

مدل استوار بهینه‌سازی سبد مالی دارای اختیار معامله

محمد مدرس (استاد)

مریم حسن‌زاده مفرد (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار دو مدل استوار برای مسائل بهینه‌سازی سبد مالی دارای اختیار معامله توسعه داده می‌شود. در مدل اول با توجه به رابطه‌ی غیرخطی (شکسته‌ی خطی) بین داده‌های غیرقطعی (ارزش سهام و اختیار معامله)، یک مدل هم‌تای استوار بیش‌محافظة کارانه ارائه می‌دهیم؛ در مدل دوم نیز با روشی متفاوت هم‌تای استوار با درجه محافظه‌کاری قابل کنترل ارائه می‌شود. خصوصیت اصلی مدل‌های استوار ارائه شده در این پژوهش، نحوه‌ی برخورد آن‌ها با روابط غیرخطی پارامترهای دارای عدم قطعیت در مدل است. برای تحلیل دو مدل مذکور سه مسئله با تعداد 10^6 نوع سهام و حدود 40^6 اختیار معامله حل شده و نتایج آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

modarres@sharif.edu
m.hasanzadeh@ie.sharif.edu

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی سبد مالی، اختیار معامله، بهینه‌سازی استوار.

۱. مقدمه

اختیار معامله نیز صورت گرفت. یکی از انواع مدل‌های ارائه شده در این مسائل از معادلات قیمت‌گذاری اختیار معامله (معادلات موسوم به حروف یونانی برگرفته از فرمول بلک و شولز^[۱] سرچشمه گرفته است.^[۲-۴]

در برخی از مقالات چنین عنوان شده که کنترل ریسک سرمایه‌گذاری توسط محدودیت‌های موسوم به حروف یونانی اندازه‌گیری می‌شود، در حالی که اندازه‌گیری مستقیم ریسک با وجود اختیار معامله به‌عنوان گزینه‌ی سرمایه‌گذاری به دلیل توزیع درآمدی نامتقارن آن به راحتی ممکن نیست. برای مواجهه با این مشکل، با الهام از مفهوم همبستگی^۲ روش‌های بسیار نویدبخشی برای اندازه‌گیری ریسک مربوط به بهینه‌سازی سبد مالی با توزیع بازده نامتقارن ارائه شده است.^[۷] در همین راستا، چگونگی حل مسائل بهینه‌سازی سبد مالی با محاسبات ریسکی به‌وسیله‌ی برنامه‌ریزی خطی و با تخمین تابع توزیع احتمال آن توسط شبیه‌سازی مونت‌کارلو در برخی از پژوهش‌های قابل مشاهده است.^[۸-۱۱] در سال ۲۰۰۲ نیز محققین چگونگی محدود شدن ریسک کاهشی سهام را با استفاده از ارزش در معرض ریسک^۳ و با مشتقات جزئی پایین‌تر^۴ بیان کردند.^[۱۲]

در کنار این مطالب در ادبیات مسئله‌ی مورد نظر به مسائلی با هدف ایجاد اطمینان لازم از بازگشت سرمایه و مباحثی چون بیمه‌ی سبد مالی دارای اختیار معامله^۵ برمی‌خوریم.

یکی از مشکلات اصلی موجود در مدل‌سازی مسائل بهینه‌سازی سبد مالی، اثر عدم قطعیت پارامترهای مدل (نظیر مقدار سود یا ارزش گزینه‌های سرمایه‌گذاری) بر روی بهینه‌بودن و حتی مواجهه‌ی جواب ناشی از مدل مالی است. نحوه‌ی برخورد با عدم قطعیت این نوع پارامترها از یک سو در روش‌هایی چون برنامه‌ریزی احتمالی با

مسائل بهینه‌سازی سبد مالی مجموعه‌مسائلی هستند که با هدف انتخاب «ترکیب مطلوب سرمایه‌گذاری» تعریف می‌شوند. «ترکیب مطلوب سرمایه‌گذاری» مجموعه‌ی است انتخابی از گزینه‌های موجود سرمایه‌گذاری، به نحوی که بیشینه‌سازی درآمد یا کمینه‌سازی ریسک سرمایه‌گذاری (یا ترکیبی از هر دو) در آن حاصل شود. یکی از مهم‌ترین مدل‌های ریاضی مطرح برای این مسائل بهینه‌سازی، مدل میانگین - واریانس^[۱] است. پس از ارائه‌ی این مدل، تلاش‌های جدیدی به منظور ارائه‌ی مدل‌های بهینه‌سازی سبد مالی شکل گرفت.

استفاده از «اختیار معامله» به‌عنوان یک ابزار سرمایه‌گذاری از اوایل قرن ۱۸ مطرح شد. با گذشت زمان و بالارفتن تقاضای سرمایه‌گذاری و امکان مدیریت ریسک مناسب‌تر سبد مالی با استفاده از اختیار معامله، حجم معاملات آن در دهه‌ی ۸۰، از حجم معاملات سهام پیشی گرفت. به این ترتیب «اختیار معامله» به‌عنوان گزینه‌ی اصلی سرمایه‌گذاری در مرکز توجه قرار گرفت.

در ادبیات مربوط به مسائل بهینه‌سازی سبد مالی دارای اختیار معامله، به نتایج حاصل از تحقیقات انجام شده در سال‌های ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۹^[۱۳] برخورد می‌کنیم. این نتایج نشان می‌دهند که در جهانی که اختیار معامله به‌عنوان یک گزینه‌ی سرمایه‌گذاری مجزا در آن مطرح است، سبد مالی بازار به‌تنهایی به‌عنوان جواب مطلوب مدل میانگین - واریانس مطرح نمی‌شود.

هم‌زمان با تلاش‌های صورت‌گرفته در زمینه‌ی بررسی و اثبات افزایش کارایی سبد مالی دارای اختیار معامله، بررسی‌هایی در خصوص بهینه‌سازی سبد مالی دارای

تاریخ: دریافت ۱۰/۱۳۸۸/۸، اصلاحیه ۲۳/۱۳۸۹/۹، پذیرش ۱۴/۱۳۸۹/۱۰.

پیچیدگی فراوان مدل مواجه است و از سوی دیگر، با وجود اختیار معامله به‌عنوان یک گزینه‌ی سرمایه‌گذاری، استفاده از مدل‌های عمومی موجود برای تخصیص دارایی به گزینه‌های سرمایه‌گذاری با مشکلاتی همراه است.

با توجه به موارد بیان‌شده، روش پیشنهادی در این مقاله برای فائق آمدن بر این موانع استفاده از «بهنه‌سازی استوار» است. مدل‌های عمومی همتای استوار کلاسیک ارائه‌شده در ادبیات، فقط برای حالت‌هایی از عدم قطعیت در داده‌ها مناسب‌اند که داده‌ها غیر قطعی یا مستقل از هم و یا ترکیبی خطی (آفین) از یکدیگر باشند.

در این نوشتار با فرض مشخص‌نبودن تابع توزیع احتمالی درآمد گزینه‌های سرمایه‌گذاری، و با توجه به رابطه‌ی غیرخطی (شکسته‌ی خطی) بین داده‌های غیرقطعی، از بازه‌های عدم قطعیت در نظر گرفته‌شده برای ارزش آتی گزینه‌ها استفاده می‌شود. در ادبیات، تنها یک پژوهش و نوشتار نزدیک به این موضوع وجود دارد [۱۳] که هدف مدل مطرح‌شده در آن، پوشش ریسک با در نظر گرفتن عدم قطعیت بازه‌ی برای ارزش سهام است. یکی از نقاط ضعف این مدل پیچیدگی و زمان حل بالای مدل است. وجه تشابه این نوشتار با تحقیق حاضر، لحاظ‌کردن اختیار معامله به‌عنوان گزینه‌ی سرمایه‌گذاری است. در نوشتار یادشده [۱۳] از این گزینه‌ی سرمایه‌گذاری به‌عنوان ابزاری برای پوشش ریسک استفاده شده، در حالی که ما اختیار معامله را به‌عنوان یک گزینه‌ی سرمایه‌گذاری با هدف سوددهی مورد بررسی قرار می‌دهیم. از طرف دیگر، رویکرد مدل‌سازی همتای استوار ما با رویکرد یادشده [۱۳] متفاوت است.

ساختار نوشتار حاضر، که با هدف ارائه‌ی همتای استوار مسئله‌ی تک‌دوره‌ی سید مالی دارای اختیار معامله گسترش یافته چنین است: در بخش دوم مقاله تعریف کابی مسئله و در بخش سوم ابتدا تعریف پارامترها و متغیرهای مدل و سپس مدل اولیه‌ی ریاضی مسئله ارائه می‌شود. در ادامه، و در بخش چهارم با مینا قراردادن مدل اولیه، همتای استوار آن با استفاده از بازه‌های عدم قطعیت در نظر گرفته‌شده برای ارزش سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری بیان می‌شود و در بخش پنجم نیز به‌منظور بهبود عملکرد همتای استوار، با اضافه‌کردن محدودیتی خاص امکان کنترل درجه‌ی محافظه‌کاری مدل توسط سرمایه‌گذاری نیز به مدل همتای استوار مربوطه اضافه می‌شود. نهایتاً در بخش ششم نتایج محاسباتی مدل و در بخش هفتم نتیجه‌گیری مقاله ارائه خواهد شد.

۲. تعریف مسئله

هدف این تحقیق تخصیص بهینه‌ی دارایی در یک سید مالی شامل اختیار معامله و سایر گزینه‌های سرمایه‌گذاری است به‌طوری‌که «درآمد» در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری بیشینه شود. گزینه‌های سرمایه‌گذاری مورد نظر در این مسئله شامل سرمایه‌گذاری بدون ریسک (مانند سپرده‌گذاری در بانک)، سرمایه‌گذاری ریسکی (مانند خرید انواع سهام) و نهایتاً خرید انواع اختیار معامله اروپایی (خرید یا فروش) بر روی سهام موجود است.

همان‌طور که در بخش قبل نیز بیان شد یکی از موانعی که در ادبیات مدل‌سازی این مسئله با آن برخورد می‌شود، قطعی‌نبودن پارامترهای مدل است. با توجه به مشخص‌نبودن قیمت سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری، در نظر نگرفتن این عدم قطعیت -- یعنی نگرش خوشبینانه به مسئله -- باعث غیرواقعی شدن بازه سید مالی خواهد شد؛ همچنین نگرش بدبینانه به این مسئله باعث از دست دادن

فرصت‌های بسیاری می‌شود. گاهی برای رفع این موانع به تخمین توزیع احتمالی پارامترها روی می‌آورند که در این حالت نیز از یک طرف ممکن است با تخمین نادرست تابع توزیع روبه‌رو شویم، و از طرف دیگر ممکن است توزیع احتمالی غیرمتقارن (ارزش اختیار معامله در انتهای دوره) به افزایش پیچیدگی مدل‌سازی بینجامد. به این موضوع نیز باید توجه داشت که اگرچه همیشه برای سرمایه‌گذار استفاده از توزیع احتمالی و به دست آوردن جوابی بهینه با بیشترین احتمال کفایت نمی‌کند، کسب اطمینان بیشتر در سرمایه‌گذاری و تعیین کم‌ترین درآمد ضرورت می‌یابد.

با توجه به مطالب بیان‌شده در این مسئله برای مواجهه با مشکل عدم قطعیت به دلیل نداشتن تابع توزیع احتمالی پارامترها، بازه تغییراتی خطی از ارزش پارامترها در نظر گرفته می‌شود و با توجه به این بازه تغییرات با ارائه‌ی همتای استوار مدل بهینه‌سازی اولیه (با فرض قطعیت پارامترها)، بهترین جواب در بدترین حالت ارزشی پارامترها ارائه می‌شود. یکی از مشکلات اصلی در استفاده از بهینه‌سازی استوار در این مسئله، نحوه‌ی محاسبه‌ی ارزش اختیار معامله است. «ارزش اختیار معامله» به‌عنوان یک تابع شکسته‌ی خطی از ارزش سهام که پیچیدگی ارائه‌ی همتای استوار را افزایش می‌دهد. در ادامه نحوه‌ی مدل‌سازی اولیه‌ی مسئله را با فرض قطعیت پارامترها بیان می‌کنیم.

۳. مدل‌سازی اولیه مسئله

در این بخش ابتدا نمادگذاری پارامترها و متغیرهای تصمیم، و سپس مدل اولیه مسئله را بیان می‌کنیم.

۱.۳. نمادگذاری

پارامترها

N : مجموعه سهام قابل سرمایه‌گذاری؛

N_i^C : مجموعه اختیار معامله‌های خرید موجود بر روی سهام i ام؛

N_i^P : مجموعه اختیار معامله‌های فروش موجود بر روی سهام i ام؛

r_f : نرخ سود بدون ریسک در طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری؛

β : میزان سرمایه‌ی اولیه‌ی موجود برای سرمایه‌گذاری؛

S_i^0 : قیمت سهام i ام در ابتدای دوره‌ی سرمایه‌گذاری؛

S_i : قیمت سهام i ام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری؛

$k_{i,j}^{C,z}$: قیمت اعمال اختیار معامله‌ی خرید z ام برای سهام i ام؛

$k_{i,j}^{P,z}$: قیمت اعمال اختیار معامله‌ی فروش z ام برای سهام i ام؛

$p_{i,j}^{C,z}$: قیمت خرید اختیار معامله‌ی خرید z ام برای سهام i ام؛

$p_{i,j}^{P,z}$: قیمت خرید اختیار معامله‌ی فروش z ام برای سهام i ام.

متغیرهای تصمیم

ω_i : میزان سهام نوع i ام خریداری‌شده؛

$\omega_{i,j}^C$: میزان اختیار معامله‌ی خرید z ام خریداری‌شده از سهام i ام؛

$\omega_{i,j}^P$: میزان اختیار معامله‌ی فروش z ام خریداری‌شده از سهام i ام؛

ω^f : میزان سرمایه‌گذاری بدون ریسک.

(e) نماد اختیار معامله‌ی خرید است و p نماینده‌ی اختیار معامله‌ی فروش است.)

مدل اولیه‌ی پیشنهادی در این نوشتار با توجه به مجموعه

$$\omega = \{\omega^{rf}\} \cup \{\omega_i | \forall i \in N\} \cup \{\omega_{i,j}^c | \forall [i \in N, j \in N_i^c]\} \cup \{\omega_{i,j}^p | \forall [i \in N, j \in N_i^p]\}$$

و نمادگذاری‌های ارائه شده به صورت عبارت ۱ در نظر گرفته می‌شود.

$$\max_{\omega} \left(\omega^{rf} * (1 + r_f) + \sum_{i=1}^N (\omega_i * s_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * \max\{s_i - k_{i,j}^c, 0\}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * \max\{k_{i,j}^p - s_i, 0\}) \right)$$

s.t.

$$1) \omega^{rf} + \sum_{i=1}^N (\omega_i * s_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * p_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * p_{i,j}^p) = \beta$$

$$2) \omega^{rf} \geq 0,$$

$$3) \omega_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$4) \omega_{i,j}^c \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_i^c$$

$$5) \omega_{i,j}^p \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p \quad (1)$$

هدف از ارائه‌ی این مدل به دست آوردن ترکیب مطلوب سرمایه‌گذاری با توجه به گزینه‌های موجود سرمایه‌گذاری با بیشینه بازده ممکن است. بنابراین تابع هدف مورد نظر ترکیبی است از درآمد سرمایه‌گذاری بدون ریسک، سرمایه‌گذاری در سهام و خرید اختیار معامله. عبارت $\omega^{rf} * (1 + r_f)$ در تابع هدف بیانگر درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری بدون ریسک با نرخ سود قطعی r_f است و عبارت $\sum_{i=1}^N \omega_i * s_i$ درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری در سهام را در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری نمایش می‌دهد. در محاسبه‌ی درآمد اختیار معامله (به عنوان مثال در حالت خرید) زمانی که در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری قیمت بازار از قیمت اعمال اختیار معامله بیشتر است، درآمد اختیار معامله از تقاضای قیمت بازار و قیمت اعمال اختیار معامله $(s_i - k_{i,j}^c)$ محاسبه می‌شود. اما چنانچه قیمت اعمال اختیار معامله از قیمت بازار بیشتر باشد، اختیار معامله اعمال نمی‌شود و درآمد ناشی از آن صفر می‌شود. در این صورت با ترکیب درآمد ناشی از حالت‌های اعمال و عدم اعمال اختیار معامله‌ی خرید به عبارت بیشینه‌سازی کلی (عبارت ۲) برای درآمد اختیار معامله خرید می‌ریسیم:

$$\max\{s_i - k_{i,j}^c, 0\} \quad (2)$$

به همین صورت برای اختیار معامله‌ی فروش که عکس حالت خرید است، عبارت ۳ برای نمایش درآمد ناشی از خرید اختیار معامله به دست می‌آید:

$$\max\{k_{i,j}^p - s_i, 0\} \quad (3)$$

با توجه به عبارت‌های ۲ و ۳، درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری در اختیار معامله‌های خرید و فروش در تابع هدف محاسبه می‌شود.

محدودیت ۱ در مدل ۱ بیانگر محدودیت میزان سرمایه‌گذاری در ابتدای دوره است و محدودیت‌های ۲ تا ۵ نیز محدودیت‌های علامت مدل را تشکیل می‌دهند. در بخش بعدی با در نظر گرفتن مدل ۱ و بازه‌های عدم قطعیت، هم‌تای استوار مدل ارائه خواهد شد.

۴. هم‌تای استوار بیش‌محافظه‌کارانه

به منظور ارائه‌ی مدل استوار، عدم قطعیت ارزش سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری به صورت بازه تغییراتی خطی برای ارزش آن در نظر گرفته می‌شود. این بازه تغییرات چنین تعریف می‌شود:

$$s_i \in (\mu_i - b_i, \mu_i + b_i) \quad (4)$$

در بازه فوق μ_i معادل میانگین ارزش سهام و b_i معادل بیشینه میزان تغییرات ارزش سهام از مقدار میانگین آن است. لازم به ذکر است که مقادیر μ_i و b_i چنان اختیار می‌شوند که لزوماً در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری $k_{i,j}^c - s_i$ و $s_i - k_{i,j}^c$ مربوط به عبارت‌های ۲ و ۳ مقادیر مثبت نمی‌گیرند.

در ارائه‌ی مدل هم‌تای استوار به دنبال جواب بهینه‌ی هستیم که با توجه به بازه تغییرات ارزش سهام بهترین جواب در بدترین حالت ممکن را به دست بیاورد. با توجه به این موضوع هم‌تای استوار مدل ۱ با تغییر تابع هدف مدل مذکور به تابع هدف زیر بدون تغییر محدودیت‌ها حاصل می‌شود.

$$\max_{\omega} \min_{\forall i \in N, s_i \in (\mu_i - b_i, \mu_i + b_i)} \left(\omega^{rf} * (1 + r_f) + \sum_{i=1}^N (\omega_i * s_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * \max\{s_i - k_{i,j}^c, 0\}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * \max\{k_{i,j}^p - s_i, 0\}) \right) \quad (5)$$

با توجه به بازه ۴ در نظر گرفته شده برای نمایش تغییرات ارزش سهام، متغیر کمکی ε_i و مجموعه‌ی ε را چنین تعریف می‌کنیم:

$$s_i = \mu_i + b_i * \varepsilon_i, \quad -1 \leq \varepsilon_i \leq 1$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_i | \forall i \in N\} \quad (6)$$

در نتیجه عبارت $\{\mu_i + b_i * \varepsilon_i\}$ جایگزین s_i در مدل‌سازی می‌شود، و مدل هم‌تای استوار جدید عبارت خواهد بود از:

$$\max_{\omega} \min_{\varepsilon} \left(\omega^{rf} * (1 + r_f) + \sum_{i=1}^N (\omega_i * (\mu_i + b_i * \varepsilon_i)) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * \max\{(\mu_i + b_i * \varepsilon_i) - k_{i,j}^c, 0\}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * \max\{k_{i,j}^p - (\mu_i + b_i * \varepsilon_i), 0\}) \right)$$

$$\begin{aligned}
 ۳) & q_{i,j} \leq \omega_{i,j}^p, & i = 1, \dots, n, & \quad j = 1, \dots, N_i^p \\
 ۴) & u_i \geq 0, & i = 1, \dots, N \\
 ۵) & \nu_i \geq 0, & i = 1, \dots, N \\
 ۶) & p_{i,j} \geq 0, & i = 1, \dots, N, & \quad j = 1, \dots, N_i^c \\
 ۷) & q_{i,j} \geq 0, & i = 1, \dots, n, & \quad j = 1, \dots, N_i^p \quad (۱۰)
 \end{aligned}$$

اثبات: در مدل ۸ با توجه به غیرمنفی بودن ضرایب مربوط به درآمد اختیار معامله در تابع هدف و همچنین با توجه به نوع تابع هدف (کمینه‌سازی)، امکان جاگزینی زیر در مدل‌سازی ایجاد می‌شود.

$$\theta = \min(k * \max(a, b)), k \geq 0 \xleftrightarrow{\text{مدل}} \theta = \min(k * t), s.t. \begin{cases} t \geq a \\ t \geq b \\ k \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به جایگزینی فوق، تبدیل کلیه محدودیت‌ها به بزرگ‌تر یا مساوی (\geq) و قرار دادن کلیه متغیرهای تصمیم در سمت چپ محدودیت‌ها، مدل کمینه‌سازی مرتب‌شده که مبنای ارائه‌ی مدل بیشینه‌سازی دوگان است چنین به دست می‌آید.

$$\min_{\varepsilon, t} \left(\sum_{i=1}^N (\omega_i * b_i * \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * t_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * t_{i,j}^p) \right)$$

s.t.

$$\begin{aligned}
 ۱) & \varepsilon_i \geq -1, & i = 1, \dots, N & \quad u_i \\
 ۲) & -\varepsilon_i \geq -1, & i = 1, \dots, N & \quad \nu_i \\
 ۳) & t_{i,j}^c - b_i * \varepsilon_i \geq \mu_i - k_{i,j}^c, & i = 1, \dots, N, & \quad j = 1, \dots, N_i^c \quad p_{i,j} \\
 ۴) & t_{i,j}^c + b_i * \varepsilon_i \geq k_{i,j}^c - \mu_i, & i = 1, \dots, n & \quad j = 1, \dots, N_i^p \quad q_{i,j} \\
 ۵) & t_{i,j}^c \geq 0, & i = 1, \dots, N & \quad j = 1, \dots, N_i^c \\
 ۶) & t_{i,j}^p \geq 0, & i = 1, \dots, n & \quad j = 1, \dots, N_i^p \quad (۱۱)
 \end{aligned}$$

مجموعه متغیرهای تصمیم t در مدل فوق به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$t = \{t_{i,j}^c | \forall [i \in N, j \in N_i^c]\} \cup \{t_{i,j}^p | \forall [i \in N, j \in N_i^p]\}$$

در مدل ۱۱ متغیرهای $u_i, \nu_i, p_{i,j}$ و $q_{i,j}$ به عنوان متغیرهای دوگان مدل تعریف می‌شوند که با توجه به این متغیرها و مجموعه‌های ۹، معادل دوگان مدل ۸ به صورت مدل ۱۰ به دست می‌آید. ■

حال با جایگزینی معادل بیشینه‌سازی ۱۰ با مدل کمینه‌سازی ۸ در مدل ۷، به

s.t.

$$\begin{aligned}
 ۱) & \omega^{rf} + \sum_{i=1}^N (\omega_i * s_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * p_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * p_{i,j}^p) = \beta \\
 ۲) & -1 \leq \varepsilon_i, & i = 1, \dots, N \\
 ۳) & \varepsilon_i \leq 1, & i = 1, \dots, N \\
 ۴) & \omega^{rf} \geq 0, \quad \omega_i \geq 0, & i = 1, \dots, N \\
 ۵) & \omega_{i,j}^c \geq 0, & i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_i^c \\
 ۶) & \omega_{i,j}^p \geq 0, & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p \quad (۷)
 \end{aligned}$$

با توجه به این که عبارت $(1 + r_f) * \sum_{i=1}^N (\omega_i * \mu_i)$ و نیز محدودیت شماره ۱ و محدودیت‌های غیرمنفی مدل ۷ قطعی‌اند، به مدل کمینه‌سازی غیرقطعی زیر می‌رسیم:

$$\min_{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^N (\omega_i * b_i * \varepsilon_i) + N_i^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * \max\{\mu_i + b_i * \varepsilon_i - k_{i,j}^c, 0\}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * \max\{k_{i,j}^p - (\mu_i + b_i * \varepsilon_i), 0\}) \right)$$

s.t.

$$\begin{aligned}
 ۱) & -1 \leq \varepsilon_i, & i = 1, \dots, N \\
 ۲) & \varepsilon_i \leq 1, & i = 1, \dots, N \quad (۸)
 \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه‌ی ۴، مدل کمینه‌سازی ۸ به مدل بیشینه‌سازی دوگان آن در جهت ساده‌ترکردن همتای استوار ۷ تبدیل می‌شود:

قضیه‌ی ۱.۴. مدل کمینه‌سازی ۸ با استفاده از قضیه‌ی دوگان و با توجه به مجموعه‌های

$$\begin{aligned}
 u &= \{u_i | \forall i \in N\}, & \nu &= \{\nu_i | \forall i \in N\} \\
 p &= \{p_{i,j} | \forall [i \in N, j \in N_i^c]\} \\
 q &= \{q_{i,j} | \forall [i \in N, j \in N_i^p]\} \quad (۹)
 \end{aligned}$$

معادل مدل بیشینه‌سازی است.

$$\max_{u, \nu, p, q} \left(\sum_{i=1}^N (-u_i - \nu_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\mu_i - k_{i,j}^c) * p_{i,j} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (k_{i,j}^p - \mu_i) * q_{i,j} \right)$$

s.t.

$$\begin{aligned}
 ۱) & u_i - \nu_i - \sum_{j=1}^{N_i^c} b_i * p_{i,j} + \sum_{j=1}^{N_i^p} b_i * q_{i,j} = \omega_i * b_i, & i = 1, \dots, N \\
 ۲) & p_{i,j} \leq \omega_{i,j}^c, & i = 1, \dots, N, & \quad j = 1, \dots, N_i^c
 \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۱۳ که بر مبنای مسئله‌ی دوگان محدب بیان شده است،

به ارائه‌ی مدل دوگان بیشینه‌سازی و مدل کمینه‌سازی جدید می‌پردازیم.

قضیه ۱.۵. اگر مدل کمینه‌سازی ۸ با در نظر گرفتن محدودیت کنترل محافظه‌کاری ۱۳ به صورت زیر باشد:

$$\min_{\varepsilon, t} \left(\sum_{i=1}^N (\omega_i * b_i * \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * t_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * t_{i,j}^p) \right)$$

s.t.

$$۱) \varepsilon_i \geq -۱, \quad i = ۱, \dots, N$$

$$۲) -\varepsilon_i \geq -۱, \quad i = ۱, \dots, N$$

$$۳) \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i| \leq \Gamma$$

$$۴) t_{i,j}^c - b_i * \varepsilon_i \geq \mu_i - k_{i,j}^c, \quad i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^c$$

$$۵) t_{i,j}^p - b_i * \varepsilon_i \geq k_{i,j}^p - \mu_i, \quad i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^p$$

$$۶) t_{i,j}^c \geq 0, \quad i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^c$$

$$۷) t_{i,j}^p \geq 0, \quad i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^p \quad (۱۴)$$

مدل بیشینه‌سازی دوگان معادل کمینه‌سازی فوق با توجه به مجموعه‌های

$$\varepsilon^+ = \{\varepsilon_i^+ | \forall i \in N\}$$

$$\varepsilon^- = \{\varepsilon_i^- | \forall i \in N\}$$

$$Dual\ coef = \{\lambda\} \cup \{\nu_i | \forall i \in N\} \cup \{k_i | \forall i \in N\} \cup$$

$$\{\eta_i | \forall i \in N\} \cup \{\delta_i | \forall i \in N\} \cup$$

$$\{\psi_{i,j} | \forall [i \in N, j \in N_i^c]\} \cup$$

$$\{\xi_{i,j} | \forall [i \in N, j \in N_i^p]\} \cup$$

$$\{\Phi_{i,j} | \forall [i \in N, j \in N_i^c]\} \cup$$

$$\{\Pi_{i,j} | \forall [i \in N, j \in N_i^p]\} \cup \{\Xi_i | \forall i \in N\} \cup$$

$$\{\Omega_i | \forall i \in N\} \quad (۱۵)$$

به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\max_{\varepsilon^+, \varepsilon^-, Dual\ coef} \left(-\lambda * \Gamma - \sum_{i=1}^N k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) - \sum_{i=1}^N (\eta_i + \delta_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} \psi_{i,j} * (\mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} * (k_{i,j}^p - \mu_i) \right)$$

s.t.

$$۱) \omega_i * b_i + \nu_i - \eta_i + \delta_i + b_i * \sum_{j=1}^{N_i^c} \psi_{i,j} - b_i * \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} = 0, \quad i = ۱, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} = 0, \quad i = ۱, \dots, n$$

همتای استوار زیر برای مدل ۱ می‌رسیم.

$$\max_{\omega, u, \nu, p, q} \left(\omega^{rf} * (۱ + r_f) + \sum_{i=1}^N (\omega_i * \mu_i) - \sum_{i=1}^N (u_i + \nu_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\mu_i - k_{i,j}^c) * p_{i,j} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (k_{i,j}^p - \mu_i) * q_{i,j} \right)$$

s.t.

$$۱) \omega^{rf} + \sum_{i=1}^N (\omega_i * s_i^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * p_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * p_{i,j}^p) = \beta$$

$$۲) u_i - \nu_i - \sum_{j=1}^{N_i^c} b_i * p_{i,j} + \sum_{j=1}^{N_i^p} b_i * q_{i,j} = \omega_i * b_i, \quad i = ۱, \dots, N$$

$$۳) p_{i,j} \leq \omega_{i,j}^c, \quad i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^c$$

$$۴) q_{i,j} \leq \omega_{i,j}^p, \quad i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^p$$

$$۵) \omega^{rf} \geq 0,$$

$$۶) \omega_i \geq 0, \quad i = ۱, \dots, N$$

$$۷) \omega_{i,j}^c \geq 0, \quad i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^c$$

$$۸) \omega_{i,j}^p \geq 0, \quad i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^p$$

$$۹) u_i \geq 0, \quad i = ۱, \dots, N$$

$$۱۰) \nu_i \geq 0, \quad i = ۱, \dots, N$$

$$۱۱) p_{i,j} \geq 0, \quad i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^c$$

$$۱۲) q_{i,j} \geq 0, \quad i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^p \quad (۱۶)$$

مدل به دست آمده، همتای استوار مسئله‌ی بهینه‌سازی تک‌دوره‌ی سبد مالی دارای اختیار معامله (مدل ۱) است. این مدل به بیشینه‌سازی درآمد، در بدترین ترکیب ارزشی سهام در انتهای دوره می‌پردازد. واضح است که امکان رخ دادن بدترین ترکیب مقادیر ارزشی سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری به صورت هم‌زمان بسیار پایین است. بنابراین به منظور رفع این مشکل و بهبود مدل، در ادامه یک معیار کنترلی برای میزان ریسک‌پذیری سرمایه‌گذاری در مدل‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

۵. همتای استوار با درجه‌ی محافظه‌کاری قابل تنظیم

در این بخش برای محدودسازی میزان محافظه‌کاری مدل از محدودیت زیر که در مرجع ۱۴ ارائه شده و مورد استفاده قرار گرفته است استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^N |\varepsilon_i| \leq \Gamma \quad (۱۳)$$

که در آن Γ پارامتری است که با تغییر مقدار آن از ۰ تا N میزان محافظه‌کاری مدل افزایش می‌یابد. در ادامه، در راستای کنترل میزان محافظه‌کاری، محدودیت ۱۳ را به مدل کمینه‌سازی ۸ اضافه می‌کنیم.

۶. نتایج محاسباتی

در بخش‌های قبل مدل‌های ریاضی مسئله‌ی بهینه‌سازی استوار مربوط به سید مالی دارای اختیار معامله ارائه شد. در این بخش برای بررسی عملکرد مدل‌ها، سه مسئله را با اندازه‌ی $N = 100$ توسط نرم‌افزار GAMS حل، و جواب‌های حاصل از آن را مقایسه می‌کنیم. میزان سرمایه‌ی اولیه و تعداد اختیار معامله‌های هر مسئله در جدول ۱ ارائه شده است.

در این مسائل، کلیه‌ی مقادیر اولیه به صورت تصادفی و به صورت منطقی تولید شده‌اند. ضمناً، حد بالا و پایین ارزش انواع سهام در ابتدای دوره به صورت تصادفی در بازه $[50, 150]$ و تعداد اختیار معامله، قیمت خرید و قیمت اعمال اختیار معامله نیز به صورت تصادفی با توجه به مواردی چون بازه تغییرات ارزش سهام در انتهای دوره تولید می‌شوند. یادآور می‌شود هدف از ارائه‌ی مثال‌ها در این بخش، بررسی عملکرد مدل‌های ارائه‌شده و صحت‌سنجی نتایج حاصل از آن‌هاست. از طرف دیگر، با توجه به نبود مدلی مشابه در ادبیات، مقایسه با نتایج سایر پژوهش‌گران میسر نیست و هدف تنها مقایسه‌ی تغییرات تابع هدف است.

تولید داده‌های اولیه‌ی مسائل توسط Visual Basic و حل آن توسط نرم‌افزار GAMS صورت گرفته است. نتایج حاصل از حل مسائل اول تا سوم برای همتای استوار بیش محافظه‌کارانه (مدل ۱۲) و همتای استوار کنترلی (مدل ۱۷) برای Γ ‌های مختلف در جدول ۲ ارائه شده است.

چنان‌که مشاهده می‌شود در جدول ۲ نتایج حاصل از حل مدل ۱۲، دارای مقادیر مشابه مدل ۱۷ با $\Gamma = 100$ است. در این حالت چون برای $\Gamma = 100$ کل بازه تغییرات پارامترها در مدل‌سازی وارد می‌شود، مدل دارای حالت بیش محافظه‌کارانه است و در نتیجه مشابه مدل ۱۲ عمل می‌کند.

در جدول ۲ علاوه بر تشابه عملکرد دو مدل در حالت بیش محافظه‌کارانه، مشاهده می‌شود که با بزرگ‌تر شدن مقدار Γ ، مقدار تابع هدف مدل ۱۷ کاهش می‌یابد. بزرگ‌تر شدن مقدار Γ افزایش فضای جواب مدل کمینه‌سازی ۱۴ را در

جدول ۱. مشخصات مسائل.

| شرح | مسئله‌ی اول | مسئله‌ی دوم | مسئله‌ی سوم |
|---------|-------------|-------------|-------------|
| N | ۱۰۰ | ۱۰۰ | ۱۰۰ |
| N_i^c | ۱۸۸ | ۲۰۱ | ۲۱۷ |
| N_i^p | ۱۹۶ | ۲۰۳ | ۱۹۷ |
| β | ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰ |

جدول ۲. نتایج محاسباتی مسئله‌ی اول تا سوم.

| | Γ | مسئله اول | مسئله دوم | مسئله سوم |
|--------|----------|-----------|-----------|-----------|
| مدل ۱۲ | - | ۱,۰۷۲,۹۸ | ۱,۰۹۷,۸۴ | ۱,۰۸۱,۳۳ |
| | ۰ | ۲,۳۵۲,۴۵ | ۲,۳۶۱,۰۲ | ۲,۲۸۹,۳۰ |
| | ۱۰ | ۱,۸۰۳,۹۸ | ۱,۸۶۱,۴۸ | ۱,۸۴۹,۸۴ |
| | ۳۰ | ۱,۳۳۸,۴۲ | ۱,۳۷۵,۱۷ | ۱,۳۸۹,۲۵ |
| | ۵۰ | ۱,۱۲۴,۶۰ | ۱,۱۴۹,۷۴ | ۱,۱۴۲,۰۶ |
| | ۷۰ | ۱,۰۷۳,۰۸ | ۱,۰۹۸,۶۵ | ۱,۰۸۱,۸۹ |
| ۱۰۰ | ۱,۰۷۲,۹۸ | ۱,۰۹۷,۸۴ | ۱,۰۸۱,۳۳ | |

$$\begin{aligned}
 ۲) \lambda - \nu_i + \varepsilon_i^- * k_i &\geq 0, & i = 1, \dots, n \\
 ۳) \lambda + \nu_i + \varepsilon_i^+ * k_i &\geq 0, & i = 1, \dots, n \\
 ۴) \omega_{i,j}^c - \psi_{i,j} &\geq 0, & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^c \\
 ۵) \omega_{i,j}^p - \xi_{i,j} &\geq 0, & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p \\
 ۶) \lambda, \eta_i, \delta_i &\geq 0, & i = 1, \dots, n \\
 ۷) \psi_{i,j} &\geq 0, & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^c \\
 ۸) \xi_{i,j} &\geq 0, & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

اثبات: به ضمیمه مراجعه شود.

حال با توجه به قضیه ۱.۵ مدل کمینه‌سازی ۱۴ را با مدل بیشینه‌سازی معادل آن در مدل ۷ که محدودیت ۱۳ نیز به آن اضافه شده است، جایگزین می‌کنیم و همتای نهایی استوار زیر را با درجه‌ی محافظه‌کاری قابل تنظیم به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
 \max_{\omega, \varepsilon^+, \varepsilon^-} \text{Dual coef} \quad & \omega^{rf} * (1 + r_f) + \sum_{i=1}^N (\omega_i * \mu_i) - \lambda * \Gamma - \\
 & \sum_{i=1}^N k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) - \sum_{i=1}^N (\eta_i + \delta_i) + \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} \psi_{i,j} * (\mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} * (k_{i,j}^p - \mu_i)
 \end{aligned}$$

s.t.

$$۱) \omega^{rf} + \sum_{i=1}^N (\omega_i * s_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * p_{i,j}^c) +$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * p_{i,j}^p) = \beta$$

$$۲) \omega_i * b_i + \nu_i - \eta_i + \delta_i + b_i * \sum_{j=1}^{N_i^c} \psi_{i,j} - b_i *$$

$$\sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$۳) \lambda - \nu_i + \varepsilon_i^- * k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$۴) \lambda + \nu_i + \varepsilon_i^+ * k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$۵) \omega_{i,j}^c - \psi_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^c$$

$$۶) \omega_{i,j}^p - \xi_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p$$

$$۷) \omega^{rf}, \lambda \geq 0$$

$$۸) \omega_i, \eta_i, \delta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$۹) \omega_{i,j}^c, \psi_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_i^c$$

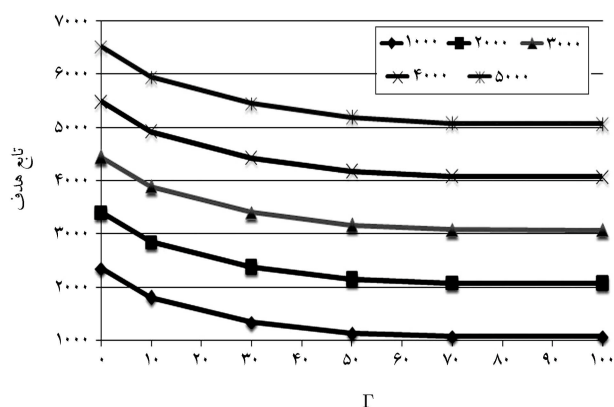
$$۱۰) \omega_{i,j}^p, \xi_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p$$

(۱۷)

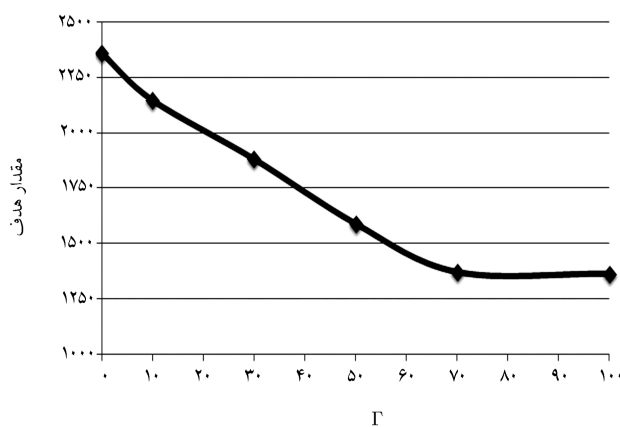
گرفتن بازه تغییرات قیمت سهام در انتهای دوره در مسئله‌ی اول، ۵۰۰۰ مجموعه از پارامترهای ارزشی سهام به صورت تصادفی تولید شد. مقدار قطعی تابع هدف مدل ۱ را برای این مجموعه‌ها براساس جواب ناشی از مدل ۱۷ برای Γ های مختلف محاسبه کردیم.

پیش از این گفته شد که عموماً در نظر نگرفتن عدم قطعیت -- به معنای خوشبینانه نگاه کردن به مسئله -- باعث غیرواقعی شدن بازه سبب مالی می‌شود؛ از سوی دیگر نگرش بدبینانه به این مسئله نیز باعث از دست دادن فرصت‌های بسیار می‌شود. استفاده از مدل همتای استوار با درجه محافظه‌کاری قابل تنظیم (مدل ۱۷) برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد شده است. در این حالت جواب حاصل از مدل استوار به نحوی است که به طور متوسط با بیشتر شدن مقدار Γ ، مقدار تابع هدف به دست آمده کاهش می‌یابد. کاهش تابع هدف مدل در Γ های بزرگ‌تر بیان‌کننده‌ی میزان محافظه‌کاری بالای سرمایه‌گذار، و افزایش مقدار تابع هدف در Γ های پایین نیز بیان‌گر نگاه خوشبینانه‌ی سرمایه‌گذار و در نتیجه ریسک بالای سرمایه‌گذاری است. نمودار ۳ تغییرات تابع هدف مدل ۱ را به ازای متوسط میزان تابع هدف در ۵۰۰۰ نمونه‌ی تصادفی نشان می‌دهد. سرمایه‌گذار در این مدل با افزایش مقدار Γ اطمینان بیشتری در خصوص کم‌ترین سطح درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری خود دارد و این موضوع سیاست‌گذاری‌های بعدی وی را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد.

لازم به ذکر است که در مدل‌های ارائه شده برای ایجاد تنوع در جواب‌ها، از محدودیت‌های کنترل میزان سرمایه‌گذاری در انواع گزینه‌های سرمایه‌گذاری استفاده



نمودار ۲. روند تغییرات تابع هدف براساس سرمایه‌ی اولیه.



نمودار ۳. تغییرات تابع هدف.

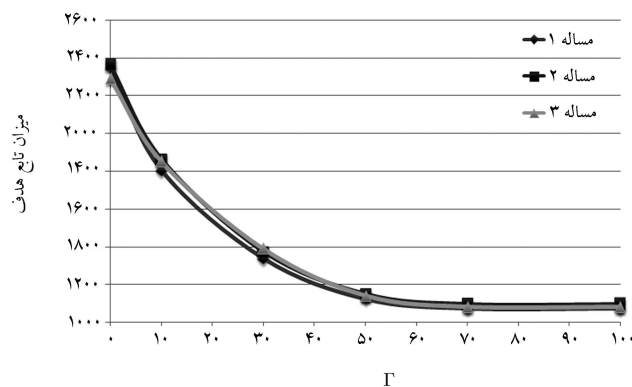
بر دارد. بدیهی است مقدار تابع هدف این مدل کمینه‌سازی با افزایش Γ روند غیرصعودی دارد و منجر به ایجاد روند غیرصعودی در مدل ۱۷ می‌شود. بنابراین کاهش مقدار تابع هدف ناشی از افزایش میزان محافظه‌کاری در برخورد با مقادیر ارزشی پارامترهاست. از طرف دیگر، افزایش محافظه‌کاری نیز به معنای کاهش میزان ریسک‌پذیری مدل است. کاهش ریسک‌پذیری مدل همیشه منجر به صرف نظر کردن از بعضی فرصت‌های سرمایه‌گذاری و در نتیجه کاهش درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری می‌شود.

نمودار ۱ نمایش روند تغییرات مقدار تابع هدف مدل ۱۷ را برای سه مسئله، براساس تغییرات Γ بیان می‌کند. روند کاهشی تابع هدف با افزایش Γ به راحتی قابل مشاهده است. نکته‌ی قابل توجه در این نمودار روند کاهشی سریع‌تر تابع هدف در Γ های پایین‌تر است. در جدول ۳ درصد تغییرات کاهشی تابع هدف برای مسئله‌ی اول بیان شده است.

چنان که در جدول ۳ مشاهده می‌شود با افزایش Γ از میزان تأثیر تغییرات Γ بر روی مقادیر تابع هدف کاسته می‌شود، به نحوی که حتی تغییرات بین ۷۰ تا ۱۰۰ قابل صرف نظر کردن است.

برای بررسی صحت مدل‌ها، با در نظر گرفتن مقادیر مختلف سرمایه‌گذاری اولیه، مسئله‌ی اول را برای Γ های مختلف حل کردیم. نتیجه‌ی کاهشی تابع هدف برای سرمایه‌های اولیه‌ی مختلف همچنان حفظ می‌شود. نمودار ۲ نشان‌گر طرح‌واره‌ی از نتایج مربوطه است. (همان‌طور که پیش‌تر نیز بیان شد نتایج مدل ۱۲ مشابه نتایج مدل ۱۷ در $\Gamma = ۱۰۰$ است).

در ادامه، به منظور مشاهده‌ی نحوه‌ی عملکرد مدل‌های ارائه شده و با در نظر



نمودار ۱. روند کاهشی تابع هدف با افزایش مقدار گاما.

جدول ۳. تحلیل نتایج محاسباتی مسئله‌ی اول.

| میزان کاهش | مسئله اول | η |
|------------|-----------|--------|
| - | ۲,۳۵۲,۴۵ | ۰ |
| ٪۲۳,۳۱ | ۱,۸۰۳,۹۸ | ۱۰ |
| ٪۴۳,۱۱ | ۱,۳۳۸,۴۲ | ۳۰ |
| ٪۵۲,۱۹ | ۱,۱۲۴,۶۰ | ۵۰ |
| ٪۵۴,۳۸ | ۱,۰۷۳,۰۸ | ۷۰ |
| ٪۵۴,۳۹ | ۱,۰۷۲,۹۸ | ۱۰۰ |

ممکن است. بدین منظور خرید اختیار معامله به صورتی انجام می‌شود که احتمال عدم اعمال اختیار معامله‌ها از مقدار ناچیزی بیشتر نباشد.

اولین مدل بیان‌شده در این مقاله، همتای استوار مدل اولیه است که آن را با در نظر گرفتن تمامی بازه‌های تغییرات ارزش سهام در انتهای دوره ارائه داده‌ایم. مدل دوم را به منظور بهبود عملکرد مدل اول و با اضافه کردن محدودیت کنترل میزان محافظه‌کاری بیان کرده‌ایم. در انتها نیز در بخش نتایج محاسباتی صحت عملکرد مدل‌های ارائه‌شده را بررسی کرده‌ایم.

ارائه‌ی مدل چنددوره‌یی بهینه‌سازی سید مالی دارای اختیار معامله‌ی یکی از زمینه‌های اصلی موجود در این مسئله برای پژوهش‌های آتی است. این مسئله حالت کلی‌تر مسئله‌ی مورد بررسی در این نوشتار است. علاوه بر این، فعالیت بیشتر بر بازه تغییرات ارزش سهام در انتهای دوره نیز ممکن است. در نظر گرفتن بازه تغییرات خطی برای ارزش سهام حالت ساده‌یی است که با فرض مشخص نبودن تابع توزیع احتمالی ارزش سهام و عدم وجود تأثیر متقابل آن‌ها مورد استفاده قرار گرفته است.

شده است. این محدودیت‌ها در ایجاد پراکندگی مناسب سرمایه‌ی اولیه در بین گزینه‌های مختلف سرمایه‌گذاری عملکرد مؤثری دارد و از تخصیص مقدار قابل توجه سرمایه به یک گزینه جلوگیری می‌کند. اضافه کردن این محدودیت‌ها به مدل اثری در مدل‌های همتای استوار مسئله ندارد.

۷. نتیجه‌گیری

در این نوشتار ضمن ارائه‌ی مدلی برای بهینه‌سازی نحوه‌ی انتخاب اجزای سید مالی، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای لحاظ کردن عدم قطعیت داده‌یی مربوط به ارزش سهام در آینده، دو مدل جدید برای در نظر گرفتن عدم قطعیت با وابستگی غیرخطی توسعه داده‌ایم. این مدل‌ها منجر به جواب‌هایی می‌شود که علاوه بر کاهش ریسک‌های سرمایه‌گذاری موجود، به دنبال استفاده‌ی هرچه بیشتر از فرصت‌های

پانویس

1. black and Scholes
2. coherence
3. value at risk (VaR)
4. lower partial moment
5. option based portfolio insurance (OBPI)

منابع

1. Markowitz, H.M. "Portfolio selection", *Journal of Finance*, **7**(1), pp. 77-91 (1952).
2. Bookstaber, R. and Clarke, R. "Problems in evaluating the performance of portfolios with options", *Financial Analysts Journal*, **41**(1), pp. 48-62 (1985).
3. Leland, H.E. "Beyond mean-variance: Performance measurement in a nonsymmetrical world", *Financial Analysts Journal*, **55**(1), pp. 27-35 (1999).
4. Papahristodoulou, C. "Options strategies with linear programming", *European Journal of Operational Research*, **157**, pp. 246-256 (2004).
5. Gao, P.W. "Options strategies with the risk adjustment", *European Journal of Operational Research*, **192**(3), pp. 975-980 (2009).
6. Horasanlı, M. "Hedging strategy for a portfolio of options and stocks with linear programming", *Applied Mathematics and Computation*, **199**, pp. 804-810 (2008).
7. Artzner, P., et al. "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance*, **9**(3), pp. 203-228 (1999).
8. Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of Risk*, **2**(3), pp. 21-41 (2000).
9. Krokmal, P.; Palmquist, J. and Uryasev, S. "Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints", *Journal of Risk*, **4**(2), pp. 11-27 (2002).
10. Topaloglou, N.; Vladimirov, H. and Zenios, S. "CVR models with selective hedging for international asset allocation", *Journal of Banking and Finance*, **26**(7), pp. 1535-1561 (2002).
11. Chekhlov, A.; Uryasev, S. and Zabarankin, M. "Draw-down measure in portfolio optimization", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **8**(1), pp. 13-58 (2005).
12. Zagst, R., *Interest Rate Management*, Springer Finance (2002).
13. Lutgens, F.; Sturm, J. and Kolen, A. "Robust one-period option hedging", *Operations Research*, **54**(6), pp. 1051-1062 (2006).
14. Bertsimas, D. and Sim, M. "The price of robustness", *Operations Research*, **52**(1), pp. 35-53 (2004).
15. Zangwill, W.I., *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1969).

مدل کمیته‌سازی مرتب‌شده برای مدل ۱۴ چنین بیان می‌شود:

$$\min_{\varepsilon_i^+, \varepsilon_i^-, t} \left(\sum_{i=1}^N (\omega_i * b_i * \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * t_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * t_{i,j}^p) \right)$$

s.t.

$$\begin{aligned} ۱) \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-) - \Gamma &\leq \circ & \lambda \\ ۲) \varepsilon_i - \varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^- &= \circ, & i = ۱, \dots, n & \nu_i \\ ۳) \varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^- &= \circ, & i = ۱, \dots, n & k_i \\ ۴) -\varepsilon_i - ۱ &\leq \circ, & i = ۱, \dots, n & \eta_i \\ ۵) \varepsilon_i - ۱ &\leq \circ, & i = ۱, \dots, n & \delta_i \\ ۶) -t_{i,j}^c + b_i * \varepsilon_i + \mu_i - k_{i,j}^c &\leq \circ, & i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^c, & \Psi_{i,j} \\ ۷) -t_{i,j}^p - b_i * \varepsilon_i + k_{i,j}^p - \mu_i &\leq \circ, & i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^p, & \xi_{i,j} \\ ۸) -t_{i,j}^c &\leq \circ, & i = ۱, \dots, N, \quad j = ۱, \dots, N_i^c & \Phi_{i,j} \\ ۹) -t_{i,j}^p &\leq \circ, & i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^p & \Pi_{i,j} \\ ۱۰) -\varepsilon_i^+ &\leq \circ, & i = ۱, \dots, n & \Omega_i \\ ۱۱) -\varepsilon_i^- &\leq \circ, & i = ۱, \dots, n & \Xi_i \end{aligned} \quad (۳- پ)$$

ابتدا به وسیله‌ی متغیرهای دوگان ارائه شده برای محدودیت‌های مدل فوق، محدودیت‌های مدل بیشینه‌سازی دوگان را با توجه به «مسئله‌ی دوگان محدب» به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} ۱) \partial \varepsilon_i : \omega_i * b_i + ۱ * \nu_i - ۱ * \eta_i + ۱ * \delta_i + b_i * \sum_{j=1}^{N_i^c} \Psi_{i,j} - b_i * \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} &= \circ, & i = ۱, \dots, n \\ ۲) \partial \varepsilon_i^+ : ۱ * \lambda - ۱ * \nu_i + \varepsilon_i^- * k_i - ۱ * \Omega_i &= \circ, & i = ۱, \dots, n \\ ۳) \partial \varepsilon_i^- : ۱ * \lambda + ۱ * \nu_i + \varepsilon_i^+ * k_i - ۱ * \Xi_i &= \circ, & i = ۱, \dots, n \\ ۴) \partial t_{i,j}^c : \omega_{i,j}^c - \Psi_{i,j} - \Phi_{i,j} &= \circ, & i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^c \\ ۵) \partial t_{i,j}^p : \omega_{i,j}^p - \xi_{i,j} - \Pi_{i,j} &= \circ, & i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, N_i^p \\ ۶) \lambda, \eta_i, \delta_i, \Psi_{i,j}, \xi_{i,j}, \Phi_{i,j}, \Pi_{i,j}, \Omega_i, \Xi_i &\geq \circ \end{aligned} \quad (۴- پ)$$

ضمیمه

اثبات قضیه‌ی (۱.۵)

برای محاسبه‌ی دوگان مدل کمیته‌سازی (۲.۵) از مسئله‌ی دوگان مقعر، و با تغییر به حالت محدب که برای مدل اولیه‌ی کمیته‌سازی قابل کاربرد است استفاده می‌کنیم.

مسئله‌ی دوگان محدب

مدل کمیته‌سازی اولیه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود. [۱۵]

$$\min_x f(x)$$

s.t.

$$g_i(x) \leq \circ, \quad i = ۱, \dots, n$$

$$h_j(x) = \circ, \quad j = ۱, \dots, m$$

در صورت محدب بودن تمامی توابع $g(x)$, $h(x)$ و $f(x)$ مدل معادل دوگان آن چنین به دست می‌آید:

$$\max_x f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(x)$$

s.t.

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^m \nu_j \nabla h_j(x) = \circ \quad \lambda_i \geq \circ$$

واضح است که تابع $|x|$ تابعی محدب است، و از طرف دیگر مجموع توابع محدب نیز تابعی محدب است. بنابراین تابع سمت چپ محدودیت ۱۳ که به عنوان محدودیت کنترل درجه محافظه‌کاری به مدل اضافه شده است، تابعی محدب است. در نتیجه امکان استفاده از «مسئله‌ی دوگان محدب» برای محاسبه‌ی مدل دوگان در مدل وجود دارد.

جهت ایجاد امکان مشتق‌گیری در مدل ۱۴، به جایگزینی محدودیت ۱۳ با محدودیت‌های معادل زیر در مدل‌سازی می‌پردازیم. در این حالت همچنان فضای مدل ۱۴ خصوصیات قبل را دارد.

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-) \leq \Gamma$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-, \quad \varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^- = \circ$$

$$\varepsilon_i^+ \geq \circ, \quad \varepsilon_i^- \geq \circ \quad (۱- پ)$$

بعد از جایگزینی قدرمطلق با عبارت‌های پ-۱ و مرتب کردن محدودیت‌های مدل ۱۴ به صورت کوچک‌تر مساوی ($\leq \circ$) با توجه به مجموعه‌های

$$\varepsilon^+ = \{\varepsilon_i^+ | \forall i \in N\}, \quad \varepsilon^- = \{\varepsilon_i^- | \forall i \in N\}$$

$$t = \{t_{i,j}^c | \forall [i \in N, j \in N_i^c]\} \cap \{t_{i,j}^p | \forall [i \in N, j \in N_i^p]\}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_i | \forall i \in N\} \quad (۲- پ)$$

دست می‌آید که با حذف آن‌ها از مدل تابع هدف نهایی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$-\lambda * \Gamma - \sum_{i=1}^N k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) - \sum_{i=1}^N \eta_i - \sum_{i=1}^N \delta_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} \Psi_{i,j} * (\mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} * (k_{i,j}^p - \mu_i) \quad (6- پ)$$

بنابراین معادل دوگان این مدل با توجه به محدودیت‌های پ-۴، عبارت پ-۶، و مجموعه‌های ۱۵ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\max_{\varepsilon^+, \varepsilon^-, Dual\ coef} \left(-\lambda * \Gamma - \sum_{i=1}^N k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) - \sum_{i=1}^N (\eta_i + \delta_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} \Psi_{i,j} * (\mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} * (k_{i,j}^p - \mu_i) \right)$$

s.t.

$$۱) \omega_i * b_i + \nu_i - \eta_i + \delta_i + b_i * \sum_{j=1}^{N_i^c} \Psi_{i,j} - b_i * \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} = 0,$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$۲) \lambda - \nu_i + \varepsilon_i^- * k_i - \Omega_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$۳) \lambda + \nu_i + \varepsilon_i^+ * k_i - \Xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$۴) \omega_{i,j}^c - \Psi_{i,j} - \Phi_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^c$$

$$۵) \omega_{i,j}^p - \xi_{i,j} - \Pi_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p$$

$$۶) \lambda, \eta_i, \delta_i, \Omega_i, \Xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$۷) \Psi_{i,j}, \Phi_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^c$$

$$۸) \xi_{i,j}, \Pi_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p \quad (7- پ)$$

در مدل فوق با توجه به عدم تأثیر متغیرهای $\Pi_{i,j}, \Phi_{i,j}, \Omega_i, \Xi_i$ در تابع هدف، و غیرمنفی بودن آن‌ها می‌توان آن‌ها را از محدودیت‌ها حذف کرد و محدودیت‌ها را از حالت مساوی به \geq تغییر داد. به این ترتیب تعداد متغیرهای مدل نیز کاهش می‌یابد و نهایتاً همتای استوار ۱۷ به دست می‌آید.

تابع هدف مدل بیشینه‌سازی نیز با توجه به «مسئله‌ی دوگان محذب» محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^N (\omega_i * b_i * \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} (\omega_{i,j}^c * t_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} (\omega_{i,j}^p * t_{i,j}^p) + \lambda * (\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-) - \Gamma) + \sum_{i=1}^N \nu_i * (\varepsilon_i - \varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-) + \sum_{i=1}^N k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) + \sum_{i=1}^N \eta_i * (-\varepsilon_i - 1) + \sum_{i=1}^N \delta_i * (\varepsilon_i - 1) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} \Psi_{i,j} * (-t_{i,j}^c - b_i * \varepsilon_i + \mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} * (-t_{i,j}^p - b_i * \varepsilon_i + k_{i,j}^p - \mu_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^c} \Phi_{i,j} * (-t_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} * (-t_{i,j}^p) + \sum_{i=1}^N \Omega_i * (-\varepsilon_i^+) + \sum_{i=1}^N \Xi_i * (-\varepsilon_i^-)$$

حال برای ساده‌سازی تابع هدف مدل بیشینه‌سازی از محدودیت‌های آن استفاده می‌کنیم. ابتدا با ضرب هر محدودیت دوگان (پ-۴) در متغیر مربوط به آن در مشتق‌گیری، به محدودیت‌های تساوی زیر می‌رسیم:

$$۱) \omega_i * b_i * \varepsilon_i + \varepsilon_i * \nu_i - \varepsilon_i * \eta_i + \varepsilon_i * \delta_i + \varepsilon_i * b_i * \sum_{j=1}^{N_i^c} \Psi_{i,j} -$$

$$\varepsilon_i * b_i * \sum_{j=1}^{N_i^p} \xi_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$۲) \varepsilon_i^+ * \lambda - \varepsilon_i^+ * \nu_i + \varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^- * k_i - \varepsilon_i^+ * \Omega_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$۳) \varepsilon_i^- * \lambda + \varepsilon_i^- * \nu_i + \varepsilon_i^- * \varepsilon_i^+ * k_i - \varepsilon_i^- * \Xi_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$۴) t_{i,j}^c * \omega_{i,j}^c - t_{i,j}^c * \Psi_{i,j} - t_{i,j}^c * \Phi_{i,j} = 0,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^c$$

$$۵) t_{i,j}^p * \omega_{i,j}^p - t_{i,j}^p * \xi_{i,j} - t_{i,j}^p * \Pi_{i,j} = 0,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N_i^p \quad (8- پ)$$

سپس با مرتب‌کردن تابع هدف عبارت‌های مشابه سمت چپ معادلات (پ-۵) به