مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۲)
دوره‌ی ۱ - ۲۹، شماره‌ی ۲، ص. ۴۱-۵۱

Original Article

بهینه‌سازی فواصل بازرسی (ثابت و غیرثابت) برای یک سیستم چندمؤلفه‌یی تعمیرپذیر با وابستگی خرابی

حمیدرضا گلمکانی* (دانشیار)
حمید موکدی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه تفرش

در این نوشتار مدلی برای بهینه‌سازی فواصل بازرسی (ثابت و غیرثابت) در یک سیستم چندمؤلفه‌یی با وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها ارائه شده است. خرابی‌های یکی از مؤلفه‌های سیستم از نوع سخت و خرابی‌های سایر مؤلفه‌ها از نوع نرم است. خرابی نرم موجب توقف سیستم نمی‌شود، ولی هزینه‌های عملیاتی سیستم را افزایش می‌دهد. خرابی سخت علاوه بر توقف کامل سیستم، موجب افزایش نرخ خرابی سایر مؤلفه‌های سیستم نیز می‌شود. هدف این مطالعه تعیین بهترین فواصل زمانی (ثابت و غیرثابت) بین بازرسی‌های متوالی است، به‌گونه‌یی که متوسط هزینه‌ی کل کمینه شود. ابتدا هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای یک برنامه‌ی بازرسی مشخص فرموله می‌شود و سپس، به‌منظور یافتن فواصل بهینه‌ی بازرسی ثابت این هزینه برای برنامه‌های بازرسی مختلف با یکدیگر مقایسه می‌شود. به‌منظور یافتن فواصل بهینه‌ی بازرسی غیر ثابت، الگوریتم جست‌وجوی A^* به‌کار گرفته شده است. برای تشریح بهتر مدل پیشنهادی، مثال عددی نیز آورده شده است.

واژگان کلیدی: نگهداری و تعمیرات، فواصل بازرسی بهینه، وابستگی خرابی، سیستم چندمؤلفه‌یی.

golmakni@mie.utoronto.ca
hamid.moakedi@gmail.com

۱. مقدمه

سیستم‌های چندمؤلفه‌یی سیستم‌هایی هستند که از چند جزء یا مؤلفه‌ی مختلف تشکیل شده‌اند. وابستگی بین مؤلفه‌ها موجب پیچیدگی شدیدِ مدل‌سازی و بهینه‌سازی فعالیت‌های نگهداری و تعمیرات این سیستم‌ها می‌شود.[۱] در نگهداری و تعمیرات سیستم‌های چندمؤلفه‌یی، هدف ارائه‌ی یک سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات برای سیستم است که با تعیین نوع وابستگی بین مؤلفه‌ها محقق می‌شود.[۲] وابستگی بین مؤلفه‌ها را می‌توان به سه نوع: وابستگی اقتصادی، ساختاری و وابستگی خرابی دسته‌بندی کرد.[۱و۲] منظور از وابستگی اقتصادی بین مؤلفه‌ها این است که نگهداری و تعمیرات همزمان مؤلفه‌ها به‌صورت گروهی در مقایسه با نگهداری و تعمیرات هر مؤلفه به‌صورت انفرادی، موجب کاهش هزینه‌ها می‌شود.[۳و۴]

وابستگی ساختاری در سیستم‌هایی وجود دارد که چندمؤلفه با هم به‌لحاظ ساختاری یک زیرسیستم را تشکیل می‌دهند، درنتیجه قبل از این که مؤلفه‌های معیوب در زیرسیستم بتوانند تعمیر یا تعویض شوند، لازم است کارکرد برخی از مؤلفه‌های سالم در زیرسیستم متوقف شود. وابستگی ساختاری در واقع وابستگی در انجام فعالیت‌های نگهداری و تعمیرات بین مؤلفه‌هاست.[۵]

در صورت وجود وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها، خرابی برخی از مؤلفه‌ها بر سایر مؤلفه‌ها تأثیر می‌گذارد. وابستگی خرابی نیز به‌نوبه خود می‌تواند انواع مختلفی داشته باشد. در یک سیستم دومؤلفه‌یی، سه نوع وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها در نظرگرفته شده است.[۶] در وابستگی خرابیِ نوعِ اول هر خرابی مؤلفه‌ی اول به‌احتمال p موجب خرابی مؤلفه‌ی دوم می‌شود ($\circ \leq p \leq ۱$) و به‌احتمال $۱ - p$ روی مؤلفه‌ی دوم تأثیری نمی‌گذارد. در وابستگی خرابی نوع دوم، هر خرابی مؤلفه‌ی اول باعث ایجاد شوک روی مؤلفه‌ی دوم می‌شود، یعنی بدون این که موجب خرابی مؤلفه‌ی دوم شود، نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد. با این حال، هر خرابی مؤلفه‌ی دوم نیز به‌احتمال q موجب خرابی مؤلفه‌ی اول می‌شود. در وابستگی خرابی نوع سوم خرابی هر مؤلفه باعث ایجاد شوک روی مؤلفه‌ی دیگر می‌شود.

مدل‌های نگهداری و تعمیرات متفاوتی برای سیستم‌های چندمؤلفه‌یی با وابستگی خرابی ارائه شده است. در هر یک از این مدل‌ها براساس نوع سیستم، نوع وابستگی بین مؤلفه‌ها، خرابی مؤلفه‌ها، تعمیر و عملیات اصلاحی مؤلفه‌ها، بازرسی و سنجش وضعیت مؤلفه‌ها، معیار بهینه‌سازی و سایر عوامل تأثیرگذار، یک سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات ارائه شده است.[۷-۱۴]

خرابی‌های مؤلفه‌های سیستم براساس نتایج خرابی روی سیستم به دو نوع تقسیم می‌شود: خرابی‌های سخت و خرابی‌های نرم. خرابی‌های سخت، خرابی‌هایی هستند که به‌محض وقوع خود را آشکار می‌کنند و باعث توقف سیستم می‌شوند. خرابی‌های نرم خرابی‌هایی هستند که به‌محض وقوع خود را آشکار نمی‌کنند و باعث توقف سیستم نمی‌شوند، اما کارایی سیستم را کاهش می‌دهند و برای سیستم ایجاد هزینه می‌کنند.[۱۵و۱۶]

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۱۲/۱۷، اصلاحیه ۱۳۹۰/۹/۹، پذیرش ۱۳۹۰/۹/۱۳.

سیستم‌های چندمؤلفه‌یی معمولاً در طول عمر خود در معرض بازرسی‌های برنامه‌ریزی شده قرار دارند. زمانی که مؤلفه‌های سیستم بازرسی می‌شوند، عیب‌های بالقوه (خرابی‌های نرم) شناسایی و تعمیر می‌شوند. بنابراین، تعیین فواصل بازرسی یکی از تصمیمات مهم در نگهداری و تعمیرات سیستم‌های چندمؤلفه‌یی است. انواع تعمیر در نگهداری و تعمیرات سیستم‌های یک یا چندمؤلفه‌یی عبارت‌اند از: تعمیر کامل، تعمیر جزئی، تعمیر ناقص، تعمیر بد و تعمیر خیلی بد. تعمیر کامل یک مؤلفه آن را به وضعیت مشابه نو برمی‌گرداند در حالی که تعمیر ناقص آن، وضعیتی بین وضعیت خراب و وضعیت شبه نو ایجاد می‌کند. تعمیر جزئی یک مؤلفه، نرخ خرابی آن را به وضعیت قبل از خرابی برمی‌گرداند. تعمیر بد یک مؤلفه، نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد ولی موجب خرابی آن نمی‌شود. تعمیر خیلی بد یک مؤلفه، علاوه بر افزایش نرخ خرابی، موجب خرابی آن نیز می‌شود.[۱۷-۲۱]

مسئله‌ی بهینه‌سازی فواصل بازرسی ثابت برای یک سیستم چندمؤلفه‌یی در یک افق زمانی محدود بیان و مدل‌سازی شده است.[۱۶] سیستم یادشده متشکل از چندین مؤلفه است که در معرض وقوع خرابی‌های سخت و نرم قرار دارند. اما بین خرابی‌های نرم و سخت وابستگی خرابی وجود ندارد. بنابراین، مؤلفه‌هایی که خرابی سخت دارند، هیچ تأثیری در تعیین فواصل بازرسی بهینه ندارند و از آنها صرف نظر شده است. در مدل مذکور، با معیار کمینه‌کردن متوسط مجموع هزینه‌های بازرسی، هزینه‌های تعمیر و هزینه‌های جریمه‌ی ناشی از تأخیر در شناسایی خرابی‌های نرم، فواصل بازرسی ثابت بهینه در یک افق زمانی محدود تعیین می‌شود.

در نوشتار حاضر، یک سیستم چندمؤلفه‌یی با وابستگی خرابی در نظر گرفته شده که از دو جهت با سیستم یادشده متفاوت است: ۱. خرابی یکی از مؤلفه‌های سیستم از نوع سخت است و وقوع آن نرخ خرابی سایر مؤلفه‌های سیستم را افزایش می‌دهد؛ ۲. فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی متوالی، یکبار ثابت و بار دیگر غیر ثابت در نظر گرفته شده است.

چنان که گفته شد، سیستم مورد مطالعه در این نوشتار یک سیستم چندمؤلفه با وابستگی خرابی بین مؤلفه‌هاست. به‌عبارت دیگر، خرابی‌های یکی از مؤلفه‌های سیستم از نوع سخت و خرابی‌های سایر مؤلفه‌های سیستم از نوع نرم است. وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها به این صورت است که هر خرابی نرم تأثیری روی خرابی سایر مؤلفه‌ها ندارد، اما خرابی سخت باعث ایجاد شوک روی سایر مؤلفه‌ها می‌شود؛ یعنی بدون این که موجب خرابی آنها شود، نرخ خرابی آنها را افزایش می‌دهد. خرابی‌های سخت به‌محض وقوع فوراً شناسایی، و مؤلفه‌ی معیوب تعمیر می‌شود. خرابی‌های نرم فقط در زمان بازرسی شناسایی می‌شوند و لذا به‌هنگام بازرسی، در صورت مشاهده‌ی خرابی مؤلفه‌ی معیوب تعمیر جزئی می‌شود.

در سیستم مورد مطالعه، خرابی‌های نرم طبق فرایند غیرهمگن پوآسن با نرخ خرابی افزایشی، و خرابی‌های سخت طبق فرایند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهد.[۲۲] هدف، بهینه‌سازی فواصل زمانی ثابت و غیرثابت بین بازرسی‌های متوالی با معیار کمینه‌کردن متوسط هزینه‌ی کل در یک افق زمانی محدود است.

در ادامه و در بخش ۲، فرضیات و مسئله‌ی مورد مطالعه به‌تفصیل مطرح می‌شود. در بخش ۳، روش پیشنهادی برای تعیین فواصل بازرسی ثابت و در بخش ۴، روش پیشنهادی برای تعیین فواصل بازرسی غیرثابت ارائه می‌شود؛ در هر دو قسمت یک مثال عددی برای تشریح بهتر مطالب آورده شده است. در بخش ۵، شرایط عملیاتی برای اجرای مدل و در بخش ۶ نتیجه‌گیری و زمینه‌های آتی تحقیق در این حوزه مطرح شده است.

۲. تعریف مسئله، فرضیات و نمادهای مورد نیاز

یک سیستم دو یا چندمؤلفه‌یی ($m \geq ۲$) با وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های سیستم براساس نوع خرابی به دو دسته تقسیم می‌شوند: دسته‌ی اول شامل مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام است که خرابی‌های آنها از نوع نرم بوده و طبق فرایند غیرهمگن پوآسن با نرخ خرابی افزایشی رخ می‌دهد. دسته‌ی دوم فقط شامل مؤلفه‌ی mام است که خرابی‌های آن از نوع سخت بوده و طبق فرایند همگن پواسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهد.

خرابی‌های نرم موجب توقف سیستم نمی‌شوند، اما کارایی سیستم را کاهش می‌دهند و برای سیستم ایجاد هزینه می‌کنند، بنابراین مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام به‌صورت گروهی در فواصل زمانی معینی به‌طور همزمان بازرسی می‌شود. خرابی‌های نرم این مؤلفه‌ها فقط در زمان‌های بازرسی شناسایی، و مؤلفه(ها)ی معیوب تعمیر جزئی می‌شود. بنابراین، بین وقوع خرابی نرم و شناسایی آن در زمان بازرسی، یک زمان تأخیر وجود دارد که هرچه این زمان طولانی‌تر شود، هزینه‌ی بیشتری را به سیستم تحمیل می‌کند. خرابی‌های سخت، به‌محض وقوع فوراً خود را آشکار می‌کنند و باعث توقف سیستم می‌شوند. بنابراین، مؤلفه‌ی mام بازرسی نمی‌شود و خرابی‌های سخت این مؤلفه به‌محض وقوع فوراً شناسایی شده و مؤلفه‌ی مذکور تعمیر می‌شود.

در این سیستم، وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها چنان است که خرابی نرم هر یک از مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام تأثیری بر خرابی سایر مؤلفه‌ها ندارد، اما هر خرابی سخت مؤلفه‌ی mام به ایجاد شوک بر سایر مؤلفه‌ها منجر می‌شود؛ یعنی بدون این که موجب خرابی آنها شود، نرخ خرابی‌شان را افزایش می‌دهد. بنابراین، از یک طرف گذشت زمان موجب افزایش نرخ خرابی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام می‌شود و از طرف دیگر وقوع خرابی سخت مؤلفه‌ی mام نیز به ایجاد شوک روی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام می‌انجامد و موجب افزایش دفعی نرخ خرابی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام می‌شود.

در این سیستم، بازرسی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام با تواتر زیاد، از یک سو موجب افزایش هزینه‌های بازرسی و افزایش هزینه‌ی تعمیر این مؤلفه‌هاست و از سوی دیگر، بازرسی با تواتر زیاد موجب شناسایی بهنگام‌تر وقوع خرابی‌های نرم مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام می‌شود و هزینه‌های ناشی از تأخیر در شناسایی خرابی‌های نرم کاهش خواهد یافت. درصورت انجام بازرسی با تواتر کم، اگرچه هزینه‌های بازرسی کاهش می‌یابد، خرابی‌های نرم مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام دیرتر تشخیص داده می‌شود و لذا هزینه‌های ناشی از عدم اطلاع از خرابی‌های نرم افزایش می‌یابد. انجام بازرسی با تواتر کم نیز موجب افزایش تأثیر خرابی سخت مؤلفه‌ی mام بر مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام و درنتیجه افزایش مضاعف هزینه‌های تأخیر در شناسایی خرابی‌های نرم می‌شود. بنابراین، هدف این است که فواصل زمانی ثابت و غیرثابت بین بازرسی‌های متوالی به‌گونه‌یی تعیین شود که میانگین هزینه‌ی کل در یک افق زمانی محدود کمینه شود. علاوه بر فرضیه‌های مذکور، فرض می‌شود:

۱. بازرسی‌ها کامل هستند؛ یعنی خرابی‌های نرم مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام بدون هیچ خطایی در زمان‌های بازرسی شناسایی می‌شوند.
۲. از زمان‌های بازرسی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام و همچنین زمان تعمیر مؤلفه‌ی معیوب صرف نظر می‌شود.
۳. خرابی نرم هر یک از مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام به‌خرابی سخت تبدیل نمی‌شود.
۴. سیستم از وضعیت نو شروع به کار می‌کند.

۵. هزینه‌ی ناشی از مؤلفه‌ی mام فقط شامل هزینه‌ی تعمیر آن است و با توجه به ثابت در نظر گرفتن نرخ خرابی این مؤلفه هزینه‌ی ناشی از آن در واحد زمان عددی ثابت خواهد بود؛ لذا در بهینه‌سازی فواصل بازرسی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام تأثیری نخواهد داشت.

۳. بهینه‌سازی فواصل بازرسی ثابت

در این قسمت، مدلی به‌منظور محاسبه‌ی هزینه‌ی کل سیستم برحسب تعداد بازرسی‌های انجام‌شده در طول افق برنامه‌ریزی (سیکل) ارائه خواهد شد. هزینه‌ی کل سیستم با فرض عدم وجود وابستگی خرابی و صرف‌نظر از خرابی‌های سخت مدل شده است.[۱۶] در اینجا با در نظر گرفتن خرابی‌های سخت، وابستگی خرابی به مدل پیشنهادی اضافه می‌شود. با محاسبه‌ی هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای تعداد بازرسی‌های مختلف در سیکل، فاصله‌ی بازرسی ثابت بهینه بین دو بازرسی متوالی تعیین می‌شود.

۱.۳. مدل‌سازی و تعیین برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل زمانی ثابت

نمادهای مورد نیاز عبارت‌اند از:

m: تعداد مؤلفه‌های سیستم.

$\lambda_i(x)$: متوسط نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام در زمان x، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$.

$\lambda_i^j(x)$: نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام در زمان x، به‌شرطی که تعداد خرابی مؤلفه‌ی mام از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا زمان x برابر با j باشد $i = ۱, ۲, ..., m - ۱, j = ۰, ۱, ۲, ...$.

λ_m: نرخ خرابی مؤلفه‌ی mام (تعداد خرابی در واحد زمان).

$N_m(x)$: متغیر تصادفی معرف تعداد خرابی مؤلفه‌ی mام از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا زمان x؛

p_i: درصد افزایش نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام به‌دلیل وقوع هر خرابیِ مؤلفه‌ی mام، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$.

T: طول افق برنامه‌ریزی (مثلاً یک سال) که ثابت و معلوم است.

n: متغیر تصمیم‌گیری معرف تعداد بازرسی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام در طول سیکل T.

τ: فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی متوالی در سیکل T؛ درصورت انجام n بازرسی از مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام، واضح است که $\tau = T/n$.

τ_L: کمترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام.

C_i^s: هزینه‌ی هر بازرسی مؤلفه‌ی iام، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$.

C_i^d: هزینه‌ی هر تعمیر جزئی مؤلفه‌ی iام، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$.

C_i^p: هزینه‌ی جریمه‌ی مؤلفه‌ی iام (هزینه‌ی تأخیر در شناسایی خرابی نرم) به‌ازای هر واحد زمانی سپری شده از وقوع خرابی مؤلفه‌ی iام تا شناسایی آن در زمان بازرسی، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$.

t_i: عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی iام در شروع سیکل T، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$ (توجه کنید که طبق فرضیه‌ی مسئله داریم: $t_i = t_m = ۰$).

$[(k - ۱)\tau, k\tau)$: بازه بازرسی kام مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام در سیکل T، $k = ۱, ۲, ..., n$.

$P_k^i(t_i)$: احتمال سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T، به‌شرطی که بدانیم عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی iام در شروع سیکل معادل t_i بوده و مؤلفه‌ی iام تا زمان t_i سالم بوده است، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$.

$e_k^i(t_i)$: متوسط زمان سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T، به‌شرطی که بدانیم عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی iام در شروع سیکل معادل t_i بوده و مؤلفه‌ی iام تا زمان t_i سالم بوده است، $i = ۱, ۲, ..., m - ۱$.

$E\left[C_S^{((k-۱)\tau, k\tau)}\right]$: متوسط هزینه‌ی کل سیستم در بازه بازرسی kام در سیکل T.

$E\left[C_S^T\right]$: متوسط هزینه‌ی کل سیستم در سیکل T.

چنان که اشاره شد، در یک سیستم دو یا چندمؤلفه‌یی ($m \geq ۲$) وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها به‌گونه‌یی است که خرابی نرم هرکدام از مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام تأثیری بر خرابی سایر مؤلفه‌ها ندارد، اما هر خرابی سخت مؤلفه‌ی mام باعث ایجاد شوک روی مؤلفه‌ی iام ($i = ۱, ۲, ..., m - ۱$) می‌شود، یعنی بدون این که به خرابی آن بینجامد، نرخ خرابی آن را به‌میزان p_i درصد افزایش می‌دهد. بنابراین، از آنجا که $N_m(x)$ معرف تعداد خرابی مؤلفه‌ی mام از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا زمان x است، نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام در زمان x، به‌شرطی که تعداد خرابی مؤلفه‌ی mام از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا زمان x برابر با j باشد، برابر است با:

$$\lambda_i^j(x) = \lambda_i\left(x \mid N_m(x) = j\right) = \left(۱ + \frac{p_i}{۱۰۰}\right)^j \lambda_i^\circ(x), \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m - ۱, \qquad j = ۰, ۱, ۲, \ldots \tag{۱}$$

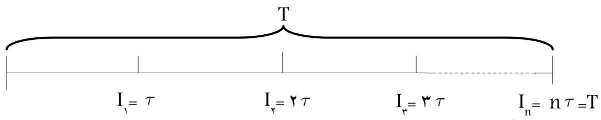
که در آن $\lambda_i^\circ(x)$ نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام در صورت عدم وقوع خرابیِ مؤلفه‌ی mام تا زمان x است. از آنجا که خرابی‌های مؤلفه‌ی mام طبق فرایند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهند، خواهیم داشت:

$$P\left(N_m(x) = j\right) = \frac{(\lambda_m \times x)^j\, e^{-\lambda_m \times x}}{j!}, \qquad j = ۰, ۱, ۲, \ldots \tag{۲}$$

برای محاسبه‌ی میانگین نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام در زمان x، $\lambda_i(x)$، ($i = ۱, ۲, ..., m - ۱$) باید توجه داشت که تعداد خرابی مؤلفه‌ی mام نقش تعیین کننده‌یی در نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام دارد. تعداد خرابی مؤلفه‌ی mام ($N_m(x)$) ممکن است برابر $j = ۰, ۱, ۲, ...$ باشد و لذا با توجه به روابط ۱ و ۲، متوسط نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام در زمان x برابر است با:

$$\begin{aligned} \lambda_i(x) &= \sum_{j=۰}^{\infty} \lambda_i\left(x \mid N_m(x) = j\right) \times P\left(N_m(x) = j\right) \\ &= \sum_{j=۰}^{\infty} \left(۱ + \frac{p_i}{۱۰۰}\right)^j \lambda_i^\circ(x) \times \frac{(\lambda_m x)^j\, e^{-\lambda_m x}}{j!} \\ &= \lambda_i^\circ(x)\, e^{\left(\frac{p_i}{۱۰۰}\right)\lambda_m x}, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m - ۱ \end{aligned} \tag{۳}$$

مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام به‌صورت گروهی در فواصل زمانی $\tau = T/n$، به‌طور همزمان بازرسی می‌شوند (شکل ۱) و خرابی‌های آنها فقط در زمان‌های بازرسی شناسایی و مؤلفه(ها)ی معیوب تعمیر جزئی می‌شود. فرض می‌شود که در شروع هر سیکل، بازرسی و تعمیر احتمالی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام صورت می‌گیرد. سیکل T یک فاصله‌ی زمانی ثابت و معلوم است و هدفش این است که فاصله‌ی زمانی ثابت بهینه بین بازرسی‌های متوالی مؤلفه‌های اول تا $m - ۱$ام به‌گونه‌یی تعیین شود تا متوسط هزینه‌ی کل در سیکل T کمینه شود.



شکل ۱. زمان‌های بازرسی‌های مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام در سیکل T.

زمانی که یکی از مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام خراب می‌شود، تا اولین بازرسی بعد از وقوع خرابی در وضعیت خراب باقی می‌ماند و در زمان بازرسی تعمیر جزئی می‌شود. بنابراین، در هر بازه بازرسی در صورت وقوع خرابیِ نرمِ هرکدام از مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام، هزینه‌یی متناسب با مدت زمان سپری شده از وقوع خرابی نرم آن مؤلفه تا شناسایی آن در زمان بازرسی در نظرگرفته می‌شود. بدین‌ترتیب، هزینه‌های ناشی از مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام در هریک از زمان‌های بازرسی ــ یعنی در زمان‌های $k\tau$، $k = 1, 2, ..., n$ ــ عبارت است از:[16]

۱. هزینه‌ی انجام بازرسیِ هرکدام از مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام؛

۲. هزینه‌ی تعمیر جزئیِ هرکدام از مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام، در صورتی که در بازه بازرسی kام خراب شده باشد؛

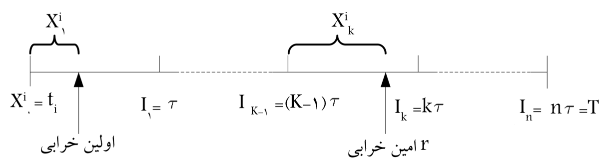
۳. هزینه‌ی عدم اطلاع از خرابیِ نرمِ هرکدام از مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام برای مدت زمان سپری شده از وقوع خرابی نرم آن تا شناسایی آن در زمان بازرسی.

C_i^s هزینه‌ی هر بازرسی مؤلفه‌ی iام، C_i^d هزینه‌ی هر تعمیر جزئیِ مؤلفه‌ی iام، و C_i^P هزینه‌ی جریمه‌ی مؤلفه‌ی iام به‌ازای هر واحد زمانی سپری شده از وقوع خرابی نرم مؤلفه‌ی iام تا شناسایی آن در زمان بازرسی است ($i = 1, 2, ..., m-1$). لذا متوسط هزینه‌ی کل سیستم در بازه بازرسی kام در سیکل T، $k = 1, 2, ..., n$، برابر است با:

$$\begin{aligned} E\left[C_S^{((k-1)\tau, k\tau]}\right] &= \sum_{i=1}^{m-1} C_i^s \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} C_i^d P\left(\text{component } i \text{ fails in } ((k-1)\tau, k\tau]\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} C_i^P E\left(\text{downtime of component } i \text{ in } ((k-1)\tau, k\tau]\right) \end{aligned} \tag{4}$$

اگر X_k^i متغیر تصادفیِ معرفِ مدت زمان سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T باشد، مطابق شکل ۲، X_k^i بیان‌گر فاصله‌ی زمانی بین $k-1$امین بازرسی مؤلفه‌ی iام و زمان خرابی مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام است.

چنانچه مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام خراب نشود، X_k^i برابر با τ خواهد بود. اگر X_0^i معرف عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی iام در شروع سیکل T باشد، $P_k^i(t_i)$، احتمال سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T ــ به‌شرط آن که بدانیم عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی iام در شروع سیکل t_i بوده و مؤلفه‌ی iام تا زمان t_i سالم بوده



شکل ۲. عمر اولیه و زمان‌های خرابی مؤلفه‌ی iام در سیکل T.

است ــ چنین نمایش داده می‌شود:

$$P_k^i(t_i) = P\left(X_k^i = \tau \,\middle|\, X_0^i = t_i\right), \qquad i = 1, 2, ..., m-1 \tag{5}$$

در ادامه، یک معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $P_k^i(t_i)$ با استفاده از زمان اولین خرابی مؤلفه‌ی iام، X_1^i، به دست خواهیم آورد. با توجه به این که متوسط نرخ خرابی مؤلفه‌ی iام مطابق رابطه‌ی ۳ قابل محاسبه است، تابع توزیع تجمعی X_1^i برابر است با:

$$\begin{aligned} F_1^i(x|t_i) &= P\left(X_1^i \le x \,\middle|\, X_0^i = t_i\right) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\int_{t_i}^{t_i+x} \lambda_i(s)ds} & , 0 \le x < \tau \\ 1 & , x \ge \tau \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

و تابع چگالی احتمال X_1^i در قسمت پیوسته‌ی آن برابر است با:

$$f_1^i(x|t_i) = \frac{\partial}{\partial x} F_1^i(x|t_i) = \lambda_i(t_i + x)\, e^{-\int_{t_i}^{t_i+x} \lambda_i(s)ds}, \quad 0 \le x < \tau \tag{7}$$

باید توجه داشت که:

$$\begin{aligned} P_1^i(t_i) &= P\left(X_1^i = \tau \,\middle|\, X_0^i = t_i\right) = F_1^i(\tau|t_i) - F_1^i(\tau - 0|t_i) \\ &= e^{-\int_{t_i}^{t_i+\tau} \lambda_i(s)ds} \end{aligned} \tag{8}$$

و از آنجا که مؤلفه‌ی iام پس از شناسایی خرابی در زمان‌های بازرسی تعمیر جزئی می‌شود، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_k^i(t_i) &= P\left(X_k^i = \tau \,\middle|\, X_0^i = t_i\right) \\ &= E\left[P\left(X_k^i = \tau \,\middle|\, X_0^i = t_i, X_1^i\right)\right] \\ &= \int_0^\tau P\left(X_k^i = \tau \,\middle|\, X_0^i = t_i, X_1^i = x\right) f_1^i(x|t_i)\, dx \\ &\quad + P\left(X_k^i = \tau \,\middle|\, X_0^i = t_i, X_1^i = \tau\right) P_1^i(t_i) \\ &= \int_0^\tau P_{k-1}^i(t_i + x) f_1^i(x|t_i)\, dx + P_{k-1}^i(t_i + \tau)\, P_1^i(t_i) \\ &= \int_0^\tau P_{k-1}^i(t_i + x)\, dF_1^i(x|t_i) \end{aligned} \tag{9}$$

بنابراین، معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $P_k^i(t_i)$ برابر است با:

$$P_k^i(t_i) = \begin{cases} e^{-\int_{t_i}^{t_i+\tau} \lambda_i(s)ds} & , k = 1 \\ \int_0^\tau P_{k-1}^i(t_i + x)\, dF_1^i(x|t_i) & , k = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{10}$$

باید توجه داشت که طبق رابطه‌ی ۱۰، به‌ازای $k = 2$ خواهیم داشت:

$$P_2^i(t_i) = \underbrace{\int_0^\tau P_1^i(t_i + x) f_1^i(x|t_i)\, dx}_{1} + \underbrace{P_1^i(t_i + \tau)\, P_1^i(t_i)}_{2} \tag{11}$$

مؤلفه‌ی iام یا به‌احتمال $f_1^i(x|t_i)$ تا زمان x قبل از پایان بازه بازرسی اول سالم باقی می‌ماند، یا به‌احتمال $P_1^i(t_i)$ تا پایان بازه بازرسی اول سالم باقی می‌ماند. در حالت اول، چون خرابی مؤلفه‌ی iام در پایان بازه بازرسی اول شناسایی شده و این مؤلفه تعمیر جزئی می‌شود، عمر آن معادل $t_i + x$ شده و درنتیجه احتمال سالم ماندن آن در بازه بازرسی دوم معادل $P_1^i(t_i + x)$ خواهد شد (بخش ۱ رابطه‌ی ۱۱). در حالت دوم، عمر آن معادل با $t_i + \tau$ شده و درنتیجه احتمال سالم ماندن آن در بازه بازرسی دوم معادل با $P_1^i(t_i + \tau)$ خواهد شد (بخش ۲ رابطه‌ی ۱۱). بنابراین، متوسط احتمال سالم‌ماندن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی دوم برابر خواهد شد با مجموع بخش‌های اول و دوم رابطه‌ی ۱۱. پس از محاسبه‌ی $P_2^i(t_i)$ آنگاه $P_3^i(t_i)$ نیز طبق رابطه‌ی ۱۲ به دست می‌آید:

$$P_3^i(t_i) = \int_0^{\tau} P_2^i(t_i + x) f_1^i\left(x|t_i\right) dx + P_2^i\left(t_i + \tau\right) P_1^i\left(t_i\right) \tag{12}$$

این روش برای مقادیر بزرگ‌تر k، به‌همین ترتیب تکرار می‌شود. اگر متغیر تصادفی X_k^i معرف مدت زمان سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T، و X_0^i معرف عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی iام در شروع سیکل T باشد، آنگاه $e_k^i(t_i)$ متوسط زمان سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T است (رابطه ۱۳)، به‌شرطی که بدانیم عمر اولیه‌ی مؤلفه‌ی iام در شروع سیکل برابر t_i، و مؤلفه‌ی iام تا زمان t_i سالم بوده است:

$$e_k^i\left(t_i\right) = E\left[X_k^i \middle| X_0^i = t_i\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{13}$$

در ادامه، یک معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $e_k^i(t_i)$ با استفاده از زمان اولین خرابی مؤلفه‌ی iام (X_1^i)، به دست خواهیم آورد. واضح است که $e_k^i(t_i)$ برای $k = 1$ برابر است با:

$$\begin{aligned} e_1^i\left(t_i\right) &= E\left[X_1^i \middle| X_0^i = t_i\right] = \int_0^{\tau} x f_1^i\left(x|t_i\right) dx + \tau P_1^i\left(t_i\right) \\ &= \int_0^{\tau} R_1^i\left(x|t\right) dx = \int_0^{\tau} e^{-\int_{t_i}^{t_i+x} \lambda_i(s) ds} dx \end{aligned} \tag{14}$$

برای $k \geq 2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} e_k^i\left(t_i\right) &= E\left[E\left[X_k^i \middle| X_0^i = t_i\,,\, X_1^i\right]\right] \\ &= \int_0^{\tau} E\left[X_k^i \middle| X_0^i = t_i\,,\, X_1^i = x\right] f_1^i\left(x|\, t_i\right) dx \\ &\quad + E\left[X_k^i \middle| X_0^i = t_i\,,\, X_1^i = \tau\right] P_1^i\left(t_i\right) \\ &= \int_0^{\tau} e_{k-1}^i(t_i + x) f_1^i\left(x|\, t_i\right) dx + e_{k-1}^i\left(t_i + \tau\right) P_1^i\left(t_i\right) \\ &= \int_0^{\tau} e_{k-1}^i(t_i + x) dF_1^i\left(x|\, t_i\right) \end{aligned} \tag{15}$$

بنابراین معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $e_k^i(t_i)$، برابر است با:

$$e_k^i(t_i) = \begin{cases} \int_0^{\tau} e^{-\int_{t_i}^{t_i+x} \lambda_i(s) ds} & , k = 1 \\ \int_0^{\tau} e_{k-1}^i(t_i + x) dF_1^i\left(x|\, t_i\right) & , k = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{16}$$

بر این اساس، به‌ازای $k = 2$ خواهیم داشت:

$$e_2^i\left(t_i\right) = \underbrace{\int_0^{\tau} e_1^i(t_i + x) f_1^i\left(x|t_i\right) dx}_{1} + \underbrace{e_1^i\left(t_i + \tau\right) P_1^i\left(t_i\right)}_{2} \tag{17}$$

مؤلفه‌ی iام یا به‌احتمال $f_1^i(x|t_i)$ تا زمان x قبل از پایان بازه بازرسی اول سالم باقی می‌ماند و یا به‌احتمال $P_1^i(t_i)$ تا پایان بازه بازرسی اول سالم باقی می‌ماند. در حالت اول، چون خرابی مؤلفه‌ی iام در پایان بازه بازرسی اول شناسایی شده و این مؤلفه تعمیر جزئی می‌شود، عمر آن معادل با $t_i + x$ شده و درنتیجه متوسط مدت زمان سالم‌ماندن آن در بازه بازرسی دوم معادل با $e_1^i(t_i + x)$ خواهد شد (بخش ۱ رابطه‌ی ۱۷). در حالت دوم، عمر آن معادل با $t_i + \tau$ شده و درنتیجه متوسط مدت زمان سالم ماندن آن در بازه بازرسی دوم معادل با $e_1^i(\tau_i + \tau)$ خواهد شد (بخش ۲ رابطه‌ی ۱۷). بنابراین، متوسط مدت زمان سالم ماندن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی دوم برابر خواهد شد با مجموع بخش‌های اول و دوم رابطه‌ی ۱۷. هنگامی که $e_2^i(t_i)$ محاسبه شد، $e_3^i(t_i)$ نیز طبق رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید:

$$e_3^i\left(t_i\right) = \int_0^{\tau} e_2^i(t_i + x) f_1^i\left(x|t_i\right) dx + e_2^i\left(t_i + \tau\right) P_1^i\left(t_i\right) \tag{18}$$

این روش برای مقادیر بزرگ‌تر k، به‌همین ترتیب تکرار می‌شود. بنابراین، متوسط هزینه‌ی کل سیستم در سیکل T، برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} E\left[C_S^T\right] &= \sum_{k=1}^{n} E\left[C_S^{((k-1)\tau, k\tau]}\right] = n \sum_{i=1}^{m-1} C_i^s \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} C_i^d \left(1 - P_k^i\left(t_i\right)\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} C_i^p \left(\tau - e_k^i\left(t_i\right)\right) \end{aligned} \tag{19}$$

از آنجا که هدف، یافتن تعداد بازرسی بهینه (n^*) است به‌گونه‌یی که متوسط هزینه‌ی کل سیستم در سیکل T کمینه شود، محاسبه‌ی $E[C_S^T]$ به‌ازای مقادیر مختلف n ضرورت می‌یابد تا از این طریق کمینه‌ی آن تعیین و سپس n^* مشخص شود. باید توجه داشت که τ_L کوچک‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام است و لذا n^* توسط یک حد بالا (n_U) محدود می‌شود:

$$n^* \leq T/\tau_L = n_U \tag{20}$$

بدیهی است با مشخص شدن n^* فاصله‌ی زمانی ثابت بهینه بین بازرسی‌های متوالی مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام (τ^*) طبق رابطه ۲۱ تعیین خواهد شد:

$$\tau^* = T/n^* \tag{21}$$

برای روشن‌تر شدن روش پیشنهادی، در قسمت بعدی یک مثال عددی آورده شده است.

۲.۳. مثال عددی

یک سیستم تأمین توان مصرفی در پست توزیع برق را در نظر بگیرید که از دو مؤلفه‌ی بانک خازنی (مؤلفه‌ی اول) و ترانس (مؤلفه‌ی دوم) تشکیل شده است.

خرابی‌های بانک خازنی از نوع نرم و خرابی‌های ترانس از نوع سخت است. بانک خازنی باید در فواصل زمانی معینی بازرسی شود. خرابی‌های بانک خازنی فقط در زمان‌های بازرسی شناسایی شده و تعمیر جزئی می‌شود. ترانس (مؤلفه‌ی دوم) بازرسی نمی‌شود و خرابی‌های آن به‌محض وقوع شناسایی، و فوراً تعمیر می‌شود. همچنین هر خرابی ترانس موجب ایجاد شوک روی بانک خازنی می‌شود به‌طوری که به‌محض وقوع هر خرابی ترانس، نرخ خرابی بانک خازنی (p) معادل ۱۰ درصد افزایش می‌یابد. فرض کنید تابع نرخ خرابی بانک خازنی درصورت عدم خرابی ترانس (نرخ خرابی بانک خازنی در زمان x به‌شرطی که ترانس تا زمان x سالم باشد) معادل $\lambda_1^{0}(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}$ باشد،[۲۳] که در آن مقادیر β، η معادل $\beta = 2/1$، $\eta = 12$ برآورد شده است. نرخ خرابی ترانس نیز ثابت و به‌صورت $\lambda_2 = k$، $k = \frac{1}{6}$ تخمین زده شده است. هزینه‌ی هر بازرسی بانک خازنی (C_1^s) برابر ۴۰۰ دلار، هزینه‌ی هر تعمیر جزئی (C_1^d) آن برابر ۱۰۰۰ دلار و هزینه‌ی جریمه‌ی بانک خازنی (C_1^p)، هزینه‌ی تأخیر در شناسایی خرابی نرم) به‌ازای هر ماه سپری شده از وقوع خرابی این مؤلفه تا شناسایی آن معادل ۲۰۰۰ دلار است. هدف این است که در یک افق زمانی محدود، فاصله‌ی زمانی ثابت بهینه بین بازرسی‌های متوالی بانک خازنی را تعیین کنیم.

فرض کنید سیستم در زمان شروع، در وضعیت نو است و بعد از دوازده ماه تعمیرات اساسی انجام خواهد شد، یعنی $T = 12$. کم‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی بانک خازنی (τ_L) برابر یک ماه فرض می‌شود، بنابراین $n_U = T/\tau_L = 12$.

ابتدا، با توجه به رابطه‌ی ۳، متوسط نرخ خرابی بانک خازنی محاسبه می‌شود:

$$\lambda_1(x) = \lambda_1^{0}(x) e^{\left(\frac{p}{100}\right)\lambda_2 x} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{p}{100}\right)\lambda_2 x} = \frac{2/1}{12}\left(\frac{x}{12}\right)^{1/1} e^{\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{6}\right)x} \qquad (22)$$

سپس مقادیر $E[C_S^T]$ به‌ازای nهای کوچک‌تر یا مساوی با ۱۲ محاسبه می‌شود تا کمینه‌ی آن تعیین و درنتیجه n^* مشخص شود. بدیهی است که $\tau^* = T/n^*$. برای مثال، از رابطه‌ی ۱۵ و به‌ازای $n = 4$، متوسط هزینه‌ی کل سیستم در سیکل T برابر است با:

$$E\left[C_S^T\right] = \sum_{k=1}^{4} E\left[C_S^{(3(k-1),3k]}\right] = 4(400) + \sum_{k=1}^{4} 1000(1 - P_k(0)) + \sum_{k=1}^{4} 2000\,(3 - e_k(0)) \qquad (23)$$

که در آن $P_k(0)$ و $e_k(0)$ برای $k = 1, 2, 3, 4$، از روابط ۱۰ و ۱۶ به‌طور بازگشتی و با استفاده از انتگرال‌گیری عددی به دست می‌آیند (جدول ۱). با جای‌گذاری مقادیر مذکور در رابطه ۲۳، مقدار $E[C_S^T]$ با استراتژی چهار بازرسی در سال ($n = 4$) معادل ۵۱۱۲ دلار خواهد بود.

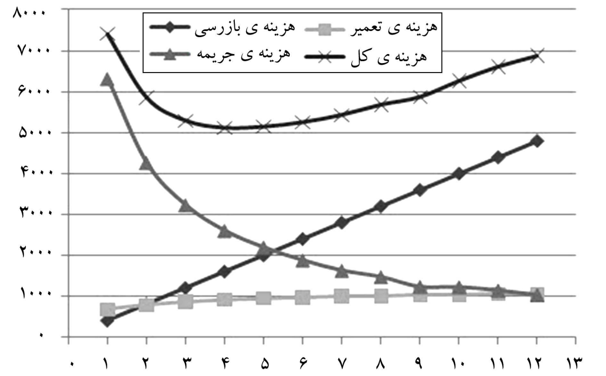
در جدول ۲ مقادیر هزینه‌ی بازرسی، متوسط هزینه‌ی تعمیر، متوسط هزینه‌ی جریمه‌ی عدم شناسایی خرابی و نهایتاً متوسط هزینه کل، $E[C_S^T]$، به‌ازای تعداد بازرسی‌های مختلف محاسبه شده است. در شکل ۳ نیز نمودار هزینه‌ی بازرسی، متوسط هزینه‌ی تعمیر، متوسط هزینه‌ی جریمه و نهایتاً متوسط هزینه‌ی کل برحسب مقادیر مختلف تعداد بازرسی نشان داده شده است. چنان که دیده می‌شود، بهترین تعداد بازرسی ۴ بازرسی در سال است و لذا فاصله‌ی زمانی ثابت بهینه بین

جدول ۱. مقادیر $P_k(0)$ و $e_k(0)$ به‌ازای $k = 1, 2, 3, 4$.

k	$P_k(0)$	$e_k(0)$
۱	۰/۹۴۵۳	۲/۹۴۶۹
۲	۰/۸۲۶۳	۲/۷۶۵۶
۳	۰/۷۱۲۵	۲/۵۸۰۷
۴	۰/۶۰۹۹	۲/۴۰۳۷

جدول ۲. مقادیر هزینه‌ها به‌ازای مقادیر مختلف تعداد بازرسی.

تعداد بازرسی	هزینه بازرسی $	متوسط هزینه تعمیر $	متوسط هزینه جریمه $	متوسط هزینه کل $
۱	۴۰۰	۶۸۲	۶۳۲۲	۷۴۰۴
۲	۸۰۰	۷۸۸	۴۲۶۷	۵۸۵۵
۳	۱۲۰۰	۸۵۹	۳۲۳۲	۵۲۹۰
۴	۱۶۰۰	۹۰۶	۲۶۰۶	۵۱۱۲
۵	۲۰۰۰	۹۴۲	۲۱۹۸	۵۱۴۰
۶	۲۴۰۰	۹۶۶	۱۸۸۴	۵۲۵۰
۷	۲۸۰۰	۹۹۷	۱۶۳۳	۵۴۳۰
۸	۳۲۰۰	۱۰۰۲	۱۴۷۷	۵۶۷۹
۹	۳۶۰۰	۱۰۳۵	۱۲۳۵	۵۸۷۰
۱۰	۴۰۰۰	۱۰۳۱	۱۲۳۰	۶۲۶۱
۱۱	۴۴۰۰	۱۰۶۳	۱۱۴۸	۶۶۱۱
۱۲	۴۸۰۰	۱۰۴۳	۱۰۳۳	۶۸۷۶



شکل ۳. نمودار هزینه‌ها به‌ازای مقادیر مختلف تعداد بازرسی.

بازرسی‌های متوالی بانک خازنی برابر با ۳ ماه است. با این استراتژی بازرسی، متوسط هزینه‌کل که برابر ۵۱۱۲ دلار است، درکم‌ترین مقدار خود خواهد بود.

۴. بهینه‌سازی فواصل بازرسی غیرثابت

در این قسمت، ابتدا هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای یک برنامه‌ی بازرسی معین با فواصل بازرسی غیرثابت فرموله می‌شود. با محاسبه‌ی هزینه‌ی کل سیستم برای برنامه‌های بازرسی مختلف، برنامه‌ی بازرسی بهینه به دست می‌آید. بدیهی است برنامه‌ی بازرسی بهینه، برنامه‌یی است که هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای آن کمینه شود. به‌این منظور یک الگوریتم جست‌وجوی A^* ــ با یک تابع هزینه‌ی ابتکاری برای محاسبه‌ی حدِ پایینِ هزینه‌ی کل ــ به‌منظور جست‌وجو بین برنامه‌های بازرسی به‌کار گرفته می‌شود.

۱.۴. متوسط هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای یک برنامه‌ی بازرسی معین با فواصل بازرسی غیرثابت

در این قسمت، مدلی به‌منظور محاسبه‌ی هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای یک برنامه‌ی بازرسی معین با فواصل بازرسی غیرثابت ارائه خواهد شد. روند ارائه شده برای مدل‌کردن متوسط هزینه‌ی کل سیستم، همان روند ارائه شده در بخش ۳ است. با این حال در بخش ۳، هزینه‌ی کل سیستم با فرض ثابت بودن فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی متوالی سیستم مدل شده است، اما در این قسمت هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای یک برنامه‌ی بازرسی معین با فواصل بازرسی غیرثابت مدل می‌شود.

در طول افق برنامه‌ریزی T (مثلاً یک سال) که ثابت و معلوم است، مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام به‌صورت گروهی طبق برنامه‌ی بازرسی معین $[I_1 I_2 ... I_{n-1} I_n]$ در زمان‌های I_1 تا I_n بازرسی می‌شود، جایی که $I_n > ... > I_2 > I_1 > 0$ و $I_n = T$. بنابراین، طول بازه بازرسی kام در سیکل T برابر است با $\tau_k = I_k - I_{k-1}$، جایی که $k = 1, 2, ..., n$ و $I_0 = 0$. اگر کم‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی با τ_L نشان داده شود، داریم $\tau_k \geq \tau_L$ (شکل ۴).

اگر در شرایطی که طول بازه بازرسی kام برابر با τ_r و همچنین عمر اولیه‌ی این مؤلفه در شروع سیکل برابر با τ_i است، احتمال سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T را با $P_k^i(\tau_r, \tau_i)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

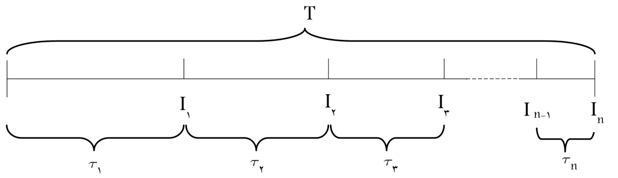
$$P_k^i(\tau_r, t_i) = \begin{cases} e^{-\int_{t_i}^{t_i+\tau_r} \lambda_i(s)ds} & , k = 1 \\ \int_0^{\tau_{r-k+1}} P_{k-1}^i\left(\tau_r, t_i + x_{r-k+1}\right) dF_1^i \left(x_{r-k+1} | t_i\right) & , k = 2, .., n. \end{cases} \quad (24)$$

که در آن $\lambda_i(s)$ از رابطه‌ی ۳ و $F_1^i(x|t_i)$ از رابطه‌ی ۶ قابل محاسبه است. باید توجه داشت که احتمال سالم بودن مؤلفه‌ی iام با عمر اولیه‌ی t_i در بازه بازرسی kام در سیکل T برابر است با $P_k^i(\tau_k, t_i)$. به‌عنوان مثال، احتمال سالم بودن مؤلفه‌ی iام با عمر اولیه‌ی t_i در بازه بازرسی دوم در سیکل T، $P_2^i(\tau_2, t_i)$، طبق رابطه‌ی ۲۴ محاسبه می‌شود:

$$P_2^i\left(\tau_2, t_i\right) = \int_0^{\tau_1} P_1^i\left(\tau_2, t_i + x_1\right) dF_1^i\left(x_1 | t_i\right)$$

$$= \underbrace{\int_0^{\tau_1} P_1^i\left(\tau_2, t_i + x_1\right) f_1^i\left(x_1 | t_i\right) dx_1}_{1} + \underbrace{P_1^i\left(\tau_2, t_i + \tau_1\right) P_1^i\left(\tau_1, t_i\right)}_{2}. \quad (25)$$

مؤلفه‌ی iام یا به‌احتمال $f_1^i(x_1|t_i)$ تا زمان x_1 قبل از پایان بازه بازرسی اول سالم باقی می‌ماند و یا به‌احتمال $P_1^i(\tau_1, t_i)$ تا پایان بازه بازرسی اول سالم باقی می‌ماند.



شکل ۴. یک برنامه‌ی بازرسی با فواصل بازرسی غیرثابت در سیکل T.

در حالت اول، چون خرابی مؤلفه‌ی iام در پایان بازه بازرسی اول شناسایی شده و این مؤلفه تعمیر جزئی می‌شود، عمر آن معادل $t_i + x_1$ شده و درنتیجه احتمال سالم ماندن آن در بازه بازرسی دوم معادل با $P_1^i(\tau_2, t_i + x_1)$ خواهد شد (بخش ۱ رابطه‌ی ۲۵). در حالت دوم، عمر آن معادل $t_i + \tau_1$ شده و درنتیجه احتمال سالم ماندن آن در بازه بازرسی دوم معادل $P_1^i(\tau_2, t_i + \tau_1)$ خواهد شد (بخش ۲ رابطه‌ی ۲۵). بنابراین، متوسط احتمال سالم ماندن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی دوم برابر خواهد شد با مجموع بخش‌های اول و دوم رابطه‌ی ۲۵.

همچنین، در شرایطی که طول بازه بازرسی kام برابر τ_r و نیز عمر اولیه‌ی این مؤلفه در شروع سیکل برابر با t_i است، اگر متوسط مدت‌زمان سالم بودن مؤلفه‌ی iام در بازه بازرسی kام در سیکل T را با $e_k^i(\tau_r, t_i)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$e_k^i(\tau_r, t_i) = \begin{cases} \int_0^{\tau_r} e^{-\int_{t_i}^{t_i+x_r} \lambda_i(s)ds} dx_r & , k = 1 \\ \int_0^{\tau_{r-k+1}} e_{k-1}^i(\tau_r, t_i + x_{r-k+1}) dF_1^i(x_{r-k+1}|t_i) & , k = 2, .., n. \end{cases} \quad (26)$$

که در آن $\lambda_i(s)$ طبق رابطه‌ی ۳ و $F_1^i(x|t_i)$ براساس رابطه‌ی ۶ به دست می‌آید. باید توجه داشت که متوسط مدت زمان سالم بودن مؤلفه‌ی iام با عمر اولیه‌ی t_i در بازه بازرسی kام در سیکل T برابر است با $e_k^i(\tau_k, t_i)$ و بنابراین، متوسط هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای برنامه‌ی بازرسی معین $[I_1 I_2 ... I_{n-1} I_n]$ در سیکل T برابر خواهد شد با:

$$E\left[C_S^T\right] = n \sum_{i=1}^{m-1} C_i^s + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} C_i^d \left(1 - P_k^i\left(\tau_k, t_i\right)\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} C_i^p \left(\tau_k - e_k^i\left(\tau_k, t_i\right)\right) \quad (27)$$

هدف این است که برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت $[I_1^* I_2^* ... I_{n-1}^* T]$ به‌گونه‌یی تعیین شود تا متوسط هزینه‌ی کل سیستم در سیکل T، $E[C_S^T]$، کمینه شود.

روش ناکارا برای تعیین برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیر ثابت، به حساب آوردن تمامی برنامه‌های قابل بازرسی با فواصل زمانی غیر ثابت و محاسبه‌ی $E[C_S^T]$ به‌ازای تک‌تک آنهاست تا کم‌ترین آن تعیین و سپس برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت مشخص شود. برای مثال، اگر افق برنامه‌ریزی برابر با یک سال ($T = 12$) و کم‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی برابر با یک ماه باشد ($\tau_L = 1$)، تعداد برنامه‌های قابل بازرسی برابر است با $2^{11} = 2048$. باید توجه داشت که بازرسی سیستم می‌تواند در پایان هریک از ماه‌های اول تا یازدهم انجام شود، بنابراین 2^{11} برنامه‌ی بازرسی وجود خواهد داشت. واضح است که اگر افق برنامه‌ریزی بلندتر شود، یا کم‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی کوتاه‌تر شود، تعداد برنامه‌های بازرسی ممکن افزایش چشم‌گیری افزایش خواهد داشت. در این صورت، به‌منظور محاسبه‌ی هزینه‌ی کل، باید تعداد زیادی انتگرال نیز محاسبه شود. بنابراین، به‌حساب آوردن تمامی برنامه‌های بازرسی ممکن و محاسبه‌ی هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای تک‌تک آنها، به‌علت زمان محاسباتی زیاد، روش مناسبی نیست. در قسمت بعد، یک روش کارا براساس الگوریتم جست‌وجوی A^* برای تعیین برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت ارائه می‌شود.

۲.۴. تعیین برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل زمانی غیرثابت

در این قسمت یک روش کارا براساس الگوریتم جست‌وجوی A^* ارائه می‌شود تا یک درخت تصمیم‌گیریِ جزئی برای جست‌وجوی برنامه‌ی بازرسی بهینه تولید شود. در این الگوریتم، متوسط هزینه‌ی کل سیستم به‌عنوان معیار ارزیابی در نظر گرفته می‌شود.[۲۴]

یافتن برنامه‌ی بازرسی بهینه را می‌توان به‌عنوان جست‌وجویی در درخت تصمیم‌گیری در نظر گرفت. هر گره در درخت تصمیم‌گیری بیانگر یک برنامه‌ی بازرسی است. برنامه‌ی بازرسی نشان داده شده توسط هر گره ممکن است ناقص یا کامل باشد. گره مربوط به یک برنامه‌ی بازرسیِ ناقص مجدداً می‌تواند گسترش یابد، اما گره مربوط به برنامه‌ی بازرسیِ کامل دیگر نمی‌تواند گسترش پیدا کند. اگر برنامه‌ی بازرسی نشان داده شده توسط یک گره، کامل باشد آن گره را «گره هدف» و در غیر این صورت «گره غیر هدف» می‌نامند. گره آغازین یک گره غیر هدف است که براساس آن سیستم فقط در پایان سیکل بازرسی می‌شود، یعنی در این گره هنوز هیچ زمانی برای بازرسی برنامه‌ریزی نشده است.

روند و سمتِ تولیدِ گره با «میزان امید به گره» تعیین می‌شود که این میزان را به‌وسیله‌ی یک تابع هزینه تخمین می‌زنند. ابتدا گرهی که میزان امید به آن بیشتر است گسترش می‌یابد و گره‌های مابعد آن تولید می‌شوند. اگر گرهی که میزان امیدواری به آن بیشتر است گره هدف باشد، برنامه‌ی بازرسی بهینه است و در غیر این صورت مراحل تکرار می‌شود.[۲۴]

۱.۲.۴. تولید گره

گره iام به‌وسیله‌ی دوتایی $N_i = (IS_i, BV_i)$ نمایش داده می‌شود، جایی که IS_i برنامه‌ی بازرسی مربوط به گره iام را نشان می‌دهد و BV_i یک متغیر صفر و ۱ است (گره iام، اگر $BV_i = 1$ باشد، گره هدف است و اگر $BV_i = 0$ باشد، گره غیر هدف است). گره‌های مابعد به دو شکل ساخته می‌شود: ۱. اضافه‌کردن یک بازرسی جدید بعد از آخرین بازرسی برنامه‌ریزی شده در برنامه‌ی بازرسی فعلی؛ ۲. اضافه نکردن بازرسی جدید و در نظر گرفتن برنامه‌ی بازرسی فعلی به‌صورت کامل به‌عنوان گره مابعد. بنابراین، بسته به زمان بازرسی جدید اضافه شده به برنامه‌ی بازرسی فعلی، یا اضافه نشدن بازرسی جدید به برنامه‌ی بازرسی فعلی گره‌های مابعد تولید می‌شوند.

برای مثال، فرض کنید افق برنامه‌ریزی برابر با یک سال ($T = 12$) و کم‌ترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی برابر با یک ماه باشد $\tau_L = 1$. گره $N_0 = ([12], 0)$ نشانگر گره آغازین است، یعنی تاکنون هیچ زمانی برای بازرسی برنامه‌ریزی نشده و این گره، یک گره غیرهدف است. باید توجه داشت که سیستم بدون توجه به این که چند بار تا قبل از پایان سیکل بازرسی شده باشد، در پایان سیکل حتماً بازرسی می‌شود (عدد ۱۲ در برنامه‌ی بازرسی این موضوع را نشان می‌دهد). گره‌های تولیدی بعد از این گره آغازین، با اضافه کردن یک بازرسی جدید بعد از آخرین بازرسیِ برنامه‌ریزی شده یا اضافه نکردنِ بازرسی جدید و در نظر گرفتن برنامه‌ی بازرسی فعلی به‌صورت کامل ساخته می‌شوند. چون در گره N_0 هیچ زمانی برای بازرسی برنامه‌ریزی نشده، بازرسی جدید را می‌توان در هریک از زمان‌های $1, 2, 3, \ldots, 11$ به برنامه‌ی بازرسی فعلی اضافه کرد. به‌این ترتیب گره‌های $N_1 = ([1\ 12], 0)$، $N_2 = ([2\ 12], 0)$، $N_3 = ([3\ 12], 0)$، $N_4 = ([4\ 12], 0)$،...، $N_{11} = ([11\ 12], 1)$ تولید می‌شوند. همچنین، گره $N_{12} = ([12], 1)$ نیز با در نظر گرفتن برنامه‌ی بازرسی فعلی به‌صورت کامل از گره آغازین N_0 تولید می‌شود. به‌طور مشابه، گره‌های بعد از هریک از گره‌های بالا، تا زمان ساختِ کل درخت تصمیم‌گیری، می‌تواند تولید شود. اما همه‌ی گره‌ها تولید نمی‌شوند، تولید گره به‌وسیله‌ی تابع هزینه، اولویت‌دهی و کنترل می‌شود که در قسمت بعدی توضیح داده شده است.

۲.۲.۴. تابع هزینه در الگوریتم جست‌وجو

تابع هزینه‌ی $H(N)$ که برای گره N محاسبه می‌شود، راستای جست‌وجو را تعیین می‌کند. در الگوریتم جست‌وجوی A^*، هر تابع هزینه‌یی که محدودیت $H(N) \leq F^*(N)$ را به‌ازای هر گره N ارضا کند، به دست آوردن جواب بهینه را تضمین می‌کند.[۲۵] $F^*(N)$ که در گره N نامعلوم است، بهترین مقداری است که در صورت تولید گره N و تمامی گره‌های بعد آن حاصل می‌شود. هرچه مقدار به دست آمده از تابع هزینه‌ی $H(N)$ به $F^*(N)$ نزدیک‌تر باشد، تعداد گره‌های کم‌تری تولید می‌شوند. بنابراین، این منطقی است که تابع هزینه‌یی به‌کارگرفته شود که مقادیر آن تا حد امکان به $F^*(N)$ نزدیک باشد.[۲۴] متوسط هزینه‌ی کل مربوط به گره‌های هدف، دقیقاً با استفاده از رابطه‌ی ۲۷ محاسبه می‌شود. اما متوسط هزینه‌ی کل مربوط به گره‌های غیرهدف به‌طور دقیق قابل محاسبه نیست، چون این گره‌ها نشان‌دهنده‌ی برنامه‌های بازرسیِ ناقص است. به‌منظور تعیین تخمین متوسط هزینه‌ی کل مربوط به برنامه‌ی بازرسیِ ناقصی که توسط یک گره غیرهدف نشان داده می‌شود ــ یعنی $H(N)$ ــ ابتدا باید برنامه‌ی بازرسیِ ناقص، اصلاح شود و به‌شکل یک برنامه‌ی بازرسیِ کامل درآید. این تغییر شکل با اضافه‌کردن تعدادی بازرسی فرضیِ بدونِ هزینه (مجانی) بین آخرین بازرسی موجود برنامه‌ریزی شده در برنامه‌ی بازرسی و بازرسی موجود در پایان سیکل انجام می‌گیرد، به‌طوری که برنامه‌ی بازرسی فعلیِ ناقص تبدیل به یک برنامه‌ی بازرسیِ کامل شود. سپس، متوسط هزینه‌ی کل برای برنامه‌ی بازرسیِ اصلاح شده محاسبه می‌شود. برای مثال، برای گره $N_4 = ([4\ 12], 0)$ برنامه‌ی بازرسیِ اصلاح شده به‌صورت $[4\ \overline{5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11}\ 12]$ خواهد بود؛ یعنی هفت بازرسی فرضی مجانی بین بازرسی‌های موجود در زمان‌های ۴ و ۱۲ اضافه شده است. باید توجه داشت که چون بازرسی‌های فرضی را بدون هزینه فرض کردیم، متوسط هزینه‌ی کل مربوط به برنامه‌ی بازرسیِ اصلاح شده قطعاً کم‌تر از، یا مساوی با هزینه‌ی مربوط به هر گره بعدی است که از گره N_4 تولید می‌شود. بنابراین، تابع هزینه‌ی ابتکاری به دست آوردن جواب بهینه را تضمین می‌کند.

رابطه‌ی لازم برای محاسبه‌ی متوسط هزینه‌ی کل برای یک برنامه‌ی بازرسیِ اصلاح شده، شبیه رابطه‌ی ۲۷ است، با این تفاوت که بازرسی‌های فرضی بدون هزینه در نظر گرفته شود. اگر تعداد بازرسی‌های موجود در برنامه‌ی بازرسی قبل از اصلاح برابر با n_1 و تعداد بازرسی‌های فرضی که به برنامه‌ی بازرسی اصلاح‌شده اضافه شده‌اند برابر با n_2 باشد، آنگاه متوسط هزینه‌ی کل برای یک برنامه‌ی بازرسی اصلاح شده به‌وسیله‌ی رابطه‌ی ۲۸ محاسبه می‌شود.

$$H(N) = n_1 \sum_{i=1}^{m-1} C_i^s + \sum_{k=1}^{n_1+n_2} \sum_{i=1}^{m-1} C_i^d \left(1 - P_k^i(\tau_k, t_i)\right) + \sum_{k=1}^{n_1+n_2} \sum_{i=1}^{m-1} C_i^p \left(\tau_k - e_k^i(\tau_k, t_i)\right) \qquad (۲۸)$$

۳.۲.۴. الگوریتم جست‌وجو

الگوریتم جست‌وجوی A^* که در ادامه این مطلب ذکر شده، برای تعیین برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت ارائه شده است. الگوریتم با گره آغازین ــ گرهی که در آن هیچ زمانی برای بازرسی برنامه‌ریزی نشده ــ شروع می‌شود. در هر مرحله از جست‌وجو در میان گره‌هایی که تاکنون تولید شده‌اند، گرهی که مقدار $H(N)$ آن از همه کم‌تر است انتخاب می‌شود. اگر گره انتخاب‌شده «گره هدف»

باشد، الگوریتم متوقف می‌شود و برنامه‌ی بازرسی مربوط به این گره به‌عنوان جواب بهینه تعیین می‌شود. در غیر این صورت گره‌های بعد از گره انتخاب‌شده تولید می‌شود، هزینه‌های مربوط به آنها ($H(N)$) محاسبه می‌شود، و سپس این گره‌ها به لیستی به‌نام «لیست باز برای گسترش بیشتر» اضافه می‌شوند:

۱. گره آغازین $N_۰$ را در لیست باز قرار دهید.

۲. از لیست باز، گره N با کم‌ترین مقدار $H(N)$ را انتخاب و حذف کنید. اگر انتخابِ منحصر به فرد نباشد یکی را به‌دلخواه انتخاب کنید.

- اگر گره N «گره هدف» است توقف کنید. برنامه‌ی بازرسی مربوط به این گره «جواب بهینه» است.
- در غیر این صورت، گره(ها)ی بعد، N'، را تولید کنید.

۳. برای هر N'، برنامه‌ی بازرسی اصلاح‌شده را تعیین و $H(N')$ را محاسبه کنید.

۴. همه‌ی گره‌های جدید تولید شده (N') را به همراه مقدار H مربوط به آنها به لیست باز اضافه کنید.

۵. به گام ۲ برگردید.

برای روشن شدن روش پیشنهادی، در قسمت بعدی، یک مثال عددی آورده شده است.

۳.۴. مثال عددی

مثال قسمت ۱.۳. را در نظر بگیرید. هدف این است که در یک افق زمانی ۱۲ ماهه، برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت را برای بانک خازنی تعیین کنیم. ابتدا از رابطه‌ی ۳، متوسط نرخ خرابی بانک خازنی محاسبه می‌شود:

$$\lambda_۱(x) = \lambda_۱^{\circ}(x)\, e^{\left(\frac{p}{۱۰۰}\right)\lambda_۲ x} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-۱} e^{\left(\frac{p}{۱۰۰}\right)\lambda_۲ x}$$
$$= \frac{۲/۱}{۱۲}\left(\frac{x}{۱۲}\right)^{۱/۱} e^{\left(\frac{۱۰}{۱۰۰}\right)\left(\frac{۱}{۶}\right)x}$$

سپس، برای یافتن برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت، از الگوریتم جست‌وجوی A^* همراه با روابط ۲۷ و ۲۸ استفاده می‌شود. با به کار بردن این الگوریتم، برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیر ثابت برای بانک خازنی به‌صورت [۵ ۸ ۱۰ ۱۲] با متوسط هزینه‌ی کل $E[C_S^T] = \$۴۸۲۰$ به دست می‌آید. تعداد ۱۳۳۴ گره تولید می‌شود تا برنامه‌ی بازرسی بهینه حاصل شود. به‌عبارت دیگر، از بین ۲۰۴۸ برنامه‌ی قابل بازرسی صرفاً ۱۳۳۴ برنامه ارزیابی می‌شود، و لذا الگوریتم جست‌وجوی A^* در مقایسه با بررسی تمامی برنامه‌های قابل بازرسی تعداد برنامه‌هایی را که به‌منظور تعیین جواب بهینه باید ارزیابی شوند، به‌طور مؤثری کاهش می‌دهد.

با مقایسه‌ی هزینه‌ی کل، در این مثال برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت [۵ ۸ ۱۰ ۱۲] در مقایسه با برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی ثابت [۳ ۶ ۹ ۱۲]، حدود ۵٫۷۱ درصد هزینه‌ی کل را کاهش می‌دهد. واضح است که انتخاب هر یک از دو برنامه‌ی بازرسی فوق متأثر از امکانات اجرایی مؤسسه است. در سازمان‌ها غالباً انجام بازرسی‌ها با فواصل زمانی ثابت با سهولت بیشتری صورت می‌گیرد چرا که انجام بازرسی‌ها با فواصل زمانی غیر ثابت مستلزم کنترل بیشتر و برنامه‌ریزی دقیق‌تری است.

۵. بحث

در مسئله‌ی مورد مطالعه در این نوشتار فرض بر این است که:

۱. خرابی یکی از مؤلفه‌های سیستم از نوع سخت بوده و طبق فرایند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهد، در حالی که خرابی سایر مؤلفه‌های سیستم از نوع نرم است و طبق فرایند غیرهمگن پوآسن با نرخ خرابی افزایشی رخ می‌دهد.

۲. هر مؤلفه به‌محض خراب‌شدن ــ خرابی از نوع سخت ــ بر سایر مؤلفه‌ها ایجاد شوک می‌کند و بدون این که موجب خرابی آنها شود، نرخ خرابی آنها را افزایش می‌دهد.

۳. مؤلفه‌هایی که خرابی آنها از نوع نرم است، پس از شناسایی خرابی در زمان‌های بازرسی تعمیر جزئی می‌شوند.

باید توجه داشت که اولین مرحله در استفاده از مدل پیشنهادی، بررسی ساختاری سیستم مورد مطالعه (تعیین نوع خرابی مؤلفه‌ها، تعیین نوع وابستگی بین مؤلفه‌ها، تعیین نوع تعمیر و عملیات اصلاحی بر روی مؤلفه‌ها) است. دومین مرحله، کسب اطمینان از این مسئله است که فرضیات مدل پیشنهادی، در عمل نیز به‌خوبی رفتار واقعی سیستم را توصیف می‌کنند. مرحله‌ی سوم، تخمین پارامترهای نرخ خرابی مؤلفه‌های سیستم با استفاده از اطلاعاتی است که قبلاً از تجهیزات مشابه جمع‌آوری شده‌اند و نهایتاً، استفاده از مدل پیشنهادی در این مقاله برای بهینه‌سازی زمان‌های بازرسی.

مدل پیشنهادی در این مطالعه، با فرض معلوم بودنِ نرخ خرابیِ مؤلفه‌های سیستم، صرفاً بر روی تعیین فواصل بازرسی بهینه متمرکز شده است. برای وضوح مطالب، چگونگیِ استفاده از مدل پیشنهادی برای بهینه‌سازی زمان بازرسی در یک سیستم تأمین توان مصرفی در پست توزیع برق تشریح شد.

با تحلیل قابلیت اطمینان برای تجهیزات پزشکی، خرابی‌های مؤلفه‌های سیستم به دو نوع سخت و نرم تقسیم شد[۲۶] و نتیجه گرفته شد که یک روش مناسب برای مدل‌سازی و بهینه‌سازی فواصل بازرسی در این تجهیزات، در نظر گرفتن خرابی‌های نرم به‌عنوان عامل تباهی سیستم و در نظر گرفتن خرابی‌های سخت به‌عنوان شوک است. بنابراین، مدل پیشنهادی در این مطالعه را می‌توان مدلی مناسب برای بهینه‌سازی فواصل بازرسی در این تجهیزات نیز در نظر گرفت. به‌عبارت دیگر، از مدل پیشنهادی می‌توان در هر تجهیزی که منطبق با فرضیات مدل باشد بهره جست.

۶. نتیجه‌گیری

در نگه‌داری و تعمیرات سیستم‌های چندمؤلفه‌یی، هدف ارائه‌ی یک سیاست بهینه‌ی نگه‌داری و تعمیرات برای سیستم مورد مطالعه، از طریق تعیین نوع وابستگی بین مؤلفه‌هاست. در این خصوص مدل‌های نگه‌داری و تعمیرات متفاوتی ارائه شده است که در هر یک از آنها براساس نوع سیستم، نوع وابستگی بین مؤلفه‌ها، نوع خرابی مؤلفه‌ها، نوع تعمیر و عملیات اصلاحی روی مؤلفه‌ها، نوع بازرسی و سنجش وضعیت مؤلفه‌ها و نوع معیار بهینه‌سازی، سیاست بهینه‌ی نگه‌داری و تعمیرات ارائه شده است.

در این نوشتار، روشی برای بهینه‌سازی فواصل بازرسی ثابت و غیرثابت برای یک سیستم چندمؤلفه‌یی با وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها ارائه شد. یک سیستم دو یا چندمؤلفه‌یی ($m \geq ۲$) با وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. خرابی مؤلفه‌های اول تا $m-۱$ام سیستم از نوع نرم بوده و طبق فرایند غیرهمگن

پوآسن با نرخ خرابی افزایشی رخ می‌دهد. خرابی نرم موجب توقف سیستم نمی‌شود اما، تأخیر در شناسایی این نوع خرابی موجب افزایش هزینه‌های عملیاتی سیستم می‌شود. هر چه این نوع خرابی دیرتر شناسایی شود هزینه‌ی بیشتری به سیستم تحمیل می‌شود. بنابراین، مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام سیستم به‌صورت گروهی در زمان‌های بازرسی برنامه‌ریزی شده بازرسی می‌شوند و درصورت خرابی، تعمیر جزئی می‌شوند.

خرابی مؤلفه‌ی دیگر (مؤلفه‌ی mام) از نوع سخت بوده و فرض بر این است که طبق فرایند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهد. خرابی سخت به‌محض وقوع، سیستم را متوقف می‌کند و فوراً تعمیر می‌شود. اما خرابی سخت مؤلفه‌ی mام موجب ایجاد شوک روی سایر مؤلفه‌ها شده و نرخ خرابی آنها را افزایش می‌دهد.

هزینه‌ی کل سیستم شامل هزینه‌های بازرسی، هزینه‌های تعمیر و هزینه‌ی جریمه (هزینه‌ی تأخیر در شناسایی خرابی نرم) برای مدت زمان سپری شده از وقوع خرابی‌های نرم تا شناسایی آنها در زمان بازرسی است. در این سیستم، بازرسی مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام با تواتر زیاد، از یک سو موجب افزایش هزینه‌های بازرسی و افزایش هزینه‌ی تعمیر این مؤلفه‌ها (در صورت مشاهده‌ی خرابی آنها) است و از سوی دیگر، بازرسی با تواتر زیاد موجب شناسایی به‌هنگام وقوع خرابی‌های نرم مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام می‌شود، و هزینه‌های ناشی از تأخیر در شناسایی خرابی‌های نرم کاهش خواهد یافت. در صورت انجام بازرسی با تواتر کم، هزینه‌های بازرسی کاهش می‌یابد اما خرابی‌های نرم مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام دیرتر تشخیص داده می‌شود و لذا هزینه‌های ناشی از عدم اطلاع از خرابی‌های نرم افزایش می‌یابد. همچنین، انجام بازرسی با تواتر کم، موجب افزایش تأثیر خرابی سخت مؤلفه‌ی mام بر مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام و درنتیجه افزایش مضاعف هزینه‌های تأخیر در شناسایی خرابی‌های نرم می‌شود. بنابراین، هدف این است که فواصل زمانی ثابت و غیر ثابت بهینه بین بازرسی‌های متوالی به‌گونه‌یی تعیین شود تا متوسط هزینه‌ی کل سیستم در یک افق زمانی محدود کمینه شود.

در روش پیشنهادی، ابتدا هزینه‌ی کل سیستم به‌ازای یک برنامه‌ی بازرسی مشخص فرموله شده است. سپس، به‌منظور یافتن برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی ثابت، هزینه‌ی کل سیستم برای برنامه‌های بازرسی مختلف با فواصل بازرسی ثابت در یک افق زمانی محدود محاسبه شده و سپس با مقایسه این مقادیر، برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی ثابت تعیین می‌شود.

به‌منظور یافتن برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت، الگوریتم جست‌وجوی A^* برای جست‌وجو بین برنامه‌های بازرسی به‌کار گرفته می‌شود تا برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت تعیین شود. تابع هزینه‌ی ابتکاری پیشنهادی که در الگوریتم جست‌وجوی A^* برای محاسبه‌ی حدِ پایینِ هزینه‌ی کل کاربرد دارد، راستای جست‌وجو را هدایت می‌کند، تعداد گره‌های تولید شده را کمینه می‌سازد و به دست آوردن جواب بهینه را تضمین می‌کند.

واضح است که برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی غیرثابت در مقایسه با برنامه‌ی بازرسی بهینه با فواصل بازرسی ثابت، هزینه‌ی کل کم‌تری را خواهد داشت و لذا مرجح است. علت این امر این است که فضای جست‌وجو در حالت اول (فواصل بازرسی غیرثابت) بزرگ‌تر از فضای جست‌وجو در حالت دوم (فواصل بازرسی ثابت) است. با این حال، از نقطه‌نظر عملیاتی، انتخاب هریک از برنامه‌های بازرسی مذکور متأثر از توان عملیاتی و منابع اجرایی مؤسسه است.

در فرایند بسط و گسترش این تحقیق، می‌توان چنین فرض کرد که علاوه بر بازرسی مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام در زمان‌های برنامه‌ریزی شده، این مؤلفه‌ها در زمان خرابی سخت مؤلفه‌ی mام نیز بازرسی می‌شوند. این فرض از نقطه‌نظر عملیاتی بیشتر به واقعیت نزدیک است. همچنین می‌توان مدل پیشنهادی را برای سیستم‌هایی که در آنها خرابی بیش از یک مؤلفه از نوع سخت است و بین خرابی‌های سخت و نرم وابستگی وجود دارد تعمیم داد. همچنین می‌توان شرایطی را در نظر گرفت که در آن هریک از خرابی‌های نرم مؤلفه‌های اول تا $m-1$ام نهایتاً به خرابی سخت تبدیل شود و موجب توقف سیستم شود.

منابع (References)

1. Nicola, R.P. and Dekker R. *Optimal Maintenance of Multi-Component Systems: A Review*, In: Murthy DNP, Kobbacy AKS, Editors. Complex System Maintenance Handbook. Amsterdam, Springer (2008).
2. Cho, D. and Parlar, M. "A survey of maintenance models for multi-unit systems", *European Journal of Operational Research*, **51**, pp. 1-23 (1991).
3. Papadakis, I. and Kleindorfer, P. "Optimizing infrastructure network maintenance when benefits are interdependent", *OR Spectrum*, **27**, pp. 63-84 (2005).
4. Castanier, B., Grall, A. and Berenguer, C. "A condition-based maintenance policy with non-periodic inspections for a two-unit series system", *Reliability Engineering & System Safety*, **87**, pp. 109-120 (2005).
5. Sasieni, M. "A Markov chain process in industrial replacement", *Operational Research Quarterly*, **7**, pp. 148-155 (1956).
6. Murthy, D. and Nguyen, D. "Study of two-component system with failure interaction", *Naval Research Logistics Quarterly*, **32**, pp. 239-247 (1985).
7. Murthy, D. and Nguyen, D. "Study of a multi-component system with failure interaction", *European Journal of Operational Research*, **21**, pp. 330-338 (1985).
8. Sheu, S. and Liou, C. "Optimal replacement of a k-out-of-n system subject to shocks", *Microelectronics Reliability*, **32**, pp. 649-655 (1992).
9. Scarf, P. and Deara, M. "Block replacement policies for a two-component system with failure dependence", *Naval Research Logistics*, **50**, pp. 70-87 (2003).
10. Jhang, J. and Sheu, S. "Optimal age and block replacement policies for a multi-component system with failure interaction", *International Journal of Systems Science*, **31**, pp. 593-603 (2000).
11. Satow, T. and Osaki, S. "Optimal replacement policies for a two-unit system with shock damage interaction",

Computers and Mathematics with Applications, **46**, pp. 1129-1138 (2003).

12. Zequeira, R. and Berenguer, C. "On the inspection policy of a two-component parallel system with failure interaction", *Reliability Engineering and System Safety,* **88**, pp. 99-107 (2005).
13. Lai, M. and Chen, Y. "Optimal periodic replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction", *The International Journal of Advanced Manufacturing and Technology*, **29**, pp. 367-371 (2006).
14. Barros, A., Berenguer, C. and Grall, A. "A maintenance policy for two-unit parallel systems based on imperfect monitoring information", *Reliability Engineering and System Safety*, **91**, pp. 131-136 (2006).
15. Meeker, W. and Escobar, L., *Statistical Methodology for Reliability Data*, New York, Wiley (1998).
16. Taghipour, S., Banjevic, D. and Jardine, A.K.S. "Periodic inspection optimization model for a complex repairable system", *Reliability Engineering and System Safety*, **95**, pp. 944-952 (2010).
17. Wang, H. and Pham, H., *Reliability and Optimal Maintenance*, London: Springer (2006).
18. Pham, H., *Optimal Imperfect Maintenance Models*, In: Pham H, Editor. Handbook of Reliability Engineering, London, Springer, pp. 397-412 (2003).
19. Pham, H. and Wang, H. "Imperfect maintenance", *Eur J Oper Res*, **94**, pp. 425-38 (1996).
20. Kijima, M. "Some results for repairable systems with general repair", *J Appl Probab*, **26**(1), pp. 89-102 (1989).
21. Pham, H., *Recent Advances in Reliability and Quality in Design*, London, Springer (2008).
22. Ross, S.M. *Introduction to Probability Models*, 9th ed. New York, Academic Press (2007).
23. Farag, A.S., Wang, C., Cheng, T.C., Zheng, G., Palk, B., Moon, M., Du, Y. and Hu, L. "Failure analysis of composite dielectric of power capacitors used in distribution systems", *Electric Power Systems Research*, **44**(2), pp. 117-126 (1998).
24. Golmakani, H,R., Mills, J.K. and Benhabib, B. "Deadlock-free scheduling and control of flexible manufacturing cells using automata theory", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, **36**(2), pp. 327-337 (2006).
25. Pearl, J., *Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*, Los Angeles, Addison-Wesley (1984).
26. Taghipour, S., Banjevic, D. and Jardine, A.K.S. "Reliability analysis of maintenance data for complex medical devices", Qual Reliab Eng Int (2010) [in print, published online at http://dx.doi.org/10.1002/qre.1084].