مهندسی صنایع و مدیریت شریف
دوره‌ی ۱ - ۲۷، شماره‌ی ۱، ص. ۹۳-۱۰۲

مدل استوار بهینه‌سازی سبد مالی دارای اختیار معامله

محمد مدرس (استاد)
مریم حسن‌زاده مفرد (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار دو مدل استوار برای مسائل بهینه‌سازی سبد مالیِ دارای اختیار معامله توسعه داده می‌شود. در مدل اول با توجه به رابطه‌ی غیرخطی (شکسته‌ی خطی) بین داده‌های غیرقطعی (ارزش سهام و اختیار معامله)، یک مدل همتای استوار بیش‌محافظه‌کارانه ارائه می‌دهیم؛ در مدل دوم نیز با روشی متفاوت همتای استوار با درجه محافظه‌کاری قابل کنترل ارائه می‌شود. خصوصیت اصلی مدل‌های استوار ارائه شده در این پژوهش، نحوه‌ی برخورد آن‌ها با روابط غیرخطی پارامترهای دارای عدم قطعیت در مدل است. برای تحلیل دو مدل مذکور سه مسئله با تعداد ۱۰۰ نوع سهام و حدود ۴۰۰ اختیار معامله حل شده و نتایج آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی سبد مالی، اختیار معامله، بهینه‌سازی استوار.

modarres@sharif.edu
m_hasanzadeh@ie.sharif.edu

۱. مقدمه

مسائل بهینه‌سازی سبد مالی مجموعه‌مسائلی هستند که با هدف انتخاب «ترکیب مطلوب سرمایه‌گذاری» تعریف می‌شوند. «ترکیب مطلوب سرمایه‌گذاری» مجموعه‌یی است انتخابی از گزینه‌های موجود سرمایه‌گذاری، به‌نحوی که بیشینه‌سازی درآمد یا کمینه‌سازی ریسک سرمایه‌گذاری (یا ترکیبی از هر دو) در آن حاصل شود. یکی از مهم‌ترین مدل‌های ریاضی مطرح برای این مسائل بهینه‌سازی، مدل میانگین ـ واریانس[1] است. پس از ارائه‌ی این مدل، تلاش‌های جدیدی به‌منظور ارائه‌ی مدل‌های بهینه‌سازی سبد مالی شکل گرفت.

استفاده از «اختیار معامله» به‌عنوان یک ابزار سرمایه‌گذاری از اوایل قرن ۱۸ مطرح شد. باگذشت زمان و بالارفتن تقاضای سرمایه‌گذاری و امکان مدیریت ریسک مناسب‌تر سبد مالی با استفاده از اختیار معامله، حجم معاملات آن در دهه‌ی ۸۰، از حجم معاملات سهام پیشی گرفت. به این ترتیب «اختیار معامله» به‌عنوان گزینه‌ی اصلی سرمایه‌گذاری در مرکز توجه قرار گرفت.

در ادبیاتِ مربوط به مسائل بهینه‌سازی سبد مالیِ دارای اختیار معامله، به نتایج حاصل از تحقیقات انجام‌شده در سال‌های ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۹ [۲و۳] برخورد می‌کنیم. این نتایج نشان می‌دهند که در جهانی که اختیار معامله به‌عنوان یک گزینه‌ی سرمایه‌گذاری مجزا در آن مطرح است، سبد مالیِ بازار به‌تنهایی به‌عنوان جواب مطلوب مدل میانگین ـواریانس مطرح نمی‌شود.

هم‌زمان با تلاش‌های صورت‌گرفته در زمینه‌ی بررسی و اثبات افزایش کارایی سبد مالیِ دارای اختیارِ معامله، بررسی‌هایی درخصوص بهینه‌سازی سبد مالی دارای اختیار معامله نیز صورت گرفت. یکی از انواع مدل‌های ارائه‌شده در این مسائل از معادلات قیمت‌گذاری اختیار معامله (معادلات موسوم به حروف یونانی برگرفته از فرمول بلک و شولز[1]) سرچشمه گرفته است.[۴-۶]

در برخی از مقالات چنین عنوان شده که کنترل ریسک سرمایه‌گذاری توسط محدودیت‌های موسوم به حروف یونانی اندازه‌گیری می‌شود، در حالی که اندازه‌گیری مستقیم ریسک با وجود اختیار معامله به‌عنوان گزینه‌ی سرمایه‌گذاری به‌دلیل توزیع درآمدی نامتقارن آن به‌راحتی ممکن نیست. برای مواجهه با این مشکل، با الهام از مفهوم همبستگی[2] روش‌های بسیار نویدبخشی برای اندازه‌گیری ریسک مربوط به بهینه‌سازی سبد مالی با توزیع بازده نامتقارن ارائه شده است.[۷] در همین راستا، چگونگی حل مسائل بهینه‌سازی سبد مالی با محاسبات ریسکی به‌وسیله‌ی برنامه‌ریزی خطی و با تخمین تابع توزیع احتمالِ آن توسط شبیه‌سازی مونت‌کارلو در برخی از پژوهش‌های قابل مشاهده است.[۸-۱۱] در سال ۲۰۰۲ نیز محققین چگونگی محدودشدن ریسک کاهشی سهام را با استفاده از ارزش در معرض ریسک[3] و با مشتقات جزئی پایین‌تر[4] بیان کردند.[۱۲]

در کنار این مطالب در ادبیات مسئله‌ی مورد نظر به مسائلی با هدف ایجاد اطمینان لازم از بازگشت سرمایه و مباحثی چون بیمه‌ی سبد مالی دارای اختیار معامله[5] برمی‌خوریم.

یکی از مشکلات اصلی موجود در مدل‌سازی مسائل بهینه‌سازی سبد مالی، اثر عدم قطعیت پارامترهای مدل (نظیر مقدار سود یا ارزش گزینه‌های سرمایه‌گذاری) بر روی بهینه‌بودن و حتی موجه‌بودن جواب ناشی از مدل مالی است. نحوه‌ی برخورد با عدم قطعیت این نوع پارامترها از یک‌سو در روش‌هایی چون برنامه‌ریزی احتمالی با

تاریخ: دریافت ۱۳۸۸/۸/۱۰، اصلاحیه ۱۳۸۹/۹/۲۳، پذیرش ۱۳۸۹/۱۰/۴.

پیچیدگی فراوان مدل مواجه است و از سوی دیگر، با وجود اختیار معامله به‌عنوان یک گزینه‌ی سرمایه‌گذاری، استفاده از مدل‌های عمومیِ موجود برای تخصیص دارایی به گزینه‌های سرمایه‌گذاری با مشکلاتی همراه است.

با توجه به موارد بیان‌شده، روش پیشنهادی در این مقاله برای فائق آمدن بر این موانع استفاده از «بهینه‌سازی استوار» است. مدل‌های عمومی همتای استوار کلاسیک ارائه‌شده در ادبیات، فقط برای حالت‌هایی از عدم قطعیت در داده‌ها مناسب‌اند که داده‌ها غیر قطعی یا مستقل از هم و یا ترکیبی خطی (آفین) از یکدیگر باشند.

در این نوشتار با فرض مشخص‌نبودن تابع توزیع احتمالی درآمدِ گزینه‌های سرمایه‌گذاری، و با توجه به رابطه‌ی غیرخطی (شکسته‌ی خطی) بین داده‌های غیرقطعی، از بازه‌های عدم قطعیت در نظرگرفته‌شده برای ارزش آتی گزینه‌ها استفاده می‌شود. در ادبیات، تنها یک پژوهش و نوشتار نزدیک به این موضوع وجود دارد[۱۳] که هدف مدل مطرح‌شده در آن، پوشش ریسک با در نظر گرفتن عدم قطعیت بازه‌یی برای ارزش سهام است. یکی از نقاط ضعف این مدل پیچیدگی و زمان حل بالای مدل است. وجه تشابه این نوشتار با تحقیق حاضر، لحاظ‌کردن اختیار معامله به‌عنوان گزینه‌ی سرمایه‌گذاری است. در نوشتار یادشده[۱۳] از این گزینه‌ی سرمایه‌گذاری به‌عنوان ابزاری برای پوشش ریسک استفاده شده، در حالی که ما اختیار معامله را به‌عنوان یک گزینه‌ی سرمایه‌گذاری با هدف سوددهی مورد بررسی قرار می‌دهیم. از طرف دیگر، رویکرد مدل‌سازی همتای استوار ما با رویکرد یادشده[۱۳] متفاوت است.

ساختار نوشتار حاضر، که با هدف ارائه‌ی همتای استوار مسئله‌ی تک‌دوره‌یی سبد مالی دارای اختیار معامله گسترش یافته چنین است: در بخش دوم مقاله تعریف کلی مسئله و در بخش سوم ابتدا تعریف پارامترها و متغیرهای مدل و سپس مدل اولیه‌ی ریاضی مسئله ارائه می‌شود. در ادامه، و در بخش چهارم با مبنا قراردادن مدل اولیه، همتای استوار آن با استفاده از بازه‌های عدم قطعیت در نظر گرفته‌شده برای ارزش سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری بیان می‌شود و در بخش پنجم نیز به‌منظور بهبود عملکرد همتای استوار، با اضافه‌کردن محدودیتی خاص امکان کنترل درجه‌ی محافظه‌کاری مدل توسط سرمایه‌گذاری نیز به مدل همتای استوار مربوطه اضافه می‌شود. نهایتاً در بخش ششم نتایج محاسباتی مدل و در بخش هفتم نتیجه‌گیری مقاله ارائه خواهد شد.

۲. تعریف مسئله

هدف این تحقیق تخصیص بهینه‌ی دارایی در یک سبد مالی شامل اختیار معامله و سایرگزینه‌های سرمایه‌گذاری است به‌طوری که «درآمد» در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری بیشینه شود. گزینه‌های سرمایه‌گذاری مورد نظر در این مسئله شامل سرمایه‌گذاری بدون ریسک (مانند سپرده‌گذاری در بانک)، سرمایه‌گذاری ریسکی (مانند خرید انواع سهام) و نهایتاً خرید انواع اختیار معامله اروپایی (خرید یا فروش) بر روی سهام موجود است.

همان‌طورکه در بخش قبل نیز بیان شد یکی از موانعی که در ادبیات مدل‌سازی این مسئله با آن برخورد می‌شود، قطعی‌نبودن پارامترهای مدل است. باتوجه به مشخص‌نبودن قیمت سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری، در نظر نگرفتن این عدم قطعیت ــ یعنی نگرش خوشبینانه به مسئله ــ باعث غیرواقعی شدن بازده سبد مالی خواهد شد؛ همچنین نگرش بدبینانه به این مسئله باعث از دست دادن فرصت‌های بسیاری می‌شود. گاهی برای رفع این موانع به تخمین توزیع احتمالی پارامترها روی می‌آورند که در این حالت نیز از یک طرف ممکن است با تخمین نادرست تابع توزیع روبه‌رو شویم، و از طرف دیگر ممکن است توزیع احتمالی غیرمتقارن (ارزش اختیار معامله در انتهای دوره) به افزایش پیچیدگی مدل‌سازی بینجامد. به این موضوع نیز باید توجه داشت که اگرچه همیشه برای سرمایه‌گذار استفاده از توزیع احتمالی و به دست آوردن جوابی بهینه با بیشترین احتمال کفایت نمی‌کند، کسب اطمینان بیشتر در سرمایه‌گذاری و تعیین کم‌ترین درآمد ضرورت می‌یابد.

با توجه به مطالب بیان‌شده در این مسئله برای مواجهه با مشکل عدم قطعیت به‌دلیل نداشتن تابع توزیع احتمالی پارامترها، بازه‌ی تغییراتی خطی از ارزش پارامترها در نظر گرفته می‌شود و با توجه به این بازه تغییرات با ارائه‌ی همتای استوار مدل بهینه‌سازی اولیه (با فرض قطعیت پارامترها)، بهترین جواب در بدترین حالت ارزشی پارامترها ارائه می‌شود. یکی از مشکلات اصلی در استفاده از بهینه‌سازی استوار در این مسئله، نحوه‌ی محاسبه‌ی ارزش اختیار معامله است. «ارزش اختیار معامله» به‌عنوان یک تابع شکسته‌ی خطی از ارزش سهام که پیچیدگی ارائه‌ی همتای استوار را افزایش می‌دهد. در ادامه نحوه‌ی مدل‌سازی اولیه‌ی مسئله را با فرض قطعیت پارامترها بیان می‌کنیم.

۳. مدل‌سازی اولیه مسئله

در این بخش ابتدا نمادگذاری پارامترها و متغیرهای تصمیم، و سپس مدل اولیه‌ی مسئله را بیان می‌کنیم.

۱.۳. نمادگذاری

پارامترها

N: مجموعه سهام قابل سرمایه‌گذاری؛

N_i^c: مجموعه اختیار معامله‌های خرید موجود بر روی سهام iام؛

N_i^p: مجموعه اختیار معامله‌های فروش موجود بر روی سهام iام؛

r_f: نرخ سود بدون ریسک در طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری؛

β: میزان سرمایه‌ی اولیه‌ی موجود برای سرمایه‌گذاری؛

s_i°: قیمت سهام iام در ابتدای دوره‌ی سرمایه‌گذاری؛

s_i: قیمت سهام iام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری؛

$k_{i,j}^c$: قیمت اعمال اختیار معامله‌ی خرید jام برای سهام iام؛

$k_{i,j}^p$: قیمت اعمال اختیار معامله‌ی فروش jام برای سهام iام؛

$p_{i,j}^c$: قیمت خرید اختیار معامله‌ی خرید jام برای سهام iام؛

$p_{i,j}^p$: قیمت خرید اختیار معامله‌ی فروش jام برای سهام iام.

متغیرهای تصمیم

ω_i: میزان سهام نوع iام خریداری‌شده؛

$\omega_{i,j}^c$: میزان اختیار معامله‌ی خرید jام خریداری‌شده از سهام iام؛

$\omega_{i,j}^p$: میزان اختیار معامله‌ی فروش jام خریداری‌شده از سهام iام؛

ω^{rf}: میزان سرمایه‌گذاری بدون ریسک.

(c نماد اختیار معامله‌ی خرید است و p نماینده‌ی اختیار معامله‌ی فروش است.)

۲.۳. مدل‌سازی

مدل اولیه‌ی پیشنهادی در این نوشتار با توجه به مجموعه

$$\omega = \{\omega^{rf}\} \cup \{\omega_i|\forall i \in N\} \cup \{\omega^c_{i,j}|\forall[i \in N, j \in N_i^c]\} \cup \{\omega^p_{i,j}|\forall[i \in N, j \in N_i^p]\}$$

و نمادگذاری‌های ارائه شده به‌صورت عبارت ۱ در نظرگرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\max\nolimits_\omega \Bigg(\omega^{rf} * (1 + r_f) + \sum_{i=1}^{N}(\omega_i * s_i) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega^c_{i,j} * \max\{s_i - k^c_{i,j}, 0\}) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega^p_{i,j} * \max\{k^p_{i,j} - s_i, 0\})\Bigg) \\
&s.t. \\
&1)\ \omega^{rf} + \sum_{i=1}^{N}(\omega_i * s_i^0) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega^c_{i,j} * p^c_{i,j}) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega^p_{i,j} * p^p_{i,j}) = \beta \\
&2)\ \omega^{rf} \geq 0, \\
&3)\ \omega_i \geq 0, \qquad i - 1, ..., N \\
&4)\ \omega^c_{i,j} \geq 0, \qquad i = 1, ..., N,\ \ j = 1, ..., N_i^c \\
&5)\ \omega^p_{i,j} \geq 0, \qquad i = 1, ..., n,\ \ j = 1, ..., N_i^p
\end{aligned} \tag{1}$$

هدف از ارائه‌ی این مدل به دست آوردن ترکیب مطلوب سرمایه‌گذاری با توجه به گزینه‌های موجود سرمایه‌گذاری با بیشینه بازده ممکن است. بنابراین تابع هدف مورد نظر ترکیبی است از درآمد سرمایه‌گذاری بدون ریسک، سرمایه‌گذاری در سهام و خرید اختیار معامله. عبارت $\omega^{rf} * (1 + r_f)$ در تابع هدف بیان‌گر درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری بدون ریسک با نرخ سود قطعی r_f است و عبارت $\sum_{i=1}^{N} \omega_i * s_i$ درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری در سهام را در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری نمایش می‌دهد.

در محاسبه‌ی درآمد اختیار معامله (به‌عنوان مثال در حالت خرید) زمانی که در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری قیمت بازار از قیمت اعمال اختیار معامله بیشتر است، درآمد اختیار معامله از تفاضل قیمت بازار و قیمت اعمال اختیار معامله $(s_i - k^c_{i,j})$ محاسبه می‌شود. اما چنانچه قیمت اعمال اختیار معامله از قیمت بازار بیشتر باشد، اختیار معامله اعمال نمی‌شود و درآمد ناشی از آن صفر می‌شود. در این‌صورت با ترکیب درآمد ناشی از حالت‌های اعمال و عدم اعمال اختیار معامله‌ی خرید به‌عبارت بیشینه‌سازی کلی (عبارت ۲) برای درآمد اختیار معامله خرید می‌رسیم:

$$\max\{s_i - k^c_{i,j}, 0\} \tag{2}$$

به‌همین صورت برای اختیار معامله‌ی فروش که عکس حالت خرید است، عبارت ۳ برای نمایش درآمد ناشی از خرید اختیار معامله به دست می‌آید:

$$\max\{k^p_{i,j} - s_i, 0\} \tag{3}$$

با توجه به عبارت‌های ۲ و ۳، درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری در اختیار معامله‌های خرید و فروش در تابع هدف محاسبه می‌شود.

محدودیت ۱ در مدل ۱ بیان‌گر محدودیت میزان سرمایه‌گذاری در ابتدای دوره است و محدودیت‌های ۲ تا ۵ نیز محدودیت‌های علامت مدل را تشکیل می‌دهند. در بخش بعدی با درنظرگرفتن مدل ۱ و بازه‌های عدم قطعیت، همتای استوار مدل ارائه خواهد شد.

۴. همتای استوار بیش‌محافظه‌کارانه

به‌منظور ارائه‌ی مدل استوار، عدم قطعیت ارزش سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری به‌صورت بازه تغییراتی خطی برای ارزش آن در نظرگرفته می‌شود. این بازه تغییرات چنین تعریف می‌شود:

$$s_i \in (\mu_i - b_i, \mu_i + b_i) \tag{4}$$

در بازه فوق μ_i معادل میانگین ارزش سهام و b_i معادل بیشینه میزان تغییرات ارزش سهام از مقدار میانگین آن است. لازم به ذکر است که مقادیر μ_i و b_i چنان اختیار می‌شوند که لزوماً در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری $s_i - k^c_{i,j}$ و $k^p_{i,j} - s_i$ مربوط به عبارت‌های ۲ و ۳ مقادیر مثبت نمی‌گیرند.

در ارائه‌ی مدل همتای استوار به دنبال جواب بهینه‌یی هستیم که با توجه به بازه تغییرات ارزش سهام بهترین جواب در بدترین حالت ممکن را به دست بیاورد. با توجه به این موضوع همتای استوار مدل ۱ با تغییر تابع هدف مدل مذکور به تابع هدف زیر بدون تغییر محدودیت‌ها حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\max\nolimits_\omega \min_{\forall i \in N, s_i \in (\mu_i - b_i, \mu_i * b_i)} \Bigg(\omega^{rf} * (1 + r_f) + \sum_{i=1}^{N}(\omega_i * s_i) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega^c_{i,j} * \max\{s_i - k^c_{i,j}, 0\}) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega^p_{i,j} * \max\{k^p_{i,j} - s_j, 0\})\Bigg)
\end{aligned} \tag{5}$$

با توجه به بازه ۴ در نظرگرفته‌شده برای نمایش تغییرات ارزش سهام، متغیرکمکی ε_i و مجموعه‌ی ε را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&s_i = \mu_i + b_i * \varepsilon_i, \qquad -1 \leq \varepsilon_i \leq 1 \\
&\varepsilon = \{\varepsilon_i | \forall i \in N\}
\end{aligned} \tag{6}$$

درنتیجه عبارت $\{\mu_i + b_i * \varepsilon_i\}$ جایگزین s_i در مدل‌سازی می‌شود، و مدل همتای استوار جدید عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned}
&\max\nolimits_\omega \min\nolimits_\varepsilon \Bigg(\omega^{rf} * (1 + r_f) + \sum_{i=1}^{N}(\omega_i * (\mu_i + b_i * \varepsilon_i)) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega^c_{i,j} * \max\{(\mu_i + b_i * \varepsilon_i) - k^c_{i,j}, 0\}) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega^p_{i,j} * \max\{k^p_{i,j}(\mu_i + b_i * \varepsilon_i), 0\})\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&s.t.\\
&1)\ \omega^{rf}+\sum_{i=1}^{N}(\omega_i * s_i^{\circ})+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^{c} * p_{i,j}^{c})+\\
&\qquad\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^{p} * p_{i,j}^{p})=\beta\\
&2)\ -1\leq\varepsilon_i, \qquad i=1,...,N\\
&3)\ \varepsilon_i\leq 1, \qquad i=1,...,N\\
&4)\ \omega^{rf}\geq 0,\ \ \omega_i\geq 0, \qquad i=1,...,N\\
&5)\ \omega_{i,j}^{c}\geq 0, \qquad i=1,...,N, \quad j=1,...,N_i^c\\
&6)\omega_{i,j}^{p}\geq 0, \qquad i=1,...,n, \quad j=1,...,N_i^p
\end{aligned} \tag{7}
$$

با توجه به این که عبارت $\omega^{rf} * (1+r_f)+\sum_{i=1}^{N}(\omega_i * \mu_i)$ و نیز محدودیت شماره ۱ و محدودیت‌های غیرمنفی مدل ۷ قطعی‌اند، به مدل کمینه‌سازی غیرقطعی زیر می‌رسیم:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\varepsilon}\Bigg(\sum_{i=1}^{N}(\omega_i * b_i * \varepsilon_i)+N_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^{c} * \max\{(\mu_i+b_i * \varepsilon_i)-\\
&\qquad k_{i,j}^{c},0\})+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^{p} * \max\{k_{i,j}^{p}-(\mu_i+b_i * \varepsilon_i),0\})\Bigg)\\
&s.t.\\
&1)\ -1\leq\varepsilon_i, \qquad i=1,...,N\\
&2)\ \varepsilon_i\leq 1, \qquad i=1,...,N
\end{aligned} \tag{8}
$$

با استفاده از قضیه‌ی ۴، مدل کمینه‌سازی ۸ به مدل بیشینه‌سازی دوگان آن در جهت ساده‌ترکردن همتای استوار ۷ تبدیل می‌شود:

قضیه‌ی ۱.۴. مدل کمینه‌سازی ۸ با استفاده از قضیه‌ی دوگان و با توجه به مجموعه‌های

$$
\begin{aligned}
&u=\{u_i|\forall\in N\}, \qquad \nu=\{\nu_i|\forall i\in N\}\\
&p=\{p_{i,j}|\forall[i\in N, j\in N_i^c]\}\\
&p=\{q_{i,j}|\forall[i\in N, j\in N_i^p]\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

معادل مدل بیشینه‌سازی است.

$$
\begin{aligned}
&\max_{u,\nu,p,q}\Bigg(\sum_{i=1}^{N}(-u_i-\nu_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\mu_i-k_{i,j}^{c}) * p_{i,j}+\\
&\qquad\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(k_{i,j}^{p}-\mu_i) * q_{i,j}\Bigg)\\
&s.t.\\
&1)\ u_i-\nu_i-\sum_{j=1}^{N_i^c}b_i * p_{i,j}+\sum_{j=1}^{N_i^p}b_i * q_{i,j}=\omega_i * b_i, \quad i=1,...,N\\
&2)\ p_{i,j}\leq\omega_{i,j}^{c}, \qquad i=1,...,N, \quad j=1,...,N_i^c\\
&3)\ q_{i,j}\leq\omega_{i,j}^{p}, \qquad i=1,...,n, \quad j=1,...,N_i^p\\
&4)\ u_i\geq 0, \qquad i=1,...,N\\
&5)\ \nu_i\geq 0, \qquad i=1,...,N\\
&6)\ p_{i,j}\geq 0, \qquad i=1,...,N, \quad j=1,...,N_i^c\\
&7)\ q_{i,j}\geq 0, \qquad i=1,...,n, \quad j=1,...,N_i^p
\end{aligned} \tag{10}
$$

اثبات: در مدل ۸ با توجه به غیرمنفی بودن ضرایب مربوط به درآمد اختیار معامله در تابع هدف و همچنین با توجه به نوع تابع هدف (کمینه‌سازی)، امکان جاگزینی زیر در مدل‌سازی ایجاد می‌شود.

$$
\theta=\min(k * \max(a,b)), k\geq 0 \overset{\text{معادل}}{\Longleftrightarrow} \theta=\min(k * t), s.t. \begin{cases} t\geq a\\ t\geq b\\ k\geq 0\end{cases}
$$

با توجه به جایگزینی فوق، تبدیل کلیه‌ی محدودیت‌ها به بزرگ‌تر یا مساوی ($\geq$) و قرار دادن کلیه‌ی متغیرهای تصمیم در سمت چپ محدودیت‌ها، مدل کمینه‌سازیِ مرتب‌شده که مبنای ارائه‌ی مدل بیشینه‌سازی دوگان است چنین به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\varepsilon,t}\Bigg(\sum_{i=1}^{N}(\omega_i * b_i * \varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^{c} * t_{i,j}^{c})+\\
&\qquad\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^{p} * t_{i,j}^{p})\Bigg)\\
&s.t.\\
&1)\ \varepsilon_i\geq -1, \qquad i=1,...,N \qquad u_i\\
&2)\ -\varepsilon_i\geq -1, \qquad i=1,...,N \qquad \nu_i\\
&3)\ t_{i,j}^{c}-b_i * \varepsilon_i\geq\mu_i-k_{i,j}^{c}, \quad i=1,...,N, \quad j=1,...,N_i^c \quad p_{i,j}\\
&4)\ t_{i,j}^{c}+b_i * \varepsilon_i\geq k_{i,j}^{p}-\mu_i, \quad i=1,...,n \quad j=1,...,N_i^p \quad q_{i,j}\\
&5)\ t_{i,j}^{c}\geq 0, \qquad i=1,...,N \quad j=1,...,N_i^c\\
&6)\ t_{i,j}^{p}\geq 0, \qquad i=1,...,n \quad j=1,...,N_i^p
\end{aligned} \tag{11}
$$

مجموعه متغیرهای تصمیم t در مدل فوق به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$
t=\{t_{i,j}^{c}|\forall[i\in N, j\in N_i^c]\}\cup\{t_{i,j}^{p}|\forall[i\in N, j\in N_i^p]\}
$$

در مدل ۱۱ متغیرهای u_i، ν_i، $p_{i,j}$ و $q_{i,j}$ به‌عنوان متغیرهای دوگان مدل تعریف می‌شوند که با توجه به این متغیرها و مجموعه‌های ۹، معادل دوگان مدل ۸ به‌صورت مدل ۱۰ به دست می‌آید.

■

حال با جایگزینی معادل بیشینه‌سازی ۱۰ با مدل کمینه‌سازی ۸ در مدل ۷، به

همتای استوار زیر برای مدل ۱ می‌رسیم.

$$\max_{\omega,u,\nu,p,q}\left(\omega^{rf}*(1+r_f)+\sum_{i=1}^{N}(\omega_i*\mu_i)-\sum_{i=1}^{N}(u_i+\nu_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\mu_i-k_{i,j}^c)*p_{i,j}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(k_{i,j}^p-\mu_i)*q_{i,j}\right)$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\\
&1)\ \omega^{rf}+\sum_{i=1}^{N}(\omega_i*s_i^{0})+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^c*p_{i,j}^c)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^p*p_{i,j}^p)=\beta\\
&2)\ u_i-\nu_i-\sum_{j=1}^{N_i^c}b_i*p_{i,j}+\sum_{j=1}^{N_i^p}b_i*q_{i,j}=\omega_i*b_i,\quad i=1,...,N\\
&3)\ p_{i,j}\le\omega_{i,j}^c, \qquad i=1,...,N,\quad j=1,...,N_i^c\\
&4)\ q_{i,j}\le\omega_{i,j}^p, \qquad i=1,...,n,\quad j=1,...,N_i^p\\
&5)\ \omega^{rf}\ge 0,\\
&6)\ \omega_i\ge 0, \qquad i=1,...,N\\
&7)\ \omega_{i,j}^c\ge 0, \qquad i=1,...,N,\quad j=1,...,N_i^c\\
&8)\ \omega_{i,j}^p\ge 0, \qquad i=1,...,n,\quad j=1,...,N_i^p\\
&9)\ u_i\ge 0, \qquad i=1,...,N\\
&10)\ \nu_i\ge 0, \qquad i=1,...,N\\
&11)\ p_{i,j}\ge 0, \qquad i=1,...,N,\quad j=1,...,N_i^c\\
&12)\ q_{i,j}\ge 0, \qquad i=1,...,n,\quad j=1,...,N_i^p
\end{aligned}\tag{12}$$

مدل به دست آمده، همتای استوار مسئله‌ی بهینه‌سازی تک‌دوره‌یی‌سبد مالی دارای اختیار معامله (مدل ۱) است. این مدل به بیشینه‌سازی درآمد، در بدترین ترکیب ارزشی سهام در انتهای دوره می‌پردازد. واضح است که امکان رخ‌دادن بدترین ترکیب مقادیر ارزشی سهام در انتهای دوره‌ی سرمایه‌گذاری به‌صورت هم‌زمان بسیار پایین است. بنابراین به‌منظور رفع این مشکل و بهبود مدل، در ادامه یک معیارکنترلی برای میزان ریسک‌پذیری سرمایه‌گذاری در مدل‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

۵. همتای استوار با درجه‌ی محافظه‌کاری قابل تنظیم

در این بخش برای محدودسازی میزان محافظه‌کاری مدل از محدودیت زیر که در مرجع ۱۴ ارائه شده و مورد استفاده قرارگرفته است استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{N}|\varepsilon_i|\le\Gamma \tag{13}$$

که در آن Γ پارامتری است که با تغییر مقدار آن از ۰ تا N میزان محافظه‌کاری مدل افزایش می‌یابد. در ادامه، در راستای کنترل میزان محافظه‌کاری، محدودیت ۱۳ را به مدل کمینه‌سازی ۸ اضافه می‌کنیم.

با استفاده از قضیه‌ی ۱۳ که برمبنای مسئله‌ی دوگان محدب بیان شده است، به ارائه‌ی مدل دوگان بیشینه‌سازی و مدل کمینه‌سازی جدید می‌پردازیم.

قضیه‌ی ۱.۵. اگر مدل کمینه‌سازی ۸ با در نظرگرفتن محدودیت کنترل محافظه‌کاری ۱۳ به‌صورت زیر باشد:

$$\min_{\varepsilon,t}\left(\sum_{i=1}^{N}(\omega_i*b_i*\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^c*t_{i,j}^c)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^p*t_{i,j}^p)\right)$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\\
&1)\ \varepsilon_i\ge -1, \qquad i=1,...,N\\
&2)\ -\varepsilon_i\ge -1, \qquad i=1,...,N\\
&3)\ \sum_{i=1}^{N}|\varepsilon_i|\le\Gamma\\
&4)\ t_{i,j}^c-b_i*\varepsilon_i\ge\mu_i-k_{i,j}^c, \qquad i=1,...,N,\quad j=1,...,N_i^c\\
&5)\ t_{i,j}^p-b_i*\varepsilon_i\ge k_{i,j}^p-\mu_i, \qquad i=1,...,N,\quad j=1,...,N_i^p\\
&6)\ t_{i,j}^c\ge 0, \qquad i=1,...,N,\quad j=1,...,N_i^c\\
&7)\ t_{i,j}^p\ge 0, \qquad i=1,...,n\quad j=1,...,N_i^p
\end{aligned}\tag{14}$$

مدل بیشینه‌سازی دوگان معادل کمینه‌سازی فوق با توجه به مجموعه‌های

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^+=\{\varepsilon_i^+|\forall i\in N\}\\
&\varepsilon^-=\{\varepsilon_i^-|\forall i\in N\}\\
&Dual\,coef=\{\lambda\}\cup\{\nu_i|\forall i\in N\}\cup\{k_i|\forall i\in N\}\cup\\
&\qquad\{\eta_i|\forall i\in N\}\cup\{\delta_i|\forall i\in N\}\cup\\
&\qquad\{\psi_{i,j}|\forall[i\in N,j\in N_i^c]\}\cup\\
&\qquad\{\xi_{i,j}|\forall[i\in N,j\in N_i^p]\}\cup\\
&\qquad\{\Phi_{i,j}|\forall[i\in N,j\in N_i^c]\}\cup\\
&\qquad\{\Pi_{i,j}|\forall[i\in N,j\in N_i^p]\}\cup\{\Xi_i|\forall i\in N\}\cup\\
&\qquad\{\Omega_i|\forall i\in N\}
\end{aligned}\tag{15}$$

به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\max_{\varepsilon^+,\varepsilon^-Dual\,coef}\left(-\lambda*\Gamma-\sum_{i=1}^{N}k_i*(\varepsilon_i^+*\varepsilon_i^-)-\sum_{i=1}^{N}(\eta_i+\delta_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}\psi_{i,j}*(\mu_i-k_{i,j}^c)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j}*(k_{i,j}^p-\mu_i)\right)$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\\
&1)\ \omega_i*b_i+\nu_i-\eta_i+\delta_i+b_i*\sum_{j=1}^{N_i^c}\psi_{i,j}-b_i*\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j}=0, \qquad i=1,...,n
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
2)\ \lambda-\nu_i+\varepsilon_i^-*k_i\geq 0, & i=1,...,n & \\
3)\ \lambda+\nu_i+\varepsilon_i^+*k_i\geq 0, & i=1,...,n & \\
4)\ \omega_{i,j}^c-\psi_{i,j}\geq 0, & i=1,...,n, & j=1,...,N_i^c \\
5)\ \omega_{i,j}^p-\xi_{i,j}\geq 0, & i=1,...,n, & j=1,...,N_i^p \\
6)\ \lambda,\eta_i,\delta_i\geq 0, & i=1,...,n & \\
7)\ \psi_{i,j}\geq 0, & i=1,...,n, & j=1,...,N_i^c \\
8)\ \xi_{i,j}\geq 0, & i=1,...,n, & j=1,...,N_i^p
\end{array}
\qquad (16)
$$

اثبات: به ضمیمه مراجعه شود.

■

حال با توجه به قضیه‌ی ۱.۵. مدل کمینه‌سازی ۱۴ را با مدل بیشینه‌سازی معادل آن در مدل ۷ که محدودیت ۱۳ نیز به آن اضافه شده است، جایگزین می‌کنیم و همتای نهایی استوار زیر را با درجه‌ی محافظه‌کاری قابل تنظیم به دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
\max_{\omega,\varepsilon^+,\varepsilon^-\ Dual\ coaf}\ & \omega^{rf}*(1+r_f)+\sum_{i=1}^{N}(\omega_i*\mu_i)-\lambda*\Gamma- \\
& \sum_{i=1}^{N}k_i*(\varepsilon_i^+*\varepsilon_i^-)-\sum_{i=1}^{N}(\eta_i+\delta_i)+ \\
& \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}\psi_{i,j}*(\mu_i-k_{i,j}^c)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j}*(k_{i,j}^p-\mu_i) \\
s.t.\ & \\
1)\ & \omega^{rf}+\sum_{i=1}^{N}(\omega_i*s_i^\circ)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^c*p_{i,j}^c)+ \\
& \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^p*p_{i,j}^p)=\beta \\
2)\ & \omega_i*b_i+\nu_i-\eta_i+\delta_i+b_i*\sum_{j=1}^{N_i^c}\psi_{i,j}-b_i* \\
& \sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j}=0 \qquad i=1,...,n \\
3)\ & \lambda-\nu_i+\varepsilon_i^-*k_i\geq 0, \qquad i=1,...,n \\
4)\ & \lambda+\nu_i+\varepsilon_i^+*k_i\geq 0, \qquad i=1,...,n \\
5)\ & \omega_{i,j}^c-\psi_{i,j}\geq 0, \qquad i=1,...,n, \quad j=1,...,N_i^c \\
6)\ & \omega_{i,j}^p-\xi_{i,j}\geq 0, \qquad i=1,...,n, \quad j=1,...,N_i^p \\
7)\ & \omega^{rf},\lambda\geq 0 \\
8)\ & \omega_i,\eta_i,\delta_i\geq 0, \qquad i=1,...,N \\
9)\ & \omega_{i,j}^c,\psi_{i,j}\geq 0, \qquad i=1,...,N, \quad j=1,...,N_i^c \\
10)\ & \omega_{i,j}^p,\xi_{i,j}\geq 0, \qquad i=1,...,n, \quad j=1,...,N_i^p
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

۶. نتایج محاسباتی

در بخش‌های قبل مدل‌های ریاضیِ مسئله‌ی بهینه‌سازی استوار مربوط به سبد مالی دارای اختیار معامله ارائه شد. در این بخش برای بررسی عملکرد مدل‌ها، سه مسئله را با اندازه‌ی $N=100$ توسط نرم‌افزار GAMS حل، و جواب‌های حاصل از آن را مقایسه می‌کنیم. میزان سرمایه‌ی اولیه و تعداد اختیار معامله‌های هر مسئله در جدول ۱ ارائه شده است.

در این مسائل، کلیه‌ی مقادیر اولیه به‌صورت تصادفی و به‌صورت منطقی تولید شده‌اند. ضمناً، حد بالا و پایین ارزش انواع سهام در ابتدای دوره به‌صورت تصادفی در بازه $[15, 50]$ و تعداد اختیار معامله، قیمت خرید و قیمت اعمال اختیار معامله نیز به‌صورت تصادفی با توجه به مواردی چون بازه تغییرات ارزش سهام در انتهای دوره تولید می‌شوند. یادآور می‌شود هدف از ارائه‌ی مثال‌ها در این بخش، بررسی عملکرد مدل‌های ارائه‌شده و صحت‌سنجی نتایج حاصل از آن‌هاست. ازطرف دیگر، با توجه به نبود مدلی مشابه در ادبیات، مقایسه با نتایج سایر پژوهش‌گران میسر نیست و هدف تنها مقایسه‌ی تغییرات تابع هدف است.

تولید داده‌های اولیه‌ی مسائل توسط Visual Basic و حل آن توسط نرم‌افزار GAMS صورت گرفته است. نتایج حاصل از حل مسائل اول تا سوم برای همتای استوار بیش محافظه‌کارانه (مدل ۱۲) و همتای استوارکنترلی (مدل ۱۷) برای Γهای مختلف در جدول ۲ ارائه شده است.

چنان‌که مشاهده می‌شود در جدول ۲ نتایج حاصل از حل مدل ۱۲، دارای مقادیر مشابه مدل ۱۷ با $\Gamma=100$ است. در این حالت چون برای $\Gamma=100$ کل بازه تغییرات پارامترها در مدل‌سازی وارد می‌شود، مدل دارای حالت بیش محافظه‌کارانه است و درنتیجه مشابه مدل ۱۲ عمل می‌کند.

در جدول ۲ علاوه بر تشابه عملکرد دو مدل در حالت بیش‌محافظه‌کارانه، مشاهده می‌شود که با بزرگ‌ترشدن مقدار Γ، مقدار تابع هدف مدل ۱۷ کاهش می‌یابد. بزرگ‌ترشدن مقدار Γ افزایش فضای جواب مدل کمینه‌سازی ۱۴ را در

جدول ۱. مشخصات مسائل.

شرح	مسئله‌ی اول	مسئله‌ی دوم	مسئله‌ی سوم
N	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
N_i^c	۱۸۸	۲۰۱	۲۱۷
N_i^p	۱۹۶	۲۰۳	۱۹۷
β	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰

جدول ۲. نتایج محاسباتی مسئله‌ی اول تا سوم.

	Γ	مسئله اول	مسئله دوم	مسئله سوم
مدل ۱۲	–	۱,۰۷۲٫۹۸	۱,۰۹۷٫۸۴	۱,۰۸۱٫۳۳
مدل ۱۷	۰	۲,۳۵۲٫۴۵	۲,۳۶۱٫۰۲	۲,۲۸۹٫۳۰
	۱۰	۱,۸۰۳٫۹۸	۱,۸۶۱٫۴۸	۱,۸۴۹٫۸۴
	۳۰	۱,۳۳۸٫۴۲	۱,۳۷۵٫۱۷	۱,۳۸۹٫۲۵
	۵۰	۱,۱۲۴٫۶۰	۱,۱۴۹٫۷۴	۱,۱۴۲٫۰۶
	۷۰	۱,۰۷۳٫۰۸	۱,۰۹۸٫۶۵	۱,۰۸۱٫۸۹
	۱۰۰	۱,۰۷۲٫۹۸	۱,۰۹۷٫۸۴	۱,۰۸۱٫۳۳

بر دارد. بدیهی است مقدار تابع هدف این مدل کمینه‌سازی با افزایش Γ روند غیرصعودی دارد و منجر به ایجاد روند غیرصعودی در مدل ۱۷ می‌شود. بنابراین کاهش مقدار تابع هدف ناشی از افزایش میزان محافظه‌کاری در برخورد با مقادیر ارزشی پارامترهاست. از طرف دیگر، افزایش محافظه‌کاری نیز به‌معنای کاهش میزان ریسک‌پذیری مدل است. کاهش ریسک‌پذیری مدل همیشه منجر به صرف‌نظرکردن از بعضی فرصت‌های سرمایه‌گذاری و درنتیجه کاهش درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری می‌شود.

نمودار ۱ نمایش روند تغییرات مقدار تابع هدف مدل ۱۷ را برای سه مسئله، براساس تغییرات Γ بیان می‌کند. روند کاهشی تابع هدف با افزایش Γ به‌راحتی قابل مشاهده است. نکته‌ی قابل توجه در این نمودار روند کاهشی سریع‌تر تابع هدف در Γهای پایین‌تر است. در جدول ۳ درصد تغییرات کاهشی تابع هدف برای مسئله‌ی اول بیان شده است.

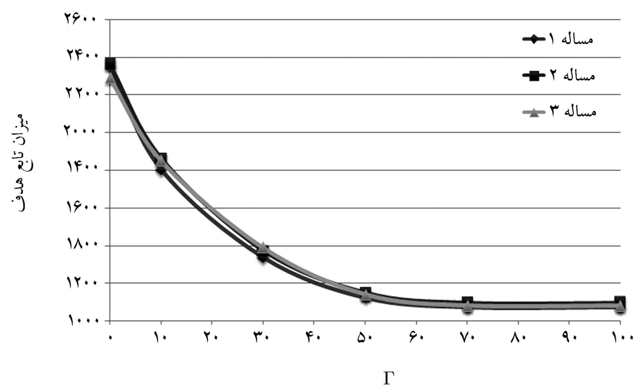
چنان که در جدول ۳ مشاهده می‌شود با افزایش Γ از میزان تأثیر تغییرات Γ بر روی مقادیر تابع هدف کاسته می‌شود، به‌نحوی که حتی تغییرات بین ۷۰ تا ۱۰۰ قابل صرف‌نظر کردن است.

برای بررسی صحت مدل‌ها، با در نظر گرفتن مقادیر مختلف سرمایه‌گذاری اولیه، مسئله‌ی اول را برای Γهای مختلف حل کردیم. نتیجه‌ی کاهشی تابع هدف برای سرمایه‌های اولیه‌ی مختلف همچنان حفظ می‌شود. نمودار ۲ نشان‌گر طرح‌واره‌یی از نتایج مربوطه است. (همان‌طور که پیش‌تر نیز بیان شد نتایج مدل ۱۲ مشابه نتایج مدل ۱۷ در $\Gamma = ۱۰۰$ است).

در ادامه، به‌منظور مشاهده‌ی نحوه‌ی عملکرد مدل‌های ارائه‌شده و با درنظر گرفتن بازه تغییرات قیمت سهام در انتهای دوره در مسئله‌ی اول، ۵۰۰۰ مجموعه از پارامترهای ارزشی سهام به‌صورت تصادفی تولید شد. مقدار قطعی تابع هدف مدل ۱ را برای این مجموعه‌ها براساس جواب ناشی از مدل ۱۷ برای Γهای مختلف محاسبه کردیم.

پیش‌از این گفته شد که عموماً در نظر نگرفتن عدم قطعیت ــ به‌معنای خوشبینانه نگاه‌کردن به مسئله ــ باعث غیرواقعی شدن بازده سبد مالی می‌شود؛ از سوی دیگر نگرش بدبینانه به این مسئله نیز باعث از دست دادن فرصت‌های بسیار می‌شود. استفاده از مدل همتای استوار با درجه محافظه‌کاری قابل تنظیم (مدل ۱۷) برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد شده است. در این حالت جواب حاصل از مدل استوار به‌نحوی است که به‌طور متوسط با بیشتر شدن مقدار Γ، مقدار تابع هدف به‌دست آمده کاهش می‌یابد. کاهش تابع هدف مدل در Γهای بزرگ‌تر بیان‌کننده‌ی میزان محافظه‌کاری بالای سرمایه‌گذار، و افزایش مقدار تابع هدف در Γهای پایین نیز بیان‌گر نگاه خوشبینانه‌ی سرمایه‌گذار و درنتیجه ریسک بالای سرمایه‌گذاری است. نمودار ۳ تغییرات تابع هدف مدل ۱ را به‌ازای متوسط میزان تابع هدف در ۵۰۰۰ نمونه‌ی تصادفی نشان می‌دهد. سرمایه‌گذار در این مدل با افزایش مقدار Γ اطمینان بیشتری درخصوص کم‌ترین سطح درآمد ناشی از سرمایه‌گذاری خود دارد و این موضوع سیاست‌گذاری‌های بعدی وی را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد.

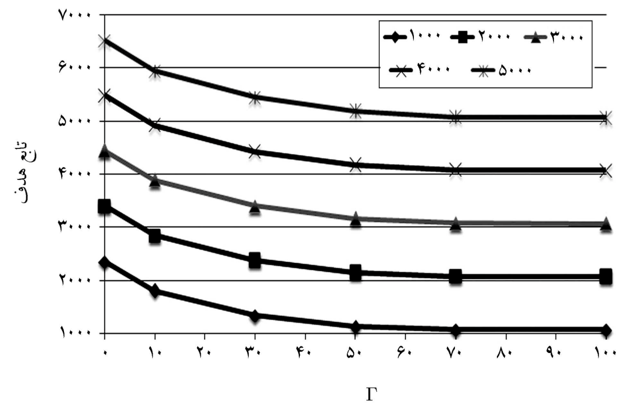
لازم به ذکر است که در مدل‌های ارائه‌شده برای ایجاد تنوع در جواب‌ها، از محدودیت‌های کنترل میزان سرمایه‌گذاری در انواع گزینه‌های سرمایه‌گذاری استفاده



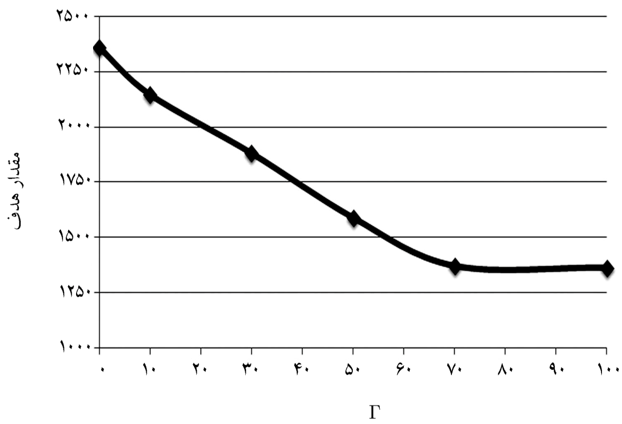
نمودار ۱. روند کاهشی تابع هدف با افزایش مقدار گاما.

جدول ۳. تحلیل نتایج محاسباتی مسئله‌ی اول.

η	مسئله اول	میزان کاهش
۰	۲,۳۵۲/۴۵	-
۱۰	۱,۸۰۳/۹۸	٪۲۳/۳۱
۳۰	۱,۳۳۸/۴۲	٪۴۳/۱۱
۵۰	۱,۱۲۴/۶۰	٪۵۲/۱۹
۷۰	۱,۰۷۳/۰۸	٪۵۴/۳۸
۱۰۰	۱,۰۷۲/۹۸	٪۵۴/۳۹



نمودار ۲. روند تغییرات تابع هدف براساس سرمایه‌ی اولیه.



نمودار ۳. تغییرات تابع هدف.

شده است. این محدودیت‌ها در ایجاد پراکندگی مناسب سرمایه‌ی اولیه در بین گزینه‌های مختلف سرمایه‌گذاری عملکرد مؤثری دارد و از تخصیص مقدار قابل توجه سرمایه به یک گزینه جلوگیری می‌کند. اضافه‌کردن این محدودیت‌ها به مدل اثری در مدل‌های همتای استوار مسئله ندارد.

۷. نتیجه‌گیری

در این نوشتار ضمن ارائه‌ی مدلی برای بهینه‌سازی نحوه‌ی انتخاب اجزای سبد مالی، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای لحاظ‌کردن عدم قطعیت داده‌یی مربوط به ارزش سهام در آینده، دو مدل جدید برای در نظرگرفتن عدم قطعیت با وابستگی غیرخطی توسعه داده‌ایم. این مدل‌ها منجر به جواب‌هایی می‌شود که علاوه بر کاهش ریسک‌های سرمایه‌گذاری موجود، به دنبال استفاده‌ی هرچه بیشتر از فرصت‌های ممکن است. بدین‌منظور خرید اختیار معامله به‌صورتی انجام می‌شود که احتمال عدم اعمال اختیار معامله‌ها از مقدار ناچیزی بیشتر نباشد.

اولین مدل بیان‌شده در این مقاله، همتای استوار مدل اولیه است که آن را با در نظر گرفتن تمامی بازه‌های تغییرات ارزش سهام در انتهای دوره ارائه داده‌ایم. مدل دوم را به‌منظور بهبود عملکرد مدل اول و با اضافه‌کردن محدودیت کنترل میزان محافظه‌کاری بیان کرده‌ایم. در انتها نیز در بخش نتایج محاسباتی صحت عملکرد مدل‌های ارائه‌شده را بررسی کرده‌ایم.

ارائه‌ی مدل چنددوره‌یی بهینه‌سازی سبد مالی دارای اختیار معامله‌ی یکی از زمینه‌های اصلی موجود در این مسئله برای پژوهش‌های آتی است. این مسئله حالت کلی‌تر مسئله‌ی مورد بررسی در این نوشتار است. علاوه بر این، فعالیت بیشتر بر بازه تغییرات ارزش سهام در انتهای دوره نیز ممکن است. درنظرگرفتن بازه تغییرات خطی برای ارزش سهام حالت ساده‌یی است که با فرض مشخص‌نبودن تابع توزیع احتمالی ارزش سهام و عدم وجود تأثیر متقابل آن‌ها مورد استفاده قرارگرفته است.

پانوشت

1. black and Scholes
2. coherence
3. value at risk (VaR)
4. lower partial moment
5. option based portfolio insurance (OBPI)

منابع

1. Markowitz, H.M. "Portfolio selection", *Journal of Finance,* **7**(1), pp. 77-91 (1952).
2. Bookstaber, R. and Clarke, R. "Problems in evaluating the performance of portfolios with options", *Financial Analysts Journal,* **41**(1), pp. 48-62 (1985).
3. Leland, H.E. "Beyond mean-variance: Performance measurement in a nonsymmetrical world", *Financial Analysts Journal,* **55**(1), pp. 27-35 (1999).
4. Papahristodoulou, C. "Options strategies with linear programming", *European Journal of Operational Research,* **157**, pp. 246-256 (2004).
5. Gao, P.w. "Options strategies with the risk adjustment", *European Journalof Operational Research,* **192**(3), p. 975-980 (2009).
6. Horasanlı, M. "Hedging strategy for a portfolio of options and stocks with linear programming", *Applied Mathematics and Computation,* **199**, pp. 804-810 (2008).
7. Artzner, P., et al. "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance,* **9**(3), pp. 203-228 (1999).
8. Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of Risk,* **2**(3), pp. 21-41 (2000).
9. Krokhmal, P.; Palmquist, J. and Uryasev, S. "Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints", *Journal of Risk,* **4**(2), pp. 11-27 (2002).
10. Topaloglou, N.; Vladimirou, H. and Zenios, S. "CVR models with selective hedging for international asset allocation", *Journal of Banking and Finance,* **26**(7), pp. 1535-1561 (2002).
11. Chekhlov, A.; Uryasev, S. and Zabarankin, M. "Drawdown measure in portfolio optimization", *International Journal of Theoretical and Applied Finance,* **8**(1), pp. 13-58 (2005).
12. Zagst, R., *Interest Rate Management,* Springer Finance (2002).
13. lutgens, F.; Sturm, j. and Kolen, A. "Robust one-period option hedging", *Operation Research,* **54**(6), pp. 1051-1062 (2006).
14. Bertsimas, D. and Sim, M. "The price of robustness", *Operation Research,* **52**(1), pp. 35-53 (2004).
15. Zangwill, W.I., *Nonlinear Programming: A Unified Approach,* Prentice-Hall, Inc., Englewoood Cliffs, N.J. (1969).

ضمیمه

اثبات قضیه‌ی (۱.۵.)

برای محاسبه‌ی دوگان مدل کمینه‌سازی (۲.۵.) از مسئله‌ی دوگان مقعر، و با تغییر به حالت محدب که برای مدل اولیه‌ی کمینه‌سازی قابل کاربرد است استفاده می‌کنیم.

مسئله‌ی دوگان محدب

مدل کمینه‌سازی اولیه به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود.[15]

$$\begin{aligned}&\min_x f(x)\\&s.t.\\&g_i(x)\leq 0, \qquad i=1,\dots,n\\&h_j(x)=0, \qquad j=1,\dots,m\end{aligned}$$

درصورت محدب بودن تمامی توابع $g(x)$، $h(x)$ و $f(x)$ مدل معادل دوگان آن چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\max_x f(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{m}\nu_j h_j(x)\\&s.t.\\&\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla g_i(x)+\sum_{j=1}^{m}\nu_j\nabla h_j(x)=0 \qquad \lambda_i\geq 0\end{aligned}$$

■

واضح است که تابع $|x|$ تابعی محدب است، و از طرف دیگر مجموع توابع محدب نیز تابعی محدب است. بنابراین تابع سمت چپ محدودیت ۱۳ که به‌عنوان محدودیت کنترل درجه محافظه‌کاری به مدل اضافه شده است، تابعی محدب است. درنتیجه امکان استفاده از «مسئله‌ی دوگان محدب» برای محاسبه‌ی مدل دوگان در مدل وجود دارد.

جهت ایجاد امکان مشتق‌گیری در مدل ۱۴، به جایگزینی محدودیت ۱۳ با محدودیت‌های معادل زیر در مدل‌سازی می‌پردازیم. در این حالت همچنان فضای مدل ۱۴ خصوصیات قبل را دارد.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-)\leq\Gamma\\&\varepsilon_i=\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-, \qquad \varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^- = 0\\&\varepsilon_i^+\geq 0, \qquad \varepsilon_i^-\geq 0\end{aligned} \tag{پ ـ ۱}$$

بعد از جایگزینی قدرمطلق با عبارت‌های پ ـ ۱ و مرتب کردن محدودیت‌های مدل ۱۴ به‌صورت کوچک‌تر مساوی (≤ 0) با توجه به مجموعه‌های

$$\begin{aligned}&\varepsilon^+=\{\varepsilon_i^+|\forall i\in N\}, \qquad \varepsilon^-=\{\varepsilon_i^-|\forall i\in N\}\\&t=\{t_{i,j}^c|\forall[i\in N, j\in N_i^c]\}\cap\{t_{i,j}^c|\forall[i\in N, j\in N_i^p]\}\\&\varepsilon=\{\varepsilon_i|\forall i\in N\}\end{aligned} \tag{پ ـ ۲}$$

مدل کمینه‌سازی مرتب‌شده برای مدل ۱۴ چنین بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&\min_{\varepsilon,\varepsilon^+,\varepsilon^-,t}\left(\sum_{i=1}^{N}(\omega_i*b_i*\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^c*t_{i,j}^c)+\right.\\&\qquad\left.\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^p*t_{i,j}^p)\right)\\&s.t.\\&1)\ \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-)-\Gamma\leq 0 \qquad \lambda\\&2)\ \varepsilon_i-\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^- = 0, \qquad i=1,\dots,n \qquad \nu_i\\&3)\ \varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^- = 0, \qquad i=1,\dots,n \qquad k_i\\&4)\ -\varepsilon_i-1\leq 0, \qquad i=1,\dots,n \qquad \eta_i\\&5)\ \varepsilon_i-1\leq 0, \qquad i=1,\dots,n \qquad \delta_i\\&6)\ -t_{i,j}^c+b_i*\varepsilon_i+\mu_i-k_{i,j}^c\leq 0,\\&\qquad i=1,\dots,N, \quad j=1,\dots,N_i^c, \qquad \Psi_{i,j}\\&7)\ -t_{i,j}^p-b_i*\varepsilon_i+k_{i,j}^p-\mu_i\leq 0,\\&\qquad i=1,\dots,n, \quad j=1,\dots,N_i^p, \qquad \xi_{i,j}\\&8)\ -t_{i,j}^c\leq 0, \qquad i=1,\dots,N, \quad j=1,\dots,N_i^c \qquad \Phi_{i,j}\\&9)\ -t_{i,j}^p\leq 0, \qquad i=1,\dots,n, \quad j=1,\dots,N_i^p \qquad \Pi_{i,j}\\&10)\ -\varepsilon_i^+\leq 0, \qquad i=1,\dots,n \qquad \Omega_i\\&11)\ -\varepsilon_i^-\leq 0, \qquad i=1,\dots,n \qquad \Xi_i\end{aligned} \tag{پ ـ ۳}$$

ابتدا به‌وسیله‌ی متغیرهای دوگان ارائه‌شده برای محدودیت‌های مدل فوق، محدودیت‌های مدل بیشینه‌سازی دوگان را با توجه به «مسئله‌ی دوگان محدب» به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&1)\ \partial\varepsilon_i:\omega_i*b_i+1*\nu_i-1*\eta_i+1*\delta_i+b_i*\sum_{j=1}^{N_i^c}\Psi_{i,j}-\\&\qquad b_i*\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j}=0, \qquad i=1,\dots,n\\&2)\ \partial\varepsilon_i^+:1*\lambda-1*\nu_i+\varepsilon_i^-*k_i-1*\Omega_i=0,\\&\qquad i=1,\dots,n\\&3)\ \partial\varepsilon_i^-:1*\lambda+1*\nu_i+\varepsilon_i^+*k_i-1*\Xi_i=0,\\&\qquad i=1,\dots n\\&4)\ \partial t_{i,j}^c:\omega_{i,j}^c-\Psi_{i,j}-\Phi_{i,j}=0, \qquad i=1,\dots,n, \qquad j=1,\dots,N_i^c\\&5)\ \partial t_{i,j}^p:\omega_{i,j}^p-\xi_{i,j}-\Pi_{i,j}=0, \qquad i=1,\dots,n, \qquad j=1,\dots,N_i^p\\&6)\ \lambda,\eta_i,\delta_i,\Psi_{i,j},\xi_{i,j},\Phi_{i,j},\Pi_{i,j}\Omega_i,\Xi_i\geq 0\end{aligned} \tag{پ ـ ۴}$$

تابع هدف مدل بیشینه‌سازی نیز با توجه به «مسئله‌ی دوگان محدب» محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{N}(\omega_i * b_i * \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}(\omega_{i,j}^c * t_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}(\omega_{i,j}^p * t_{i,j}^p) +$$
$$\lambda * (\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-) - \Gamma) + \sum_{i=1}^{N}\nu_i * (\varepsilon_i - \varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-) +$$
$$\sum_{i=1}^{N} k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) + \sum_{i=1}^{N}\eta_i * (-\varepsilon_i - 1) + \sum_{i=1}^{N}\delta_i * (\varepsilon_i - 1) +$$
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}\Psi_{i,j} * (-t_{i,j}^c - b_i * \varepsilon_i + \mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j} *$$
$$(-t_{i,j}^p - b_i * \varepsilon_i + k_{i,j}^p - \mu_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}\Phi_{i,j} * (-t_{i,j}^c) +$$
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j} * (-t_{i,j}^p) + \sum_{i=1}^{N}\Omega_i * (-\varepsilon_i^+) + \sum_{i=1}^{N}\Xi_i * (-\varepsilon_i^-)$$

حال برای ساده‌سازی تابع هدف مدل بیشینه‌سازی از محدودیت‌های آن استفاده می‌کنیم. ابتدا با ضرب هر محدودیت دوگان (پ ـ۴) در متغیر مربوط به آن در مشتق‌گیری، به محدودیت‌های تساوی زیر می‌رسیم:

$$1)\ \omega_i * b_i * \varepsilon_i + \varepsilon_i * \nu_i - \varepsilon_i * \eta_i + \varepsilon_i * \delta_i + \varepsilon_i * b_i * \sum_{j=1}^{N_i^c}\Psi_{i,j} -$$
$$\varepsilon_i * b_i * \sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j} = 0, \qquad i = 1, ..., n$$
$$2)\ \varepsilon_i^+ * \lambda - \varepsilon_i^+ * \nu_i + \varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^- * k_i - \varepsilon_i^+ * \Omega_i = 0 \qquad i = 1, ..., n$$
$$3)\ \varepsilon_i^- * \lambda + \varepsilon_i^- * \nu_i + \varepsilon_i^- * \varepsilon_i^+ * k_i - \varepsilon_i^- * \Xi_i = 0 \qquad i = 1, ..., n$$
$$4)\ t_{i,j}^c * \omega_{i,j}^c - t_{i,j}^c * \Psi_{i,j} - t_{i,j}^c * \Phi_{i,j} = 0,$$
$$i = 1, ..., n, \qquad j = 1, ..., N_i^c$$
$$5)\ t_{i,j}^p * \omega_{i,j}^p - t_{i,j}^p * \xi_{i,j} - t_{i,j}^p * \Pi_{i,j} = 0,$$
$$i = 1, ..., n, \qquad j = 1, ..., N_i^p \qquad \text{(پ ـ۵)}$$

سپس با مرتب‌کردن تابع هدف عبارت‌های مشابه سمت چپ معادلات (پ ـ۵) به دست می‌آید که با حذف آن‌ها از مدل تابع هدف نهایی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$-\lambda * \Gamma - \sum_{i=1}^{N} k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) - \sum_{i=1}^{N}\eta_i - \sum_{i=1}^{N}\delta_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}\Psi_{i,j} *$$
$$(\mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j} * (k_{i,j}^p - \mu_i) \qquad \text{(پ ـ۶)}$$

بنابراین معادل دوگان این مدل با توجه به محدودیت‌های پ ـ۴، عبارت پ ـ۶، و مجموعه‌های ۱۵ به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\max_{\varepsilon^+, \varepsilon^-, Dual\, coef}\left(-\lambda * \Gamma - \sum_{i=1}^{N} k_i * (\varepsilon_i^+ * \varepsilon_i^-) - \sum_{i=1}^{N}(\eta_i + \delta_i) + \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^c}\Psi_{i,j} * (\mu_i - k_{i,j}^c) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j} * (k_{i,j}^p - \mu_i)\right)$$
$$s.t.$$
$$1)\ \omega_i * b_i + \nu_i - \eta_i + \delta_i + b_i * \sum_{j=1}^{N_i^c}\Psi_{i,j} - b_i * \sum_{j=1}^{N_i^p}\xi_{i,j} = 0,$$
$$i = 1, ..., n$$
$$2)\ \lambda - \nu_i + \varepsilon_i^- * k_i - \Omega_i = 0, \qquad i = 1, ..., n$$
$$3)\ \lambda + \nu_i + \varepsilon_i^+ * k_i - \Xi_i = 0, \qquad i = 1, ..., n$$
$$4)\ \omega_{i,j}^c - \Psi_{i,j} - \Phi_{i,j} = 0, \qquad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., N_i^c$$
$$5)\ \omega_{i,j}^p - \xi_{i,j} - \Pi_{i,j} = 0, \qquad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., N_i^p$$
$$6)\ \lambda, \eta_i, \delta_i, \Omega_i, \Xi_i \geq 0, \qquad i = 1, ..., n$$
$$7)\ \Psi_{i,j}, \Phi_{i,j} \geq 0, \qquad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., N_i^c$$
$$8)\ \xi_{i,j}, \Pi_{i,j} \geq 0, \qquad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., N_i^p \qquad \text{(پ ـ۷)}$$

در مدل فوق با توجه به عدم تأثیر متغیرهای $\Pi_{i,j}, \Phi_{i,j}, \Omega_i, \Xi_i$ در تابع هدف، و غیرمنفی بودن آن‌ها می‌توان آن‌ها را از محدودیت‌ها حذف کرد و محدودیت‌ها را از حالت مساوی به $\geq$ تغییر داد. به این ترتیب تعداد متغیرهای مدل نیز کاهش می‌یابد و نهایتاً همتای استوار ۱۷ به دست می‌آید.