Original Article

بهینه‌سازی استوار سبد مالی با استفاده از رویکرد ارزش در معرض خطر شرطی موزون

علیرضا قهطرانی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
امیرعباس نجفی* (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۱ - ۳۰، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۳-۱۰

در این نوشتار مسئله‌ی انتخاب سبد مالی با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار مورد بررسی قرارگرفته است. بدین‌منظور، ارزش در معرض خطر شرطی موزون (WCVaR)[۱] ــ که ترکیبی است از چند ارزش در معرض خطر شرطی با سطوح اطمینان مختلف ــ به‌عنوان معیار بهینه‌سازی در نظرگرفته شده است. ارزش در معرض خطر شرطی موزون (WCVaR) یک مدل خطی است که از لحاظ محاسباتی کارایی بالایی دارد. مهم‌ترین ویژگی این مدل تولید جواب‌هایی با خصوصیت چیرگی تصادفی است. توسعه‌ی صورت گرفته در این مدل، در نظرگرفتن داده‌های غیرقطعی است و بازده‌های انتظاری نیز غیرقطعی‌اند؛ از این رو برای بررسی داده‌ها از رویکرد استوار استفاده می‌شود. افزون براین، برای توسعه‌ی مدل ارائه شده در این مقاله از برخی محدودیت‌ها برای حفظ تنوع‌پذیری نیز استفاده شده است.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی سبد مالی، برنامه‌ریزی خطی، چیرگی تصادفی، ارزش در معرض خطر شرطی موزون، بهینه‌سازی استوار.

alighahtaran@gmail.com
aanajafi@kntu.ac.ir

۱. مقدمه

مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری[۲]، مدلی برای برقراری تعادل بین ریسک و بازده است. این مسئله شامل مجموعه‌یی از اوراق بهادار است که در آن تلاش می‌شود نسبت سرمایه‌گذاری در هرکدام به‌نحوی تعیین شود که ریسک سرمایه‌گذاری کمینه و بازده سرمایه‌گذاری بیشینه شود. مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری اولین بار توسط مارکویتز[۱] ارائه شد. در این مدل واریانس سبد مالی به‌عنوان «سنجه‌ی ریسک[۳]» در نظرگرفته شده است. استفاده از این‌سنجه (معیار) با محدودیت‌هایی، نظیر لزوم وجود توزیع نرمال برای داده‌های بازده، همراه است. از آنجا که انتخاب سبد سرمایه‌گذاری یک مدل برنامه‌ریزی کوادراتیک و غیرخطی است، در جهت استفاده از سایر سنجه‌های ریسک و همچنین ارائه‌ی مدل‌های خطی در این زمینه انجام شد. ازجمله مدل‌های خطی سبد سرمایه‌گذاری (مالی) می‌توان به مدل میانگین قدر مطلق انحرافات (MAD)[۴][۲] و دیگر مدل‌های ارائه‌شده توسط محققین[۳-۵] اشاره کرد. در اواسط دهه‌ی ۹۰ میلادی، «ارزش در معرض خطر (VaR)[۵]» به‌عنوان یک سنجه‌ی جدید ریسک معرفی شد که عبارت است از بیشترین زیان مورد انتظار در زمان معین و با سطح اطمینان معین. این سنجه به‌لحاظ ریاضی ویژگی‌های نامطلوبی دارد.[۶] برای غلبه بر این خصوصیات نامطلوب، سنجه‌ی «ارزش در معرض خطر شرطی (CVaR)[۶]» معرفی شد. براساس نتایج حاصل از برخی مطالعات CVaR [۷] را می‌توان بدون نیاز به تعیین قبلی VaR مربوطه به دست آورد؛ این مدل معمولاً به برنامه‌ریزی محدب وگاهی به برنامه‌ریزی خطی منجر می‌شود. محققین دیگر نشان داده‌اند که «ارزش در معرض خطر شرطی» یک سنجه ریسک منطقی است[۸] و در ادامه، مدل «ارزش در معرض خطر شرطی موزون (WCVaR)» را ارائه کرده‌اند WCVaR.[۴] یک مدل خطی است که از امتیازات آن برخورداری از چیرگی تصادفی[۷] درجه‌ی دوم است. به‌دلیل برتری‌های این مدل نسبت به CVaR، در این مطالعه از این سنجه‌ی ریسک استفاده شده است.

در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی برای در نظرگرفتن عدم قطعیت داده‌ها در مدل‌های ریاضی صورت گرفته است. این تحقیقات به توسعه‌ی روش‌های بهینه‌سازی استوار[۸] منجر شده است. عدم قطعیت می‌تواند بر بهینگی و وجاهت مسائل تأثیر بگذارد. معمولاً از بهترین برآورد داده‌ها، موسوم به «داده‌های اسمی» در مدل‌های ریاضی استفاده می‌شود. اولین مدل بهینه‌سازی استوار توسط سویستر[۹] ارائه شد؛ این مدل به ساختن جواب‌های شدنی برای یک مجموعه‌ی محدب می‌پرداخت. جواب‌های مدل سویستر بسیار محافظه‌کارانه بودند، به‌گونه‌یی که در مقابل تضمین استواری جواب از بهینگی صرف‌نظر می‌شد. درگام بعدی، مدل بنتال و نمیروسکی[۱۰] و مدل القاوی و همکاران[۱۱] ارائه شد. مدل آن‌ها دارای دو مشکل بود اول این که بر پیچیدگی‌های محاسباتی مسئله می‌افزود، و دوم این که هیچ تضمین احتمالی برای شدنی بودن مسئله ارائه نمی‌کرد. ضمناً مدل بنتال و نمیروسکی غیر خطی بود. در ادامه رویکردی ارائه شد[۱۲] که در آن بهینگی و استواری در تعامل بودند. مدل آن‌ها یک مدل خطی است که به تعدیل سطح محافظه‌کاری جواب استوار می‌پردازد.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۰/۱۲/۲، اصلاحیه ۱۳۹۱/۹/۱۹، پذیرش ۱۳۹۱/۱۲/۲۶.

یکی از ویژگی‌های مهم مدل‌های سبد مالی، عدم قطعیت داده‌های آن‌هاست. لذا تلاش‌های بسیاری برای در نظرگرفتن پارامترهای غیر قطعی در مدل سبد مالی صورت گرفته است. مسئله‌ی انتخاب سبد مالی چندمرحله‌یی استوار، با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی خطی مدل‌سازی شده است.[۱۳] مون و یائو[۱۴] مدل استوار میانگین قدر مطلق انحرافات (RMAD) را معرفی کردند. کوارانتا و زافارونی[۱۵] مدل استوار ارزش در معرض خطر شرطی را ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از مدل بنتال و نمیروفسکی[۱۰] در توسعه‌ی مدل استوار CVaR این مدل را به یک مدل غیر خطی تبدیل کردند. بررسی مدل بهینه‌سازی استوار سبد مالی چنددوره‌یی با استفاده از ارزش در معرض خطر شرطی[۱۶] و نیز بسط و توسعه‌ی مدل یکپارچه استوار مسئله‌ی انتخاب سهام[۱۷] از دیگر مطالعات انجام شده است. در نوشتار حاضر مدل استوار ارزش در معرض خطر موزون برای سرمایه‌گذاری تک‌دوره‌یی توسعه داده شده است.

در این نوشتار مدل جدیدی برای مسئله‌ی سبد مالی در شرایط عدم قطعیت داده‌ها و با سنجه‌ی ریسک ارزش در معرض خطر شرطی موزون (WCVaR) ارائه می‌شود و از رویکرد برتسیماس و سیم[۱۲] برای توسعه‌ی مدل استوار آن استفاده می‌شود. این امر باعث برتری مدل حاصله نسبت به مدل کوارانتا و زافارونی[۱۵] ــ به‌لحاظ محاسباتی و نیز به‌لحاظ اعتبار جواب‌های خروجی ــ می‌شود. چنان که قبلاً ذکر شد ارزش در معرض خطر شرطی موزون در سال ۲۰۰۳ مطرح شد.[۴] این سنجه‌ی ریسک میانگین وزنی چند ارزش در معرض خطر با سطوح نوسان متفاوت است. این مدل به‌علت برخورداری از برخی خصوصیات ــ از جمله چیرگی تصادفی درجه‌ی دوم و نیز ایمنی این سنجه ــ در زمینه‌ی سبد مالی بسیار مهم و پرکاربرد است. اما تاکنون این سنجه‌ی ریسک در شرایط در نظرگیری عدم قطعیت داده مورد مطالعه قرار نگرفته و در این نوشتار برای اولین بار این سنجه‌ی ریسک توسط رویکرد استوار توسعه داده می‌شود.

به‌طور خلاصه، ویژگی‌های مقاله‌ی حاضر را می‌توان در استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم[۱۲] در بهینه‌سازی استوار مسئله، به‌کارگیری سنجه‌ی ریسک WCVaR، و درنظرگیری اصل تنوع‌پذیری سرمایه‌گذاری مطرح کرد. همچنین:

- اکثر مدل‌های بهینه‌سازی استوار ارائه شده در زمینه‌ی سبد مالی از رویکردهای بنتال و نمیروفسکی[۱۰] یا سویستر[۹] استفاده کرده‌اند و فقط مون و یائو[۱۴] یک مدل استوار سبد مالی با استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم توسعه داده‌اند. مقاله‌ی حاضر نیز از این رویکرد استفاده می‌کند و از مزایایی نظیر استفاده از یک سنجه‌ی ریسک بهتر و کاراتر، نسبت به مدل قبلی برخوردار است. در تحقیق مون و یائو، از سنجه‌ی میانگین قدر مطلق انحراف از بازده به‌عنوان سنجه‌ی ریسک استفاده شده است. در این مدل هرگونه انحرافی از میانگین بازده سبد «نامناسب» تلقی شده، و تلاش می‌شود سبدی انتخاب شود که کم‌ترین انحراف از میانگین بازده را داشته باشد. حال آن که نوسانات بالاتر از میانگین، نه‌تنها به ضرر سرمایه‌گذار نیست بلکه باعث افزایش بازده سبد مالی نیز می‌شود. سنجه‌ی ریسک ارزش در معرض خطر شرطی موزون این مشکل را ندارد و بسیار کاراتر و کاربردی‌تر از میانگین قدرمطلق انحرافات است. در واقع می‌توان گفت ماهیت سنجه‌های ریسک در این دو مدل کاملاً با هم متفاوت است و سال‌هاست که برتری سنجه‌ی ریسک ارزش در معرض خطر و هم‌خانواده‌های آن بر سنجه‌هایی چون انحراف معیار و قدر مطلق انحراف از میانگین اثبات شده است. لذا مدل به‌طور کامل با مدل مون و یائو تفاوت دارد و کاملاً از این مدل برتر است.

- از سایر مدل‌های استوار ارائه شده در زمینه‌ی سبد مالی می‌توان به مدل ارزش در معرض خطر شرطی استوار (مدل بسط‌یافته توسط کوارانتا و زافارونی)[۱۵] اشاره کرد. در این مدل از رویکرد بنتال و نمیروسکی[۴] استفاده شده است؛ از آنجا که این رویکرد باعث خروج مدل از حالت خطی می‌شود کارایی چندانی ندارد و حل آن با دشوارهایی همراه است. لذا می‌توان گفت مدل ارائه شده در این مقاله نسبت به مدل کوارانتا و زافارونی برتری محسوسی دارد. این تنها برتری مدل حاضر نسبت به مدل کوارانتا و زافارونی نیست؛ وجود خصوصیت چیرگی تصادفی درجه‌ی دوم در مدل ارائه شده، کارایی این مدل را نسبت به مدل کوارانتا و زافارونی بیشتر می‌کند.

یکی از ضعف‌هایی که در اکثر مدل‌های استوار ارائه‌شده در زمینه‌ی سبد مالی وجود داشته، تمرکز بیش از حد بر رویکرد استوار و نادیده گرفتن ماهیت مسئله‌ی سبد مالی است. «تنوع‌پذیری» نیز یکی از اصول بنیادی در مدل سبد مالی و نظریه‌ی نوین سبد سرمایه‌گذاری است. در این مقاله با درنظرگیری مجموعه‌یی از محدودیت‌ها، تنوع‌پذیری مدل لحاظ می‌شود.

در ادامه‌ی این مقاله، در بخش دوم مدل WCVaR و خصوصیت چیرگی تصادفی طرح می‌شود. در بخش سوم مدل استوار مرتبط با WCVaR معرفی می‌شود؛ و در پایان نیز با استفاده از داده‌های واقعی بازار، مدل مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد.

۲. مدل سنجه‌ی ریسک ارزش در معرض خطر موزون (یا دم جینی[۹])

فرض کنید $J = \{1, 2, ..., n\}$ به مجموعه اوراق بهادار مورد بررسی برای سرمایه‌گذاری اشاره دارد. به‌ازای هر $j \in J$ نرخ بازده آن با یک متغیر تصادفی R_j با میانگین $\mu_j = E(R_j)$ مشخص می‌شود.

متغیرهای تصمیم عبارت‌اند از: $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ که بیانگر وزن و نسبت سرمایه‌گذاری در هریک از دارایی‌هاست. متغیرهای تصمیم از مجموعه محدودیت P پیروی می‌کنند که بیانگر مجموع اوزان برابر ۱ و عدم فروش استقراضی است.

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} X : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \\ x_j \geq 0 & j = 1, ..., n \end{array} \right\} \quad (1)$$

از طرفی، برای هر سبد مالی X داریم:

$$R_X = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j \quad (2)$$

که بیانگر بازده سبد مالی است. در اینجا ما T سناریو با احتمال وقوع یکسان ($P_t = \frac{1}{T}$) را در نظر می‌گیریم. این امر با توجه به وجود شرایط غیرقطعی و مطابق قاعده‌ی لاپلاس صورت پذیرفته است. همچنین r_{jt} مقدار تحقق یافته R_j تحت هر سناریو است؛ لذا داریم:

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{ji} x_j \quad (3)$$

$$\mu_{(y)} = \sum_{t=1}^{T} y_t P_t = \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \right] \frac{1}{T} \quad (4)$$

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مدل مورد بررسی در این مقاله «چیرگی تصادفی» است. در چیرگی تصادفی، بازده‌های غیرقطعی توسط برخی توابع عملکردی مورد بررسی قرار می‌گیرند. اولین تابع عملکردی $F_X^{(1)}$ یک تابع توزیع تجمعی از راست پیوسته $F_{X(\eta)}^{(1)} = F_{X(\eta)} = P(R_x \leq \eta)$ است، که به‌عنوان چیرگی تصادفی درجه یک (FSD)[۱۰] معرفی می‌شود. دومین تابع نیز از تابع اول استخراج می‌شود: $F_X^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{n} F_X(\xi|d\xi)$ و به‌عنوان چیرگی تصادفی درجه دوم (SSD)[۱۱] شناخته می‌شود. سبد مالی X' تحت SSD بر سبد مالی X'' غلبه می‌کند ($R_{X'} > R_{X''}$)؛ اگر $F_{X'}^{(2)}(\eta) \leq F_{X''}^{(2)}(\eta)$ برای تمام مقادیر η با حداقل یک نامساوی مطلق برقرار است. همچنین یک سبد مالی $X^{\circ} \in P$ را SSD کارا می‌نامیم اگر هیچ $X \in P$ که $R_X >_{\mathrm{SSD}} R_{X^{\circ}}$ وجود نداشته باشد. برخی از سنجه‌های عملکرد سبد مالی به‌عنوان «سنجه‌ی ایمنی[۱۲]» معرفی شده‌اند که بیشینه‌سازی شده‌اند. مانند تحقق‌های سبد مالی، که توسط بانک مورد مطالعه قرار گرفت.[۱۸]

برخلاف سنجه‌های ریسک، اندازه‌گیرهای ایمنی ممکن است در مدل‌های رسمی‌تری از عملکرد ریسک‌گریزی قرار گیرند.[۱۹و۲۰] به‌طور کلی برای هر سنجه‌ی ریسک ($\rho_{(X)}$) یک اندازه‌گیری ایمنی متناظر $\mu_{\rho(X)}$ به‌صورت $\mu_{\rho(X)} = \mu_{(X)} - \rho_{(X)}$ وجود دارد.[۴] هر $\mu_{\rho(X)}$ دارای چیرگی تصادفی درجه دوم (SSD) است اگر $R_{X'} \geq_{\mathrm{SSD}} R_{X^{\circ}}$ دلالت بر $[\mu_{\rho(X')} \geq \mu_{\rho(X'')}$ داشته باشد. اگر سنجه‌ی ایمنی، چیرگی تصادفی درجه دوم (SSD) باشد آنگاه به جز سبدهای مالی با مقادیر $\mu_{\rho(X)}, \mu_{(X)}$ یکسان، هر جواب کارای مسئله‌ی دومعیاره:

$$\max\left\{[\mu_{(X)}, \mu_{\rho(X)}] : X \in P\right\} \tag{۵}$$

یک سبد مالی کاراست.[۲۱] لذا این مدل به بهینه‌سازی دومعیاره میانگین ـ ایمنی به جای بهینه‌سازی میانگین ـ ریسک تمرکز دارد. هر تابع $F_X^{(2)}$ را که به‌عنوان SSD تعریف می‌شود می‌توان چنین بازنویسی کرد:[۴]

$$F_X^{(2)}(\eta) = E\left\{\max\left\{\eta - R_X, 0\right\}\right\} \tag{۶}$$

مدل فوق یک مدل خطی است. در این مدل تمرکز بر تفاوت کوانتایل[۱۳] سنجه‌ی ریسک مرتبط با قدرمطلق منحنی‌های لورنز (ALC)[۱۴] است[۲۲و۲۳] که به‌صورت توابع کوانتایل دوم معرفی می‌شود:

$$F_X^{(-2)}(P) = \int_0^P F_X^{(-1)}(\alpha)dx \qquad 0 < P \leq 1, \qquad F_X^{(-2)}(0) = 0 \tag{۷}$$

جایی که:

$$F_{X(P)}^{(-1)} = \inf\left\{\eta : F_X(\eta) \geq P\right\} \tag{۸}$$

از طرفی، براساس منحنی‌های لورنز داریم:

$$\begin{aligned} F_X^{(-2)}(B) &= \max_{\eta \in R}\left[B_\eta - F_X^{(2)}(\eta)\right] \\ &= \max_{\eta \in R}\left[B_\eta - E\left\{\max\left\{\eta - R_X, 0\right\}\right\}\right] \end{aligned} \tag{۹}$$

جایی که η یک متغیر واقعی است که مقدار کوانتایل B را اندازه‌گیری می‌کند.

برای هر مقدار $0 < B \leq 1$ نرمال شده، ALC به‌صورت $M_B(X) = \frac{F_X^{(-2)}(B)}{B}$ تعریف می‌شود که «ارزش در معرض خطر شرطی» (CVaR) خوانده می‌شود. سنجه‌ی ریسک متناظر $\Delta_B(X) = \mu_{(X)} - M_B(X)$ نیم‌انحراف شرطی نامیده می‌شود. اگر $0 < B < 1$ فرض شود، سنجه‌ی CVaR براساس $F_{(B)}^{(-2)}$ به‌صورت روابط ۱۰ تا ۱۲ تعریف می‌شود. برای متغیرهای تصادفی گسسته تحت SSD داریم:

$$M_B(X) = \max\left[\eta - \frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} d_t^- \frac{1}{T}\right] \tag{۱۰}$$

S.T.

$$d_t^- \geq \eta - y_t \tag{۱۱}$$

$$d_t^- \geq 0 \qquad t = 1, ..., T' \tag{۱۲}$$

به‌منظور مدل کردن سبد مالی با ریسک نزولی به جای انحراف از میانگین جینی، سنجه‌ی دُم جینی[۴] مورد استفاده قرار می‌گیرد. این سنجه‌ی ریسک برای $B \in (0, 1]$ تعریف می‌شود. با بازه دنباله $P \leq B$ داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma_B(X) &= \frac{2}{B^2}\int_0^B (\mu(X)\alpha - F_X^{(-2)}(\alpha))d\alpha \\ &= \frac{2}{B^2}\int_0^B \alpha\Delta_\alpha(X)dx \end{aligned} \tag{۱۳}$$

برای هر $0 < B \leq 1$ سنجه‌ی دم جینی $\Gamma_B(X)$، SSD است. سنجه‌ی ایمنی $\mu_{\Gamma_{B(X)}} = \mu_{(X)} - \Gamma_B(X)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} &\mu_{\Gamma_{B(X)}} = \mu_{(X)} = \\ &\quad \frac{2}{B^2}\int_0^B (\mu(X)\alpha - F_X^{(-2)}(\alpha))d\alpha = \\ &\quad \frac{2}{B^2}\int_0^B F_X^{(-2)}(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{۱۴}$$

سنجه‌ی دم جینی برای $B = k/T$ ممکن است به‌صورت نیم‌انحراف شرطی موزون $\Delta_w^{(k)}(X)$ با سطح نوسان $B_k = k/T \ (k = 1, ..., K)$ تعریف شود (K تعداد اوزان است). بر همین اساس داریم:

$$\begin{aligned} &M_w^{(m)}(X) = \sum_{k=1}^{m} w_k M_{B_k(X)}, \\ &\sum_{k=1}^{m} w_k = 1 \\ &w_k > 0 \quad k = 1, ..., m \end{aligned} \tag{۱۵}$$

WCVaR به وضوح یک سنجه ایمنی است. اوزان در مدل فوق قابل اندازه‌گیری است. برای هر $0 < B \leq 1$ با m سطح نوسان $0 < B_1 < ... < B_k < ... < B_m = B$ وزن‌ها چنین محاسبه می‌شود:[۴]

$$w_k = \frac{(B_{k+1} - B_{k-1})B_k}{B^2} \qquad k = 1, ..., m-1 \tag{۱۶}$$

$$w_m = \frac{(B_m - B_{m-1})B_m}{B^2} \tag{۱۷}$$

که در آن $B_0 = 0$ است. با در نظرگرفتن وزن‌های مدل دم جینی به‌صورت فوق، مدل WCVaR یک مدل خطی خواهد بود. مدل دم جینی یک مدل بیشینه‌سازی

ایمنی سبد مالی (SPM)[15] است که هدف آن بیشینه‌کردن WCVaR است. با استفاده از مطالب فوق مدل WCVaR چنین ارائه می‌شود:[۴]

$$\max \sum_{k=1}^{m} w_k q_k - \sum_{k=1}^{m} \frac{w_k}{B_k} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{T} d_{tk} \tag{۱۸}$$

S.t

$$\sum \mu_j x_j \geq \mu_0 \tag{۱۹}$$

$$\sum X_j = 1 \tag{۲۰}$$

$$d_{tk} - q_k + \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \geq 0 \tag{۲۱}$$

$$d_{tk} \geq 0 \qquad x_j \geq 0$$

$$t = 1, ..., T \qquad k = 1, ..., m$$

$$t = 1, ..., T \qquad k = 1, ..., m \tag{۲۲}$$

w_k وزن مربوط به هر B_k که از قبل محاسبه می‌شود؛ q_k یک متغیر غیرمحدود که مقدار مربوط به کوانتایل B_k را اندازه‌گیری می‌کند؛ B_k سطح نوسان kام؛ T تعداد سناریوها؛ d_{tk} متغیر تصادفی که بیانگر میزان خسارت سبد مالی بیشتر از q_k تحت سناریوی t است؛ μ_j متغیر تصادفی بیانگر نرخ بازده انتظاری سهم jام است؛ x_j متغیر تصمیم بیانگر وزن سرمایه‌گذاری شده در سهم jام است؛ k تعداد سطوح نوسان؛ t تعداد سناریوها.

مدل فوق در واقع یک میانگین وزنی از چند ارزش در معرض خطر شرطی است، که جزو خانواده سنجه‌های ریسک ارزش در معرض خطر بوده و نسبت به آن‌ها کاراتر است.

۳. بهینه‌سازی استوار ارزش در معرض خطر شرطی موزون (دم جینی)

در این بخش به ارائه‌ی توسعه‌ی مدل استوار WCVaR می‌پردازیم و به‌اختصار آن را RWCVaR می‌نامیم. در مدلی که در بخش قبل معرفی شد عدم قطعیت داده‌ها در نظرگرفته نمی‌شود. برای در نظرگرفتن عدم قطعیت داده‌ها از رویکرد بهینه‌سازی استوار استفاده می‌شود. مدل دم جینی یک مدل خطی با متغیرهای گسسته است و بهترین رویکرد استوار برای در نظرگرفتن این عدم قطعیت رویکرد برتسیماس و سیم[۱۲] است. در مدل دم جینی، μ_j غیر قطعی است و از این رو آن را به‌صورت $\tilde{\mu}_j$ نشان می‌دهیم. هر ورودی $\tilde{\mu}_j$, $j \in J_0 = \{1, ..., N\}$ در بازه $[\mu_j - \hat{\mu}_j, \mu_j + \hat{\mu}_g]$ مقدار می‌گیرد که $\hat{\mu}_j$ میزان نوسان برآورد اسمی μ_j است. در اینجا پارامتر Γ_0 معرفی می‌شود؛ مقدار این پارامتر، که لازم نیست عدد صحیح باشد، در بازه $[0, |J_0|]$ قرار دارد. نقش این پارامتر تعدیل استواری مدل ارائه شده در مقابل سطح محافظه‌کاری جواب است. در اینجا مجموعه‌ی S_0 را در نظر می‌گیریم که در $S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma_0 \rfloor$ تغییر می‌کند و $\lfloor \Gamma_0 \rfloor$ عدد متغیر برای S_0 می‌تواند تغییرکند. درواقع $\lfloor \Gamma_0 \rfloor$ تعداد پارامترهایی است که تا مرز بازه مشخص‌شده نوسان می‌کند. درنتیجه می‌توان سطح معینی از نوسانات را مطابق رابطه‌ی ۲۳ در نظر گرفت. برای $\hat{\mu}$، x_j، $\hat{\mu}_\nu$، x_ν و Γ_0 جایی که $j \in S,\ \nu \notin S_0/J_0$

درنتیجه:

$$\sum_{j \in S_0} \hat{\mu}_j |x_j| + (\Gamma - \lfloor \Gamma_0 \rfloor) \hat{\mu}_\nu |x_\nu| \tag{۲۳}$$

محدودیت ۱۹ باید به $-\sum \mu_j x_j \leq -\mu_0$ تغییر کند؛ چراکه باید یک تابع هدف کمینه‌سازی در آن جایگذاری شود و این تغییر این امکان را فراهم می‌کند. همتای استوار محدودیت ۱۹ عبارت است از:

$$-\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{\nu\} | S_0 \subseteq J_0|, S_0 = \lfloor \Gamma_0 \rfloor \nu \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum \hat{\mu}_j |x_j| (\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor \hat{\mu}_j |x_j|) \right\} \leq -\mu_0 \tag{۲۴}$$

چنان که مشخص است یک تابع عدم قطعیت به این محدودیت اضافه شده است. در این تابع تلاش می‌شود بیشترین نوسانات ممکن به متغیرها داده شود. اما مشخص است که این محدودیت به این شکل قابل حل نیست. در ادامه تلاش می‌شود این محدودیت به‌صورتی جدید ارائه شود. براساس مدل برتسیماس و سیم[۱۲] می‌توان همتای استوار مدل ۱۸ تا ۲۲ را به‌صورت زیر مدل‌سازی کرد. y_j حد بالای $|x_j|$ است به این معنی که $|x_j| \leq y_j$. می‌دانیم که:

$$\max \sum_{k=1}^{m} w_k q_k - \sum_{k=1}^{m} \frac{w_k}{B_k} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{T} d_{tk} \tag{۲۵}$$

S.t

$$-\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{\nu\} | S_0 \subseteq J_0|, S_0 = \lfloor \Gamma_0 \rfloor \nu \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j |x_j| + (\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor \hat{\mu}_j |x_j|) \right\} \leq -\mu_0 \tag{۲۶}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = 1 \tag{۲۷}$$

$$d_{tk} - q_k + \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \geq 0 \tag{۲۸}$$

$$d_{tk} \geq 0 \qquad x_j \geq 0$$

$$t = 1, ..., T \qquad k = 1, ..., m$$

$$t = 1, ..., T \qquad k = 1, ..., m \tag{۲۹}$$

اگر Γ_0 به‌صورت یک عدد صحیح انتخاب شود آنگاه:

$$B_0(x.\Gamma_0) = \max_{\{S_0 | S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{\mu}_j |x_j| \right\} \tag{۳۰}$$

اگر $\Gamma_0 = 0$، آنگاه $B_0(x.\Gamma_0) = 0$، و مدل فوق برابر مدل اصلی WCVaR خواهد بود.

چنان که در مطالب فوق ذکر شد تلاش شد تابع غیر قطعی ۲۴ به یک مدل برنامه‌ریزی تبدیل شود. رابطه‌ی ۳۰ در واقع همان هدف نهایی است که شامل در نظرگرفتن بیشترین نوسانات ممکن در مدل است.

براساس مدل برتسیماس و سیم[۱۲] می‌توان همتای استوار فوق را به‌صورت زیر مدل‌سازی کرد. جایی که y_j حد بالای $|x_j|$ است به این معنی که $|x_j| \le y_j$.

$$\max_{\{S_0\cup\{\nu\}|S_0\subseteq J_0,|S_0|=\lfloor\Gamma_0\rfloor \nu\in J_0\setminus S_0\}} \left\{\sum_{j\in S_0}\hat{\mu}_j\,|x_j| + (\Gamma_0-\lfloor\Gamma_0\rfloor)\hat{\mu}_\nu\,|x_j|\right\} \qquad (۳۱)$$

این رابطه برابر است با:

$$\max_{\{S_0\cup\{\nu\}|S_0\subseteq J_0,|S_0|=\lfloor\Gamma_0\rfloor \nu\in J_0\setminus S_0\}} \left\{\sum_{j\in S_0}\hat{\mu}_j y_j + (\Gamma_0-\lfloor\Gamma_0\rfloor)\hat{\mu}_\nu y_j\right\}$$

$$x_j \le y_j, \qquad -x_j \le y_j \quad y_j \ge 0 \qquad (۳۲)$$

بنابراین، همتای استوار محدودیت مسئله معادل است با:

$$-\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j + \max_{\{S_0\cup\{\nu\}|S_0\subseteq J_0,|S_0|=\lfloor\Gamma_0\rfloor \nu\in J_0\setminus S_0\}} \left\{\sum_{j\in S_0}\hat{\mu}_j y_j + (\Gamma_0-\lfloor\Gamma_0\rfloor)\hat{\mu}_\nu y_\nu\right\} \le -\mu_0$$

$$-y_j \le x_j \le y_j$$

$$y_j \ge 0 \qquad (۳۳)$$

درنتیجه، مدل استوار دم جینی عبارت است از:

$$\max \sum_{k=1}^{m} w_k q_k - \sum_{k=1}^{m}\frac{w_k}{B_k}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{T}d_{tk} \qquad (۳۴)$$

S.T

$$-\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j + \max_{\{S_0\cup\{\nu\}|S_0\subseteq J_0,|S_0|=\lfloor\Gamma_0\rfloor \nu\in J_0\setminus S_0\}} \left\{\sum_{j\in S_0}\hat{\mu}_j y_j + (\Gamma_0-\lfloor\Gamma_0\rfloor)\hat{\mu}_\nu y_\nu\right\} \le -\mu_0 \qquad (۳۵)$$

$$\sum x_j = 1 \qquad (۳۶)$$

$$d_{tk} - q_k + \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j \ge 0$$

$$-y_j \le x_j \le y_j$$

$$d_{tk} \ge 0 \qquad x_j \ge 0 \quad t = 1,\dots,T \qquad , k = 1,\dots,m \qquad (۳۷)$$

برای تبدیل‌کردن مدل ۲۵ تا ۲۹ به مدل خطی، برقراری رابطه‌ی شرطی ۳۸ ضرورت می‌یابد:

$$B_0(x,\Gamma_0) = \max_{\{S_0\cup\{\nu\}|S_0\subseteq J_0,|S_0|=\lfloor\Gamma_0\rfloor \nu\in J_0\setminus S_0\}} \left\{\sum_{j\in S_0}\hat{\mu}_j\,|x_j| + (\Gamma_0-\lfloor\Gamma_0\rfloor)\hat{\mu}_\nu\,|x_j|\right\} \qquad (۳۸)$$

در ادامه، با استفاده از قضیه‌ی قوی دوگان[۱۶] ، تلاش می‌شود تابع غیر قطعی فوق به یک مدل برنامه‌ریزی تبدیل شود. مدل فوق برابر است با مدل برنامه‌ریزی خطی:

$$B_0(x,\Gamma_0) = \max \sum_{j\in J_0}\hat{\mu}_j|x_j^*|z_j \qquad (۳۹)$$

S.T.

$$\sum_{j\in J_0} z_j \le \Gamma_0 \qquad (۴۰)$$

$$0 \le z_j \le 1 \qquad \forall j \in J_0 \qquad (۴۱)$$

جواب بهینه‌ی مدل فوق شامل $\lfloor\Gamma_0\rfloor$ متغیر برابر ۱ و یک متغیر برابر $\Gamma_0 - \lfloor\Gamma_0\rfloor$ خواهد بود. دوگان مدل فوق برابر است با:

$$\min \sum_{j\in J_0} P_j + \Gamma z_0 \qquad (۴۲)$$

s.t

$$z_0 + P_j \ge \hat{\mu}_j|x_j^*| \qquad \forall j \in J_0 \qquad (۴۳)$$

$$P_j \ge 0 \qquad \forall j \in J_0 \qquad (۴۴)$$

$$z_0 \ge 0 \qquad (۴۵)$$

با توجه به قضیه قوی دوگان، از آنجاکه در مدل ۳۹ تا ۴۱ چنانچه $\Gamma_0 \in [0,|J_0|]$ آنگاه مدل دارای جواب محدود و شدنی است پس مدل دوگان ۴۲ تا ۴۵ نیز دارای جواب محدود و شدنی است. بر این اساس می‌توان مدل استوار ارزش در معرض خطر شرطی موزون را چنین مدل‌سازی کرد:

$$\max \sum_{k=1}^{m} w_k q_k - \sum_{k=1}^{m}\frac{w_k}{TB_k}\sum_{t=1}^{T}d_{tk} \qquad (۴۶)$$

S.t

$$-\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j + Z_0\Gamma_0 + \sum_{j\in J_0}P_j \le -\mu_0 \qquad (۴۷)$$

$$Z_0 + P_j \ge \hat{\mu}_j y_j \qquad (۴۸)$$

$$-y_j \le x_j \le y_j \qquad (۴۹)$$

$$d_{tk} - q_k + \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j \ge 0 \qquad (۵۰)$$

$$\sum x_j = 1 \qquad (۵۱)$$

$$d_{tk} \ge 0 \qquad x_j \ge 0 \qquad P_j \ge 0$$

$$y_j \ge 0 \qquad Z_0 \ge 0 \qquad (۵۲)$$

$$t = 1,\dots,T \qquad K = 1,\dots,m \qquad (۵۳)$$

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های نظریه‌ی سبد مالی حفظ تنوع‌پذیری در سبد مالی است. برای رعایت هرچه بیشتر این اصل مجموعه محدودیت‌هایی به مسئله اضافه می‌شود:

$$KS_k + \sum_{j=1}^{n}F_{kj}^{s} \le c_k \qquad (۵۴)$$

$$F_{kj}^{s} \ge x_j - s_k, F_{kj}^{s} \ge 0 \qquad j = 1\dots n \qquad (۵۵)$$

که در آن S_k یک متغیر غیر محدود (بیانگر بیشترین سهم‌های اختصاص یافته)، و f^s_{kj} یک متغیر غیر منفی اضافی (انحراف) است. مثلاً فرض می‌شود که هر سهم نمی‌تواند بیش از ۰/۲ و مجموع هر ۳ سهم نمی‌تواند بیش از ۰/۵ و مجموع هر ۶ سهم نمی‌تواند بیش از ۰/۷۵ سبد مالی را به خود اختصاص دهد. براین اساس محدودیت‌هایی که به مسئله اضافه می‌شود عبارت‌اند از:

$$x_j \leq 0/2 \qquad j = 1 \ldots n \tag{56}$$

$$3S_3 + \sum\nolimits_{j=1}^{n} F^s_{3j} \leq 0/5 \tag{57}$$

$$F^s_{3j} \geq x_i - s_3 \tag{58}$$

$$F^s_{3j} \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n \tag{59}$$

$$6S_6 + \sum_{j=1}^{n} F^s_{6j} \leq 0/75 \tag{60}$$

$$F^s_{6j} \geq x_j - s_6 \tag{61}$$

$$F^s_{6j} \geq 0 \quad j = 1 \ldots n \tag{62}$$

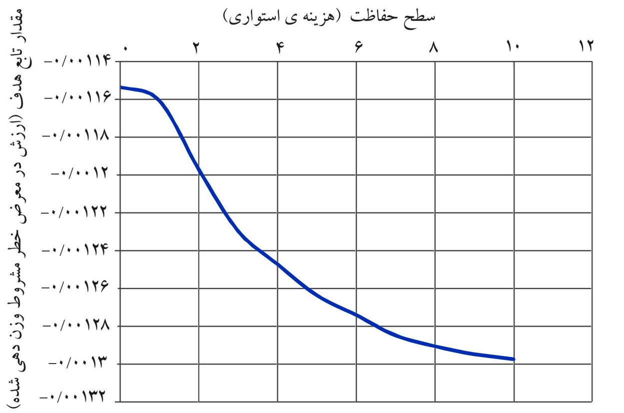
مدل فوق یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که سنجه‌ی ریسک آن از خانواده ارزش در معرض خطر است. این سنجه نسبت به خود ارزش در معرض خطر، با توجه به خصوصیت چیرگی تصادفی، دارای برتری است. برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در این مدل از رویکرد برتسیماس و سیم[۱۲] استفاده شده است. در مدل‌های قبلی از این سنجه و نیز از رویکرد بنتال و نمیرفسکی[۱۰] در زمینه‌ی استوار استفاده شد که حاصل آن خروج مدل از حالت خطی بود. اما در این مدل با توجه به کاربرد رویکرد ذکر شده، مدل برنامه‌ریزی خطی بوده و با اضافه‌کردن محدودیت‌هایی تنوع‌پذیری آن نیز تضمین می‌شود.

۴. تجزیه و تحلیل تجربی

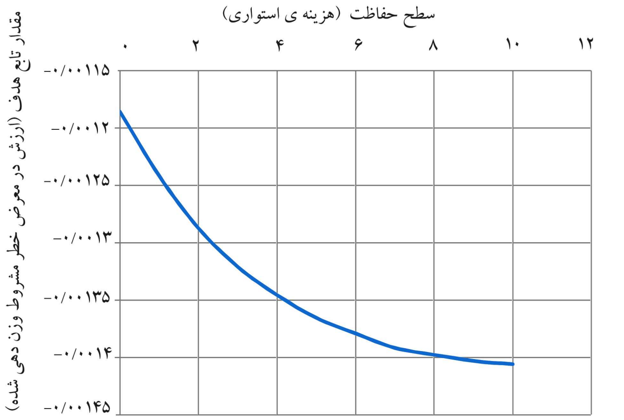
در این بخش یک مثال عددی برای بهینه‌سازی استوار مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با در نظرگرفتن ارزش در معرض خطر شرطی موزون ارائه می‌شود. در این مثال ۱۰ سهم از بازار بورس اوراق بهادار تهران به‌صورت تصادفی انتخاب شده و داده‌های تاریخی آن‌ها از تاریخ ۹۰/۵/۱ تا ۹۰/۸/۲۵ مورد بررسی قرار گرفته است. این داده‌ها شامل ۹۳ روزکاری می‌شود که در کل ۹۳۰ داده‌ی تاریخی مورد بررسی قرارگرفت. در این مدل از سطح نوسان‌های ۰/۴ و ۰/۵ برای محاسبه استفاده شد و براساس روابط ارائه شده برای محاسبه‌ی اوزان، $w_1 = 0/8$ و $w_2 = 0/2$ تعیین شد. همچنین، میزان نوسان داده‌ها در این مدل ۲۰ درصد در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس، خلاصه‌ی نتایج حاصل از حل مسئله در جدول ۱ ارائه شده است.

در ادامه نمودارهای شکل‌های ۱ تا ۴ برای بررسی میزان تغییرات بازده سبد مالی با در نظرگرفتن مقادیر مختلف Γ_0 ارائه می‌شود.

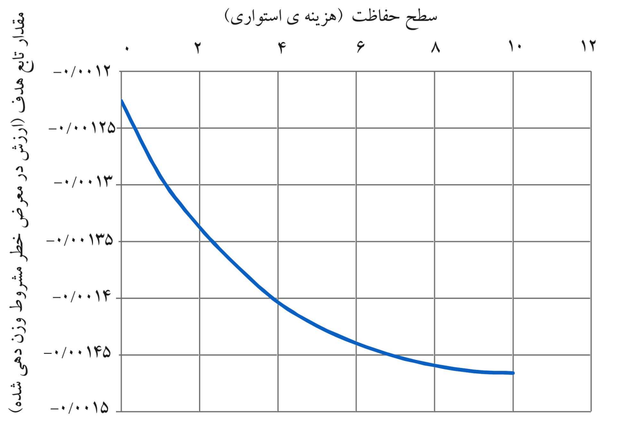
در مدل حل شده و در محدودیت‌های دارای عدم قطعیت، ۱۰ ضریب غیرقطعی وجود دارد؛ بنابراین سطح حفاظت تا ۱۰ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ثابت شده که اگر سطح حفاظت تا سقف تعداد پارامترهای غیرقطعی تغییر کند، شدنی بودن جواب استوار تضمین شده است. اطلاعات جدول ۱ نشان‌دهنده‌ی حساسیت مدل به نوسان و عدم قطعیت داده‌هاست. ستون اول جدول که داده‌های با سطح حفاظت صفر هستند به‌معنای عدم نوسان پارامترهای غیرقطعی است. نتایج فوق نشان‌دهنده‌ی



شکل ۱. نمودار مقدارتابع هدف در مقابل تغییرات Γ_0 با احتساب بازده انتظاری صفر.



شکل ۲. نمودار مقدار تابع هدف در مقابل تغییرات Γ_0 با احتساب بازده انتظاری ۰/۰۰۰۱.

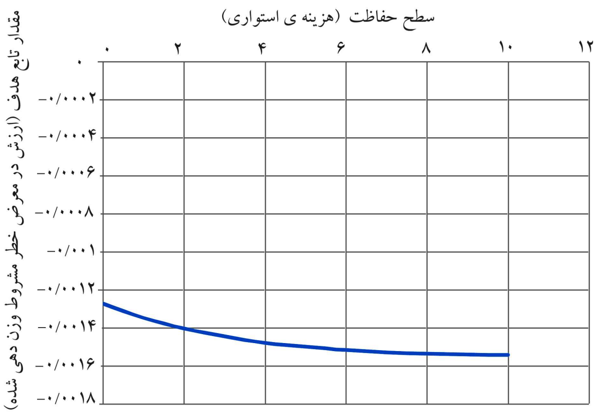


شکل ۳. نمودار مقدار تابع هدف در مقابل تغییرات Γ_0 با احتساب بازده انتظاری ۰/۰۰۰۱۵.

توانایی مدل ارائه شده در ارتباط با وجود عدم قطعیت داده‌ها در مسئله است. چنان که مشاهده می‌شود با افزایش Γ_0 مقادیر تابع هدف بهتر نشده‌اند و درواقع نشان می‌دهد با افزایش Γ_0 جواب‌ها محافظه‌کارانه‌تر شده‌اند. زمانی که Γ_0 برابر صفر در نظر گرفته می‌شود در واقع هیچ نوسانی مجاز نیست و در واقع به‌ازای Γ_0 برابر صفر جواب مسئله بدون نوسان است.

جدول ۱. مقدار تابع هدف با در نظر گرفتن مقادیر مختلف Γ_0 و μ_0.

Γ_0	μ_0			
	۰	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۲
۰	−۰٫۰۰۱۱۱۵۳۳۸	−۰٫۰۰۱۱۸۶۰۱۳	−۰٫۰۰۱۲۲۶۱۱۲	−۰٫۰۰۱۲۷۱۹۹۷
۱	−۰٫۰۰۱۱۶۰۹۰۴	−۰٫۰۰۱۲۴۱۸۹۰	−۰٫۰۰۱۲۹۲۶۶۵	−۰٫۰۰۱۳۴۶۵۶
۲	−۰٫۰۰۱۱۹۷۲۴۴	−۰٫۰۰۱۲۸۷۳۱۳	−۰٫۰۰۱۳۳۷۴۵۹	−۰٫۰۰۱۴۰۲۰۰۹
۳	−۰٫۰۰۱۲۲۹۷۵۱	−۰٫۰۰۱۳۲۰۸۴۵	−۰٫۰۰۱۳۷۳۳۸۰	−۰٫۰۰۱۴۴۳۱۲۷
۴	−۰٫۰۰۱۲۴۷۲۷۲	−۰٫۰۰۱۳۴۵۴۵۷	−۰٫۰۰۱۴۰۳۴۹۹	−۰٫۰۰۱۴۷۷۱۳۹
۵	−۰٫۰۰۱۲۶۳۶۷۴	−۰٫۰۰۱۳۶۵۲۸۷	−۰٫۰۰۱۴۲۴۳۲۴	−۰٫۰۰۱۴۹۶۲۱۷
۶	−۰٫۰۰۱۲۷۴۱۳۴	−۰٫۰۰۱۳۷۸۸۷۶	−۰٫۰۰۱۴۳۹۶۶۳	−۰٫۰۰۱۵۱۵۱۰۶
۷	−۰٫۰۰۱۲۸۴۸۷۲	−۰٫۰۰۱۳۹۱۴۲۶	−۰٫۰۰۱۴۵۱۱۸۸	−۰٫۰۰۱۵۲۶۵۶۱
۸	−۰٫۰۰۱۲۹۰۶۳۶	−۰٫۰۰۱۳۹۷۴۱۵	−۰٫۰۰۱۴۵۹۲۰۷	−۰٫۰۰۱۵۳۳۸۸۶
۹	−۰٫۰۰۱۲۹۴۷۷۳	−۰٫۰۰۱۴۰۲۷۶۱	−۰٫۰۰۱۴۶۴۳۹۷	−۰٫۰۰۱۵۳۸۶۲۷
۱۰	−۰٫۰۰۱۲۹۷۴۴۸	−۰٫۰۰۱۴۰۵۵۶۲	−۰٫۰۰۱۴۶۵۹۱۰	−۰٫۰۰۱۵۴۰۰۰۹



شکل ۴. نمودار مقدارتابع هدف در مقابل تغییرات Γ_0 با احتساب بازده انتظاری ۰٫۰۰۰۲.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با رویکرد ارزش در معرض خطر شرطی موزون، با در نظرگرفتن عدم قطعیت داده‌های ورودی مورد بررسی قرارگرفت. برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها از رویکرد بهینه‌سازی استوار مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری استفاده شد. مدل ارائه شده در این نوشتار یک مدل برنامه‌ریزی خطی و دارای برتری‌های محاسباتی است. از مهم‌ترین ویژگی‌های مدل ارائه شده وجود چیرگی تصادفی در این مدل است. تجزیه و تحلیل تجربی نتایج نشان می‌دهد که مدل استوار ارائه شده در عمل در مقابل نوسان‌پذیری داده‌ها استوار بوده و مهم‌تر این که انعطاف‌پذیری بیشتری در تحلیل مالی برای سرمایه‌گذاری ارائه می‌دهد. این مدل نسبت به مدل‌های مشابه خود با توجه به استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم[۱۲] خطی است و دارای برتری محاسباتی بوده و با توجه به محدودیت‌های اضافه شده، تنوع‌پذیری مدل مذکور نیز لحاظ شده است.

پانوشت‌ها

1. weighted conditional value at risk (WCVaR)
2. portfolio selection problem
3. risk measure
4. mean absolute deviation (MAD)
5. value at risk (VaR)
6. conditional value at risk (CVaR)
7. stochastic dominance
8. robust optimization
9. tail gini
10. first degree stochastic dominance (FSD)
11. second degree stochastic dominance (SSD)
12. safety measure
13. Quintile
14. absolute Lorenz curves (ALC)
15. safety portfolio maximization (MSP)
16. strong duality theorem

منابع (References)

1. Markowitz, H. “Portfolio Selection”, *the Journal of Finance*, **91**, pp. 7-77 (1952).
2. Konno, H. and Yamazaki, H. “Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market”, *Management Science*, **37**, pp. 519-31 (1991).
3. Kellerer, H., Mansini, R. and Speranza, M.G. “Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots”, *Annals of Operations Research*, **99**, pp. 287-304 (2000).

4. Mansini, R., Ogryczak, W. and Grazia Speranza, M. "LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison", *IMA Journal of Management Mathematics*, **14**, pp. 187-220 (2003).
5. Chiodi, L., Mansini, R. and Speranza, M.G. "Semi-absolute deviation rule for mutual funds portfolio selection", *Annals of Operations Research*, **124**, pp. 245-65 (2003).
6. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D. "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance*, **9**, pp. 203-228 (1999).
7. Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. "Optimization of conditional value at Risk", *J. Risk*, **3**, pp. 21-41 (2000).
8. Pflag G.C. "Some remarks on value-at-risk and the conditional value-at-risk", In: Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Application (2000).
9. Soyster, A.L. "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming", *Operations Research*, **21**, pp. 1154-7 (1973).
10. Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. "Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data", *Mathematical Programming*, **88**, pp. 411-24 (2000).
11. ElGhaoui, L. and Labret, H. "Robust solutions to least-squares problems with uncertain data", *SIAM Journal,* **4**, pp. 1035-1064 (1999).
12. Bertsimas, D. and Sim, M. "The price of robustness", *Operations Research*, **52**, pp. 35-53 (2004).
13. Bental, A., Margalit, T. and Nemirovski, A., *Robust Modeling of Multi Stage Portfolio Problem*, High Performance Optimization Technique, Chapter 12 (1999).
14. Moon, Y. and Yao, T. "A robust mean absolute deviation model for portfolio optimization", *Computer & Operational Research*, **38**, pp. 1251-1258 (2011).
15. Quaranta, A.G. and Zaffaroni, A. "Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection", *Journal of Banking & Finance,* **32**, pp. 2046-2056 (2008).
16. Modarres Yazdi, M., Shamsi, A. and Tajbakhsh, A. "Robust optimization for multi periodic portfolio selection by using Worst case VaR", Sixth International Conference of Industrial Engineering (2009).
17. Hanafizadeh, P., Navabi, H. and Seyfi, A. "Comprehensive robust model for portfolio selection problem", Fourth International Conference of Industrial Engineering (2005).
18. Young, M.R. "A minimax portfolio selection rule with linear programming solution", *Management Science*, **44**, pp. 673-683 (1998).
19. Rothschild, M. and Stiglitz, J.E. "Increasing Risk: I. A Definition", *Journal of Economic Theory*, **2**, pp. 225-243 (1969).
20. Whitmore, G.A. and Findlay, M.C., *Stochastic Dominance: An Approach to Decision-Making Under Risk*, D.C. Heath, Lexington MA (1978).
21. Ogryczak, W. and Ruszczy'nski, A. "From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures", *European Journal of Operational Research,* **116**, pp. 33-50 (1999).
22. Ogryczak, W. "Stochastic dominance relation and linear risk measures", in: Financial Modelling — Proceedings of the 23rd Meeting of the EURO Working Group on Financial Modelling, A.M.J. Skulimowski (ed.), Progress & Business Publ., Cracow, pp. 191-212 (1999).
23. Shorrocks, A.F. "Ranking income distributions", *Economica,* **50**, pp. 3-17 (1983).