

# مدل موجودی چندمحصولی با محدودیت‌های فضای انبار، بودجه و کم‌ترین سطح خدمت در حالت کمبود پس‌افت جزئی

اسماعیل مهدی‌زاده\* (استادیار)

شهرام والی‌زاده (کارشناس ارشد)

حمیدرضا پسندیده (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین

مهندسی صنایع و مدیریت شریف  
دربی ۱ - ۲۹، شماره ۱، ص. ۱۰۱-۱۱۱

در این تحقیق مدلی جدید برای سیستم موجودی بازدید پیوسته چندمحصولی با محدودیت‌های فضای انبار، بودجه و کم‌ترین سطح خدمت در حالت کمبود پس‌افت جزئی ارائه شده است. هدف به دست آوردن مقدار سفارش و نقطه سفارش مجدد است به‌گونه‌یی که هزینه‌ی کل سالیانه کمیته شود. این مدل با روش آزادسازی لاگرانژ و ترکیب آن با الگوریتم ابتکاری شناخته شده هدلی-ویتین<sup>۱</sup> برای مسائل با ابعاد کوچک، و روش فرایبتکاری شبیه‌سازی تبرید برای مسائل با ابعاد بزرگ حل می‌شود. از آنجا که روش آزادسازی لاگرانژ<sup>۲</sup> جزء روش‌های دقیق است، می‌توان از آن برای ارزیابی جواب روش شبیه‌سازی تبرید بهره برد. مقایسه جواب‌های به دست آمده از دو روش نشان می‌دهد که روش شبیه‌سازی تبرید کارایی مناسب و قابل قبولی برای حل مدل پیشنهادی دارد.

واژگان کلیدی: کنترل موجودی بازدید پیوسته، کمبود پس‌افت جزئی، محدودیت فضای انبار، محدودیت بودجه، محدودیت کم‌ترین سطح سرویس.

## ۱. مقدمه

سفرارش، محدودیت سطح خدمت، و... یا در نظر گرفته نشده یا تعداد کمی از آن‌ها در هر مدل لحاظ شده‌اند. این موضوع خصوصاً در مورد مدل‌های کنترل موجودی با فرض وجود کمبود مصداق بیشتری پیدا می‌کند. سیلور و همکاران در سال ۱۹۸۸ مدل روزنامه‌فروش را در حالت تک‌دوره‌یی چندمحصولی با یک محدودیت بررسی، و الگوریتمی برای حل آن ارائه کرده‌اند.<sup>[۱]</sup> هدف این مدل بیشینه‌کردن متوسط سود برای چندین محصول است. آن‌ها برای حل مدل خود محدودیت مسئله را با یک ضریب جریمه به تابع هدف منتقل کرده و تابع لاگرانژ را تشکیل داده‌اند. سپس با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ نسبت به متغیر تصمیم (مقدار سفارش) و ضریب لاگرانژ مقدار بهینه سفارش را به دست آورده‌اند. محبی و همکاران در سال ۱۹۹۹ یک مدل موجودی بازدید پیوسته همراه با فروش از دست رفته و سفارش‌دهی فوری را مورد بررسی قرار داده‌اند.<sup>[۲]</sup> مدل در دو حالت ارائه شده است: با سفارش‌دهی فوری و بدون سفارش‌دهی فوری. این مدل‌ها ابتدا بدون در نظر گرفتن محدودیت حل شدند، و سپس با در نظر گرفتن محدودیت سطح خدمت برای هر دو مدل، تأثیر این محدودیت بر مدل‌ها بررسی شده است. در سال ۲۰۰۰ مدل روزنامه‌فروش چندمحصولی با محدودیت بودجه، با تقاضای غیرقطعی بررسی،<sup>[۳]</sup> و روشی برای به‌کارگیری مدل‌های بهینه‌سازی قطعی ارائه شد. عدم قطعیت تقاضا به دو صورت فاصله‌یی و گسسته ارائه شده است. برای تقاضای فاصله‌یی، حد بالا و پائین تقاضای غیر قطعی هر محصول مد نظر قرار گرفته است. در حالی که برای تقاضای گسسته مجموعه‌یی از تقاضاهای

امروزه مدل‌های کنترل موجودی در حوزه‌های مختلف تولید و فروش به‌طور گسترده کاربرد دارند، اما کماکان فرضیات برخی از این مدل‌ها سبب شده‌اند تا امکان به کارگیری صحیح آن‌ها در عمل فراهم نشود. لذا کنار گذاشتن فرضیات محدودکننده و توسعه‌ی این مدل‌ها به‌منظور به کارگیری واقعی آن‌ها در عمل ضروری به نظر می‌رسد. یکی از فرضیات مهم در بسیاری از مدل‌های موجودی فرض «عدم وجود کمبود» است. معروف‌ترین این مدل‌ها، مدل کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی (EOQ)<sup>۳</sup> است. در این مدل به دلیل قطعی بودن تقاضا، کمبود در نظر گرفته نمی‌شود. در صورتی که در دنیای واقعی به دلیل احتمالی بودن تقاضا امکان مواجهه‌ی سیستم با کمبود همواره وجود دارد. در مواجهه با کمبود به‌طور کلی سه رویکرد پس‌افت، فروش از دست رفته و پس‌افت جزئی مد نظر قرار می‌گیرد. در «پس‌افت» پاسخ‌گویی به کل تقاضا تعهد می‌شود؛ در فروش از دست رفته تعهدی در قبال تقاضا وجود ندارد؛ و در پس‌افت جزئی بخشی از تقاضا به صورت پس‌افت و بقیه به صورت فروش از دست رفته در نظر گرفته می‌شود.

از دیگر مشکلات مدل‌های سنتی موجودی این است که محدودیت‌های موجود در دنیای واقعی نظیر محدودیت بودجه، محدودیت فضای، محدودیت تعداد دفعات

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۱۰/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۰/۰۶/۱۳، پذیرش ۱۳۹۰/۰۷/۲۶.

محتمل مد نظر قرار داده شده است. برای حالت تقاضای غیرقطعی فرمول‌های کمیته-بیشینه برای مسئله روزنامه‌فروش چندمحصولی با محدودیت بودجه توسعه داده شده است. برای مسائل در حالت تقاضای فاصله‌ی الگوریتم‌های بهینه‌ی زمانی خطی توسعه و نشان داده شده است که مدل‌های مشابه در حالت تقاضای گسسته NP-hard هستند. در انتها نیز نتایج فوق در حالت ترکیب هر دو رویکرد توسعه داده شده که در آن تقاضای اقلام باقی‌مانده با تقاضای گسسته توضیح داده شده است.

در سال ۲۰۰۳ یک مدل موجودی برای کالاهای با مقدار مختلف تقاضا در زمان‌های مختلف و در نظر گرفتن کمیود ارائه شد.<sup>[۱۴]</sup> سپس در سال ۲۰۰۴ یک سیستم موجودی بازدید پیوسته‌ی چندمحصولی با تقاضای در حالت پس‌افت و با محدودیت بودجه بررسی شد.<sup>[۱۵]</sup> در سال ۲۰۰۵ نیز یک سیستم موجودی نقطه سفارش مجدد (بازدید پیوسته) با تابعی از مشتری‌های ناشکیبا (مشتری‌هایی که باید تقاضای آن‌ها به صورت فوری پاسخ داده شود) مورد بررسی قرار گرفت.<sup>[۱۶]</sup> در تحقیق یادشده مدل ارائه‌شده برای دو دسته از مشتریان مورد بررسی قرار گرفته است: ۱. مشتریانی که با نبود کالا صبر کرده و تقاضای آن‌ها به صورت پس‌افت پاسخ داده می‌شود؛ ۲. مشتریانی که صبر نمی‌کنند و باید به سرعت تقاضای آن‌ها پاسخ داده شود.

در سال ۲۰۰۶ محققین مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی با تقاضای فازی تحت محدودیت بودجه را بررسی کردند. آن‌ها سه مدل را تحت معیارهای مختلف توسعه دادند. در این مدل‌ها هدف بیشینه‌کردن سود مورد انتظار است و برای حل این مدل‌ها یک الگوریتم هیبریدی براساس ژنتیک و شبیه‌سازی فازی ارائه شده است.<sup>[۱۷]</sup> در سال ۲۰۰۷ یک مدل (R, nT) تحقیقاتی مورد پژوهش قرار گرفت که طی آن در مرحله‌ی اول تقاضای تصادفی وارد سیستم می‌شود و در مرحله دوم کل تقاضای ارضا نشده به صورت پس‌افت در نظر گرفته می‌شود.<sup>[۱۸]</sup> در سال ۲۰۰۸ نیز محققین یک مدل موجودی تحت محدودیت‌های کم‌ترین سطح خدمت و بودجه ارائه کردند. آن‌ها در این مدل دو نوع تقاضا (مشتری) در نظر گرفته‌اند: ۱. تقاضای معمولی یا اختیاری (تقاضایی که ضرورتی در پاسخ‌دهی فوری به آن نیاز نیست)، ۲. تقاضای فوری که به تبع آن دو نوع مقدار سفارش به دست آوردند.<sup>[۱۹]</sup> مدل آن‌ها دو جزء داشت که مدل کلی از جمع این دو مدل به دست می‌آمد. برای حل این مدل از تابع هدف نسبت به متغیرهای تصمیم -- یعنی مقدار سفارش ضروری، مقدار سفارش معمولی (اختیاری) و نقطه سفارش مجدد -- مشتق گرفته شده و بعد با ترکیب روش مشهور هدلی-ویتین با یک روش پیشنهادی، الگوریتمی برای به دست آوردن متغیرهای تصمیم ارائه کردند.

بعدها در سال ۲۰۰۸ یک الگوریتم ژنتیک برای مدل EPQ چندمحصولی با تحویل سفارش گسسته و محدودیت فضای انبار ارائه شد.<sup>[۲۰]</sup> در سال ۲۰۰۹ نیز الگوریتمی دقیق و قابل اطمینان برای یک سیستم موجودی (P, Q) با هزینه‌ی کمیود ثابت ارائه شد.<sup>[۲۱]</sup> در همین سال (۲۰۰۹) مدل موجودی با زمان تحویل پیوسته و گسسته، و در حالت پس‌افت و فروش از دست رفته ارائه شد<sup>[۲۲]</sup> که در آن، مقدار سفارش و مدت زمان تحویل متغیرهای تصمیم‌اند. برای حل این مدل پس از مشتق‌گیری از تابع هدف نسبت به متغیرهای تصمیم از یک روش مقداردهی ساده برای به دست آوردن متغیرهای تصمیم استفاده شده است. همچنین در این تحقیق مدت زمان تحویل در دو حالت پیوسته و گسسته مورد بررسی قرار گرفته است.

از آغاز پیدایش علم برنامه‌ریزی و کنترل موجودی مطالعات قابل توجهی درخصوص مدل‌های کمیود صورت گرفته و مقالات زیادی منتشر شده است، اما تعداد کمی از آن‌ها کمیود جزئی را مد نظر قرار داده‌اند. مونگومری و بازارا جزء

اولین کسانی بوده‌اند که هر دو نوع کمیود -- یعنی کمیود پس‌افت و کمیود فروش از دست رفته -- را همزمان در مدل خود جای دادند. در تحقیقی که در سال ۱۹۷۳ از طرف این محققین منتشر شد، ابتدا کمیود پس‌افت و فروش از دست رفته به صورت جداگانه مورد مطالعه قرار گرفت و سپس این دو نوع کمیود به صورت همزمان و ترکیبی در مدل لحاظ شدند؛ بدین ترتیب که درصدی از کمیود به صورت کمیود پس‌افت و مابقی به حالت کمیود فروش از دست رفته در نظر گرفته شد.<sup>[۲۳]</sup>

در سال ۲۰۰۲ یک سیاست موجودی برای کالای فاسدشدنی با کمیود پس‌افت جزئی ارائه شد.<sup>[۲۴]</sup> در سال ۲۰۰۳ نیز یک مدل کنترل موجودی با کالای فاسدشدنی و مقدار تخفیف و قیمت‌گذاری و در حالت کمیود پس‌افت جزئی وابسته به زمان ارائه شد.<sup>[۲۵]</sup> در سال ۲۰۰۴ چو و همکاران یک مدل موجودی بازدید پیوسته با کمیود پس‌افت جزئی ارائه دادند.<sup>[۲۶]</sup> در سال ۲۰۰۵ یک سیستم موجودی با پس‌افت جزئی به صورت یک تابع خطی مورد بررسی قرار گرفت.<sup>[۲۷]</sup> در سال ۲۰۰۶ نیز یک مدل موجودی با پس‌افت جزئی نمایی تحلیل شد.<sup>[۲۸]</sup> در همین سال (۲۰۰۶) محققین یک مدل موجودی با کالای فاسدشدنی و با زمان متغیر تقاضا و کمیود پس‌افت جزئی ارائه کردند.<sup>[۲۹]</sup> در سال ۲۰۰۷ نیز روشی برای اندازه‌انباشته و قیمت فروش بهینه با نرخ متغیر کالای فاسدشدنی و کمیود پس‌افت جزئی نمایی ارائه شد.<sup>[۲۰]</sup> پس از آن در سال ۲۰۰۸ محققین یک مدل موجودی مقدار سفارش ثابت با پس‌افت جزئی و برای کالای فاسدشدنی با تقاضای موجی تحت تورم ارائه کردند.<sup>[۲۱]</sup>

در سال ۱۳۸۸ نیز مقاله‌ی تحت عنوان «کاربرد شبیه‌سازی تریید در بهینه‌سازی مدل کنترل موجودی چندمحصولی همراه با محدودیت فضا و باز پرسازی تصادفی» ارائه شد.<sup>[۲۲]</sup> در این مقاله یک مسئله کنترل موجودی چنددوره‌ی که در آن فاصله زمانی بین دو بازپرسازی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع‌اند مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حقیقت تولیدکننده با خریدار در زمانی کاملاً تصادفی رودرو می‌شود. دیگر فرض حاکم بر مسئله، وجود محدودیت فضاست و متغیر تصمیم نیز عدد صحیح در نظر گرفته شده است. سه مدل ارائه‌شده که در مدل اول کل کمیود به حالت پس‌افت درمی‌آید، در مدل دوم کل کمیود فروش از دست رفته در نظر گرفته شده و در مدل سوم هر دو کمیود در نظر گرفته شده و در نهایت مدل ارائه شده با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی تریید حل شده است.

با توجه به مطالعات انجام‌شده در زمینه مدل‌های کنترل موجودی خصوصاً مدل‌های بازدید پیوسته، مشخص می‌شود که در مدل‌هایی که محققین ارائه کرده‌اند به محدودیت‌ها توجه چندانی نشده است؛ یعنی یا محدودیتی را در نظر نگرفته‌اند یا تعداد کمی از آن‌ها را در مدل خود لحاظ کرده‌اند. همچنین در تعداد کمی از این مدل‌ها به کمیودها توجه شده و آن‌هایی هم که وجود کمیود را در مدل خود لحاظ کرده‌اند، کم‌تر به حالت کمیود پس‌افت جزئی (کمیود ترکیبی) پرداخته‌اند. در این تحقیق مدلی ارائه می‌شود که در آن هم کمیود پس‌افت جزئی و هم سه نوع محدودیت -- یعنی محدودیت فضای انبار، بودجه و کم‌ترین سطح خدمت -- به‌طور همزمان در نظر گرفته می‌شود.

## ۲. تعریف مسئله

در تحقیق پیش رو هدف ارائه و حل یک مدل موجودی بازدید پیوسته (P, Q) چندمحصولی با کمیود پس‌افت جزئی و وجود چند محدودیت است. در این مدل نرخ تقاضای سالیانه و مدت زمان تحویل برای هر محصول مشخص و ثابت است. اما تقاضا در مدت زمان تحویل احتمالی است و از الگوی نرمال پیروی می‌کند.

همه محصول‌ها نباید از این حداقل کم تر باشد؛  
 $f(X_i)$ : تابع تقاضا در مدت تحویل برای هر محصول؛  
 $F(x_i)$ : تابع توزیع تجمعی تقاضا برای محصول  $i$ ،  $(\bar{F}(x_i) = 1 - F(x_i))$ ؛  
 $TC$ : تابع هزینه کل سالیانه در حالت پس‌افت کامل؛  
 $TC'$ : تابع هزینه کل سالیانه در حالت فروش از دست رفته؛  
 $TC''$ : تابع هزینه کل سالیانه در حالت پس‌افت جزئی (کمبود ترکیبی)؛  
 $X_i$ : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل؛  
 $C$ : کل بودجه‌ی در دست.

### ۳.۳. محاسبه هزینه‌های مدل

با توجه به فرضیات و نمادهای ذکرشده هزینه‌های سالیانه چنین محاسبه می‌شوند: [۲۳]

هزینه‌ی سالیانه‌ی سفارش‌دهی

$$TA = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} A_i \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

هزینه‌ی سالیانه‌ی نگاه‌داری

$$TH = \sum_{i=1}^n h_i I_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

هزینه‌ی سالیانه‌ی کمبود

$$TS = \sum_{i=1}^n \pi_i \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

متوسط کمبود در سال

$$\bar{b}(r_i) = \int_{r_i}^{\infty} (x_i - r_i) f(x_i) dx_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

تابع هزینه‌ی کل در حالت پس‌افت کامل

$$TC = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} A_i + \sum_{i=1}^n h_i \left( r_i - \mu_{L_i} + \frac{Q_i}{\gamma} \right) + \sum_{i=1}^n \pi_i \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \quad (5)$$

که در آن عبارت  $(r_i - \mu_{L_i} + \frac{Q_i}{\gamma})$  بیان‌گر موجودی اطمینان در حالت پس‌افت است.

تابع هزینه‌ی کل در حالت فروش از دست رفته

$$TC' = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{Q_i} A_i + \sum_{i=1}^n h_i \left( r_i - \mu_{L_i} + \bar{b}(r_i) + \frac{Q_i}{\gamma} \right) + \sum_{i=1}^n \pi_i'' \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \quad (6)$$

که در آن عبارت  $(r_i - \mu_{L_i} + \bar{b}(r_i) + \frac{Q_i}{\gamma})$  بیان‌گر موجودی اطمینان در حالت فروش از دست رفته است.

تابع هزینه‌ی کل در حالت کمبود ترکیبی (پس‌افت جزئی) با در نظر گرفتن کسری از تقاضا که به صورت پس‌افت  $(\alpha_i)$  و بقیه آن به صورت فروش از دست

کمبود مجاز و از نوع پس‌افت جزئی است؛ در واقع کمبود پس‌افت جزئی همان ترکیب کمبود پس‌افت و فروش از دست رفته است که در آن هزینه‌ی کمبود پس‌افت و هزینه‌ی کمبود فروش از دست رفته -- شامل هزینه‌ی اعتبار از دست رفته و هزینه‌ی فروش از دست رفته -- در نظر گرفته می‌شود. همچنین در این مدل سه نوع محدودیت فضای انبار، محدودیت بودجه و محدودیت کم‌ترین سطح خدمت که از سوی مدیریت تعیین شده در نظر گرفته می‌شود. هدف اصلی به دست آوردن مقادیر بهینه (یا نزدیک به بهینه) مقدار سفارش  $(Q)$  و نقطه‌ی مجدد سفارش  $(r)$  برای هر کالا است به‌گونه‌ی که کل هزینه‌ی موجودی سالیانه کمینه شود.

### ۳.۳. مدل پیشنهادی

#### ۱.۳. فرضیات مدل

-- کمبود مجاز است و به صورت پس‌افت جزئی (ترکیب کمبود پس‌افت و فروش از دست رفته) است.

-- تهیه مواد به صورت آنی است و نرخ تقاضای سالیانه برای هر محصول ثابت و مشخص است.

-- مدت تحویل برای هر محصول ثابت و مشخص است.

-- تقاضا در مدت زمان تحویل احتمالی و از الگوی نرمال پیروی می‌کند.

-- ظرفیت انبار محدود است.

-- بودجه‌ی در دست محدود است.

-- محدودیت کم‌ترین سطح خدمت از سوی مدیریت تعیین شده است.

-- هزینه‌ی خرید در زمان دریافت سفارش پرداخت می‌شود.

#### ۲.۳. نمادهای مدل

$n$ : تعداد کالاها؛

$Q_i$ : مقدار سفارش برای هر محصول (متغیر تصمیم)؛

$r_i$ : نقطه‌ی سفارش مجدد برای هر محصول (متغیر تصمیم)؛

$\alpha_i$ : کسری از تقاضای محصول  $i$  که به صورت پس‌افت است؛

$S_i$ : قیمت فروش برای هر واحد محصول؛

$C_i$ : قیمت خرید برای هر واحد محصول؛

$A_i$ : هزینه‌ی سفارش‌دهی برای هر واحد محصول؛

$h_i$ : هزینه‌ی نگاه‌داری هر واحد محصول در طول سال؛

$\pi_i$ : هزینه‌ی ثابت کمبود مستقل از زمان برای هر واحد محصول به صورت پس‌افت؛

$\pi_i'$ : هزینه‌ی اعتبار از دست رفته به واسطه‌ی تقاضای پاسخ داده نشده هر محصول؛

$\pi_i^*$ : هزینه‌ی فروش از دست رفته شامل اعتبار از دست رفته و سود از دست رفته برای هر محصول:  $(\pi_i'' = \pi_i' - S_i - C_i)$

$D_i$ : تقاضای سالیانه‌ی هر محصول؛

$\mu_{L_i}$ : متوسط تقاضا در مدت زمان تحویل برای هر محصول؛

$\bar{b}(r_i)$ : متوسط کمبود در هر سال برای هر محصول؛

$\bar{I}$ : متوسط موجودی در هر سال برای هر محصول؛

$w_i$ : فضای انبار استفاده شده توسط هر محصول؛

$W$ : ظرفیت انبار؛

$\theta$ : کم‌ترین سطح خدمت تعیین شده توسط مدیریت (میانگین سطح خدمت برای

رفته است  $(1 - \alpha_i)$  عبارت است از:

$$TC'' = \alpha_i TC + (1 - \alpha_i) TC' \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$TC'' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \left( r_i - \mu_{L_i} + \frac{Q_i}{\gamma} \right) + \pi_i \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \right) + \sum_{i=1}^n (1 - \alpha_i) \left( \frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \left( r_i - \mu_{L_i} + \bar{b}(r_i) + \frac{Q_i}{\gamma} \right) + \pi_i'' \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \right) \quad (8)$$

$$TC'' = \sum_{i=1}^n \left( \frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \left( r_i - \mu_{L_i} + \frac{Q_i}{\gamma} \right) + (1 - \alpha_i) h_i \sum_{i=1}^n \bar{b}(r_i) \right) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) \pi_i'') \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \quad (9)$$

### ۴.۳. فرمول‌بندی محدودیت‌های مدل

#### ۱.۴.۳. محدودیت فضای انبار

این محدودیت بیان می‌دارد که کل فضای مورد نیاز نباید بیش از کل فضای در دست باشد. فضای مورد نیاز شامل فضای لازم برای تمامی کالاهای دریافت‌شده براساس سفارش، به علاوه فضای مورد نیاز برای کالای نقطه سفارش منهای فضای کالایی که ممکن است پاسخ داده شوند. توجه به این نکته ضروری است که اگر کل تقاضا بیش از کالای در دست باشد، قسمتی از کالای نقطه سفارش نگه‌داری شده و در دوره‌ی مورد مطالعه پاسخ داده نمی‌شود و این همان «متوسط کمبود» است که در این حالت به کالای موجود در نقطه‌ی سفارش اضافه می‌شود.

$$\sum_{i=1}^n w_i (Q_i + \alpha_i (r - \mu_{L_i}) + (1 - \alpha_i) (r_i - \mu_{L_i} + \bar{b}(r_i))) \leq W \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i (Q_i + r_i - \mu_{L_i} + (1 - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) \leq W \quad (11)$$

#### ۲.۴.۳. محدودیت بودجه در دست

این محدودیت بیان می‌دارد که کل بودجه‌ی مورد نیاز نباید بیش از کل بودجه‌ی در دست باشد. بودجه‌ی مورد نیاز عبارت است از: بودجه‌ی مورد نیاز برای کل کالای دریافت‌شده براساس سفارش به علاوه بودجه‌ی مورد نیاز برای کالای نقطه سفارش به علاوه بودجه‌ی مورد نیاز برای کالاهایی که در آینده قرار است تحویل شوند (مقدار پس‌افت) منهای بودجه‌ی مورد نیاز برای کالایی که ممکن است پاسخ داده شوند. اگر کل تقاضا بیش از کالای در دست باشد، قسمتی از کالا باید خریداری شده و در دوره مورد تعهد پاسخ داده شود که هزینه‌ی مورد نیاز برابر هزینه‌ی خرید متوسط کمبود است. اما اگر کمبود نداشته باشیم یا فروش از دست رفته باشد، دیگر هزینه‌ی برای خرید تفاوت نقطه‌ی سفارش و تقاضا وجود ندارد.

$$\sum_{i=1}^n C_i (Q_i + \alpha_i (r - \mu_{L_i}) + (1 - \alpha_i) (r_i - \mu_{L_i} + \bar{b}(r_i))) \leq C \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n C_i (Q_i + r_i - \mu_{L_i} + (1 - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) \leq C \quad (13)$$

### ۳.۴.۳. محدودیت کم‌ترین سطح خدمت

پارامتر  $\theta$  کم‌ترین سطح خدمت تعیین‌شده توسط مدیریت است؛ میانگین سطح خدمت برای تمامی محصولات نباید از این حداقل کم‌تر باشد.

$$\frac{\sum_{i=1}^n F(r_i)}{n} \geq \theta \quad (14)$$

### ۵.۳. مدل نهایی

با یک جا نوشتن تابع هدف و محدودیت‌ها، مدل نهایی چنین حاصل می‌شود:

$$\min TC'' = \sum_{i=1}^n \left( \frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \left( r - \mu_{L_i} + \frac{Q_i}{\gamma} \right) + (1 - \alpha_i) h_i \bar{b}(r_i) + (\alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) \pi_i'') \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \right)$$

St :

$$\sum_{i=1}^n w_i (Q_i + r_i - \mu_{L_i} + (1 - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) \leq W$$

$$\sum_{i=1}^n C_i (Q_i + r_i - \mu_{L_i} + (1 - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) \leq C$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n F(r_i)}{n} \geq \theta \quad r_i, Q_i \geq 0 \quad (15)$$

### ۴. روش‌های حل مدل

#### ۱.۴. روش آزادسازی لاگرانژ

در روش آزادسازی لاگرانژ محدودیت‌های سخت به‌جای این که حذف شوند با یک جریمه به تابع هدف منتقل می‌شوند. به عبارت دیگر منطق اصلی حاکم این است که محدودیت‌های سخت آزاد می‌شوند تا مسئله‌ی باقی‌مانده به راحتی حل شود.<sup>[۲۴]</sup> در ارتباط با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ، برای مسئله‌ی پیشنهادی در این تحقیق از آنجا که محدودیت‌های بودجه و ظرفیت از محدودیت‌های سخت مدل محسوب می‌شوند با جریمه‌های  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  روبرو می‌شوند و در نهایت تابع لاگرانژ مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \left( r_i - \mu_i + \frac{Q_i}{\gamma} \right) + (1 - \alpha_i) h_i \bar{b}(r_i) \right) + (\alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) \pi_i'') \frac{D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n w_i (Q_i + r_i - \mu_i + (1 - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) - W \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n c_i (Q_i + r_i - \mu_i + (1 - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) - C \right) \quad (16)$$

از طرفی می‌دانیم که اثبات شده است که مقدار تابع هدف مسئله تابعی محدب است.<sup>[۲۵]</sup> همچنین محدودیت‌ها هم محدب‌اند، در نتیجه مجموع دو تابع محدب نیز خود محدب است. بنابراین حتماً یک نقطه‌ی کمینه‌ی منحصر به فرد موجود است. در صورتی که مقدار به دست آمده برای  $Q$  و  $r$  -- حاصل مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ نسبت به این دو متغیر -- در محدودیت مسئله  $\frac{\sum_{i=1}^n F(r_i)}{n} \geq \theta$  و نیز در روابط حاصل از مشتق تابع لاگرانژ نسبت به ضرایب جریمه  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  صادق باشد، جواب

جدول ۱. داده‌های مثال عددی ۱۰ محصولی.

$\theta$	$C$	$W$	$w_i$	$\sigma$	$\mu$	$D$	$P_{i2}$	$P_{i1}$	$H$	$A$	$S$	$c_i$	محصول
۰٫۷۵	۵۷۵۰۰۰	۱۹۰۰۰	۱۴	۲	۴۸	۶۹۵	۸	۱۳	۱۵	۵۱	۲۷۶٫۹	۲۱۳	۱
			۱۱	۲	۵۲	۶۶۴	۱۳	۸	۱۸	۲۷	۲۲۶٫۲	۱۷۴	۲
			۷	۲	۵۷	۷۵۰	۷	۱۰	۱۸	۵۷	۲۳۹٫۲	۱۸۴	۳
			۸	۲	۵۰	۷۷۹	۱۲	۱۴	۱۵	۲۲	۲۶۹٫۱	۲۰۷	۴
			۹	۲	۵۸	۶۰۰	۱۴	۱۱	۱۶	۵۲	۳۶۹٫۹	۲۸۳	۵
			۱۳	۴	۴۹	۸۲۴	۶	۷	۱۷	۳۱	۳۳۹٫۳	۲۶۱	۶
			۴	۴	۵۳	۷۳۰	۱۴	۹	۱۵	۲۲	۳۱۲	۲۴۰	۷
			۳	۵	۵۲	۸۰۷	۷	۱۳	۱۸	۲۱	۴۱۳٫۴	۳۱۸	۸
			۸	۴	۵۸	۶۷۰	۱۲	۱۳	۱۹	۳۵	۴۴۴٫۶	۳۴۲	۹
			۶	۵	۵۴	۵۸۶	۱۰	۶	۱۴	۶۰	۴۱۲٫۱	۳۱۷	۱۰

برای محاسبه‌ی مقدار بهینه‌ی سفارش اقتصادی و نقطه‌ی سفارش مجدد، از الگوریتم شناخته شده هذلی-ویتین استفاده شده است. گام‌های این الگوریتم عبارت‌اند از: [۲۶]

گام ۱. مقدار  $Q$  را از رابطه‌ی ۲۳ محاسبه، و سپس با داشتن این مقدار به محاسبه‌ی  $r$  می‌پردازیم (رابطه ۲۴).

گام ۲. در نظر می‌گیریم:  $r_1 = r$  و  $Q_1 = Q$ .

گام ۳. با داشتن مقدار  $r$  جدید، مقدار  $Q$  را از رابطه‌ی ۲۳ محاسبه می‌کنیم.

گام ۴. با داشتن مقدار  $Q$  جدید، مقدار  $r$  را از رابطه‌ی ۲۴ به دست می‌آوریم.

گام ۵. چنانچه  $|r_1 - r| \leq \varepsilon_r$  و  $|Q - Q_1| \leq \varepsilon_Q$ ، آنگاه الگوریتم هم‌گرا شده است؛ در غیر این صورت گام‌های دوم تا پنجم را تکرار می‌کنیم.  $\varepsilon_Q$  و  $\varepsilon_r$  به ترتیب میزان خطای مجاز برای مقدار نقطه‌ی سفارش مجدد و مقدار سفارش اقتصادی است. همچنین می‌توان در این گام تعداد تکرارها را تحت عنوان «معیار توقف» تعریف کرد.

در جدول ۱ اطلاعات مربوط به یک مسئله‌ی نمونه با ۱۰ محصول ارائه شده است. نتایج حاصل از حل این مسئله توسط روش لاگرانژ در جدول ۲ آورده شده است. نمودار همگرایی  $Q$  و  $r$  در لاگرانژ در شکل ۱ نمایش داده شده است. در این مثال نرخ پس‌افت تمامی محصولات یکسان فرض شده است.

جدول ۲. نتایج حل مدل مسئله‌ی ۱۰ محصولی با استفاده از لاگرانژ.

محصول	$Q(i)$	$r(i)$	هزینه‌ی کل
۱	۶۹٫۴۹	۵۱٫۶۳	۱۰۳۶۵٫۹۳
۲	۴۵٫۵۸	۵۵٫۶۷	
۳	۶۹٫۶۹	۶۰٫۳۸	
۴	۴۸٫۵	۵۴٫۰۶	
۵	۶۳٫۱۷	۶۱٫۷۵	
۶	۵۶٫۳۱	۵۶٫۸۳	
۷	۴۷٫۷۳	۶۱٫۱۷	
۸	۴۵٫۱۹	۶۲٫۵۶	
۹	۵۱٫۱۵	۶۶٫۰۱	
۱۰	۷۲٫۷۸	۶۳٫۹۳	

بهینه‌ی مسئله به دست آمده است. (در غیر این صورت جواب بهینه حاصل نمی‌شود و باید به سراغ روش‌های ابتکاری رفت.) بنابراین داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{D_i}{Q_i} A_i + \frac{h_i}{r} - \frac{D_i \bar{b}(r_i) (\alpha_i \pi_i + (\lambda - \alpha_i) \pi_i'')}{Q_i} + \lambda_1 w_i + \lambda_r c_i = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = h_i - (\lambda - \alpha_i) h_i \bar{F}(r_i) - \frac{D_i \bar{F}(r_i) (\alpha_i \pi_i + (\lambda - \alpha_i) \pi_i'')}{Q_i} + \lambda_1 w_i + \lambda_1 w_i (\lambda - \alpha_i) \bar{F}(r_i) + \lambda_r c_i - \lambda_r c_i (\lambda - \alpha_i) \bar{F}(r_i) = 0 \quad (18)$$

از آنجا که:

$$\bar{b}(r_i) = \int_{r_i}^{\infty} (x_i - r_i) f(x_i) dx_i = \int_{r_i}^{\infty} x_i f(x_i) dx_i - \int_{r_i}^{\infty} r_i f(x_i) dx_i = \int_{r_i}^{\infty} x_i f(x_i) dx_i - r_i \bar{F}(r_i) \quad (19)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{b}(r_i)}{\partial r_i} = -\bar{F}(r_i) \quad (20)$$

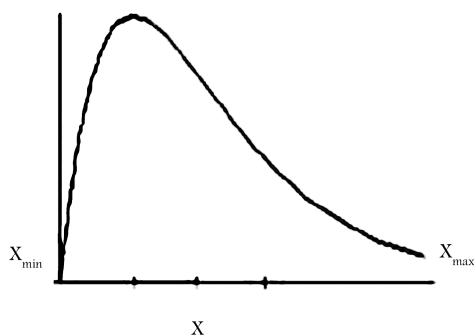
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^n (w_i (Q_i + r_i - \mu_i + (\lambda - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) - W) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_r} = \sum_{i=1}^n (c_i (Q_i + r_i - \mu_i + (\lambda - \alpha_i) \bar{b}(r_i)) - C) = 0 \quad (22)$$

از روابط ۱۷ و ۱۸ مقادیر  $Q_i$  و  $\bar{F}(r_i)$  به دست می‌آید:

$$Q_i = \sqrt{\frac{D_i A_i + (\alpha_i \pi_i + (\lambda - \alpha_i) \pi_i'') D_i \bar{b}(r_i)}{\lambda_1 w_i + \lambda_r c_i + \frac{h_i}{r}}} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

$$\bar{F}(r_i) = \frac{h_i + \lambda_1 w_i + \lambda_r c_i}{(\lambda - \alpha_i) (h_i + \lambda_1 w_i + \lambda_r c_i) + \frac{D_i (\alpha_i \pi_i + (\lambda - \alpha_i) \pi_i'')}{Q_i}} \quad (24)$$



شکل ۲. دامنه‌ی تغییرات مجاز X.

جواب نیازمند تعریف محدوده‌ی برای دامنه‌ی متغیر  $X$  هستیم. به همین منظور باید برای تولید  $X_{new}$  عددی تصادفی بین ۱ و -۱ تعریف کنیم. چنان که در شکل ۲ مشاهده می‌شود باید روندی در پیش بگیریم که با احتمال بیشتری جواب‌های نزدیک به  $X$  تولید شود و در واقع احتمال پراکندگی در اطراف  $X$  بیشتر باشد تا بتوانیم فضای همسایگی را به‌گونه‌ی در پیش بگیریم که با احتمال بیشتری جواب‌های نزدیک به  $X$  تولید شود؛ در واقع به‌نحوی باشد که احتمال پراکندگی در اطراف  $X$  بیشتر باشد تا بتوانیم فضای همسایگی را بهتر جست‌وجو کنیم.

برای محاسبه‌ی جواب همسایگی جدید رابطه‌ی ۲۷ پیشنهاد شده است:

$$\begin{aligned} X_{new} &= X + \delta(X_{max} - X); & \delta > 0 \\ X_{new} &= X; & \delta = 0 \\ X_{new} &= X + \delta(X - X_{min}); & \delta < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

مقدار  $\delta$  عددی تصادفی در محدوده -۱ و ۱ خواهد بود و براساس رابطه‌ی ۲۸ می‌توان آن را تعیین کرد.

$$\begin{aligned} z &\sim N(0, 1) \\ \delta &= \tanh(\lambda z) \end{aligned} \quad (28)$$

مقدار مناسب برای  $\lambda$  برابر  $0.1$  در نظر گرفته شده است، زیرا تغییرات تابع وقتی که مقدار  $\lambda$  از  $0.1$  کم‌تر شود به سمت تابع یکنواخت، و هرچه از  $0.1$  بیشتر شود به میانگین تابع چگالی تمایل بیشتری پیدا می‌کند. با توجه به ماهیت مسئله در این مقاله، چون متغیر تصمیم مقدار سفارش اقتصادی و نقطه‌ی سفارش مجدد است کافی است برای تعیین ساختار همسایگی رابطه‌ی ۲۸ را چنین تعدیل کنیم:

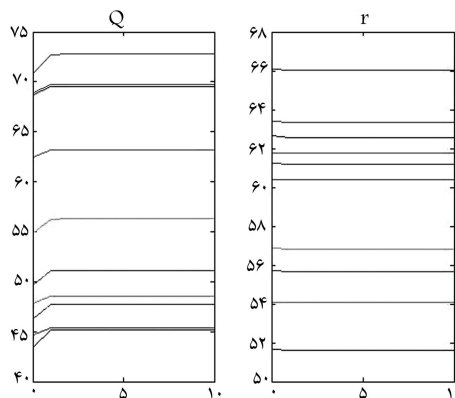
$$\begin{aligned} Q_{new} &= Q + \delta * (Q_{max} - Q); & \delta \geq 0 \\ Q_{new} &= Q + \delta * (Q - 0); & \delta < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

در این صورت، نقطه‌ی سفارش مجدد جدید عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} r_{new} &= r + \delta * (r_{max} - r); & \delta \geq 0 \\ r_{new} &= r + \delta * (r - 0); & \delta < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

### ۳.۲.۴. ارزیابی جواب

نحوه‌ی نمایش جواب باید به‌گونه‌ی باشد که تمامی محدودیت‌های اساسی مسئله را ارضاء کند. در این تحقیق با سه محدودیت فضای انبار، محدودیت بودجه و

شکل ۱. نمودار همگرایی  $Q$  و  $r$  در لاگرانژ.

### ۲.۴. الگوریتم شبیه‌سازی تبرید (SA)

مدل‌های موجودی چندمحصولی از نظر ریاضی مدل‌هایی پیچیده و مشکل‌اند، به‌ویژه زمانی که به این مدل‌ها یک یا چند محدودیت نیز اضافه شود پیچیدگی آن‌ها بیشتر می‌شود و معمولاً حل آن‌ها با روش‌های دقیق بسیار مشکل است. لذا در این تحقیق از یکی از الگوریتم‌های فراابتکاری، به نام الگوریتم شبیه‌سازی تبرید، برای حل مدل بهره گرفته شده است. از آنجا که این الگوریتم خیلی به نقطه‌ی اولیه وابسته نیست، قابلیت فرار از بهینه‌های موضعی را دارد، از لحاظ برنامه‌نویسی و اجرا ساده است، و ثابت شده که زمان محاسباتی آن دارای حد بالایی از نوع چندجمله‌ی معین برحسب ابعاد مسئله است. [۲۷]

### ۱.۲.۴. نحوه‌ی نمایش جواب

ساختار جواب باید به‌گونه‌ی باشد که استفاده از عملگرهای مؤثر و کارا -- که از قابلیت تولید جواب‌های حتی‌الامکان شدنی برای مسئله‌ی مورد نظر برخوردارند -- ممکن باشد. در این تحقیق با توجه به ماهیت مسئله‌ی مورد بررسی، برای نمایش جواب  $Q$  (مقدار سفارش اقتصادی برای هر محصول) از ساختار برداری استفاده شده است. بنابراین ساختار نمایش جواب به صورت بردار  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_K)$  است؛  $K$  نماینده تعداد محصولات در نظر گرفته شده در مسئله است.

از طرفی یکی دیگر از متغیرهای تصمیم مسئله، نقطه‌ی سفارش مجدد برای هر محصول ( $r$ ) است که مقدار آن وابسته به مقدار  $Q$  است. از آنجا که  $r < Q$  است، باید این قید را در تولید جواب اولیه لحاظ کنیم. به همین منظور باید متغیری بین صفر و ۱ تولید کرد که نماینده‌ی کسری از  $Q$  باشد؛ این بردار را  $\varepsilon$  می‌نامیم.

$$\varepsilon = \text{rand}(1, K) \quad (25)$$

بردار  $r$  از حاصل ضرب نظیر به نظیر درایه‌های بردار مذکور در بردار  $Q$  حاصل می‌شود که به صورت رابطه‌ی ۲۶ در کدینگ مسئله وارد شده است.

$$r = \varepsilon \times Q \quad (26)$$

گفتنی است ساختار جواب اولیه‌ی مقدار نقطه‌ی سفارش مجدد همانند مقدار سفارش اقتصادی از یک ساختار برداری  $1 \times K$  پیروی می‌کند.

### ۲.۲.۴. جست‌وجوی همسایگی

با توجه به ساختار طراحی شده در قسمت قبل، از روش جست‌وجوی تصادفی بهره می‌گیریم. با توجه به شکل ۲ نیازمند ارائه‌ی روشی برای جست‌وجوی تصادفی براساس جواب اولیه‌ی تولیدشده (مثلاً  $X$ ) هستیم. برای یافتن همسایگی این

### ۳.۴. نحوه‌ی تعیین پارامترهای مدل

برای تعیین پارامترهای مدل (ورودی‌های مدل) از دستور Randbetween در نرم‌افزار Excel استفاده شده است، بدین صورت که یک کمیته و یک بیشینه برای این پارامترها در نظر گرفته شده و با استفاده از دستور فوق اعدادی به صورت تصادفی بین این کمیته و بیشینه تولید و به عنوان ورودی‌های مدل استفاده شده است. یکی از موارد اساسی در مدل ما محاسبه‌ی مقدار متوسط کمبود در سال برای هر واحد محصول است که با استفاده از رابطه‌ی ۳۷ تعیین می‌شود:

$$b(r) = \int_r^{\infty} (x_0 - r)f(x_0)dx_0 \quad (37)$$

که  $f(x_0)$  از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$f(x_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_0 - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (38)$$

$-\infty < x_0 < +\infty$

با توجه به زمان‌بر بودن محاسبه‌ی انتگرال که با استفاده از تابع int در MATLAB صورت می‌گیرد، در روش‌های فرایتکاری که نیاز به اجرای برنامه در چندین تکرار به منظور همگرایی جواب مسئله است، نیازمند روشی ساده‌تر برای محاسبه‌ی انتگرال در MATLAB هستیم. در این تحقیق از روش بسیار رایج دوزنقه‌ی برای محاسبه‌ی این انتگرال استفاده می‌شود. چون سطح زیر منحنی از مقداری نزدیک به صفر تا بی‌نهایت متغیر است باید این فضا را به صورت غیرخطی تقسیم کنیم و این نیازمند تقسیم لگاریتمی است. به همین منظور سطح زیر منحنی در فاصله‌ی  $x_{\max}$  و  $x_{\min}$  به  $N$  قسمت تقسیم می‌شود. در این تحقیق  $x_{\min}$  برابر با عدد بسیار نزدیکی به صفر یعنی  $e^{-10}$  و  $x_{\max}$  برابر با عدد بزرگی مانند  $5000$  در نظر گرفته شده است؛ از سوی دیگر این فاصله به  $500$  قسمت تقسیم شده است. از آنجا که حد پایین انتگرال برابر با  $r$  است، به دلیل بی‌معنا بودن لگاریتم صفر در نتیجه در تابع ۳۹ از بیشینه  $x_{\min}$  و  $r$  استفاده شده است. این تابع تقسیم لگاریتمی عبارت است از:

$$x = \text{logspace} \left( \log_{10}(\max(r, X_{\min})), \log_{10}(X_{\max}), N \right) \quad (39)$$

حال برای محاسبه کل مساحت داریم:

$$y = (x - r)\text{normpdf}(f(x)) \quad (40)$$

از آنجا که فاصله‌ها بر محور افقی متقارن نیستند، از دستور diff(x) در MATLAB برای محاسبه‌ی عرض دوزنقه‌های ایجادشده بهره می‌گیریم.

$$\begin{aligned} dx &= \text{diff}(x) \\ S &= \frac{1}{N} (y_0 - y_1)(x_1 - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{N} (y_1 - y_2)(x_2 - x_1) + \dots \\ S &= \frac{1}{N} \left[ (y_0 + y_1)\text{diff}(x_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N} (y_1 + y_2)\text{diff}(x_2) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i)\text{diff}(x_i) \end{aligned} \quad (41)$$

کم‌ترین سطح خدمت مواجهیم. به همین منظور برای ارضای محدودیت‌های مذکور از مقادیر جریمه استفاده می‌کنیم و آن را در تابع هدف مسئله ( $TC''$ ) اعمال می‌کنیم. طریقه‌ی محاسبه‌ی انحراف از مقدار موجه برای محدودیت‌های مذکور چنین در نظر گرفته شده است:

$$\text{violation } \lambda = \frac{\sum_{i=1}^n (w_1(I_{\max} + (1 - \alpha_i)b(r_i)))}{W} - 1 \quad (31)$$

$$\text{violation } \gamma = \frac{\sum_{i=1}^n (c_1(I_{\max} + (1 - \alpha_i)b(r_i)))}{C} - 1 \quad (32)$$

$$\text{violation } \theta = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n F(r_i)}{\theta} \quad (33)$$

در نتیجه معیار ارزیابی هر جواب تولیدشده به صورت رابطه‌ی ۳۴ خواهد بود:

$$Z = TC''(\lambda + \beta_1 \text{Violation } \lambda + \beta_2 \text{Violation } \gamma + \beta_3 \text{Violation } \theta) \quad (34)$$

که در آن،  $\beta_1$  درجه‌ی اهمیت محدودیت اول،  $\beta_2$  درجه‌ی اهمیت محدودیت دوم،  $\beta_3$  درجه‌ی اهمیت محدودیت سوم می‌باشد که مقادیر  $\beta_1$ ،  $\beta_2$  و  $\beta_3$  توسط تصمیم‌گیرنده مقداردهی می‌شود. در این تحقیق این مقادیر به ترتیب برابر ۲، ۱ و ۱ در نظر گرفته شده‌اند.

### ۴.۲.۴. تولید جواب اولیه

جواب اولیه کاملاً به صورت تصادفی تولید می‌شود. بدین معنا که مقادیر پیوسته  $Q$  به صورت تصادفی بین صفر و بیشترین مقدار سفارش اقتصادی قرار می‌گیرد. بدین منظور باید یک مقدار بیشینه سفارش اقتصادی ( $Q_{\max}$ ) تعریف کنیم که این مقادیر تصادفی تولید شده  $Q$  از رابطه‌ی ۳۵ پیروی می‌کند.

$$\begin{aligned} Q &= \text{unifrnd}(\circ, Q_{\max}, [1, K]) \\ Q_{\max} &= \frac{\max(D)}{w} \end{aligned} \quad (35)$$

مقدار  $w$  نسبتی از بیشینه تقاضای تولید شده ( $D$ ) است.

### ۵.۲.۴. تعیین دمای اولیه

تعیین دمای اولیه فرایندی ابتکاری و تجربی است و شیوه‌های گوناگونی برای انجام این فرایند مطرح شده است. در این تحقیق دمای اولیه معادل عدد بزرگی که برابر با مقدار اولیه‌ی تابع هدف است در نظر گرفته شده است.

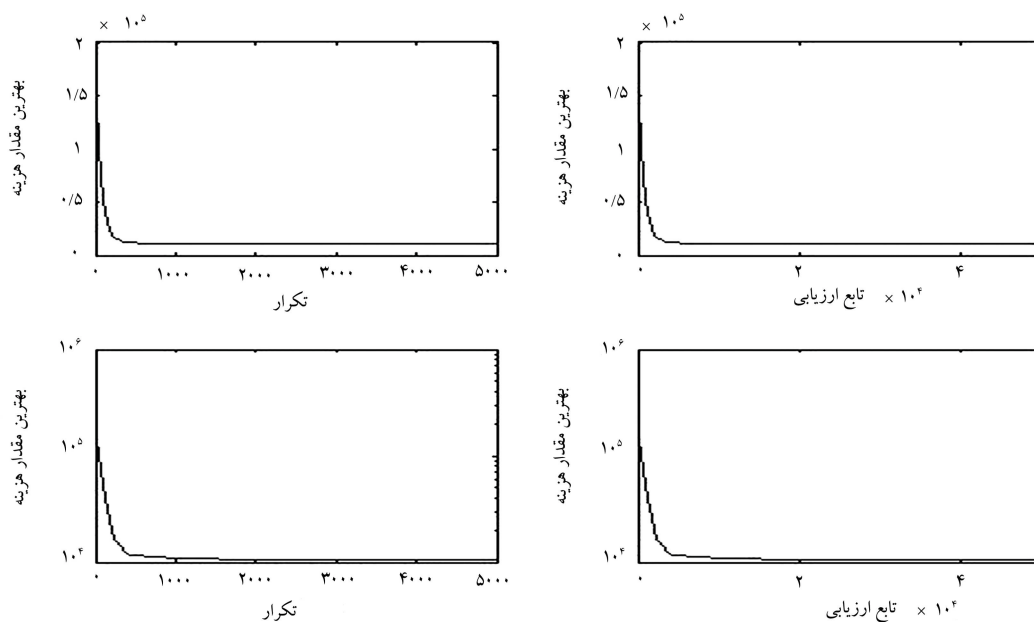
### ۶.۲.۴. قاعده‌ی به‌هنگام‌سازی دما

در این تحقیق برای به‌هنگام‌سازی دما یا اصطلاحاً زمان‌بندی سرمایه‌ی ۵ از قاعده‌ی کلاسیک SA (رابطه‌ی ۳۶) استفاده شده است. پارامتر  $\alpha$  مبین نرخ کاهش دماست که در بازه  $[0.99/0.995]$  تعیین می‌شود.

$$T_k = \alpha T_{k-1} \quad (36)$$

### ۷.۲.۴. معیار توقف

در این تحقیق به پایان رسیدن کل تکرارها به عنوان معیار توقف در نظر گرفته شده است.



شکل ۳. نمودار همگرایی الگوریتم SA.

و به تبع آن همسایگی‌های بیشتری را (مجموعه‌یی از همسایگی‌ها nmove) مورد بررسی قرار می‌دهد. این امر جست‌وجوی فضای حل را ساده‌تر می‌کند. با مراجعه به جدول استاندارد آرایه‌های متعامد در روش تاگوچی<sup>۶</sup>، یا نرم‌افزار Minitab<sup>۱۴</sup>، آرایه‌های متعامد  $L_4(3^2)$  به عنوان مناسب‌ترین طرح انتخاب می‌شود. آرایه‌های متعامد این طرح در جدول ۵ آمده است. روش محاسبه‌ی  $S/N$ <sup>۷</sup> و RPD<sup>۸</sup> عبارت است از:

$$dx = \text{diff}(x)S/N\text{Ratio} = -10 \log_{10} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_i^t \right) \quad (42)$$

قسمت  $S$ ، به مقادیر مطلوب و قسمت  $N$  به مقادیر غیر مطلوب اشاره می‌کند. همچنین  $K$  تعداد اجرای هر آزمایش و  $Y_i$  پاسخ فرایند است.

$$RPD = \frac{\text{Alg}_{\text{sol}} - \text{Best}_{\text{sol}}}{\text{Best}_{\text{sol}}} \quad (43)$$

در رابطه‌ی ۴۳،  $\text{Alg}_{\text{sol}}$  مقداری است که توسط الگوریتم، برای تابع هدف هر مسئله‌ی نمونه به دست آمده است، و  $\text{Best}_{\text{sol}}$  بهترین مقدار تابع هدف در بین مسائل نمونه‌یی است که حل شده است. مقادیر محاسبه‌شده برای نسبت  $S/N$  برای الگوریتم SA در جدول ۶ آورده شده است.

جدول ۴. معرفی پارامترهای استفاده‌شده الگوریتم SA در روش تاگوچی.

مقادیر سطوح	تعداد سطوح	پارامتر
$\alpha = 0.9$ $\alpha = 0.95$ $\alpha = 0.98$	۳	$\alpha$
$(\text{npop}, \text{nmove}) = (1, 1)$ $(\text{npop}, \text{nmove}) = (1, 10)$ $(\text{npop}, \text{nmove}) = (10, 10)$	۳	$(\text{npop}, \text{nmove})$

جدول ۳. نتایج حل مدل ۱۰ محصولی با الگوریتم SA.

محصول	$Q(i)$	$r(i)$	هزینه‌ی کل
۱	۹۱,۲۸	۵۱,۳۲	۱۰۹۲۹,۹۱
۲	۷۲,۲۲	۵۴,۸۲	
۳	۷۱,۵۷	۶۰,۵۱	
۴	۸۱,۵۵	۵۳,۶۷	
۵	۸۲,۰۶	۶۱,۳۳	
۶	۷۲,۴۸	۵۶,۰۵	
۷	۷۵,۸۶	۶۰,۰۵	
۸	۷۱,۵۴	۶۰,۸۲	
۹	۸۰,۲۶	۶۴,۹۶	
۱۰	۸۴,۱۶	۶۲,۵۸	

حال با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید به حل همان مثال حل‌شده برای روش لاگرانژ می‌پردازیم. نتایج حل در جدول ۳، و نمودار همگرایی آن در شکل ۳ آورده شده است.

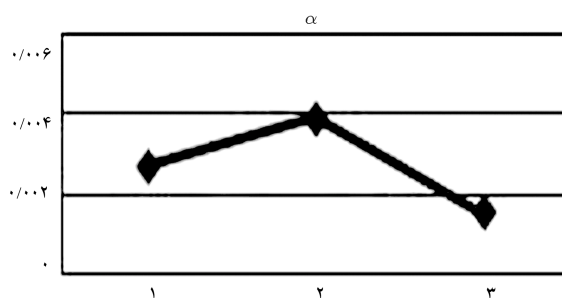
## ۵. تنظیم پارامترهای الگوریتم پیشنهادی

در الگوریتم پیشنهادی در این تحقیق دو پارامتر وجود دارد که باید به تنظیم آن‌ها پرداخت: پارامتر  $\alpha$  (معرف ضریب یا نرخ کاهش دما) و همچنین  $(\text{npop}, \text{nmove})$ . در جدول ۴ تعداد و مقدار سطوح در نظر گرفته شده برای هر کدام از پارامترها آورده شده است. گفتنی است که در این تحقیق از الگوریتم ژنتیک ایده گرفته شده و الگوریتم SA را با مجموعه‌یی از جواب‌های اولیه  $(\text{npop})$  شروع کرده



جدول ۷. مقادیر نسبت‌های RPD برای پارامترهای مختلف مسئله برای الگوریتم SA.

شماره آزمایش	$\alpha$	(npop, nmove)	مقادیر RPD
۱	۰٫۹	(۱, ۱)	۰٫۰۰۰۷۸
۲	۰٫۹	(۱, ۱۰)	۰٫۰۰۰۰۲۲
۳	۰٫۹	(۱۰, ۱۰)	۰٫۰۰۰۰۰۵
۴	۰٫۹۵	(۱, ۱)	۰٫۰۱۱۵
۵	۰٫۹۵	(۱, ۱۰)	۰٫۰۰۰۰۱۸
۶	۰٫۹۵	(۱۰, ۱۰)	۰٫۰۰۰۰۰۶
۷	۰٫۹۸	(۱, ۱)	۰٫۰۰۰۰۴۴
۸	۰٫۹۸	(۱, ۱۰)	۰٫۰۰۰۰۰۹
۹	۰٫۹۸	(۱۰, ۱۰)	۰٫۰۰۰۰۰۷۹



شکل ۵. مقادیر سطوح مختلف پارامتر  $\alpha$  در نسبت RPD.

از شاخص RPD بهره می‌گیریم. در جدول ۷ مقادیر مختلف نسبت RPD برای حالت‌های مختلف پارامترها آمده است.

حال با توجه به مقادیر محاسبه شده برای این نسبت، نمودار متوسط پارامتر  $\alpha$  در سطوح مختلف در شکل ۵ آمده است. هر قدر متوسط مقادیر RPD کم‌تر باشد، جواب‌های بهتری از الگوریتم کسب می‌شود. بنابراین سطح پارامتر  $\alpha$  برابر ۰٫۹۸ در نظر گرفته می‌شود.

## ۶. مقایسه‌ی نتایج الگوریتم لاگرانژ با الگوریتم شبیه

### سازی تیرید

در این قسمت هشت مسئله در اندازه‌های مختلف طراحی و حل شده که می‌توان آن‌ها را به سه دسته‌ی کوچک، متوسط و بزرگ تقسیم‌بندی کرد. در دسته‌ی اول مسائل ۳ و ۵ محصولی، در دسته‌ی دوم مسائل ۸، ۱۰ و ۱۲ محصولی، و در دسته‌ی سوم مسائل ۳۰، ۴۰ و ۵۰ محصولی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در جدول ۸ می‌توان هزینه‌ی کل، زمان حل و اختلاف هزینه‌ی این دو روش را مشاهده کرد. اساساً مسئله‌ی بزرگ به مسائلی اطلاق شده که زمان حل آن‌ها به روش لاگرانژ بیشتر از ۱ ساعت شده؛ در حالی که زمان حل مسائل کوچک و متوسط با روش لاگرانژ کم‌تر از ۱ ساعت است. چنان‌که ملاحظه می‌شود و انتظار می‌رود، روش لاگرانژ برای مسائل کوچک و متوسط جواب‌های بهینه در زمان‌های مناسب به دست می‌آورد، ولی برای مسائل بزرگ برای رسیدن به جواب بهینه نیازمند زمان طولانی هستیم. از طرف دیگر الگوریتم SA برای مسائل کوچک، متوسط و بزرگ جواب مناسب در

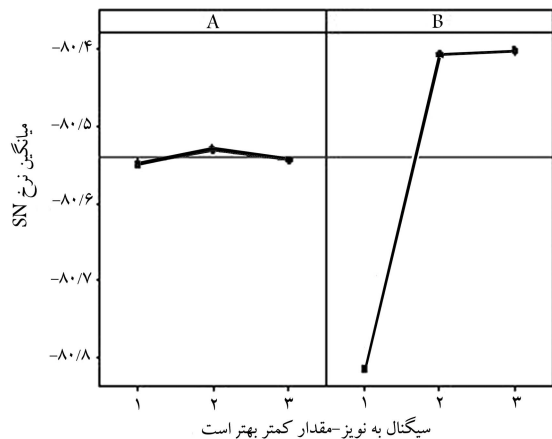
جدول ۵. آرایه‌های متعامد  $L_9(3^2)$ .

شماره آزمایش	پارامتر ۱	پارامتر ۲
۱	۱	۱
۲	۱	۲
۳	۱	۳
۴	۲	۱
۵	۲	۲
۶	۲	۳
۷	۳	۱
۸	۳	۲
۹	۳	۳

جدول ۶. مقادیر نسبت‌های S/N برای پارامترهای مختلف مسئله برای الگوریتم SA.

شماره آزمایش	$\alpha$	(npop, nmove)	مقادیر S/N
۱	۰٫۹	(۱, ۱)	-۸۰٫۸۳۶۵
۲	۰٫۹	(۱, ۱۰)	-۸۰٫۴۰۷۲
۳	۰٫۹	(۱۰, ۱۰)	-۸۰٫۴۰۱۷
۴	۰٫۹۵	(۱, ۱)	-۸۰٫۷۸۲
۵	۰٫۹۵	(۱, ۱۰)	-۸۰٫۴۰۶۷
۶	۰٫۹۵	(۱۰, ۱۰)	-۸۰٫۴۰۱۲
۷	۰٫۹۸	(۱, ۱)	-۸۰٫۸۲۰۲
۸	۰٫۹۸	(۱, ۱۰)	-۸۰٫۴۰۶۸
۹	۰٫۹۸	(۱۰, ۱۰)	-۸۰٫۴۰۱۵

اثرات طرح اصلی (میانگین داده‌ها) برای نرخ SN



شکل ۴. مقادیر سطوح مختلف پارامترها در نسبت S/N برای الگوریتم SA.

حال با توجه به مقادیر محاسبه شده برای این نسبت، نمودار متوسط پارامترها در سطوح مختلف در شکل ۴ آمده است. هر قدر نسبت S/N کم‌تر باشد، جواب‌های بهتری از الگوریتم کسب می‌شود. با توجه به شکل ۴ مقادیر بهینه‌ی پارامتر (npop, nmove) برابر (۱, ۱) خواهد بود. اما با توجه به نزدیکی مقادیر S/N برای پارامتر  $\alpha$

جدول ۸. مقایسه‌ی الگوریتم لاگرانژ با الگوریتم شبیه‌سازی تیرید.

تعداد محصول	شبیه‌سازی تیریدی (SA)		لاگرانژی		اختلاف هزینه (%)
	هزینه‌ی کل	زمان حل (ثانیه)	هزینه‌ی کل	زمان حل (ثانیه)	
۳	۳۳۸۴٫۱	۱۳٫۳۵	۳۳۱۴٫۶	۷۲٫۲۵	۲٫۰۵
۵	۶۱۴۶٫۵۶	۱۴٫۴	۶۰۸۳٫۹	۱۴۳٫۷۶	۱٫۰۱
۸	۹۴۵۱٫۰۷	۱۹٫۳	۹۲۸۶٫۳۲	۲۷۲٫۹۲	۱٫۷۴
۱۰	۱۰۹۲۹٫۹	۲۲٫۵۵	۱۰۳۶۵٫۹۳	۳۸۷٫۳۵	۵٫۱۵
۱۲	۱۴۵۲۷٫۴	۲۶٫۶	۱۳۷۶۱٫۸	۵۳۱٫۸	۵٫۲۷
۳۰	۳۸۰۶۲٫۲	۵۱٫۷۴	۳۴۹۳۶٫۳	> ۳۶۰۰	۸٫۲۱
۴۰	۴۹۵۲۷٫۳	۶۳٫۵۵	۴۴۸۶۴٫۴	> ۳۶۰۰	۹٫۴۱
۵۰	۶۲۲۰۰٫۵	۷۸٫۴۱	۵۶۴۰۸٫۲	> ۳۶۰۰	۹٫۳

## ۷. نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک مدل موجودی بازدید پیوسته‌ی چندمحصولی با محدودیت‌های فضای انبار، بودجه و کم‌ترین سطح خدمت در حالت کمبود پس‌افت جزئی، با هدف به دست آوردن مقدار سفارش و نقطه‌ی مجدد سفارش ارائه شد، به‌گونه‌ی که هزینه‌ی کل سالیانه کمینه شود. این مدل با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ و ترکیب آن با الگوریتم ابتکاری مشهور هدلی-ویتین برای ابعاد کوچک مسئله حل شد. از طرفی چون مدل‌های موجودی چندمحصولی، به‌ویژه زمانی که به این مدل‌ها یک یا چند محدودیت نیز اضافه می‌شود، از نظر ریاضی مدل‌هایی پیچیده و مشکل‌اند، حل آن‌ها خصوصاً برای مسائل با ابعاد بزرگ بسیار زمان‌بر و مشکل‌است. از این رو برای حل مدل ارائه‌شده در ابعاد بزرگ روش فراابتکاری شبیه‌سازی تیرید ارائه شد. برای برآورد پارامترهای الگوریتم پیشنهادی از روش تاگوچی بهره گرفته شد. در نهایت با بهره‌گیری از تعدادی مثال، دو روش ارائه‌شده مقایسه و نتایج حاصله در ابعاد مختلف مسئله از نظر زمان حل و هزینه‌ی کل به دست آمده به کار گرفته شد. اختلاف هزینه‌ی این دو روش بیان‌گر این حقیقت است که روش فراابتکاری ارائه‌شده (یعنی الگوریتم شبیه‌سازی تیرید) می‌تواند روش مناسبی برای حل مسئله در ابعاد بزرگ مسئله باشد. برای تحقیقات آتی از منظر مدل‌سازی پیشنهاد می‌شود که محدودیت‌های دیگر نظیر محدودیت تعداد دفعات سفارش به مدل ارائه‌شده اضافه شود یا مدت زمان تحویل را احتمالی در نظر بگیریم. از نقطه نظر حل نیز می‌توان برای مسائل با مقیاس بزرگ از روش‌های فراابتکاری دیگر استفاده کرد و کیفیت حل را با جواب‌های حاصل از روش‌های ارائه‌شده -- لاگرانژ و SA -- مقایسه کرد.

زمان مناسب ارائه می‌دهد، اگرچه این جواب‌ها متضمن بهینه‌بودن نیستند. از این رو برای مسائل کوچک و متوسط روش لاگرانژ بر روش SA برتری دارد. در حالی که برای حل مسائل در اندازه‌های بزرگ کاربرد روش شبیه‌سازی تیرید بهتر است چرا که جواب مناسب و نزدیک به بهینه برای مسائل واقعی بهتر از جواب‌های بهینه برای مسائل غیرواقعی است. همچنین در ستون آخر جدول ۸ مشاهده می‌شود که هرچند زمان حل الگوریتم SA بسیار کوتاه‌تر از روش لاگرانژ است، اختلاف هزینه در این دو روش کم‌تر از ۱۰ درصد است. لذا می‌توان گفت جواب‌های به دست آمده از الگوریتم شبیه‌سازی تیرید جواب‌هایی قابل قبول و مناسب‌اند.

## پانوشته‌ها

1. Hadley-Whitin
2. Lagrangian relaxation
3. Economic Order Quantity
4. Simulated Annealing
5. Colingschedule
6. Taguchi
7. Single-to-Noise
8. Relative Percentage Deviation

## منابع (References)

1. Silver, E., Pyke, D. and Peterson, R., *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, John Wiley & sons (1988).
2. Mohebbi, E., Morton, J. and Posner, M. "A lost-sales continuous-review system with emergency ordering", *Int. J. of Production Economics*, **58**, pp. 93-112 (1999).
3. Vairaktrarakis, G. "Robust multi-item newsboy models with a budget constraint", *Int. J. of Production Economics*, **66**, pp. 213-226 (2000).

4. Zhou, Y.W. "A multi-warehouse inventory model for items with time-varying demand and shortages", *Computers & Operations Research*, **30**, pp. 2115-2134 (2003).
5. Ghalebsaz, J.B., Shultes, B.C. and Haji, R. "A multi-product continuous-review inventory system with stochastic demand, backorders and a budget constraint", *European J. of Operational Research*, **158**, pp. 456-469 (2004).
6. San-Jose, L.A., Sicilia, J. and Laguna, J.G. "The lot size-reorder level inventory system with customers impatience functions", *Computers & Industrial Eng.*, **49**, pp. 349-362 (2005).
7. Ji, X. and Shao, Z. "Model and algorithm for bilevel newsboy problem with fuzzy demands and discounts", *Applied Mathematics and Computation*, **172**, pp. 163-174 (2006).
8. Feng, K. and Rao, U.S. "Echelon-stock (R-nT) control in two stages serial stochastic inventory system", *Operation Research Letters*, **35**, pp. 95-104 (2007).
9. Wang, T.Y. and Hu, J.M. "An inventory control system for products with optional components service level and budget constraints", *European J. of Operational Research*, **189**, pp. 41-58 (2008).
10. Pasandideh, S.H.R. and Niaki, S.T.A. "A genetic algorithm approach to optimize a multi-products EPQ model

- with discrete delivery orders and constrained space”, *Applied Mathematics and Computation*, **195** pp. 506-514 (2008).
11. Ting, P.S., Hou, K.L. and Chung, K.J. “An accurate and reliable solution algorithm for the (r&Q) inventory system with a fixed shortage cost”, *Mathematical and Computer Modeling*, **49**, pp. 128-135 (2009).
  12. Chang, C.T. and Lo, T.Y. “On the inventory model with continuous and discrete lead time, backorders and lost sales”, *Applied Mathematical Modeling*, **33**, pp. 2196-2206 (2009).
  13. Montgomery, D.C., Bazaraa, M.S. and Keswani, A.K. “Inventory models with a mixture of backorders and lost sales”, *Naval Res. Logist*, **20**, pp. 255-263 (1973).
  14. Wang, S.P. “An inventory replenishment policy for deteriorating items with shortages and partial backlogging”, *Computers & Operations Research*, **29**, pp. 2043-2051 (2002).
  15. Papachristos, S. and Skouri, K. “An inventory model with deteriorating items, quantity discount, pricing and time-dependent partial backlogging”, *Int. J. Production Economics*, **83**, pp. 247-256 (2003).
  16. Chu, P., Yang, K.L., Liang, S.K. and Niu, T. “Note on inventory model with a mixture of back orders and lost sales”, *European J. of Operational Research*, **159**, pp. 470-475 (2004).
  17. San, L.A., Sicilia, J. and Laguna, J.G. “An inventory system with partial backlogging modeled according to a linear function”, *Asia-Pacific J. of Operational Research*, **22**, pp. 189-209 (2005).
  18. San, L.A., Sicilia, J. and Laguna, J.G. “Analysis of an inventory system with exponential partial backordering”, *Int. J. Production Economics*, **100**, pp. 76-86 (2006).
  19. Dye, C.Y., Chang, H.J. and Teng, J.T. “A deteriorating inventory model with time-varying demand and shortage-dependent partial backlogging”, *European J. of Operational Research*, **172**, pp. 417-429 (2006).
  20. Dye, C.Y., Hsieh, T.P. and Ouyang, L.Y. “Determining optimal selling price and lot size with a varying rate of deterioration and exponential partial backlogging”, *European J. of Operational Research*, **181**, pp. 668-678 (2007).
  21. Chern, M.S., Yang, H.L., Teng, J.T. and Papachristos, S. “Partial backlogging inventory lot-size models for deteriorating items with fluctuating demand under inflation”, *European J. of Operational Research*, **191**, pp. 127-141 (2008).
  22. Taleizadeh, A.T., Aryanezhad, M.B. and Makoei, A., “Application simulated annealing in optimization a multi product inventory control model with warehouse space constraint and random replenishment”, *Int.J. of Industrial Engineering and Production Management*, **20**(2), pp.1-10 (In Persian) (2009).
  23. Johnson, L.A. and Montgomery, D.C., *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*, John Wiley, Chichester and New York (1974).
  24. Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A., *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley New York (1999).
  25. Mohebi, E. “A replenishment model for the supply- uncertainty problem”, *Int. J. of Production Economics*, **87**, pp. 25-37 (2004).
  26. Hadley, G. and Whitin, T.M. *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1963).
  27. Aarts, E. and Korst, J. *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*, John Wiley & Sons Press, New York (1989).

