‌ریزی مختلط عدد صحیح می‌پردازد.

با توجه به این که سرعت اجرای الگوریتم با افزوده‌شدن تعداد گره‌ها به شبکه زیاد می‌شود، به‌عنوان پیشنهادی برای تحقیقات آتی می‌توان به بررسی این الگوریتم برای کاهش زمان اجرای آن پرداخت. علاوه بر این، ارزیابی و مقایسه‌ی این الگوریتم با الگوریتم‌های فراابتکاری دیگر نیز می‌تواند به‌عنوان تحقیقات آتی مورد توجه محققان قرارگیرد. همچنین از آنجا که در شبیه‌سازی فازی از رتبه‌بندی مقدار مورد انتظار فازی استفاده شد، می‌توان از روش‌های دیگر رتبه‌بندی فازی استفاده کرد. سایر مدل‌های مکان‌یابی مراکز قطبی را نیز می‌توان با رویکرد پیشنهادی این تحقیق توسعه داد.

پانوشت

1. HUB location problem
2. many to many
3. multi commodity flow
4. tabu search
5. greedy randomized search procedure
6. inter hub flow
7. power
8. simulated annealing (SA)

منابع

1. O'Kelly, M.E. "A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities", *European Journal of Operational Research,* **32**, pp. 393-404 (1987).
2. Campbell, J.F. "A survey of network hub location", *Studies in Locational Analysis,* **6**, pp. 31-49 (1994).
3. Skorin-Kapov, D.; Skorin-Kapov, J. and O'Kelly, M. "Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems", *European Journal of Operational Research,* **94**, pp. 582-593 (1996).
4. O'Kelly, M.E.; Bryan, D.; Skorin-Kapov, D. and Skorin-Kapov, J. "Hub network design with single and multiple allocation: Acomputational study", *Location Science,* **4**(3), pp. 125-138 (1996).
5. Ernst, A.T. and Krishnamoorthy, M. "Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem", *Location Science,* **4**(3), pp. 139-154 (1996).
6. Ebery, J. "Solving large single allocation p-hub problems with two or three hubs", *European Journal of Operational Research,* **128**(2), pp. 447-458 (2001).
7. Kara, B.Y., *Modeling and Analysis of Issues in Hub Location Problems,* PhD Thesis, Bilkent University Industrial Engineering Department, 06800 Bilkent, Ankara, Turkey (1999).
8. Klincewicz, J.G. "Heuristics for the p-hub location problem", *European Journal of Operational Research,* **53**, pp. 25-37 (1991).
9. Skorin-Kapov, D. and Skorin-Kapov, J. "On tabu search for the location of interacting hub facilities", *European Journal of Operational Research,* **73**, pp. 502-509 (1994).
10. Silva, M.R. and Cunha, C.B. "New simple and efficient heuristics for the uncapacitated single allocation hub location problem", *Computers and Operations Research,* **36**(12), pp. 3152-3165 (2009).
11. Correia, I.; Nickel, S. and Saldanha-da-Gama, F. "Single-assignment hub location problems with multiple capacity levels", *Transportation Research Part B: Methodological,* **44**, (8-9), pp.1047-1066 (2010)
12. Calik, H.; Alumur, S.A.; Kara, B.Y. and Karasan, O.E. "A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub networks", *Computers and Operations Research,* **36**(12), pp. 3088-3096 (2009).
13. Alumur, S.A.; Kara, B.Y. and Karasan, O.E. "The design of single allocation incomplete hub networks", *Transportation Research Part B: Methodological,* **43**(10), pp. 936-951 (2009).
14. Alumur, S. and Kara, B.Y., "A hub covering network design problem for cargo applications in place country-region Turkey", *Journal of the Operational Research Society,* **60**(10), pp. 1349-1359 (2009).
15. Shavandi, H. and Mahlooji, H. "A fuzzy queuing location model with a genetic algorithm for congested systems", *Applied Mathematics and Computation,* **181**, pp. 440-456 (2006).
16. Jo, J.B.; Tsujimura, Y.; Gen, M. and Yamazaki, G. "A delay model of queuing network system based on fuzzy sets theory", *Computers and Industrial Engineering,* **25**, pp. 143-146 (1993).
17. Liu, B., *Uncertainty Theory,* 2nd ed., Springer-Verlag, StateBerlin, pp. 53-70 (2007).
18. Kwang, Y.L. and El-Sharkawi, M.A., *Modern Heuristic Optimization Techniqus,* IEEE Press, pp. 123-147 (2007).
19. Reeves, C.R., *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems,* New York: John Wiley & Sons, (1993).