

# پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر با استفاده از شیوه‌ی بوت‌استرپ

امیرحسین امیری\* (استادیار)

محمدهادی دورودیان (کارشناس ارشد)  
دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۳  
دوره‌ی ۱ - ۳۰ شماره‌ی ۱/۲، ص. ۲۷-۳۱

در برخی موارد کیفیت یک محصول یا فرایند، به‌وسیله‌ی ترکیبی از مشخصه‌های کیفی متغیر و وصفی هم‌بسته بازنمایی می‌شود. تاکنون تحقیقات چندانی در زمینه‌ی پایش این‌گونه فرایندها صورت نگرفته است. در این نوشتار دو روش برای پایش همزمان مشخصه‌های کیفی و وصفی و متغیر با استفاده از شیوه‌ی بوت‌استرپ ارائه شده است. ابتدا روشی برای تعیین فاصله‌ی اطمینان همزمان برای مشخصه‌های کیفی و وصفی و متغیر پیشنهاد شده است. سپس، از این فاصله‌ی اطمینان به‌عنوان حدود کنترل برای پایش مشخصه‌های کیفی استفاده شده است. در ادامه، روش پیشنهادی به‌منظور طراحی چندین نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی توسعه داده شده است. روش‌های پیشنهادی، ضمن کشف وضعیت خارج از کنترل، قادر به تشخیص عامل انحراف در فرایند نیز هستند. نتایج نشان می‌دهد که احتمال خطای نوع اول روش‌های پیشنهادی در اغلب موارد، و به‌ویژه در مقادیر کم‌تر خطای نوع اول، به مقدار اسمی نزدیک‌تر است.

واژگان کلیدی: نمودار کنترل، فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر، شیوه‌ی بوت‌استرپ، متوسط طول دنباله، فاز ۲.

## ۱. مقدمه

در برخی کاربردهای کنترل فرایند آماری، مشخصه‌های کیفی هم‌بسته بیان‌گر کیفیت محصول یا فرایند هستند. در این موارد استفاده از چندین نمودار کنترل تک‌متغیره بدون در نظر گرفتن ساختار همبستگی، باعث افزایش احتمال خطای نوع ۱ کل نمودارهای کنترل می‌شود.<sup>[۱]</sup> از این رو نمودارهای کنترل چندمتغیره و چندمشخصه‌ی وصفی به‌طور جداگانه در شرایط و مفروضات مختلف توسعه داده شده‌اند. از پرکاربردترین نمودارهای کنترل چندمتغیره می‌توان به نمودارهای کنترل  $T^2$  (مجذور تی)،<sup>[۲]</sup> میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره (MEWMA)،<sup>[۳]</sup> و جمع تجمعی چندمتغیره (MCUSUM)<sup>[۴]</sup> اشاره کرد.<sup>[۵]</sup> در تحقیقاتی که اخیراً در زمینه‌ی نمودارهای چندمتغیره صورت گرفته به کشف عامل انحراف توجه ویژه شده است. به‌طور مثال، روش جدیدی برای ساده‌سازی کشف عامل انحراف پیشنهاد شده است.<sup>[۶]</sup> رویکرد تجزیه خطای غیر پارامتریکی براساس دسته‌بندی تک‌کلاسه<sup>[۷]</sup> ارائه شده و نیز نشان داده شد که عملکرد این رویکرد در توزیع‌های غیر نرمال، در مقایسه با روش تجزیه‌ی آماری  $T^2$ <sup>[۸]</sup> بهتر است. محققین ابتدا الگوریتم پرندگان<sup>۳</sup> را با استفاده از روش شبیه‌سازی تبرید<sup>۴</sup> بهبود بخشیده و سپس از ترکیب آن با روش چندکلاسه‌ی بردار پشتیبان ماشین<sup>۵</sup>، به تشخیص متغیر عامل انحراف پرداختند.<sup>[۹]</sup> در برخی فرایندها، چندین مشخصه‌ی کیفی و وصفی بیان‌گر کیفیت محصول یا فرایند هستند. آخرین مقاله مروری است بر نمودارهای کنترل برای فرایندهای چندمشخصه‌ی

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۲/۳۱، اصلاحیه ۱۳۹۱/۶/۲۵، پذیرش ۱۳۹۱/۸/۷.

amiri@shahed.ac.ir  
doroudyan@shahed.ac.ir

وصفی<sup>[۱۰]</sup> و اخیراً نیز روشی برای پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی بر مبنای استفاده از روش معکوس نورتا (NORTA)<sup>۶</sup> پیشنهاد شده است.<sup>[۱۱]</sup> محققین فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی را به چند گروه نقص دسته‌بندی<sup>[۱۲]</sup> و با استفاده از نمودار چندمتغیره  $p$  پایش کردند. آنان همچنین نمودار کنترل جدیدی برای پایش درصد خرابی در فرایندهای دومتغیره بینم<sup>[۱۳]</sup> پیشنهاد کرده‌اند. برای پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی خودهمبسته از ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و شبیه‌سازی تبرید استفاده شده است.<sup>[۱۴]</sup> پژوهش‌گران روش کنترل جدیدی براساس استفاده از چندین نمودار کنترل جمع تجمعی تک‌متغیره برای مشخصه‌های وصفی به‌همراه چندین آزمون فرض پیشنهاد کردند.<sup>[۱۵]</sup> بررسی تخمین نقطه‌ی تغییر در فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی<sup>[۱۶]</sup> براساس ترکیب روش تخمین بیشترین درست‌نمایی و رویکرد عمومی نمودار  $p$  صورت گرفته است.

در برخی موارد، کیفیت یک محصول یا فرایند توسط چندین مشخصه‌ی کیفی و وصفی و متغیر بازنمایی می‌شود. در یکی از مطالعات<sup>[۱۷]</sup> روشی برای تعیین حدود اطمینان همزمان برای نرخ خرابی مشخصه‌های کیفی و وصفی و متغیر ارائه شد که در آن مشخصه‌های کیفی و وصفی و متغیر از یکدیگر مستقل فرض شده‌اند. این در حالی است که گاهی اوقات فرض استقلال بین مشخصه‌های کیفی نقض می‌شود. به‌طور مثال در صنایع تولید محصولات پلیمری تعداد عیوب یک محصول با وزن محصول همبستگی دارد، که به‌عنوان مشخصه‌های کیفی و وصفی و متغیر باید به‌طور همزمان کنترل شوند. علی‌رغم مطالعات فراوان صورت گرفته در زمینه‌ی فرایندهای

چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر به صورت جداگانه، تاکنون روشی برای پایش همزمان مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر همبسته ارائه نشده است.

در این مقاله دو روش برای پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر براساس شیوه‌ی بوت‌استرپ ارائه می‌شود. در روش اول، حدود اطمینان همزمان جدیدی برای مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر همبسته براساس شیوه‌ی بوت‌استرپ ارائه می‌شود. در روش دوم با استفاده از شیوه‌ی بوت‌استرپ برای آماره‌ی میانگین موزون متحرک نمایی زمانی که روی مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر همبسته استفاده شوند، حدود اطمینان همزمان تعریف می‌شود. در نهایت، از این حدود اطمینان به منظور طراحی چندین نمودار کنترل همزمان و پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر استفاده می‌شود. روش‌های پیشنهادی علاوه بر کشف وضعیت خارج از کنترل، قادر به تشخیص متغیر عامل انحراف نیز هست. تحقیق حاضر برای استفاده در فاز ۲ نمودار کنترل است؛ بنابراین پارامترهای توزیع مشخصه‌های کیفی معلوم فرض می‌شود. عملکرد روش‌های پیشنهادی در قالب یک مثال عددی و با استفاده از شبیه‌سازی براساس مشخصه‌ی متوسط طول دنباله بررسی می‌شود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش بعدی مسئله مورد بررسی به همراه مفروضات آن تعریف می‌شود. سپس در بخش سوم به تشریح روش‌های پیشنهادی پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی مثال عددی به منظور بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی در بخش چهارم ارائه شده، و در بخش نهایی نتیجه‌گیری و برخی پیشنهادات آتی ارائه می‌شود.

## ۲. تعریف مسئله

در برخی موارد، کیفیت یک محصول یا فرایند توسط برداری از مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر به صورت  $\mathbf{x} = (x_{11} \dots x_{1p} x_{21} \dots x_{2q})^T$  بازنمایی می‌شود که در آن  $x_{ij}$ ها مشخصه‌های کیفی متغیرند و از توزیع‌های پیوسته‌ی نظیر نرمال یا گاما پیروی می‌کنند؛  $x_{2j}$ ها نیز مشخصه‌های کیفی وصفی هستند که دارای توزیع‌هایی نظیر پواسون و بینم هستند. همچنین فرض می‌شود که مشخصه‌های کیفی دارای همبستگی‌اند. از آنجا که تحقیق حاضر در فاز ۲ نمودارهای کنترل صورت گرفته، پارامترهای توزیع مشخصه‌های کیفی همانند بردار میانگین و ماتریس واریانس - کوواریانس، معلوم فرض می‌شوند. در این نوشتار به دنبال پایش بردار میانگین مشخصه‌های کیفی هستیم، اما تغییر در پارامتر میانگین برخی از توزیع‌ها همچون پواسون و گاما باعث تغییر در واریانس این مشخصه‌های کیفی نیز می‌شود. بدیهی است تغییر در واریانس مشخصه‌های کیفی باعث تغییر در کوواریانس مشخصه‌ها یا ضریب همبستگی بین آنها خواهد شد. در این نوشتار فرض بر آن است که این تغییر در کوواریانس مشخصه‌های کیفی رخ می‌دهد و ضریب همبستگی بین مشخصه‌ها در طول زمان ثابت است.

از جمله مشکلات پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر می‌توان به چولگی برخی توزیع‌های مشخصه‌های کیفی مانند گاما و پواسون، پیچیدگی تابع توزیع توأم متغیرهای گسسته و پیوسته و وجود همبستگی بین مشخصه‌های کیفی گسسته و پیوسته اشاره کرد. لازم به ذکر است که پایش مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر همبسته بدون در نظر گرفتن ساختار همبستگی باعث افزایش احتمال خطای کل نمودار کنترل می‌شود و تاکنون روشی برای پایش همزمان آنها ارائه نشده است. در بخش بعدی دو روش براساس حدود اطمینان همزمان برای پایش همزمان مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر ارائه می‌شود.

## ۳. روش‌های پیشنهادی

شیوه‌های مختلفی برای پایش همزمان مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر وجود دارد. یکی از این شیوه‌ها «استفاده از حدود اطمینان همزمان» است که روش‌های متفاوتی برای تعیین آن در مشخصه‌های کیفی همبسته پیشنهاد شده است. روش بونفرونی<sup>[۱۸]</sup> و سیداک<sup>[۱۹]</sup> از معروف‌ترین این روش‌هاست. در روش بونفرونی، تعیین حدود اطمینان مستلزم تعداد نمونه زیادی است و معمولاً به دلیل عدم وجود داده‌ی کافی استفاده از این روش باعث افزایش احتمال خطای نوع ۱ نمودار کنترل می‌شود. همچنین مشکل روش سیداک در نظر نگرفتن ساختار همبستگی بین مشخصه‌های کیفی است. شیوه‌ی دیگری که اخیراً مورد توجه قرار گرفته و نشان داده شده که مشکلات روش‌های یادشده (بونفرونی و سیداک) را ندارد، شیوه‌ی بوت‌استرپ<sup>[۲۰]</sup> است.

شیوه‌ی بوت‌استرپ اولین بار توسط افرون<sup>[۲۱]</sup> به منظور تخمین پارامترهای مورد نیاز براساس توزیع متغیرهای تصادفی پیشنهاد شده است. فرض اساسی در این شیوه ثابت بودن توزیع متغیرهای تصادفی در طول زمان و استقلال بردار مشاهدات از یکدیگر است. در این شیوه، ابتدا عملکرد فاصله‌ی اطمینان براساس معیار احتمال خطای نوع اول در روش‌های موجود و پیشنهادی تخمین زده می‌شود. سپس به میزان مورد نیاز از متغیر تصادفی به وسیله‌ی شبیه‌سازی عدد تصادفی تولید می‌شود. در زمینه‌ی کاربردهای شیوه‌ی بوت‌استرپ تحقیقات متعددی انجام شده است.<sup>[۲۲]</sup> به منظور غلبه بر مشکلات پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر، در این نوشتار دو روش برای تعیین حدود اطمینان همزمان متغیرهای گسسته و پیوسته براساس شیوه‌ی بوت‌استرپ<sup>[۲۰]</sup> ارائه می‌شود. سپس از حدود اطمینان همزمان پیشنهادی برای طراحی نمودار کنترل به منظور پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر استفاده می‌شود. بنابراین، در روش‌های پیشنهادی ساختار همبستگی بین مشخصه‌های کیفی در نظر گرفته می‌شود.

براساس شیوه‌ی بوت‌استرپ<sup>[۲۰]</sup> ابتدا ضروری است پارامترهای مشخصه‌های کیفی براساس نمونه‌ی در اختیار تخمین زده شود. از آنجا که تحقیق حاضر در فاز ۲ نمودار کنترل صورت می‌گیرد، پارامترهای توزیع مشخصه‌های کیفی براساس خروجی فاز ۱ معلوم‌اند. بنابراین، با استفاده از شبیه‌سازی تعداد  $m$  مشاهده به صورت بردار چندمشخصه‌ی مبتنی بر توزیع مشخصه‌های کیفی تولید می‌کنیم. برای هر بردار مشاهده متغیرهای بوت‌استرپ زیر محاسبه می‌شود:

$$B_{(i)}^{*(\max)} = \max \{t_{(i)}\}; \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$B_{(i)}^{*(\min)} = \min \{t_{(i)}\}; \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2)$$

که در آن:

$$t_{(i)} = \left( \frac{x_{11i} - \mu_{11}}{\sigma_{11}}, \dots, \frac{x_{1pi} - \mu_{1p}}{\sigma_{1p}}, \frac{x_{21i} - \mu_{21}}{\sigma_{21}}, \dots, \frac{x_{2qi} - \mu_{2q}}{\sigma_{2q}} \right) \quad (3)$$

با توجه به این که هر یک از بردارهای حاصل از رابطه‌ی ۳ در روابط ۱ و ۲ جایگزین می‌شود. همچنین در روابط ۱ و ۲، به ترتیب مقدار آماره توزیع‌های بوت‌استرپ  $B^{*(\min)}$  و  $B^{*(\max)}$  از تغییرات همزمان مشخصه‌های کیفی استاندارد شده براساس توابع پیوسته بیشینه و کمینه به دست می‌آید. در توزیع‌های بوت‌استرپ به دست آمده همبستگی بین مشخصه‌های کیفی در نظر گرفته می‌شود.<sup>[۲۰]</sup> توزیع بوت‌استرپ با استفاده از شبیه‌سازی و تولید مشاهدات تصادفی تخمین زده می‌شود.

آماره‌ی نمودار کنترل در روش پیشنهادی، مشاهدات حاصل از نمونه برداری از فرایند است. این مشاهدات با حدود اطمینان همزمان ارائه شده مقایسه می‌شوند. براساس قانون هشدار<sup>۷</sup>، هرگاه مقدار یکی از مشخصه‌های کیفی خارج از حدود کنترل (اطمینان) قرار گیرد، فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود، و مشخصه‌ی کیفی مربوطه به‌عنوان عامل ایجاد انحراف معرفی می‌شود. لازم به ذکر است، به‌منظور شبیه‌سازی مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر وابسته از تابع گوسی کاپولا<sup>۸</sup> استفاده می‌شود.<sup>[۲۳]</sup>

به‌منظور ارزیابی عملکرد اولین روش پیشنهادی، ابتدا عملکرد فاصله‌ی اطمینان براساس مشخصه‌ی احتمال خطای نوع اول در روش‌های موجود و پیشنهادی تخمین زده می‌شود. همچنین از آنجا که این حدود اطمینان برای طراحی نمودار کنترل پیشنهاد شده، از مشخصه‌ی متوسط طول دنباله تحت کنترل نیز برای مقایسه‌ی نتایج با یکدیگر استفاده می‌شود. سپس، عملکرد اولین روش پیشنهادی در پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر براساس مشخصه‌ی متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل، زمانی که میانگین فرایند تغییر کند، بررسی می‌شود. بدین‌منظور متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل به‌ازای مقادیر مختلف تغییر در میانگین مشخصه‌های کیفی به‌وسیله‌ی شبیه‌سازی به دست می‌آید.

روش دیگری که در این نوشتار پیشنهاد می‌شود، استفاده از رویکرد پیشنهادی به‌منظور طراحی همزمان چندین نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمای EWMA) با در نظر گرفتن ساختار همبستگی به‌منظور پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر است.

در دومین روش پیشنهادی، ابتدا  $n$  بردار تصادفی براساس توزیع مشخصه‌های کیفی تولید می‌شود. سپس تمامی مشاهدات مطابق رابطه ۷ تغییر متغیر داده می‌شوند:

$$y_t = \left( \frac{x_{11t} - \mu_{11}}{\sigma_{11}}, \dots, \frac{x_{1pt} - \mu_{1p}}{\sigma_{1p}}, \frac{x_{21t} - \mu_{21}}{\sigma_{21}}, \dots, \frac{x_{2qt} - \mu_{2q}}{\sigma_{2q}} \right) \quad (7)$$

به‌منظور تخمین توزیع آماره‌ی میانگین موزون متحرک نمای،<sup>[۲۴]</sup> بردار مشاهدات تغییر شکل یافته  $(y_t)$  را در آماره ارائه شده در رابطه‌ی ۸ قرار می‌دهیم:

$$z_t = \lambda y_t + (1 - \lambda) z_{t-1} \quad (8)$$

$\lambda$  مقدار ثابت هموارسازی است و به‌انتخاب طراح نمودار کنترل، مقداری در بازه  $(0, 1)$  به خود اختصاص می‌دهد. همچنین در رابطه‌ی بازگشتی فوق مقدار آغازین  $(z_0)$  برابر بردار صفر قرار داده می‌شود. سپس برای هر بردار مشاهده از توزیع آماره‌ی کنترلی، متغیرهای بوت‌استرپ محاسبه می‌شود:

$$B_t^{*(\max)} = \max \{z_t\}; \quad \forall t = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$B_t^{*(\min)} = \min \{z_t\}; \quad \forall t = 1, \dots, n \quad (10)$$

در ادامه با تعیین احتمال خطای نوع اول مورد نظر، حدود اطمینان  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  را برای هر آماره‌ی کنترلی مشخصه‌ی کیفی براساس رابطه‌ی ۱۱ محاسبه می‌کنیم:

$$CI_\alpha(Z_j) = [O_{(\alpha/2)}, O_{(1-\alpha/2)}]; \quad \forall j = 1, \dots, p + q \quad (11)$$

که در آن  $O_{(\alpha/2)}$  و  $O_{(1-\alpha/2)}$ ، به‌ترتیب  $n(\alpha/2)$  و  $n(1 - \alpha/2)$  امین آماره‌ی ترتیبی توزیع‌های  $B^{*(\min)}$  و  $B^{*(\max)}$  هستند.

با به دست آوردن حدود اطمینان همزمان برای مشخصه‌های کیفی، از این حدود به‌عنوان حدود کنترل برای نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمای استفاده

حال براساس تخمین توزیع بوت‌استرپ می‌توان حدود اطمینان  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  را برای هر مشخصه‌ی کیفی براساس رابطه‌ی ۴ محاسبه کرد:

$$CI_\alpha(x_j) = [\mu_j - Q_{(1-\alpha/2)}\sigma_j, \mu_j + Q_{(\alpha/2)}\sigma_j]; \quad \forall j = 1, \dots, p + q \quad (4)$$

که در آن  $Q_{(1-\alpha/2)}$ ، نماینده‌ی  $m(1 - \alpha/2)$  امین آماره‌ی ترتیبی توزیع  $B^{*(\max)}$  است. به‌همین ترتیب  $m(\alpha/2)$  امین آماره‌ی ترتیبی  $B^{*(\min)}$ ، برابر  $Q_{(\alpha/2)}$  تعریف می‌شود. در نتیجه یک فاصله‌ی اطمینان بر مبنای درصدی از توزیع بوت‌استرپ به دست می‌آید که مجانباً بازه مورد نظر را پوشش می‌دهد.<sup>[۲۴]</sup> ضمن این که بازه تعریف شده برخلاف حدود اطمینان براساس روش‌های ذکر شده (بونفرونی و سیداک)، به‌صورت غیرمتقارن است و به نظر می‌رسد برای توزیع‌هایی که چولگی دارند، مناسب باشد. لازم به ذکر است که  $\alpha$  ارائه شده در رابطه‌ی ۴ احتمال خطای نوع ۱ کل است.

با وجود تخمین مناسب حدود اطمینان ارائه شده در رابطه‌ی ۴، نسبت به روش‌های بونفرونی و سیداک،<sup>[۲۵]</sup> براساس بررسی‌های صورت گرفته -- که نتایج آن به‌تفصیل در بخش بعدی ارائه شده است -- حدود اطمینان ارائه شده در رابطه‌ی ۴ برای مقادیر کم‌تر احتمال خطای نوع اول دارای نقاط ضعفی است که باعث می‌شود کارایی این حدود اطمینان به‌منظور استفاده در طراحی نمودار کنترل دچار مشکلاتی شود. از این رو در این مقاله پیشنهاد می‌شود، به‌منظور تعیین حدود اطمینان هم‌زمان برای مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر همبسته، به‌جای رابطه‌ی ۴ از رابطه‌ی ۵ استفاده شود.

$$CI_\alpha(x_j) = [\mu_j + Q_{(\alpha/2)}\sigma_j, \mu_j + Q_{(1-\alpha/2)}\sigma_j]; \quad \forall j = 1, \dots, p + q \quad (5)$$

سپس از این فاصله‌ی اطمینان به‌منظور طراحی نمودار کنترل برای پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر استفاده شود. بنابراین پس از تعیین احتمال خطای نوع اول مورد نظر  $(\alpha)$ ، با به دست آوردن حدود اطمینان همزمان برای مشخصه‌های کیفی، از این حدود اطمینان به‌عنوان حدود کنترل برای نمودار کنترل استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که  $\alpha$  در رابطه‌ی ۵ نشان‌گر احتمال خطای نوع اول کلی براساس حدود اطمینان پیشنهادی است. به‌عبارت دیگر در روش بوت‌استرپ، فواصل اطمینان برای مشخصه‌های کیفی همبسته به‌گونه‌ی تعیین می‌شود که احتمال خطای نوع اول کلی برابر مقدار مشخصی باشد و احتمال خطای نوع اول هر یک از مشخصه‌های کیفی برابر مقدار  $\alpha$  نیست. همچنین احتمال خطای نوع اول مرتبط با هر یک از مشخصه‌ها لزوماً مساوی نیست.

$$\Pr \left( \begin{matrix} \mu_{11} + Q_{(\alpha/2)}\sigma_{11} \leq x_{11} \leq \mu_{11} + Q_{(1-\alpha/2)}\sigma_{11} \\ \dots, \mu_{1p} + Q_{(\alpha/2)}\sigma_{1p} \leq x_{1p} \leq \mu_{1p} + Q_{(1-\alpha/2)}\sigma_{1p} \\ \dots, \mu_{21} + Q_{(\alpha/2)}\sigma_{21} \leq x_{21} \leq \mu_{21} + Q_{(1-\alpha/2)}\sigma_{21} \\ \dots, \mu_{2q} + Q_{(\alpha/2)}\sigma_{2q} \leq x_{2q} \leq \mu_{2q} + Q_{(1-\alpha/2)}\sigma_{2q} \end{matrix} \right) = 1 - \alpha \quad (6)$$

با توجه به پیچیدگی تابع توزیع توأم فرایندهای چندمشخصه‌ی متغیر - وصفی، اثبات ریاضی رابطه‌ی ۶ به‌راحتی امکان‌پذیر نیست. از این رو به‌منظور بررسی عملکرد فاصله‌ی اطمینان پیشنهادی به‌منظور استفاده در طراحی نمودار کنترل، در بخش بعدی از روش شبیه‌سازی استفاده می‌شود.

می‌شود. لازم به ذکر است قبل از قرار دادن مشاهدات در آماره‌ی کنترلی تغییر، متغیر رابطه‌ی ۷ و ۸ روی بردار مشاهدات اعمال می‌شود. براساس قانون هشدار، هر گاه مقدار یکی از مشخصه‌های کیفی خارج از حدود کنترل (اطمینان) قرار گیرد، فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته شده و متغیر مربوطه به عنوان عامل ایجاد انحراف معرفی می‌شود.

حدود اطمینان رابطه‌ی ۱۱ همان حدود اطمینان پیشنهادی در رابطه‌ی ۵ است، با این تفاوت که حدود اطمینان رابطه‌ی ۱۱ برای مشاهدات تغییر شکل یافته توسط روابط ۷ و ۸، به منظور طراحی چندین نمودار کنترل EWMA برای پایش همزمان مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر توسعه داده شده است. به منظور تشریح بیشتر و همچنین ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی، در بخش بعدی یک مثال عددی با استفاده از شبیه‌سازی ارائه می‌شود.

#### ۴. مثال عددی

در این مثال کیفیت محصول توسط بردار  $x = (x_1 \ x_2)^T$  بازنمایی می‌شود. براساس اطلاعات فاز ۱ مشخصه‌ی کیفی اول  $(x_1)$  دارای توزیع نرمال با میانگین ۳ و واریانس ۴ است، و مشخصه‌ی کیفی دوم دارای توزیع پواسون با پارامتر ۴ است؛ و نیز مشخصه‌های کیفی با یکدیگر همبسته‌اند. به منظور بررسی عملکرد حدود اطمینان پیشین<sup>[۲۰]</sup> در رابطه‌ی ۴ و پیشنهادی در رابطه‌ی ۵ برای مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر، حدود اطمینان براساس احتمال خطای نوع اول مورد انتظار ۰٫۱، ۰٫۰۵، ۰٫۰۱، ۰٫۰۰۵، ۰٫۰۰۲۵ براساس هر دو روش تعیین می‌شود و سپس میزان احتمال خطای نوع اول در این فواصل اطمینان برآورد می‌شود. همچنین میزان همبستگی‌های مختلف ۰٫۳۵ و ۰٫۷۵ برای مشخصه‌های کیفی در نظر گرفته می‌شود، تا اثر میزان همبستگی نیز در نظر گرفته شود.

با توجه به مشخص بودن توزیع مشخصه‌های کیفی، براساس شیوه‌ی بوت‌استرپ، تعداد ۱۰ میلیون بردار تصادفی از مشخصه‌های کیفی به‌وسیله‌ی تابع گوسی کاپولا<sup>[۲۱]</sup> تولید می‌شود. سپس به ترتیب توزیع‌های بوت‌استرپ  $B^*(\max)$  و  $B^*(\min)$  به‌وسیله‌ی روابط ۱ و ۲ تخمین زده می‌شود. جدول ۱ احتمال خطای نوع اول و اختلاف از مقدار اسمی را به‌ازای مقادیر مختلف احتمال خطای نوع اول مورد انتظار و همبستگی بین مشاهدات براساس روابط ۴ و ۵ نشان می‌دهد.

مشاهدات جدول ۱ نشان می‌دهد که فاصله‌ی اطمینان به دست آمده از رابطه‌ی ۴ تقریب خوبی دارد ولی به منظور استفاده در نمودار کنترل برای پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر نقاط ضعفی دارد. یادآور می‌شود که معمولاً توصیه می‌شود نمودارهای کنترل به منظور پایش فرایندها دارای خطای نوع اول کلی در

حدود ۰٫۰۰۵ یا کم‌تر باشند،<sup>[۲۵]</sup> یا بطور معادل دارای متوسط طول دنباله تحت کنترل ۲۰۰ یا بیشتر باشند. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود دقت رابطه‌ی ۵ برای تعیین حدود اطمینان در احتمال خطای نوع اول کم‌تر، بیشتر است. این موضوع برای مقادیر مختلف همبستگی برقرار است. چنان که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، مقدار مشخصه‌ی متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل، برای حدود کنترل به دست آمده از رابطه‌ی ۵ در تخمین‌ها غالباً به مقدار اسمی نزدیک‌تر است. این مطلب به‌ویژه برای مقادیر متوسط طول دنباله‌ی مورد انتظار ۱۰۰ و بزرگ‌تر، نشان‌گر ضعف رابطه‌ی ۴ در طراحی نمودار کنترل است. از این رو به منظور تعیین حدود کنترل برای پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر از رابطه‌ی ۵ استفاده می‌شود.

در ادامه، به منظور ارزیابی عملکرد اولین روش پیشنهادی در پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر، مقدار همبستگی بین مشخصه‌های کیفی در مثال ذکر شده را برابر ۰٫۳۵ در نظر می‌گیریم و به طراحی نمودار کنترل با احتمال خطای نوع اول ۰٫۰۵ می‌پردازیم. بنابراین، حدود اطمینان همزمان به دست آمده برای مشخصه‌های کیفی براساس رابطه‌ی ۵ به ترتیب برابر  $(-۲٫۱۰، ۶۲)$  و  $(-۱٫۶۲، ۱۱)$  برای مشخصه‌های کیفی اول و دوم است. میانگین طول دنباله‌ی تحت کنترل براساس مطالعات شبیه‌سازی، با ۱۰۰۰۰ بار تکرار، برابر ۲۷۷ تخمین زده شده است. به منظور ارزیابی عملکرد اولین روش پیشنهادی، میانگین طول دنباله‌ی خارج از کنترل به همراه درصد تشخیص مشخصه‌ی عامل انحراف به‌ازای مقادیر مختلف تغییر در میانگین مشخصه‌های کیفی، براساس ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی، در جدول ۳ گزارش شده است. مقادیر مختلف تغییر در جدول ۳ به‌صورت  $(\theta_1, \theta_2)$  نشان داده شده‌اند، که در آن‌ها  $\theta_1$  نشان‌دهنده‌ی مقدار افزایش در میانگین مشخصه‌ی کیفی براساس انحراف مشخصه‌ی آن است.

داده‌های جدول ۳ نشان می‌دهد که اولین روش پیشنهادی قادر به کشف وضعیت خارج از کنترل است. همچنین به میزان قابل توجهی قادر به تشخیص مشخصه‌ی کیفی خارج از کنترل نیز هست، به طوری که با افزایش مقدار تغییر در میانگین مشخصه‌ی کیفی توانایی نمودار در کشف حالت خارج از کنترل و درصد تشخیص مشخصه‌ی عامل انحراف افزایش می‌یابد.

به منظور ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی دوم یعنی استفاده از شیوه‌ی بوت‌استرپ برای پایش فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر با استفاده از چندین نمودار کنترل میانگین موزون متحرک نمایی، ابتدا ۱ میلیون بردار تصادفی براساس توزیع مشخصه‌های کیفی تولید می‌کنیم. پس از تغییر فرم مشاهدات براساس رابطه‌ی ۷، توزیع آماره‌ی مورد نظر را به‌وسیله‌ی تغییر بردارهای تصادفی با رابطه‌ی ۸ تخمین می‌زنیم. لازم به ذکر است که مقدار ثابت هموارسازی برابر ۰٫۲ در نظر گرفته می‌شود. سپس متغیرهای توزیع بوت‌استرپ به‌صورت روابط ۹ و ۱۰ تخمین زده می‌شوند.

جدول ۱. مقایسه‌ی روش پیشنهادی در رابطه‌ی ۵ با روش ارائه‌شده در رابطه‌ی ۴<sup>[۲۳]</sup> براساس معیار خطای نوع اول در مثال عددی.

مقدار همبستگی	۰		۰٫۳۵		۰٫۷۵	
	تخمین خطای		تخمین خطای		تخمین خطای	
	نوع اول	نوع اول از مقدار اسمی	نوع اول	نوع اول از مقدار اسمی	نوع اول	نوع اول از مقدار اسمی
	(۴)	(۵)	(۴)	(۵)	(۴)	(۵)
۰٫۱	۰٫۱۰۳۴	۰٫۰۹۲۴	۰٫۰۳۴	۰٫۰۷۶	۰٫۰۴۱	۰٫۱۴۱
۰٫۰۵	۰٫۰۴۹۷	۰٫۰۳۸	۰٫۰۰۳	۰٫۰۱۳۲	۰٫۰۰۶۶	۰٫۰۲۲
۰٫۰۱	۰٫۰۱۴۵	۰٫۰۰۹۱	۰٫۰۰۴۵	۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۱۲
۰٫۰۰۵	۰٫۰۱۰۸	۰٫۰۰۳۶	۰٫۰۰۵۸	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۴۷	۰٫۰۱۴
۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۰۴۳	۰٫۰۰۲۴	۰٫۰۰۱۸	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۲

جدول ۲. مقایسه‌ی روش پیشنهادی در رابطه‌ی ۵ با روش ارائه‌شده در رابطه‌ی ۴ [۲۲] براساس معیار متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل.

همبستگی	°		°/۳۵		°/۷۵	
	تخمین متوسط	اختلاف متوسط	تخمین متوسط	اختلاف متوسط	تخمین متوسط	اختلاف متوسط
	طول دنباله‌ی تحت کنترل	طول دنباله‌ی تحت کنترل	طول دنباله‌ی تحت کنترل	طول دنباله‌ی تحت کنترل	طول دنباله‌ی تحت کنترل	طول دنباله‌ی تحت کنترل
۱۰	۹/۶۷	۱۰/۸۲	۹/۸۲	۱۰/۹۲	۱۱/۶۴	۱۰/۴۳
۲۰	۲۰/۱۲	۲۷/۱۷	۲۰/۹۲	۲۷/۳۲	۲۰/۹۲	۳/۰۴
۱۰۰	۶۸/۹۷	۱۰۹/۸۹	۷۰/۴۲	۱۰۹/۸۹	۷۸/۷۴	-۲۱/۲۶
۲۰۰	۹۲/۵۹	۲۷۷/۷۸	۹۳/۴۶	۲۷۷/۷۸	۱۰۳/۰۹	-۹۶/۹۱
۴۰۰	۲۳۲/۵۶	۴۱۶/۶۷	۲۳۸/۱۰	۴۱۶/۶۷	۲۵۶/۴۱	-۱۴۳/۵۹

جدول ۳. متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل (ARL<sub>1</sub>) به‌ازای مقادیر مختلف تغییر در میانگین مشخصه‌های کیفی در روش اول.

تغییر	ARL <sub>1</sub>	درصد تشخیص عامل انحراف برای		
		مشخصه اول	مشخصه دوم	هر دو مشخصه
(σ <sub>1</sub> °)	۱۴۰/۷۴	۸۷/۴۷	۱۱/۲۹	۱/۲۴
(۲σ <sub>1</sub> °)	۱۵	۹۸/۶۷	۰/۸۷	۰/۴۶
(۳σ <sub>1</sub> °)	۳/۲۶	۹۹/۷۸	۰/۰۷	۰/۱۵
(° σ <sub>2</sub> )	۴۳/۴۵	۱۱/۸۹	۸۷/۸۷	۰/۲۴
(° ۲σ <sub>2</sub> )	۸/۶۵	۲/۲۸	۹۷/۵۹	۰/۱۳
(° ۳σ <sub>2</sub> )	۳/۲۶	۰/۸۶	۹۹/۰۴	۰/۱
(σ <sub>1</sub> σ <sub>2</sub> )	۳۹/۲	۲۰/۵	۷۶/۵۸	۲/۹۲
(۲σ <sub>1</sub> ۲σ <sub>2</sub> )	۶/۲۴	۲۹/۸۴	۵۷/۷۹	۱۲/۳۷
(۳σ <sub>1</sub> ۳σ <sub>2</sub> )	۲/۱۳	۳۶/۵۹	۳۳/۷۳	۲۹/۶۸

جدول ۵. متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل (ARL<sub>1</sub>) به‌ازای مقادیر مختلف تغییر در میانگین مشخصه‌های کیفی در روش دوم.

تغییر	ARL <sub>1</sub>	درصد تشخیص عامل انحراف برای		
		مشخصه اول	مشخصه دوم	هر دو مشخصه
(σ <sub>1</sub> °)	۱۲/۴۱	۹۹/۰۸	۰/۷۲	۰/۲
(۲σ <sub>1</sub> °)	۴/۰۸	۹۹/۸۷	۰/۰۶	۰/۰۷
(۳σ <sub>1</sub> °)	۲/۵۴	۹۹/۹۶	۰/۰۱	۰/۰۳
(° σ <sub>2</sub> )	۱۱/۲۸	۱/۶	۹۸/۲۶	۰/۱۴
(° ۲σ <sub>2</sub> )	۴/۲	۰/۳۲	۹۹/۶۵	۰/۰۳
(° ۳σ <sub>2</sub> )	۲/۶۶	۰/۰۷	۹۹/۹۰	۰/۰۳
(σ <sub>1</sub> σ <sub>2</sub> )	۸/۵۷	۳۹/۵۴	۴۹/۱۹	۱۱/۲۷
(۲σ <sub>1</sub> ۲σ <sub>2</sub> )	۳/۴	۳۵/۹۶	۳۶/۱۱	۲۷/۹۳
(۳σ <sub>1</sub> ۳σ <sub>2</sub> )	۲/۲۳	۲۹/۹۳	۲۵/۸۲	۴۴/۲۵

جدول ۴. تخمین احتمال خطای نوع اول در روش دوم.

احتمال خطای نوع اول اسمی	میزان همبستگی		
	°/۷۵	°/۳۵	°
۰/۱	۰/۰۴۷۶	۰/۰۴۵۵	۰/۰۵
۰/۰۵	۰/۰۲۵۶	۰/۰۲۵	۰/۰۲۶۳
۰/۰۱	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۶۲
۰/۰۰۵	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۳۲
۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱۸

تعیین می‌شود. متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل براساس ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی برابر ۳۰° به دست می‌آید. برای ارزیابی عملکرد دومین روش پیشنهادی در کشف وضعیت خارج از کنترل همانند روش قبل، متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل به‌همراه درصد تشخیص عامل انحراف به‌ازای مقادیر مختلف تغییر در بردار میانگین مشخصه‌های کیفی در جدول ۵ گزارش شده است.

با توجه به نتایج به دست آمده در جدول ۵، ملاحظه می‌شود که دومین روش پیشنهادی به‌خوبی توانسته وضعیت خارج از کنترل و مشخصه‌ی کیفی مربوطه را کشف کند. همچنین دومین روش پیشنهادی به میزان قابل ملاحظه‌ی باعث ایجاد بهبود در قدرت نمودار کنترلی در کشف حالت خارج از کنترل، به‌خصوص در کشف تغییرات کوچک در میانگین مشخصه‌های کیفی شده است؛ به‌طوری که علی‌رغم بیشتر بودن میانگین طول دنباله‌ی تحت کنترل روش دوم از روش اول (۳۰۰ < ۲۷۷)، میانگین طول دنباله‌ی خارج از کنترل روش دوم کم‌تر از روش اول است. (باید توجه داشت که در شیفت‌های بزرگ عملکرد دو روش تقریباً یکسان می‌شود.)

### ۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار دو روش برای کنترل فرایندهای چندمشخصه‌ی وصفی و متغیر در فاز ۲ براساس شیوه‌ی بوت‌استرپ ارائه شد. در روش اول، حدود اطمینان همزمان

همانند روش قبل، به‌منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی، حدود اطمینان براساس احتمال خطای نوع اول مورد انتظار ۰/۱، ۰/۰۵، ۰/۰۱، ۰/۰۵، ۰/۰۰۵ و ۰/۰۰۲۵ تعیین می‌شود و میزان احتمال خطای نوع اول در این فواصل اطمینان تخمین زده می‌شود. همچنین میزان همبستگی‌های مختلف ۰، ۰/۳۵ و ۰/۷۵ برای مشخصه‌های کیفی در نظر گرفته می‌شود، تا تأثیر میزان همبستگی نیز لحاظ شده باشد. جدول ۴ رضایت‌بخش بودن نتایج این بررسی را نشان می‌دهد.

در ادامه به‌منظور ارزیابی عملکرد دومین روش پیشنهادی، مقدار همبستگی بین مشخصه‌های کیفی در مثال ذکر شده را برابر ۰/۳۵ در نظر می‌گیریم. به‌منظور طراحی نمودار کنترل، احتمال خطای نوع اول نمودار کنترل برابر ۰/۰۵ در نظر گرفته می‌شود. بنا براین، حدود اطمینان برای مشخصه‌های کیفی برابر (۰/۹۶، ۱/۰۶) (-)

بوت‌استرپ، فاصله‌ی اطمینان همزمان برای آماره‌ی کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی زمانی که روی مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر اعمال می‌شود، پیشنهاد شد. احتمال خطای نوع اول این نمودار نیز با استفاده از شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفت و نزدیک بودن احتمال خطای نوع اول این نمودار به احتمال خطای نوع اول اسمی مورد تأیید قرار گرفت. سپس از این حدود اطمینان به منظور طراحی نمودار کنترل در فاز ۲ استفاده شد. نتایج حاصل از مطالعات شبیه‌سازی نشان‌دهنده‌ی بهبود عملکرد روش پیشنهادی در مقایسه با روش اول پیشنهادی در کشف حالت خارج از کنترل و تشخیص مشخصه عامل انحراف است.

جدیدی برای پایش مشخصه‌های کیفی وصفی و متغیر ارائه شد. عملکرد روش پیشنهادی با بهترین روش موجود در ادبیات موضوع در قالب یک مثال عددی و با استفاده از شبیه‌سازی و مشخصه احتمال خطای نوع اول و متوسط طول دنباله تحت کنترل مقایسه شده است. نتایج نشان داد که روش پیشنهادی در مواردی که احتمال خطای نوع اول حدود اطمینان همزمان کم‌تر است، بهتر عمل می‌کند. سپس از این حدود اطمینان به عنوان حدود کنترل برای طراحی نمودار کنترل استفاده شد. روش پیشنهادی علاوه بر این که قادر به کشف حالت خارج از کنترل است، مشخصه‌ی کیفی عامل ایجاد انحراف را نیز تشخیص می‌دهد. در روش دوم براساس شیوه‌ی

### پانویس‌ها

1. multivariate exponentially weighted moving average (MEWMA)
2. multivariate cumulative sum (MCUSUM)
3. particle swarm optimization
4. simulated annealing
5. support vector machine
6. normal to anything (NORTA)
7. signal rule
8. Gaussian Copula

### منابع (References)

1. Hotelling, H., *Multivariate Quality Control—Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights in Techniques of Statistical Analysis*, Eds. Eisenhart, C., Hastay, M.W., Wallis, W.A., McGraw-Hill, New York, pp. 111-184 (1947).
2. Mason, R.L. and Young, J.C., *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*, ASA/SIAM, Philadelphia (2002).
3. Lowry, C.A., Woodall, W.H., Champ, C.W. and Rigdon, S.E. "A multivariate exponentially weighted moving average control chart", *Technometrics*, **34**(1), pp. 46-53 (1992).
4. Healy, J.D. "A note on multivariate CUSUM procedures", *Technometrics*, **29**(4), pp. 409-412 (1987).
5. Bersimis, S., Psarakis, S. and Panaretos, J. "Multivariate statistical process control charts: An overview", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**(5), pp. 517-543 (2007).
6. Butte, V.K. and Tang, L.C. "Multivariate charting techniques: a review and a line-column approach", *Quality and Reliability Engineering International*, **26**(5), pp. 443-451 (2010).
7. Kim, S.B., Sukchotrat, T. and Park, S.K., "A nonparametric fault isolation approach through one-class classification algorithms", *IIE Transactions*, **43**(7), pp. 505-517 (2011).
8. Mason, R.L., Tracy, N.D. and Young, J.C. "Decomposition of  $T^2$  for multivariate control chart interpretation", *Journal of Quality Technology*, **27**(2), pp. 99-108 (1995).
9. Du, S., LV, J. and Xi, L. "On-line classifying process mean shifts in multivariate control charts based on multiclass support vector machines", *International Journal of Production Research*, **50**(22), pp. 6288-6310 (2012).
10. Topalidou, E. and Psarakis, S. "Review of multinomial and multiattribute quality control charts", *Quality & Reliability Engineering International*, **25**(7), pp. 773-804 (2009).
11. Niaki, S.T.A. and Abbasi, B. "Monitoring multi-attribute processes based on NORTA inverse transformed vectors", *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **38**(7), pp. 964-979 (2009).
12. Cozzucoli, P.C. "Process monitoring with multivariate p-control chart", *International Journal of Quality, Statistics & Reliability*, Article ID 707583, doi:10.1155/2009/707583 (2009).
13. Chiu, J.E. and Kuo, T.I. "Control charts for fraction nonconforming in a bivariate binomial process", *Journal of Applied Statistics*, **37**(10), pp. 1717-1728 (2010).
14. Niaki, S.T.A. and Nasa'ji, S.A. "A hybrid method of artificial neural network and simulated annealing in monitoring auto-correlated multi-attribute processes", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **56**(5-8), pp. 777-788 (2011).
15. Li, Y. and Tsung, F. "Multiple attribute control charts with false discovery rate control", *Quality and Reliability Engineering International*, **28**(8), pp. 857-871 (2012).
16. Hou, C.D., Shao, Y.E. and Huang, S. "A combined MLE and generalized p chart approach to estimate the change point of a multinomial process", *Applied Mathematics & Information Sciences*, **6**(1), pp. 53-59 (2012).
17. Kang, L. and Brennenman, W.A. "Product defect rate confidence bound with attribute and variable data", *Quality & Reliability Engineering International*, **27**(3), pp. 353-368 (2010).
18. Hayter, A.J. and Tsui, K.L. "Identification and qualification in multivariate quality control problems", *Journal of Quality Technology*, **26**(3), pp. 197-208 (1994).

19. Sidak, Z. "Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions", *Journal of American Statistical Association*, **62**(318), pp. 626-633 (1967).
20. Jhun, M., Jeong, H.C. and Bahng, J.S. "Simultaneous confidence intervals for the mean of multivariate Poisson distribution: A comparison", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **36**(1), pp. 151-164 (2007).
21. Efron, B. "Bootstrap methods: Another look at Jackknife", *The Annals of Statistics*, **7**(1), pp. 1-26 (1979).
22. Singh, K. "On the asymptotic accuracy of Efron's bootstrap", *Annals of Statistics*, **9**(6), pp. 1187-1195 (1981).
23. Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W., *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, England (2004).
24. Roberts, S.W. "Control charts tests based on geometric moving averages", *Technometrics*, **1**(3), pp. 239-250 (1959).
25. Woodall, W.H. "The statistical design of quality control charts", *The Statistician*, **34**(2), pp. 155-160 (1985).