

# نمودارهای کنترل GWMA و DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی

مریم اسمعیلی\* (استادیار)

حمیده نیکزاد (دانشجوی کارشناسی ارشد)

رویا انجم‌شعاع (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه الزهراء (س)

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۳  
دوری ۱ - ۳۰، شماره ۱/۲، ص. ۱۲۹-۱۳۸، (پادداشت نشی)

در نمودارهای کنترل با حافظه، سرعت کشف شیفت‌های کوچک فرایند بیشتر از نمودارهای کنترل شوهارت<sup>۱</sup> است؛ به طوری که در سال‌های اخیر نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون عمومی (GWMA) و میانگین متحرک موزون عمومی دوگانه (DGWMA)، کارآتر از نمودارهای میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) و نمودارهای میانگین متحرک موزون نمایی دوگانه (DEWMA) معرفی شده‌اند. این نمودارها غالباً برای پایش مشخصه‌های کیفی متغیر، تحت فرض توزیع پیوسته‌ی نرمال‌اند. مشخصه‌های کیفی وصفی، بر مبنای شمارش تعداد اقلام نامنطبق (با توزیع دوجمله‌یی) یا شمارش تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی (با توزیع پواسون)، کاربرد زیادی در کنترل فرایند آماری دارند. در این نوشتار نمودارهای کنترل GWMA و DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی طراحی شده، و اثر تغییر پارامترهای نمودارها بر نرخ هشدار غلط آنها بررسی می‌شود. همچنین کارایی این نمودارها در پایش مشخصه‌های کیفی وصفی، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو با یکدیگر و با نمودارهای کنترل EWMA و DEWMA مقایسه می‌شود. نتایج حاصله حاکی است که وقتی مشخصه‌های کیفی وصفی پایش می‌شوند، همچنان این نمودارها کارایی خوبی در کشف شیفت‌های کوچک دارند.

واژگان کلیدی: میانگین متحرک موزون نمایی، نمودار کنترل GWMA، نمودار کنترل DGWMA، مشخصه‌های کیفی وصفی، متوسط طول دنباله.

## ۱. مقدمه

امروزه روش‌های آماری نقش عمده‌یی در کاهش ضایعات و بهبود کیفیت محصول، طی مراحل مختلف چرخه‌ی حیات محصول ایفا می‌کنند. «نمودار کنترل» یکی از مهم‌ترین ابزارهای کنترل فرایند آماری (SPC)<sup>۲</sup> است که اولین بار در دهه ۱۹۲۰ توسط شوهارت مطرح شد. این نمودارها مبتنی بر نمونه‌گیری از محصولات، بازرسی نمونه‌ها و تعمیم نتایج به کل انباشت محصول هستند. در نمودارهای کنترل، سرعت کشف شرایط خارج از کنترل بسیار حائز اهمیت است. در نمودارهای شوهارت، کشف شیفت‌های کوچک به‌کندی صورت می‌گیرد، حال آن‌که نمودارهای کنترل حافظه<sup>۳</sup> در کشف تغییرات کوچک بسیار حساس‌اند، چرا که در این نمودارها علاوه بر نمونه‌ی فعلی، از اطلاعات نمونه‌گیری‌های قبلی نیز استفاده می‌شود؛ و به این ترتیب گذشته فرایند نیز در تصمیم‌گیری دخالت داده می‌شود. نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA)<sup>۴</sup> و نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی دوگانه (DEWMA)<sup>۵</sup> مثال‌هایی از نمودارهای کنترل با حافظه‌اند.

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۴/۳، اصلاحیه ۱۳۹۱/۶/۲۵، پذیرش ۱۳۹۳/۶/۴.

esmaeili\_m@alzahra.ac.ir  
nikzaad@gmail.com  
roya.anjomshoaa@gmail.com

نمودار کنترل EWMA اولین بار در سال ۱۹۵۹ ارائه شد.<sup>[۱]</sup> این نمودار در مقایسه با نمودار کنترل شوهارت در کشف تغییرات کوچک بهتر عمل می‌کند. بعدها، در سال ۲۰۰۵، نمودار کنترل EWMA توسعه یافت و نمودار کنترل DEWMA مطرح شد.<sup>[۲]</sup> مطالعات انجام شده نشان داد که نمودار کنترل DEWMA در کشف شیفت‌های کوچک میانگین فرایند بهتر از نمودار کنترل EWMA عمل می‌کند. در سال ۲۰۰۳ شو و لین تعمیمی از نمودارهای کنترل EWMA را برای کنترل میانگین فرایند ارائه کردند.<sup>[۳]</sup> این نمودار جدید نمودار کنترل میانگین متحرک موزون عمومی (GWMA)<sup>۶</sup> نامیده می‌شود و در کشف شیفت‌های کوچک میانگین فرایند حساستر از نمودارهای کنترل EWMA و DEWMA است. در سال ۲۰۰۹ نمودار GWMA برای پایش میانگین یا واریانس فرایند ارائه شد.<sup>[۴]</sup> همچنین در سال ۲۰۰۹ نمودار GWMA ترکیبی برای پایش همزمان میانگین و واریانس فرایند طراحی شد.<sup>[۵]</sup> در برخی از مطالعات، نمودار کنترل GWMA در شرایط تبعیت مشاهدات از یک توزیع پیوسته‌ی غیر نرمال، مانند گاما، بررسی شده است.<sup>[۶]</sup> همچنین نمودار کنترل GWMA با توزیع پواسون، همراه با نرم افزار ترسیم آن، برای افزایش کیفیت زنجیره‌ی تأمین ارائه شد.<sup>[۷]</sup>

مشخصه‌های کیفی وصفی شامل نمودارهای  $p$  و  $np$  مبتنی بر توزیع دوجمله‌ای اند و نمودارهای  $c$  و  $u$  مبتنی بر توزیع بواسون‌اند. در نمودارهای کنترل  $np$  تعداد محصولات معیوب یا نامنطبق هر نمونه شمارش می‌شود ( $x_t$ ); آماره‌ی  $x_t$  از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند. احتمال معیوب بودن هر محصول در شرایط تحت کنترل  $p_0$  است. در نمودارهای کنترل  $c$  تعداد نقص‌ها در هر واحد بازرسی (شامل  $n$  نمونه) شمارش می‌شود. عدد حاصل ( $C_t$ ) از توزیع بواسون پیروی می‌کند.

## ۱.۲. نمودار کنترل GWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی

نمودار کنترل GWMA اولین بار در سال ۲۰۰۳ معرفی شد.<sup>[۲]</sup> فرض کنید پیشامد  $A$  با احتمال  $q_j$  در  $j$ امین نمونه اتفاق بیفتد.  $M$  تعداد نمونه‌ها تا اولین وقوع پیشامد  $A$  است؛ بنابراین متغیر تصادفی  $M$  دارای توزیع هندسی است. احتمال این که پیشامد  $A$  در  $j$ امین نمونه اول اتفاق نیفتد برابر  $\bar{P}_j = P(M > j)$  است و می‌دانیم  $\dots \geq \bar{P}_2 \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_0 = 1$ . بنابراین احتمال این که پیشامد  $A$  اولین بار در نمونه‌ی  $j$ ام اتفاق بیفتد برابر با  $\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j = P(M = j)$  است.<sup>[۲]</sup> همچنین داریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(M = m) = P(M = 1) + P(M = 2) + \dots + P(M = j) + P(M > j) = (\bar{P}_0 - \bar{P}_1) + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) + \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j) + \bar{P}_j = 1 \quad (1)$$

بنابراین، از  $P(M = j)$  می‌توان به‌عنوان وزن نمونه‌ها بهره برد. با توجه به خواص توزیع هندسی می‌دانیم:

$$(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) > (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) > \dots > (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j) \quad (2)$$

با استفاده از این روش تعیین وزن می‌توان به نمونه‌ی فعلی وزن سنگین تری داد و با افزایش عمر نمونه‌ها از وزن آنها کاست. با این فرض که  $y_t$  نماد میانگین متحرک موزون کلی (GWMA) باشد، اگر بخواهیم از این نمودار در پایش تعداد اقلام نامنطبق فرایند استفاده کنیم،  $x_t$  را برابر تعداد محصولات معیوب در نمونه‌ی  $t$ ام در نظر می‌گیریم.  $x_t$ ها متغیرهای تصادفی مستقل دوجمله‌ای با میانگین  $np_0$  و واریانس  $(1-p_0)np_0$  هستند. نقطه‌ی شروع  $y_0 = np_0$  است. با توجه به تعریف آماره‌ی نمودار کنترل GWMA و با فرض  $\bar{P}_t = q^{t\alpha}$ ، آماره‌ی  $y_t$  که روی نمودار  $np$  علامت می‌خورد با استفاده از رابطه‌ی ۳ تعیین می‌شود:

$$y_t = (q^{t\alpha} - q^{(t-1)\alpha}) x_t + (q^{(t-1)\alpha} - q^{(t-2)\alpha}) x_{t-1} + \dots + (q^{1-\alpha} - q^{t\alpha}) x_1 + q^{t\alpha} \cdot np_0 \quad (3)$$

که در آن، پارامتر طراحی  $q$  مقدار ثابتی بین  $0 \leq q \leq 1$  است و  $\alpha > 0$  پارامتری برای تطبیق کشیدگی<sup>۱۲</sup> تابع توزین است. نمودارهای شوهارت و EWMA نیز حالات خاصی از نمودار GWMA هستند. در شکل ۱ ارتباط میان این سه نمودار نشان داده شده است.<sup>[۵]</sup> برای امید ریاضی و واریانس آماره‌ی  $y_t$  داریم:

محققین در سال ۲۰۰۹ نمودارهای کنترل GWMA به نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون عمومی دوگانه (DGWMA)<sup>۹</sup> توسعه داده و با استفاده از شبیه‌سازی، نمودارهای کنترل GWMA و DEWMA را مقایسه کردند.<sup>[۸]</sup> پژوهش‌های انجام شده در زمینه نمودارهای کنترل GWMA و DEWMA، غالباً برای پایش مشخصه‌های کیفی متغیر، با فرض برخورداری مشاهدات از توزیع پیوسته‌ی نرمال، بوده است. حال آن که مشخصه‌های کیفی وصفی کاربرد زیادی در کنترل فرایند آماری در سیستم‌های صنعتی و خدماتی دارند. به‌عنوان مثال در مدیریت لجستیک و سیستم کیفیت زنجیره‌ی تأمین می‌توان به شمارش تعداد خطاهای کارگران، تعداد برگشتی‌ها در کل سفارشات، تعداد شکایات کیفیتی، تعداد ادعاهای گارانتی، درصد کمبود موجودی و درصد تحویل در طول زمان اشاره کرد. موارد نام برده شده تماماً از توزیع‌های گسسته‌ی دوجمله‌ای یا بواسون پیروی می‌کنند.

در این مقاله نمودارهای کنترل GWMA و DGWMA با حدود کنترل متغیر در طول زمان، برای فرایندهایی که مشخصه‌های کیفی وصفی را تحت بررسی قرار می‌دهند، ارائه می‌شود. این مشخصه‌ها در فرایندهایی که طی آنها تعداد اقلام نامنطبق شمارش می‌شود دارای توزیع‌های گسسته‌ی دوجمله‌ای، و در فرایندهایی که در آنها تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی شمارش می‌شود دارای توزیع بواسون هستند. همچنین اثر تغییرات پارامترها را بر شاخص متوسط طول دنباله (ARL)<sup>۸</sup> نمودارها در حالت تحت کنترل، بررسی می‌کنیم. پس از آن سرعت این نمودارها را در کشف انحرافات با دلیل فرایندها، مقایسه می‌کنیم. برای مقایسه‌ی متصافانه‌ی نمودارها در حالت خارج از کنترل، باید کارایی آنها در حالت تحت کنترل یکسان باشد. بدین منظور ابتدا نسبت به تعیین مقادیر مناسب ضریب حدود کنترل ( $L$ ) نمودارها اقدام می‌شود، به‌شکلی که ARL تحت کنترل آنها با هم برابر شوند؛ پس از آن ARL خارج از کنترل نمودارها مقایسه می‌شود. مقادیر ARL نمودارهای ارائه‌شده در این مقاله، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو تخمین زده می‌شود.

در ادامه، در بخش دوم نمودارهای کنترل GWMA و DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی ارائه می‌شود. در بخش سوم تأثیر تغییرات پارامترها بر نرخ هشدار غلط نمودارها بررسی می‌شود. در بخش چهارم کارایی این نمودارها در کشف انحرافات با دلیل مقایسه خواهد شد. در بخش پنجم نیز به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

## ۲. نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های کیفی وصفی

نمودارهای کنترل به‌طور کلی شامل یک خط مرکزی (CL)<sup>۹</sup>، حد کنترل بالایی (UCL)<sup>۱۰</sup>، و حد کنترل پایینی (LCL)<sup>۱۱</sup> هستند. روش کار بدین صورت است که نمونه‌هایی با اندازه‌ی  $n$  و با فاصله‌ی زمانی معین از فرایند گرفته می‌شود. مقدار آماره‌ی مربوط به هر یک از این نمونه‌ها در طول خط زمان روی نموداری با حدود کنترل از پیش تعیین شده علامت زده می‌شود. تا زمانی که نقاط بین حدود کنترل قرار می‌گیرند فرض می‌شود که فرایند تحت کنترل است و نیازی به فعالیت‌های اصلاحی نیست. چنانچه نقطه‌ی بی‌خارج از حدود کنترل رسم شود نشان‌گر آن است که فرایند در شرایط خارج از کنترل به سر می‌برد و نیازمند اقدامات اصلاحی است تا منبع ایجاد انحرافات با دلیل مشخص و حذف شود.

مشخصه‌های کیفی مورد اندازه‌گیری در کنترل کیفیت دو نوع‌اند: مشخصه‌های کیفی متغیر (پیوسته) و مشخصه‌های کیفی وصفی (گسسته). نمودارهای کنترل برای

حدود کنترل متغیر در طول زمان و خط مرکز نمودار  $c$  GWMA نیز چنین تعیین خواهد شد:

$$\begin{cases} UCL = c_0 + L\sqrt{Q_t \cdot c_0} \\ CL = c_0 \\ LCL = c_0 - L\sqrt{Q_t \cdot c_0} \end{cases} \quad (11)$$

### ۲.۲. نمودار کنترل DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی

نمودار کنترل DGWMA برای پایش میانگین فرایند در سال ۲۰۰۹ معرفی شد.<sup>[۸]</sup> این نمودار دارای دو پارامتر طراحی  $q_1$  و  $q_2$ ، و دو پارامتر تطبیق کشیدگی  $\alpha$  و  $\beta$  است. تعریف آماره  $np$  DGWMA عبارت است از:

$$y_t = \sum_{i=1}^t P(M_\tau = i)G_{t-i+1} + P(M_\tau > t)np. \quad (12)$$

که در آن،  $G_t$  از فرمول ۳ به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که:<sup>[۸]</sup>

$$\begin{cases} y_t = \sum_{i=1}^t (W_i x_{t-i+1}) + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right) np. \\ W_t = \sum_{i=1}^t P(M_\tau = j) \cdot P(M_\tau = t - j + 1) \end{cases} \quad (13)$$

$\alpha, \beta > 0$  و  $q_1, q_2 \in (0, 1)$ ،  $P(M_\tau > t) = q_2^{t\beta}$ ،  $P(M_\tau = t) = q_1^{t\alpha}$  هستند. میانگین و واریانس آماره  $y_t$  چنین محاسبه می‌شود:

$$E(y_t) = \sum_{i=1}^t W_i \cdot E(x) + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right) np_0 = np_0. \quad (14)$$

$$Var(y_t) = \sum_{i=1}^t W_i^2 \cdot Var(x) = np_0 \cdot (1 - p_0) \cdot \sum_{i=1}^t W_i^2 \quad (15)$$

بنابراین حدود کنترل و خط مرکز نمودار چنین به دست می‌آید:

$$UCL = np_0 + L \cdot \sqrt{np_0 \cdot (1 - p_0) \cdot \sum_{i=1}^t W_i^2}$$

$$CL = np_0.$$

$$LCL = np_0 - L \cdot \sqrt{np_0 \cdot (1 - p_0) \cdot \sum_{i=1}^t W_i^2} \quad (16)$$

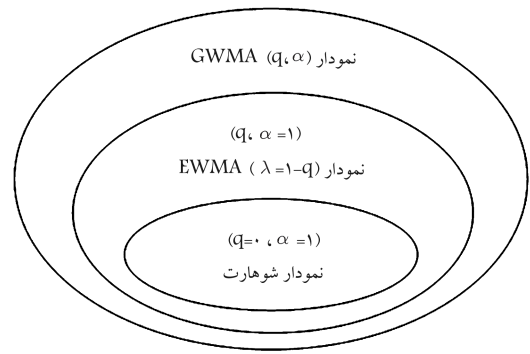
نمودار کنترل  $c$  DGWMA نیز با استفاده از فرمول ۸ برای محاسبه  $G_t$ ، چنین تعریف می‌شود:

$$y_t = \sum_{i=1}^t P(M_\tau = i)G_{t-i+1} + P(M_\tau > t)c. \quad (17)$$

$$\begin{cases} y_t = \sum_{i=1}^t (W_i C_{t-i+1}) + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right) c. \\ W_t = \sum_{i=1}^t P(M_\tau = j) \cdot P(M_\tau = t - j + 1) \end{cases} \quad (18)$$

$$E(y_t) = \sum_{i=1}^t W_i \cdot E(C) + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right) c_0 = c_0. \quad (19)$$

$$Var(y_t) = \sum_{i=1}^t W_i^2 \cdot Var(C) = c_0 \cdot \sum_{i=1}^t W_i^2 \quad (20)$$



شکل ۱. ارتباط نمودارهای کنترل GWMA، EWMA و شوهرت.

$$\begin{aligned} E(y_t) = E & \left[ \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right) x_t + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right) x_{t-1} + \dots \right. \\ & \left. + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right) x_1 + q^{t\alpha} \cdot np_0 \right] = \left[ \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right) \right. \\ & \left. + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right) + \dots + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right) \right] np_0 \\ & + q^{t\alpha} \cdot np_0 = np_0. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Var(y_t) = & \left[ \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right)^2 + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right)^2 + \dots \right. \\ & \left. + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right)^2 \right] \sigma^2 = Q_t \cdot np_0 \cdot (1 - p_0) \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $Q_t$  معادل رابطه‌ی ۶ است:<sup>[۲]</sup>

$$Q_t = \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right)^2 + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right)^2 + \dots + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right)^2 \quad (6)$$

بنابراین خط مرکز و حدود کنترل نمودار  $np$  GWMA مطابق معادلات ۷ محاسبه خواهد شد:

$$\begin{cases} UCL = np_0 + L\sqrt{Q_t \cdot np_0 \cdot (1 - p_0)} \\ CL = np_0 \\ LCL = np_0 - L\sqrt{Q_t \cdot np_0 \cdot (1 - p_0)} \end{cases} \quad (7)$$

در نمودار  $c$  GWMA آماره‌ی رسم شده روی نمودار چنین است:

$$\begin{aligned} y_t = & \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right) C_t + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right) C_{t-1} + \dots \\ & + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right) C_1 + q^{t\alpha} \cdot c_0. \end{aligned} \quad (8)$$

امید ریاضی و واریانس  $y_t$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} E(y_t) = E & \left[ \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right) C_t + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right) C_{t-1} + \dots \right. \\ & \left. + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right) C_1 + q^{t\alpha} \cdot c_0 \right] = \left[ \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right) \right. \\ & \left. + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right) + \dots + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right) \right] c_0 \\ & + q^{t\alpha} \cdot c_0 = c_0. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Var(y_t) = & \left[ \left( q^{t\alpha} - q^{1\alpha} \right)^2 + \left( q^{1\alpha} - q^{2\alpha} \right)^2 + \dots \right. \\ & \left. + \left( q^{t-1\alpha} - q^{t\alpha} \right)^2 \right] \sigma^2 = Q_t \cdot c_0. \end{aligned} \quad (10)$$

بنابراین حدود کنترل نمودار به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 UCL &= c_0 + L \cdot \sqrt{c_0 \cdot \sum_{i=1}^t W_i^t} \\
 CL &= c_0 \\
 LCL &= c_0 - L \cdot \sqrt{c_0 \cdot \sum_{i=1}^t W_i^t}
 \end{aligned} \quad (21)$$

حدود کنترل نمودار DGWMA نیز در طول زمان متغیر است. از آنجا که نمودار کنترل DGWMA، چهار پارامتر دارد، پیچیدگی آن زیاد است و استفاده از آن چندان راحت نیست. مشخص کردن بعضی از پارامترها که منجر به ایجاد حالات خاص نمودار می‌شود می‌تواند تعداد پارامترهای نمودار را به ۲ و حتی ۱ پارامتر کاهش دهد. این کار باعث کاهش پیچیدگی محاسباتی نمودار می‌شود. افزون بر این، نمودار DGWMA در حالت دو پارامتری نیز به اندازه‌ی کافی خوب عمل می‌کند. در این نوشتار، نمودار DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی در دو حالت ارائه شده است: [۸]

الف) اگر  $q_1 = q_2 = q$  و  $\alpha = \beta$  و  $0 < q < 1$  و  $\alpha$  آنگاه:

$$W_t = \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha}) (q^{(t-j)\alpha} - q^{(t-j+1)\alpha}) \quad (22)$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^{t\alpha} + \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha}) q^{(t-j+1)\alpha} \quad (23)$$

در این حالت نمودار کنترل DGWMA در واقع نمودار کنترل GWMA  $(q, \alpha)$  است که دو پارامتر دهی شده است. آماره‌ی  $y_t$  را در این حالت با  $(q, \alpha)$  نشان می‌دهیم.

ب) اگر به فرضیات حالت الف، فرض  $\alpha = \beta = 1$  را اضافه کنیم،  $y_t$  تبدیل به آماره‌ی نمودار DEWMA ( $\lambda = 1 - q$ ) می‌شود. در این حالت داریم:

$$W_t = tq^{t-1} (1 - q)^2 \quad (24)$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^t (t - tq + 1) \quad (25)$$

### ۳. اثر تغییر پارامترها بر نرخ هشدار غلط نمودارهای GWMA و DGWMA برای مشخصه‌های کیفی

#### وصفی

به‌طور کلی کارایی نمودارهای کنترل با استفاده از شاخص متوسط طول دنباله (ARL) اندازه‌گیری می‌شود. ARL، متوسط تعداد نقاط رسم شده روی نمودار است تا قبل از این که یک سیگنال خارج از کنترل مشاهده شود. در نمودارهای کنترل EWMA با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف محاسبه می‌شود ولی محاسبه‌ی ARL نمودارهای کنترل GWMA و DGWMA با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف به سادگی نمودار EWMA نیست. بنابراین در این نمودارها از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تخمین ARL نمودار استفاده می‌شود.

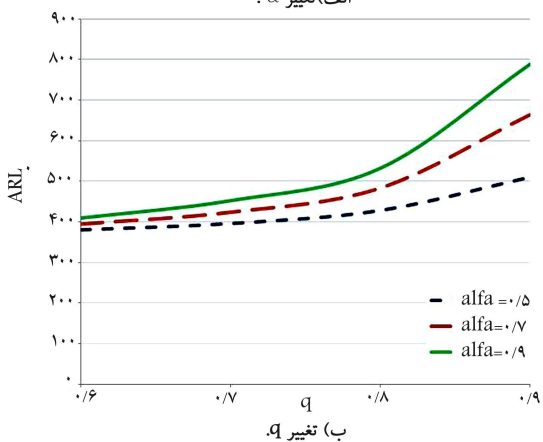
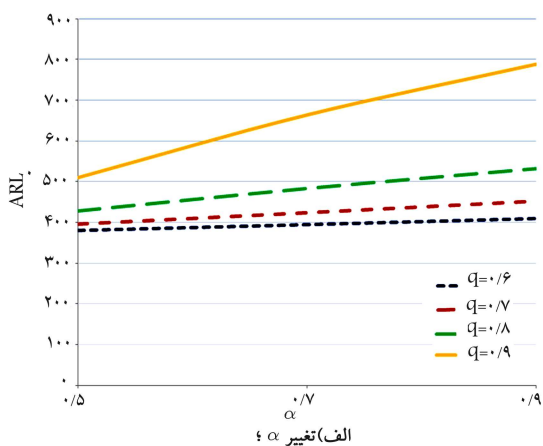
در این قسمت تأثیر تغییرات پارامترهای نمودارها را بر نرخ هشدار غلط آنها بررسی می‌کنیم. بدین‌منظور برای نمودارهای  $np$  از فرآیندی با  $n = 100$  و  $p_0 = 0.2$  و برای نمودارهای  $c$  از فرآیندی با  $c_0 = 30$  استفاده می‌کنیم. برای هر نمودار مقادیر ARL را به ازای  $L = 3$  و ترکیب‌های مختلف سایر پارامترها از طریق شبیه‌سازی به دست می‌آوریم. هر شبیه‌سازی شامل ۵۰۰۰۰ تکرار است. مقادیر ARL برای نمودارهای  $np$  و  $GWMA$  به ترتیب در جداول ۱ و ۲ ثبت شده است. در شکل‌های ۲ و ۳ روند تغییرات ARL این دو نمودار کنترل با ثابت نگه داشتن یک پارامتر و تغییر پارامتر دیگر نشان داده شده است.

جدول ۱. ARL برای نمودار  $np$  GWMA با  $n = 100$  و  $p_0 = 0.2$

$q$	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹
$\alpha = 0.5$	۳۸۰٫۲۵۱۱۶	۳۹۵٫۹۵۸۰۲	۴۲۸٫۱۲۴۸۸	۵۰۹٫۹۷۵۳۸
۰٫۷	۳۹۴٫۶۱۱۶۸	۴۲۳٫۷۲۷	۴۸۳٫۳۷۱۶۴	۶۶۳٫۷۵۶۱۸
۰٫۹	۴۰۹٫۴۵۲۲	۴۵۲٫۲۹۵۴۲	۵۳۱٫۹۱۰۹۸	۷۸۸٫۱۷۶۵

جدول ۲. ARL برای نمودار  $np$  DGWMA با  $n = 100$  و  $p_0 = 0.2$

$q_1 = q_2$	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹
$\alpha = \beta = 0.5$	۴۸۴٫۴۱۶۸	۶۴۲٫۷۱۸۳	۱۱۰۸٫۳۲۹۸	۳۶۳۲٫۱۵۰۵
۰٫۷	۵۳۱٫۰۶۴	۷۱۸٫۸۳۳۳	۱۲۰۰٫۱۵۰۴	۳۱۹۷٫۸۴۴۴
۰٫۹	۵۲۴٫۸۲۱۵	۶۸۲٫۰۴۲۵	۱۰۲۵٫۸۱۴	۲۱۶۱٫۴۸۵۶



شکل ۲. تغییرات ARL برای نمودار  $np$  GWMA

جدول ۴. ARL برای نمودار c DGWMA با  $c_0 = 30$ .

$q_1 = q_2$	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
$\alpha = \beta = 0/5$	۴۶۲,۴۸۶۶۶	۶۱۴,۳۸۴۲۸	۱۰۶۱,۶۹۶۸	۳۴۱۶,۳۱۳۱
۰/۷	۴۹۷,۳۷۳۳۸	۶۷۱,۵۶۲۷۲	۱۱۱۰,۴۹۸۷	۲۹۱۸,۶۵۸۹
۰/۹	۴۹۶,۲۶۶۸	۶۲۹,۲۳۳۸۸	۹۲۴,۷۵۰۹۸	۱۸۷۵,۹۴۵۵

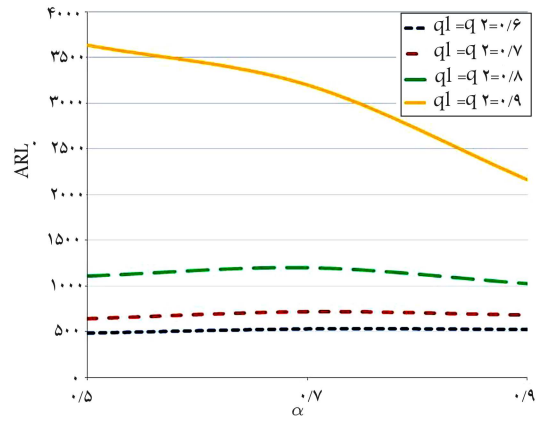
#### ۴. مقایسه‌ی کارایی نمودارهای GWMA و DGWMA

یکی از شرایط مقایسه‌ی منصفانه‌ی نمودارهای کنترل این است که در شرایط تحت کنترل، ARL یکسانی داشته باشند. در این صورت نموداری که ARL کوچک‌تری داشته باشد بهینه است. در این مقاله نمودارهای GWMA و DGWMA برای توزیع‌های دو جمله‌یی و پواسون به‌ازای ترکیب‌های مختلف پارامترهای نمودار، با استفاده از نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی شده و نتایج آن در جداول ۵ تا ۸ آمده است. هر شبیه‌سازی شامل ۲۰۰۰۰ تکرار است. در نمودارهای  $np$  مقدار  $n = 100$  و  $p = 0/2$  است و نسبت اقلام معیوب در شرایط خارج از کنترل ( $p_1$ ) بین ۰/۱ و ۰/۳ تغییر می‌کند و در نمودارهای  $c$  مقدار  $c_0 = 30$  معادل ۳۰ است و تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی در شرایط خارج از کنترل ( $c_1$ ) بین ۲۰ و ۴۰ تغییر می‌کند. در این نمودارها مقدار مناسب ضریب حدود کنترل ( $L$ ) به‌گونه‌یی تعیین شده که ARL نمودار برابر مقدار تقریبی ۳۷۰ شود تا بتوان مقایسه‌ی منصفانه‌یی بین ARL نمودارهای کنترل مختلف انجام داد. به‌منظور مقایسه‌ی کارایی سایر نمودارهای کنترل با نمودار کنترل DGWMA که جدیدترین آنهاست، به‌عنوان نمونه نمودار ( $0/9, 0/5$ ) DGWMA در شیفتهای مختلف با نمودارهای ( $0/1$ ) EWMA و ( $0/1$ ) DEWMA و ( $0/9, 0/5$ ) GWMA مقایسه شده است. در شکل‌های ۴ تا ۶ درصد بهبود نمودار کنترل DGWMA، در مقایسه با سه نمودار دیگر، در شیفتهای کوچک و متوسط برای دو توزیع دو جمله‌یی و پواسون نشان داده شده است. درصد بهبود نمودار کنترل DGWMA نسبت به هر نمودار کنترل دیگری مانند X مطابق رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آید:

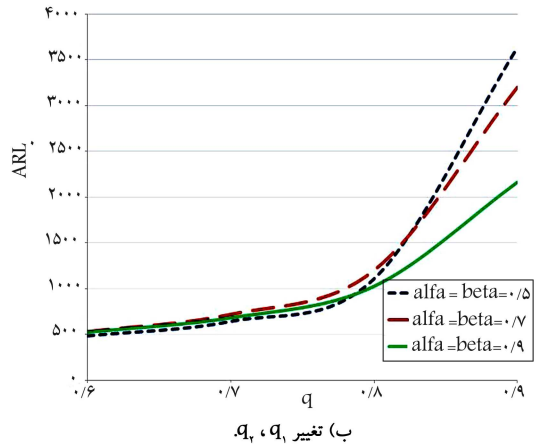
$$\text{درصد بهبود} = \left[ \frac{ARL_X - ARL_{DGWMA}}{ARL_X} \right] \times 100 \quad (26)$$

با توجه به شکل‌های ۴ تا ۶، مشاهده می‌شود که نتایج مقایسات برای دو توزیع بسیار شبیه است. قسمت‌هایی از نمودارهای درصد بهبود که زیر محور افقی قرار گرفته مربوط به مقادیری از شیفتهای است که در آن نمودار کنترل DGWMA مقایسه با نمودار کنترل دیگر ضعیفتر عمل می‌کند. در قسمت‌هایی که بالای محور افقی قرار گرفته نمودار کنترل DGWMA سرعت عمل بیشتری در کشف انحراف دارد و کاراتر است.

در نمودارهای کنترل  $np$  و  $c$ ، شیفتهای مثبت موجب بدتر شدن کیفیت فرایند، و شیفتهای منفی موجب بهبود کیفیت فرایند می‌شوند. بنابراین کشف شیفتهای مثبت، به‌منظور حذف عوامل ایجاد انحرافات بادلیل و جلوگیری از کاهش کیفیت فرایند، ضروری است؛ کشف شیفتهای منفی نیز کمک می‌کند تا عوامل ایجاد بهبود در کیفیت فرایند شناسایی و تقویت شوند. از طرفی چولگی<sup>۱۳</sup> توزیع‌های دو جمله‌یی و پواسون به سمت چپ است، و همین عدم تقارن موجب می‌شود که سرعت کشف شیفتهای مثبت و منفی نمودار کنترل برابر نباشد. خلاصه‌ی نتایج حاصل از مقایسات شکل‌ها برای اندازه‌های مختلف شیفتهای، در جدول ۹ ارائه شده است. علامت تیک نشان‌دهنده‌ی بهتر بودن نمودار مربوطه در مقایسه با نمودار



الف) تغییر  $\alpha$  و  $\beta$



ب) تغییر  $q_1, q_2$

شکل ۳. تغییرات ARL برای نمودار  $np$  DGWMA.

در نمودار کنترل  $np$  GWMA، با توجه به شکل، با افزایش پارامتر  $\alpha$  مقدار ARL بهینه شده است که میزان این بهینگی با افزایش مقدار  $q$  افزایش یافته (شیب نمودار زیاد شده است). همچنین با افزایش مقدار پارامتر  $q$  نیز مقدار ARL بهینه شده است؛ شیب نمودار ARL در حالتی که  $q$  افزایش می‌یابد و  $\alpha$  ثابت است اندکی بیشتر از حالتی است که  $\alpha$  افزایش می‌یابد و  $q$  ثابت است. در نمودار کنترل  $np$  DGWMA مقدار  $q_1$  و  $q_2$  به‌شدت مقدار ARL را بهبود می‌بخشد در حالی که افزایش مقدار پارامترهای شکل  $\alpha = \beta$  برای مقادیر  $q_1 = q_2 < 0/8$  روند صعودی - نزولی ملایمی در ARL نمودار ایجاد می‌کند، و برای مقادیر  $q_1 = q_2 = 0/9$  به‌شدت ARL نمودار را کاهش می‌دهد (بدتر می‌کند).

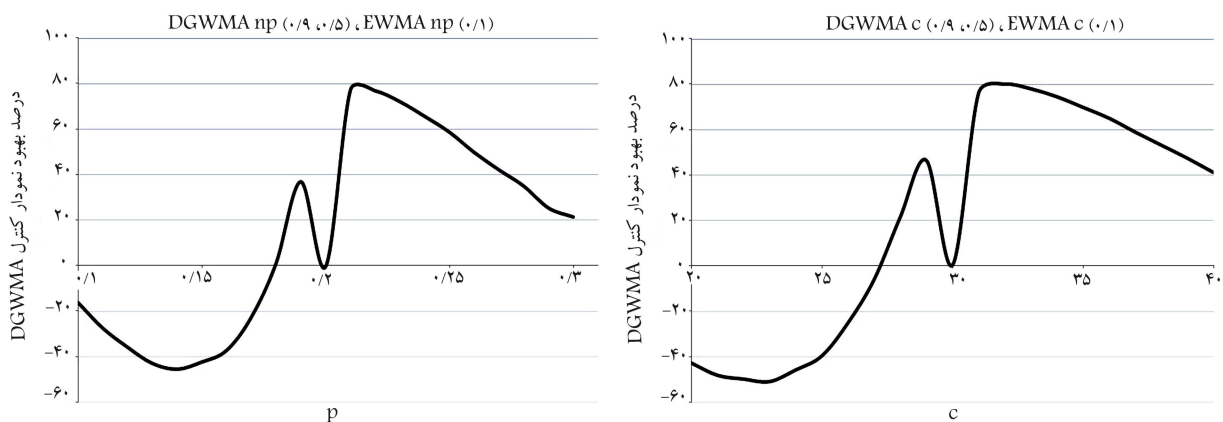
مقادیر ARL مربوط به نمودارهای GWMA  $c$  و DGWMA  $c$  در جداول ۳ و ۴ ارائه شده است. در مورد نمودارهای نوع  $c$  نیز شکل‌های روند تغییرات ARL مشابه نمودارهای نوع  $np$  است.

جدول ۳. ARL برای نمودار c GWMA با  $c_0 = 30$ .

$q$	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
$\alpha = 0/5$	۳۶۳,۰۶۹۰۲	۳۷۶,۳۲۷۴۲	۴۰۸,۳۳۳۰۶	۴۹۲,۱۷۹۱۸
۰/۷	۳۷۶,۱۸۸۷۲	۴۰۹,۸۸۹۶۶	۴۶۸,۹۷۷۶۴	۶۵۷,۶۱۷۶
۰/۹	۳۹۶,۱۱۸۷	۴۳۷,۴۹۰۷۲	۵۲۵,۳۸۱۰۴	۷۷۹,۵۷۰۳

جدول ۵. نتایج شبیه‌سازی ARL نمودارهای کنترل EWMA np ( $\lambda = 1 - q$ )، GWMA np ( $q, \alpha$ ) و ( $n = 100; p_0 = 0.2$ ).

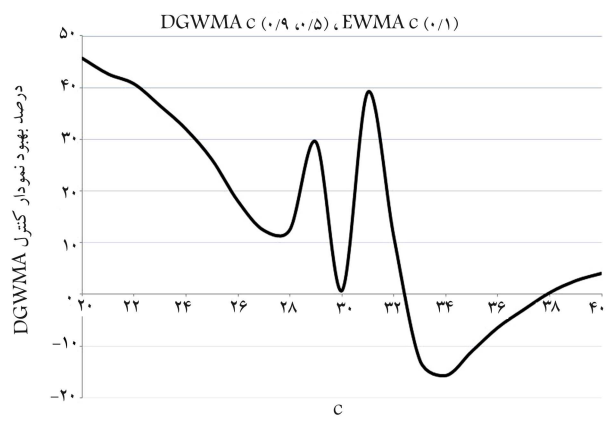
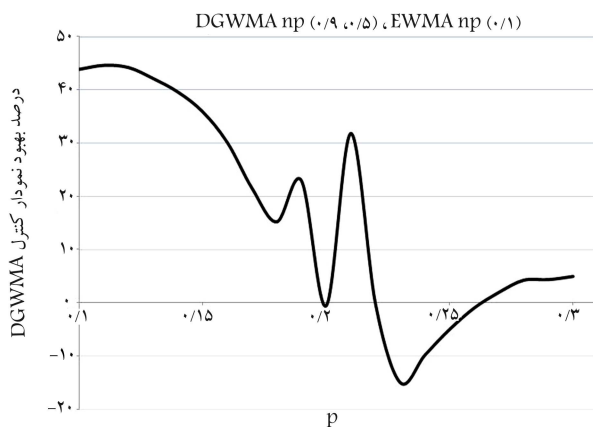
$q = 0.9$				$q = 0.75$				$q = 0.5$				$L$
$1 \rightarrow$	$0.9$	$0.75$	$0.5$	$1 \rightarrow$	$0.9$	$0.75$	$0.5$	$1 \rightarrow$	$0.9$	$0.75$	$0.5$	
EWMA				EWMA				EWMA				
1,6989	1,6998	1,8748	2	1,9223	1,9284	1,9728	2,0984	2,0208	2,0556	2,0994	2,2344	$p_1 = 0.1$
2,0004	1,9924	2,1835	2,4188	2,284	2,302	2,3697	2,5595	2,4895	2,5352	2,6099	2,8162	0.11
2,4141	2,427	2,6233	2,9561	2,7597	2,7829	2,8937	3,2192	3,1696	3,2274	3,3244	3,6646	0.12
2,9991	3,0086	3,2139	3,7667	3,4554	3,4947	3,6411	4,1489	4,2876	4,3352	4,4525	4,9968	0.13
3,8832	3,9042	4,1077	4,9505	4,5692	4,6096	4,8154	5,5045	6,2245	6,2151	6,2898	7,0631	0.14
5,2655	5,242	5,4988	6,7131	6,3331	6,373	6,5792	7,8477	9,9552	9,8317	9,8147	10,7888	0.15
7,6622	7,6542	7,9625	9,9139	9,9437	9,8165	10,0108	11,8483	18,7786	18,1861	17,5381	18,3865	0.16
12,8479	12,6398	12,9165	15,7849	19,0046	18,0796	17,6478	20,3723	41,9337	40,4242	38,1327	37,4793	0.17
26,42	25,3716	25,441	30,3334	47,8121	44,6731	41,1653	42,9086	110,7385	107,426	101,142	97,1047	0.18
94,0299	86,2867	78,7324	86,8481	169,0269	159,816	147,986	139,157	308,743	306,533	301,372	302,537	0.19
370,1304	371,256	371,05	370,772	369,8552	370,227	370,105	369,105	371,0244	370,055	369,289	370,065	$0.2 \rightarrow$
												ARL.
79,8735	73,6727	67,2416	67,107	111,4775	105,329	95,9248	88,7813	145,6038	142,179	138,202	129,452	0.21
24,436	23,5333	23,2487	25,1586	35,4857	33,8875	31,3461	31,6705	54,4176	53,2869	50,4249	47,6627	0.22
12,1251	11,8843	12,0819	13,683	15,8532	15,215	15,1822	16,2523	24,3435	23,6696	22,9841	22,9206	0.23
7,4065	7,3821	7,5886	8,6566	9,1799	8,9271	9,0094	9,9582	13,1044	12,731	12,5385	12,8842	0.24
5,2459	5,168	5,3871	6,105	6,0921	6,019	6,1513	6,8451	7,8833	7,9165	7,8803	8,3334	0.25
3,8756	3,8494	4,0639	4,6217	4,4341	4,4185	4,5242	4,9868	5,4295	5,3912	5,4039	5,8111	0.26
3,091	3,0657	3,2246	3,5825	3,5058	3,4713	3,5238	3,8969	3,9593	4,0159	4,056	4,3797	0.27
2,5569	2,5027	2,6705	2,9624	2,8304	2,8355	2,9006	3,1024	3,1262	3,111	3,2167	3,3579	0.28
2,1064	2,135	2,2749	2,4625	2,3555	2,35	2,4181	2,5575	2,5199	2,5418	2,5771	2,7533	0.29
1,8762	1,8517	1,9932	2,0821	2,0365	2,0596	2,0657	2,1807	2,1247	2,1598	2,194	2,2767	0.3



شکل ۴. مقایسه‌ی نمودارهای کنترل EWMA (0.9, 0.1) و DGWMA (0.9, 0.5).

جدول ۶. نتایج شبیه‌سازی ARL نمودارهای کنترل DEWMA np ( $\lambda = 1 - q$ ) و DGWMA np ( $q, \alpha$ ) ( $n = 100; p_0 = 0.2$ ).

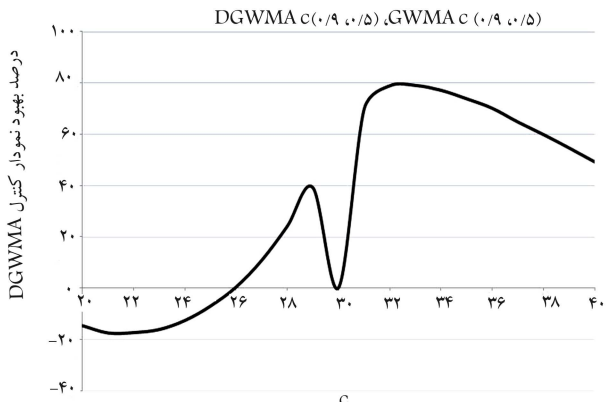
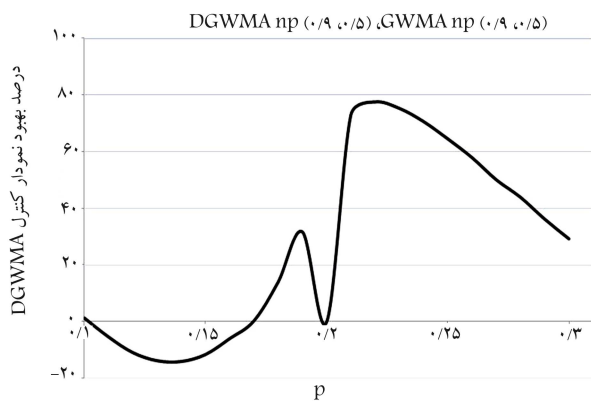
$q_1 = q_2 = 0.9$				$q_1 = q_2 = 0.75$				$q_1 = q_2 = 0.5$				L	$\alpha = \beta$
۲,۵۷۱	۲,۴۹۲	۲,۳۸۲	۲,۲۸۴	۲,۷۹۳	۲,۷۶۴	۲,۷۳۲	۲,۷۴۵	۲,۹۴۵	۲,۹۴۴	۲,۹۴۷	۲,۹۶۵		
۱ →	۰,۹	۰,۷۵	۰,۵	۱ →	۰,۹	۰,۷۵	۰,۵	۱ →	۰,۹	۰,۷۵	۰,۵		
DEWMA				DEWMA				DEWMA					
۳,۵۱۷۶۵	۲,۷۵۸۱	۲,۴۳۴۵	۱,۹۷۶۲	۳,۵۴۹۶	۳,۴۰۰۱۵	۲,۷۴۲۶	۲,۴۵۳۲	۲,۹۷۳۹۵	۲,۹۳۳۰۵	۲,۸۵۸۱	۲,۷۵۷۶		$p_1 = 0.1$
۴,۶۰۴	۳,۶۸	۳,۲۲	۲,۵۵۲۲	۴,۴۰۰۸۵	۴,۲۳۲۹	۳,۵۳۳۱	۳,۰۸۹	۳,۶۴۸۸۵	۳,۶۱۲۵۵	۳,۵۲۱۹۵	۳,۴۱۶۸		۰,۱۱
۵,۸۷۶۹۵	۴,۸۹۴۴	۴,۲۸۴۹	۳,۲۸۲۱	۵,۳۵۸۷	۵,۱۷۷۶۵	۴,۴۶۱۴	۳,۹۶۷۱۵	۴,۴۱۵۶۵	۴,۴۱۸۸	۴,۳۶۶۷	۴,۳۱۹۱		۰,۱۲
۷,۴۰۷۳۵	۶,۳۹۰۲	۵,۵۶۷۶	۴,۲۹۰۲	۶,۵۰۸۰۵	۶,۳۵۷۷۵	۵,۶۹۸۴	۵,۰۵۵۵۵	۵,۴۳۸۶۵	۵,۴۲۹۵	۵,۴۲۲۲۵	۵,۴۵۷۳		۰,۱۳
۹,۳۴۸۶۵	۸,۳۰۵۸	۷,۳۳۴	۵,۶۵۲۷	۷,۹۱۳۰۵	۷,۸۰۰۰۹	۷,۲۵۳۳	۶,۵۲۰۵	۶,۹۲۷۱۵	۶,۸۸۲۴۵	۶,۹۲۸۸	۶,۹۹۴۵		۰,۱۴
۱۱,۶۹۰۱	۱۰,۷۳۴۸	۹,۸۶۸۲	۷,۴۹۹۵	۹,۹۴۹۱۵	۹,۸۸۸	۹,۴۷۹	۸,۶۴۲۷۵	۹,۵۱۶۷۵	۹,۴۰۰۰۱	۹,۲۴۷۵	۹,۵۱۲۹		۰,۱۵
۱۵,۰۴۰۸۵	۱۴,۳۹۱۹	۱۳,۳۵۴۸	۱۰,۵۱۸۸	۱۳,۲۴۱۴	۱۳,۱۳۲۲	۱۲,۸۵۵۶	۱۲,۲۰۰۶	۱۴,۴۸۷۵۵	۱۴,۱۶۶	۱۳,۵۶۴	۱۳,۶۰۹۵		۰,۱۶
۲۰,۰۶۸	۱۹,۶۶۸۲	۱۸,۸۲۰۶	۱۵,۷۵۸۳	۲۰,۰۹۴۱۵	۱۹,۶۰۹۲	۱۸,۸۶۷	۱۸,۴۷۳۷	۲۷,۶۱۰۷۵	۲۵,۳۰۸۴	۲۳,۵۶۷	۲۲,۴۰۵		۰,۱۷
۳۰,۸۱۰۳۵	۲۹,۹۹۹۱	۲۹,۴۷۲۲	۲۶,۱۲۹۱	۳۹,۷۱۰۵	۳۶,۷۷۸۱	۳۴,۶۸۲۶	۳۲,۵۵۲۸	۶۷,۹۷۴۷	۶۲,۷۳۷۹	۵۵,۴۷۲۹	۴۷,۱۷۲۴		۰,۱۸
۷۷,۰۷۵۱۵	۷۰,۳۱۸۴	۶۳,۳۹۲۸	۵۹,۴۲۷۳	۱۲۹,۲۳۳۵	۱۱۵,۰۱۳	۹۸,۲۲۹۶	۸۳,۲۳۶	۲۱۷,۹۱۳۸	۲۰۸,۰۸۲	۱۸۶,۷۷۱	۱۵۸,۲۶۲		۰,۱۹
۳۶۹,۵۹۸۸۵	۳۷۱,۸۸۱	۳۷۱,۰۸۲	۳۷۱,۷۱۶	۳۷۱,۵۴۲۸۵	۳۷۰,۱۷۶	۳۷۰,۵۲۲	۳۷۱,۰۹۶	۳۶۹,۴۲۲۱	۳۷۰,۵۸۶	۳۶۹,۹۸۷	۳۷۱,۲۷۳		۰,۲ →
													ARL.
۲۶,۷۰۹۶۵	۲۳,۱۱۷۵	۲۰,۰۴۳۹	۱۸,۲۲۰۵	۵۷,۹۸۵۴	۵۲,۷۷۳۳	۴۵,۰۶۲۹	۳۸,۳۶۳۵	۱۰۶,۵۸۳۹۵	۱۰۰,۲۵۲	۹۴,۹۵۳۱	۸۱,۴۹۹۴		۰,۲۱
۵,۶۵۵۱۵	۵,۳۴۲۵	۵,۲۴۱۳	۵,۶۶۹۹	۱۱,۱۶۸۳۵	۱۰,۴۷۱۲	۹,۹۸۸۲	۱۱,۱۲۶۷	۲۷,۵۲۳۳	۲۶,۴۱۰۹	۲۴,۲۵۱	۲۲,۸۳۱		۰,۲۲
۲,۹۴۹۹	۲,۹۶۰۸	۲,۹۱۸۸	۳,۳۹۲۳	۴,۴۰۳۱۵	۴,۳۳۳۶	۴,۵۱۳۷	۵,۴۱۹۵۵	۹,۷۶۲۰۵	۹,۵۲۵۱۵	۹,۲۶۷۱۵	۱۰,۱۱۴۲		۰,۲۳
۲,۳۲۳۲	۲,۲۹۵	۲,۲۸۳	۲,۵۵۱۲	۲,۸۳۷۲۵	۲,۸۴۱۸	۲,۹۶۹۴	۳,۶۳۸۴۵	۴,۷۷۲۱۵	۴,۷۵۲۹۵	۴,۸۱۰۸۵	۵,۸۰۰۵		۰,۲۴
۲,۰۶۸۹	۲,۰۳۰۷	۲,۰۳۵	۲,۱۷۲۲	۲,۳۰۰۰۵	۲,۳۱۷۳۵	۲,۳۷۷۱	۲,۷۵۸۱	۳,۰۵۱۱۵	۳,۱۵۰۱	۳,۲۴۹۳۵	۳,۹۳۵۹		۰,۲۵
۱,۹۳۱۰۵	۱,۸۷۱۴	۱,۸۶۹۴	۱,۹۴۹۸	۲,۰۶۷	۲,۰۷۹۴	۲,۰۷۲۶	۲,۳۱۴	۲,۳۹۰۱	۲,۴۵۳۸	۲,۵۴۶۶۵	۳,۰۲۰۱		۰,۲۶
۱,۸۲۷۸۵	۱,۷۶۱۶	۱,۷۵۲۱	۱,۷۹۱۹	۱,۹۲۹۹۵	۱,۹۳۱۹۵	۱,۸۹۶۴	۲,۰۵۰۴۵	۲,۰۵۵۸۵	۲,۱۰۲۷	۲,۱۵۴۷	۲,۴۷۲۶		۰,۲۷
۱,۷۳۸۲۵	۱,۶۴۷۸	۱,۶۴۵۹	۱,۶۶۴۷	۱,۸۲۲۲	۱,۸۲۶۳۵	۱,۷۷۹۸	۱,۸۵۷۶۵	۱,۸۸۷۲۵	۱,۹۱۳۲۵	۱,۹۳۷۵۵	۲,۱۳۷۳		۰,۲۸
۱,۶۴۵۹	۱,۵۷۳۶	۱,۵۶۲۳	۱,۵۷۴۵	۱,۷۲۷۶۵	۱,۷۲۹۸	۱,۶۶۴۹	۱,۶۹۷۵	۱,۷۶۰۳۵	۱,۷۷۰۸	۱,۷۹۸۳۵	۱,۹۲۷۵		۰,۲۹
۱,۵۵۲۸	۱,۴۶۵۶	۱,۴۶۴۷	۱,۴۷۶	۱,۶۴۰۱۵	۱,۶۴۳۱	۱,۵۶۰۵	۱,۵۷۷۶	۱,۶۵۶۳	۱,۶۶۰۶۵	۱,۶۷۴۱	۱,۷۴۲۲		۰,۳



شکل ۵. مقایسه‌ی نمودارهای کنترل DGWMA ( $0.9, 0.5$ ) و DEWMA ( $0.1$ )

جدول ۷. نتایج شبیه‌سازی ARL نمودارهای کنترل EWMA c ( $\lambda = 1 - q$ ) و GWMA c ( $q, \alpha$ ) ( $c_0 = 3$ ).

L	q = 0,9			q = 0,75			q = 0,5			$\alpha$			
	2,717	2,73	2,775	2,905	2,908	2,918	2,938	2,982	2,9985		3	3,009	3,016
1 →	0,9	0,75	0,5	1 →	0,9	0,75	0,5	1 →	0,9	0,75	0,5	$c_1 = 20$	
DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	DEWMA	ARL	
21	2,816	2,8247	2,01515	2,50935	2,1844	2,23665	2,2382	2,94335	2,9969	2,0402	2,1974	2,73305	21
22	2,34925	2,35245	2,5597	2,22695	2,8405	2,89845	2,1012	2,82745	5,08595	5,1519	5,28965	5,99345	22
23	2,06585	2,07775	2,30355	5,19475	2,7587	2,805	5,07665	5,97515	6,8777	6,84475	6,9373	7,93775	23
24	5,0587	5,0998	5,362	6,5794	6,1667	6,0992	6,2362	7,68145	9,9237	9,7097	9,77065	10,813	24
25	6,60735	6,62545	6,9064	8,5573	8,41	8,2989	8,5847	10,2268	15,315	14,823	14,6086	15,78	25
26	8,958	8,99335	9,3607	11,6932	12,2784	11,9047	12,1199	14,4999	26,16675	25,0454	24,0615	24,8775	26
27	12,4928	12,2589	12,5975	16,9557	20,48565	19,5932	18,8324	21,8788	49,3297	46,9693	44,839	44,022	27
28	22,7607	21,9781	22,1256	27,0713	40,0075	37,0274	34,5655	37,6091	101,931	97,0527	93,5438	89,3408	28
29	49,015	45,1794	43,2888	50,7475	95,21825	89,1909	80,2269	80,1026	222,3214	218,13	213,368	208,614	29
30 →	154,7918	139,939	127,048	136,181	262,2451	250,35	238,785	234,157	418,08545	404,566	418,158	420,482	30 →
ARL	270,5431	271,41	269,755	270,116	269,7398	271,291	270,967	271,818	269,7743	270,71	269,38	270,25	ARL
31	123,28225	113,078	102,064	97,56	157,52375	150,108	138,355	125,095	186,7588	182,391	178,426	168,365	31
32	42,2285	39,617	37,5267	39,9068	61,47535	57,4893	52,805	50,4518	87,9328	84,8207	82,3607	77,7085	32
33	21,10845	20,1125	19,6425	22,0968	29,18555	27,5286	26,0862	27,1025	44,8563	43,3619	41,8144	40,1117	33
34	12,79365	12,4528	12,5595	14,2547	16,70145	16,0788	15,5407	16,8966	25,37615	24,5556	24,1641	23,8548	34
35	8,7205	8,6041	8,75815	10,0461	10,75555	10,5889	10,5703	11,6665	15,90535	15,4586	15,3509	15,46	35
36	6,50605	6,43275	6,56295	7,60645	7,62095	7,65905	7,7078	8,54375	10,6824	10,4074	10,3223	10,7918	36
37	5,06225	5,00445	5,1771	5,8992	5,8268	5,75205	5,9542	6,61015	7,63005	7,6306	7,5821	8,0312	37
38	4,1002	4,0643	4,2224	4,784	4,62235	4,6468	4,77845	5,30415	5,74955	5,7879	5,81005	6,25665	38
39	2,43795	2,41725	2,54425	2,98725	2,7961	2,8229	2,96095	3,267	4,5429	4,5568	4,63715	5,03015	39
40	2,91675	2,90635	3,0288	3,28285	2,2376	2,25315	2,39175	2,6659	2,74975	2,77255	2,8456	2,99795	40



شکل ۶. مقایسه‌ی نمودارهای کنترل DGWMA (0,9 و 0,5) و GWMA (0,9 و 0,5).



جدول ۸. نتایج شبیه‌سازی ARL نمودارهای کنترل  $c(q, \alpha)$  و  $c(\lambda = 1 - q)$  و  $DGWMA$  ( $c = 30$ ).

$L$	$q_1 = q_2 = 0.9$				$q_1 = q_2 = 0.75$				$q_1 = q_2 = 0.5$				$\alpha = \beta$
	$1 \rightarrow$	$0.9$	$0.75$	$0.5$	$1 \rightarrow$	$0.9$	$0.75$	$0.5$	$1 \rightarrow$	$0.9$	$0.75$	$0.5$	
	DEWMA				DEWMA				DEWMA				$c_1 = 20$
	۷,۴۰۴۲	۶,۵۱۲۷	۵,۷۰۰۷	۴,۰۲۲۳	۶,۳۵۲۳	۶,۲۰۳۲۵	۵,۸۴۱۶	۵,۱۴۷۴۵	۵,۳۹۲	۵,۳۸۵۲۵	۵,۳۴۴۵	۵,۳۵۴۴	
۲۱	۸,۶۵۴۰۵	۷,۸۵۶۷۵	۶,۸۷۹۷	۴,۹۶۴۹۵	۷,۳۰۲۳	۷,۲۲۰۹	۶,۸۸۸۴	۶,۱۱۵۳	۶,۲۷۱۰۵	۶,۲۷۱۹۵	۶,۲۷۷۶	۶,۳۵۳۵۵	
۲۲	۱۰,۲۷۸۶	۹,۴۱۳	۸,۳۴۷۱۵	۶,۰۹۴۱۵	۸,۴۴۵۷	۸,۴۰۰۷	۸,۱۵۹۳	۷,۳۳۲۳	۷,۵۵۰۱۵	۷,۴۸۷۸	۷,۵۱۱۶	۷,۷۱۶۹۵	
۲۳	۱۲,۰۲۲۷۵	۱۱,۳۳۳۴	۱۰,۲۲۷۴	۷,۶۳۸۱	۹,۹۷۱۲۵	۹,۹۷۳۲	۹,۷۸۰۲	۸,۹۹۸۵۵	۹,۴۹۸۲	۹,۳۳۶۱۵	۹,۳۰۷	۹,۵۳۲۰۵	
۲۴	۱۴,۱۵۹۶	۱۳,۶۱۳۳	۱۲,۶۳۱۷	۹,۶۳۵۳	۱۲,۰۹۸۳۵	۱۲,۰۶۹۹	۱۱,۹۹۳	۱۱,۲۸۷۱	۱۲,۶۵۴۱	۱۲,۲۹۸۶	۱۲,۰۰۴۴	۱۲,۲۷۶۸	
۲۵	۱۶,۹۱۰۶	۱۶,۵۶۵۴	۱۵,۷۷۲۸	۱۲,۵۰۸۸	۱۵,۴۰۹۵	۱۵,۲۱۶۷	۱۵,۱۵۳۵	۱۴,۶۸	۱۸,۶۸۸۰۵	۱۷,۷۳۵۳	۱۶,۶۴۳۳	۱۶,۸۳۲۶	
۲۶	۲۰,۵۸۵۳	۲۰,۵۷۱۱	۲۰,۲۶۳۷	۱۶,۸۷۸۹	۲۱,۲۷۴۹	۲۰,۶۵۳۳	۲۰,۳۷۳۴	۱۹,۹۰۷۴	۳۰,۹۹۴۱	۲۸,۴۷۹	۲۶,۲۵۰۵	۲۴,۴۶۷۵	
۲۷	۲۷,۵۳۷۵	۲۷,۱۸۳۵	۲۷,۱۰۱۳	۲۴,۱۳۶۶	۳۴,۶۰۵۳۵	۳۱,۸۸۴۱	۲۹,۹۶۶۲	۲۹,۸۱۲۵	۶۰,۴۸۵۲۵	۵۳,۸۰۸۳	۴۷,۵۰۹۵	۴۱,۶۸۶۷	
۲۸	۴۴,۰۱۴۰۵	۴۱,۵۵۳۹	۴۱,۱۹۲۳	۳۸,۴۹۳۳	۷۱,۶۴۳۳	۶۳,۴۹۴۶	۵۵,۵۸۵۵	۵۱,۱۷۲۵	۱۳۵,۲۵۴۵	۱۲۳,۰۱۲	۱۰۷,۲۱۴	۸۸,۴۴	
۲۹	۱۱۷,۵۲۴۸۵	۱۰۳,۰۶۶	۹۱,۵۷۹۶	۸۲,۸۹۳	۲۰۲,۳۹۳۴	۱۷۹,۲۷۸	۱۵۵,۰۷۲	۱۲۶,۲۶۱	۳۱۷,۷۱۱۸	۳۰۴,۱۷۴	۲۸۲,۳۸۲	۲۵۳,۲۶۵	
۳۰	۳۷۱,۹۹۲۶۵	۳۷۱,۱۱۵	۳۷۰,۵۰۲	۳۶۹,۳۷۳	۳۷۱,۰۹۹۷	۳۷۰,۸۷۱	۳۷۰,۶۴۹	۳۶۹,۶۴۱	۳۷۱,۹۱۶۴۵	۳۶۹,۴۶۳	۳۷۰,۴۹۱	۳۷۱,۳۶۳	ARL <sub>0</sub>
۳۱	۴۸,۳۹۸۸	۳۹,۸۸۶۶	۳۳,۹۷۹۸	۲۹,۴۴۹۷	۹۲,۱۴۹۹۵	۸۵,۸۶۲۲	۷۵,۶۶۶۶	۶۱,۴۹۶۶	۱۴۵,۰۹۱۰۵	۱۴۱,۸۶۴	۱۳۵,۱۷۹	۱۱۹,۷۴۳	
۳۲	۹,۴۹۵۵۵	۹,۰۵۳۰۵	۸,۱۱۵۲	۸,۴۴۵	۲۱,۶۸۱۴۵	۱۹,۹۵۸۲	۱۷,۸۳۰۸	۱۷,۷۲۱۹	۵۰,۸۷۱۴	۴۸,۳۸۲۹	۴۴,۸۴۹۱	۴۰,۲۰۶۷	
۳۳	۴,۱۱۷۳	۴,۰۱۴۶۵	۴,۰۹۰۳۵	۴,۶۴۲۷۵	۷,۹۳۸۴۵	۷,۴۱۴۷	۷,۲۳۱۷	۸,۶۲۸۵۵	۱۹,۵۶۷۶۵	۱۹,۳۹۷	۱۸,۱۷۳۶	۱۸,۰۳۸	
۳۴	۲,۸۲۱۴۵	۲,۸۰۹	۲,۸۳۲۷۵	۳,۲۶۴۷	۴,۱۱۱۳۵	۴,۰۶۸۷	۴,۲۹۱۷	۵,۳۳۱۲۵	۹,۲۴۲۴۵	۹,۱۸۲۵۵	۹,۳۸۲۷۵	۱۰,۱۳۰۸	
۳۵	۲,۳۷۰۹	۲,۳۳۵۷۵	۲,۳۸۱۷	۲,۶۳۲۵	۲,۸۹۰۸۵	۲,۹۷۲۷	۳,۱۰۳۱۵	۳,۸۵۷۹	۵,۴۵۶۸۵	۵,۳۶۲۴۵	۵,۵۱۷	۶,۵۳۱۸	
۳۶	۲,۱۳۸۵	۲,۱۱۶	۲,۱۲۵۸	۲,۲۷۶۱۵	۲,۴۱۸۲۵	۲,۴۵۲۸۵	۲,۵۴۲۰۵	۳,۱۱۱۶	۳,۶۱۲۷	۳,۷۴۶۵	۳,۸۳۷۸	۴,۷۰۵۵	
۳۷	۲,۰۲۰۸	۱,۹۸۴۶	۱,۹۹۱۲	۲,۰۸۰۶	۲,۱۸۳۱	۲,۱۹۵۹	۲,۲۶۱۰۵	۲,۶۳۹۴۵	۲,۷۶۶۲۵	۲,۸۶۸۱۵	۳,۰۱۱۳	۳,۶۷۹۸	
۳۸	۱,۹۲۷۱	۱,۸۸۰۹۵	۱,۸۹۲۱	۱,۹۲۰۸	۲,۰۴۰۳۵	۲,۰۴۳۲۵	۲,۰۸۷۳۵	۲,۳۴۷۶	۲,۳۶۴۷	۲,۴۲۰۸۵	۲,۵۵۰۲	۳,۰۶۸۲۵	
۳۹	۱,۸۵۷۷	۱,۸۰۳۹۵	۱,۸۱۵۹۵	۱,۸۰۸۷	۱,۹۲۹۵۵	۱,۹۴۲۰۵	۱,۹۷۰۲	۲,۱۳۴۴۵	۲,۱۴۴۴۵	۲,۱۸۲۳	۲,۲۷۹۰۵	۲,۶۴۷۲۵	
۴۰	۱,۷۹۰۸	۱,۷۴۳۲۵	۱,۷۳۸۹۵	۱,۷۱۸۰۵	۱,۸۵۹۱۵	۱,۸۶۳۳	۱,۸۸۰۲	۲,۰۰۳۶۵	۱,۹۹۲۲۵	۲,۰۲۲۴۵	۲,۰۹۴۸۵	۲,۳۳۵۹	

جدول ۹. نتایج مقایسه‌ی نمودارهای کنترل  $(0.1)$  EWMA،  $(0.1)$  DEWMA و  $(0.9, 0.5)$  GWMA با نمودار کنترل  $(0.9, 0.5)$  DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی و تعیین بهترین نمودار با توجه به اندازه‌ی شیفیت.

جدول ۹. نتایج مقایسه‌ی نمودارهای کنترل  $(0.1)$  EWMA،  $(0.1)$  DEWMA و  $(0.9, 0.5)$  GWMA با نمودار کنترل  $(0.9, 0.5)$  DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی و تعیین بهترین نمودار با توجه به اندازه‌ی شیفیت.

### ۵. نتیجه‌گیری

«نمودار کنترل» ابزار مهمی در کنترل فرایند آماری است که اولین بار توسط شوهارت ارائه شد. ضعف نمودارهای کنترل شوهارت، سرعت کم آنها در کشف شیفیت‌های کوچک فرایند است. حال آن که نمودارهای کنترل باحافظه در کشف تغییرات کوچک بسیار حساس‌اند.

نمودارهای کنترل GWMA و DGWMA غالباً برای پایش مشخصه‌های

مقایسه با DGWMA	اندازه‌ی شیفیت			
	منفی متوسط	منفی کوچک	مثبت کوچک	مثبت متوسط
EWMA	✓	×	×	×
DEWMA	×	×	×	✓
GWMA	✓	×	×	×
بهترین نمودار	EWMA	DGWMA	DGWMA	DEWMA

ایجاد نمی‌کند و حتی در  $q$  های بزرگ ( $q = 0.9$ ) باعث کاهش شدید  $ARL_c$  نمودار کنترل می‌شود.

کارایی نمودارها در کشف انحرافات بادلیل فرایند، با رسم نمودار درصد بهبود نمودار کنترل DGWMA نسبت به سایر نمودارهای کنترل، مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج حاصله حاکی از آن است که نمودار کنترل DGWMA هنگامی که برای مشخصه‌های کیفی وصفی رسم شود، در کشف شیفت‌های مثبت و مقادیر کوچک شیفت‌های منفی بهتر از دو نمودار EWMA و GWMA عمل می‌کند و نمودار کنترل DEWMA در شیفت‌های مثبت متوسط بهتر از نمودار کنترل DGWMA است. طراحی نمودار کنترل DGWMA برای پایش واریانس فرایند و نیز پایش همزمان میانگین و واریانس فرایند، و نیز توسعه‌ی نمودار کنترل DGWMA برای فرایندهای خودهمبسته<sup>۱۴</sup> به عنوان موضوعاتی برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

کیفی متغیر، و با فرض نرمال بودن توزیع پیوسته‌ی مشاهدات، ارائه شده‌اند. در این مقاله نمودارهای کنترل GWMA و DGWMA برای مشخصه‌های کیفی وصفی ارائه شد. این مشخصه‌ها در فرایندهایی که طی آن‌ها تعداد اقلام نامنطبق شمارش می‌شوند دارای توزیع‌های گسسته‌ی دو جمله‌یی، و در فرایندهایی که طی آن‌ها تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی شمارش می‌شود دارای توزیع پواسون هستند. میزان  $ARL_c$  نمودارهای کنترل با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو تخمین زده شده و تأثیر تغییرات پارامترهای نمودارها بر نرخ هشدار غلط آنها بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که افزایش پارامترهای طراحی نمودارها ( $q$ ) در نمودار کنترل GWMA و نیز  $q_1$  و  $q_2$  در نمودار کنترل DGWMA موجب بهبود قابل توجه در  $ARL_c$  نمودار کنترل می‌شود در حالی که افزایش پارامترهای شکل نمودارها ( $\alpha$ ) در نمودار کنترل GWMA و نیز  $\alpha$  و  $\beta$  در نمودار کنترل DGWMA بهبود قابل توجهی در  $ARL_c$  نمودارها

## پانویس‌ها

1. shewhart control charts
2. statistical process control (SPC)
3. memory control charts
4. exponentially weighted moving average (EWMA)
5. double exponentially weighted moving average (DGWMA)
6. generally weighted moving average (GWMA)
7. double generally weighted moving average (DGWMA)
8. average run length
9. center line (CL)
10. upper control limit (UCL)
11. lower control limit (LCL)
12. kurtosis
13. skewness
14. auto-correlated DGWMA control chart

## منابع (References)

1. Roberts, S.W. "Control chart tests based on geometric moving averages", *Technometrics*, **1**, pp. 239-250 (1959).
2. Zhang, L. and Chen, G. "An extended EWMA mean chart", *Quality Technology & Quantitative Management*, **2**(1), pp. 39-52 (2005).
3. Sheu, S.H. and Lin, T.C. "The generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the

process mean", *Quality Engineering*, **16**(2), pp. 209-231 (2003).

4. Tai, S.H., Lin, C.I. and Chen, Y.H. "Design and implementation of the extended exponentially weighted moving average", *Management and Service Science*, MASS '09. International Conference on, pp. 1-4, (20-22 Sept 2009).
5. Sheu, S.H., Tai, S.H., Hsieh, Y.T. and Lin, T.C. "Monitoring process mean and variability with generally weighted moving average control charts", *Computers & Industrial Engineering*, **57**, pp. 401-407 (2009).
6. Lin, T.C., Su, M.C. and Tai, S.H. "Poisson GWMA control chart for enhancing supply chain quality", Department of Industrial Management, Lunghwa University of Science and Technology, No. 300, Sec. 1, Wanshou Rd., Guishan, Taoyuan County 33306, Taiwan ROC (2006).
7. Lin, T.C., Hu, S.J. and Yu, S.M. "The study of robust generally weighted moving average control chart", Department of Industrial Management, Lunghwa University of Science and Technology, No. 300, Sec. 1, Wanshou Rd., Guishan, Taoyuan County 33306, Taiwan ROC (2007).
8. Sheu, S.H. and Hsieh, Y.T. "The extended GWMA control chart", *Journal of Applied Statistics*, **36**(2), pp. 135-147 (2009).