

حل مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی هارمونی در شرایط مجاز بودن فروش استقراضی

حمیدرضا قاسمی (کارشناس ارشد)

امیرعباس نجفی* (استادیار)

پژمان رضانی (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۴
دوره‌ی ۱ - شماره‌ی ۱، ص. ۲۸-۴۱

تصمیم‌گیری در مورد نحوه‌ی تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بهینه در شرایط بحرانی بازار (یعنی در زمان افت قیمت دارایی‌ها) با فرض مجاز بودن فروش استقراضی از جمله مسائل مهم پیشروی سرمایه‌گذاران در بازار سرمایه است. از این رو در این تحقیق مدلی در حوزه‌ی مسائل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری پیشنهاد شده که فرض مجاز بودن فروش استقراضی را در کنار برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه در نظر می‌گیرد. مدل پیشنهادی دارای ماهیت برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی بوده و با توجه به پیچیدگی محاسباتی آن، نیازمند بهره‌گیری از الگوریتم‌های فراابتکاری است. با توجه به پیوستگی فضای جواب مدل پیشنهادی، الگوریتم جست‌وجوی هارمونی به عنوان یک الگوریتم نوین و کارا در حل مسائل پیوسته به کار گرفته شده است. نتایج حاصله نشان‌گر عملکرد مناسب این الگوریتم در حل مدل پیشنهادی است.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی، مدل مارکوویتز، فروش استقراضی، الگوریتم جست‌وجوی هارمونی.

hamidreza.ghasemi@live.com
aana.jafi@kntu.ac.ir
pezhman.ramezani@gmail.com

۱. مقدمه

در بخش پنجم ارائه می‌شود. در بخش ششم نیز جمع‌بندی و نتیجه‌گیری تحقیق آمده است.

۲. مرور ادبیات موضوع

در نظریه‌های نوین سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذاران قادرند علاوه بر خرید دارایی‌های در دسترس، برخی از دارایی‌هایی را که در حال حاضر در اختیار ندارند نیز فروخته و درآمد حاصل از آن را در دارایی‌های دیگر سرمایه‌گذاری کنند که این امر فروش استقراضی نامیده می‌شود.^[۲-۴] از این رو سازوکار مدل‌سازی و تعیین مرز کارا در این حوزه برای سرمایه‌گذاران از اهمیت به‌سزایی برخوردار است.

در این تحقیق با فرض مجاز بودن فروش استقراضی (آزاد بودن اوزان سرمایه‌گذاری)، مدلی در حوزه‌ی مسائل انتخاب پرتفوی ارائه داده‌ایم که سه وضعیت «خرید»، «فروش استقراضی» و «نه خرید و نه فروش» را برای هر یک از سهام شامل می‌شود. در این مدل علاوه بر دو محدودیت نظریه‌ی بازده و بودجه، برخی محدودیت‌های کاربردی همانند محدودیت تعداد سهام در پرتفوی^[۵-۹] و محدودیت سقف و کف^[۱۰] نیز در نظر گرفته می‌شود. در شرایط مجاز بودن فروش استقراضی در بازار بورس،

هدف از حل مدل‌های انتخاب پرتفوی، ارائه‌ی مجموعه‌ی از جواب‌ها (پرتفوی‌های مختلف با ریسک و بازده گوناگون) به تصمیم‌گیرنده (سرمایه‌گذار) برای انتخاب پرتفوی مورد نظر است. در مدل پایه‌ی مارکوویتز^[۱] که یک مدل تک‌هدفه است چنانچه به‌ازای مجموعه‌ی از مقادیر سطح کمینه‌ی بازده، مدل به‌طور مکرر حل و نمودار بازده - ریسک پرتفوی به‌ازای جواب‌های مختلف ترسیم شود، به مجموعه نقاطی تحت عنوان «مرز کارا» دست می‌یابیم که به سرمایه‌گذار این امکان را می‌دهد که براساس نیازمندی ریسک/بازده خاصی پرتفوی خود را انتخاب کند؛ این انتخاب به ریسک‌گریزی و ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار بستگی دارد. در تحقیق حاضر، مدل پایه‌ی مارکوویتز در شرایط امکان فروش استقراضی و وجود برخی از محدودیت‌های کاربردی بازار، توسعه داده می‌شود. همچنین برای حل مدل توسعه‌یافته، از یک الگوریتم فراابتکاری استفاده می‌شود. در این نوشتار، در بخش دوم به طور خلاصه ادبیات موضوعی مسئله مرور می‌شود. در بخش سوم مدل ریاضی مسئله بیان، و جزئیات الگوریتم فراابتکاری حل مسئله در بخش چهارم مطرح می‌شود. به‌منظور بررسی کارایی الگوریتم توسعه‌یافته، یک مطالعه‌ی موردی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۰/۳۰، اصلاحیه ۱۳۹۲/۱۱/۵، پذیرش ۱۳۹۲/۱۱/۱۴

هنگامی که پیش‌بینی می‌شود قیمت سهام برخی از شرکت‌ها در بازار بورس افت کند -- درمورد نحوه سرمایه‌گذاری در سهام در دسترس تصمیمات صحیح اتخاذ کنند.

۳. ساختار مدل پیشنهادی

۱.۳. پارامترها

- N : تعداد دارایی‌های در دسترس؛
- $E(R_i)$: بازده انتظاری دارایی i ام ($i = 1 \dots N$)؛
- σ_{ij} : کوواریانس دارایی i و j ؛
- R_e : کم‌ترین بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار؛
- R_f : بازده بدون ریسک؛
- K_{\min} : کم‌ترین تعداد سهام موجود در پرتفوی؛
- K_{\max} : بیشترین تعداد سهام موجود در پرتفوی؛
- α_i : حد پایین دارایی i ام در وضعیت خرید؛
- β_i : حد بالای دارایی i ام در وضعیت خرید؛
- θ_i : حد پایین دارایی i ام در وضعیت فروش استقراسی؛
- γ_i : حد بالای دارایی i ام در وضعیت فروش استقراسی؛
- h_i : درصد بازگردانی به قرض‌دهنده‌ی دارایی.

۲.۳. متغیرهای تصمیم‌گیری

- X_i : وزن دارایی i ام موجود در پرتفوی؛
- δ_i و k_i : متغیرهای باینری تعیین‌کننده‌ی وضعیت دارایی

$$k_i = \begin{cases} 0 & \text{نه خرید و نه فروش استقراسی} \\ 1 & \text{خرید یا فروش استقراسی} \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{فروش استقراسی} \\ 1 & \text{خرید} \end{cases}$$

۳.۳. تابع هدف

تابع هدف در مدل مورد نظر کمیته‌کردن ریسک پرتفوی (واریانس پرتفوی) در نظر گرفته شده که برحسب ماتریس واریانس - کوواریانس قابل محاسبه است:

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

۴.۳. محدودیت‌ها

۱.۴.۳. محدودیت کم‌ترین بازده مورد انتظار

با توجه به مجاز بودن فروش استقراسی در مدل، برای آن که صاحب اصلی سهام که سهام را به ما قرض داده بتواند ریسک ناشی از کاهش قیمت آتی سهام را پوشش دهد، باید درصدی از بازده بدون ریسک را در اختیار او قرار دهیم تا برای فروش استقراسی انگیزه داشته باشد. با در نظر گرفتن این نکته، محدودیت کم‌ترین بازده

مورد انتظار چنین خواهد بود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N [X_i(E(R_i) - (1 - \delta_i)h_i R_f)] \geq R_e \quad (2)$$

که در آن h_i درصدی از بازده بدون ریسک است که به قرض‌دهنده‌ی سهم i ام به‌ازای هر سهم می‌دهیم و در بازه $[0, 1]$ تغییر می‌کند و می‌تواند به صورت قطعی یا تصادفی باشد.

۲.۴.۳. محدودیت بودجه

برای آن که مجموع دارایی‌ها در پرتفوی برابر کل بودجه در دسترس باشد، این محدودیت چنین بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad (3)$$

۳.۴.۳. محدودیت سقف و کف

در شرایطی که هم خرید و هم فروش استقراسی داشته باشیم و در هر دو حالت محدودیت سقف و کف در میزان سهم مورد نظر وجود داشته باشد (برای جلوگیری از تجاوز بیش از حد سهم و کاهش هزینه‌های معاملاتی در نسبت‌های کم) در هر دو وضعیت حدود بالا و پایین در نظر گرفته می‌شود که شماتیک آن در شکل ۱ نشان داده شده است.

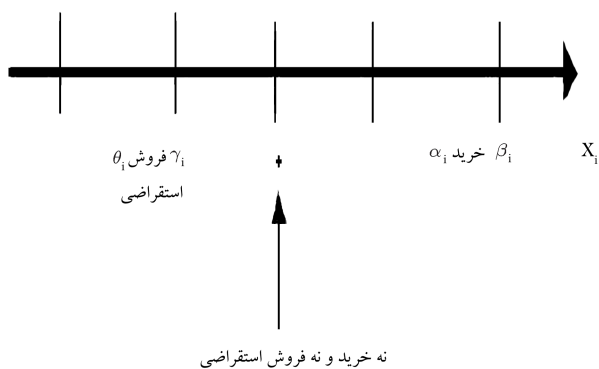
چنان که مشاهده می‌شود α_i و β_i به ترتیب حدود پایین و بالا در وضعیت خرید ($\beta_i < \alpha_i < 0$) و θ_i و γ_i به ترتیب حدود پایین و بالا در وضعیت فروش استقراسی ($0 < \gamma_i < \theta_i$) هستند. شایان ذکر است چنانچه $X_i = 0$ باشد آنگاه درمورد سهم i ام خرید و فروش استقراسی انجام نمی‌دهیم (یعنی سهم i ام در پرتفوی انتخابی نیست). با استفاده از دو متغیر باینری تعریف شده، محدودیت سقف و کف را می‌توان چنین مدل کرد:

$$(\alpha_i \delta_i + \theta_i (1 - \delta_i)) k_i \leq X_i \leq (\beta_i \delta_i + \gamma_i (1 - \delta_i)) k_i \quad (4)$$

۴.۴.۳. محدودیت تعداد سهام موجود در پرتفوی

این محدودیت به‌منظور مدیریت هرچه بهتر تعداد دارایی‌های موجود در پرتفوی به مدل تحمیل می‌شود و از آنجا که در مدل مورد نظر هدف مدیریت هر دو مورد دارایی‌های خریداری شده و فروش استقراسی شده است و با توجه به آن که متغیر باینری k_i زمانی برابر ۱ است که دارایی i ام خریداری یا فروخته می‌شود، لذا این محدودیت را می‌توان چنین بیان کرد:

$$K_{\min} \leq \sum_{i=1}^N k_i \leq K_{\max} \quad (5)$$



شکل ۱. وضعیت تصمیم‌گیری در مورد هر سهم.

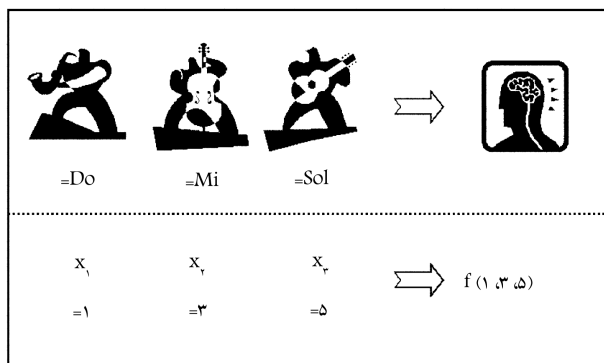
و سپس به وسیله‌ی گولدربرگ و دیگران توسعه داده شد. الگوریتم ژنتیک یک الگوریتم جست‌وجوی جهانی مبتنی بر مفاهیم نشأت گرفته از ژنتیک طبیعی و قانون بقای نسل داروین است. روش‌های بهینه‌سازی مهندسی بر پایه‌ی الگوریتم‌های فراابتکاری، شامل روش‌های مبتنی بر الگوریتم ژنتیک، گاهی بر ناکارایی روش‌های عددی مرسوم غلبه می‌کنند. اگرچه به‌منظور حل مسائل مشکل و پیچیده‌ی بهینه‌سازی دنیای واقعی، باید الگوریتم‌های ابتکاری و قوی‌تر بر پایه‌ی قیاس با پدیده‌ی طبیعی و مصنوعی کشف شود.

۲.۴. الگوریتم جست‌وجوی هارمونی

اخیراً محققین الگوریتم فراابتکاری جدید جست‌وجوی هارمونی را توسعه داده‌اند [۱۸] که از فرایند جست‌وجوی موسیقی برای یک حالت هارمونی کامل نشأت گرفته است. هارمونی در موسیقی مشابه بردار جواب در بهینه‌سازی است. بداهه‌های موسیقی دان مشابه رویه‌های جست‌وجوی کلی یا محلی در تکنیک‌های بهینه‌سازی است. الگوریتم جست‌وجوی هارمونی نیازمند مقادیر اولیه برای متغیرهای تصمیم نیست. علاوه بر این به‌جای جست‌وجوی گرادابانی از یک جست‌وجوی تصادفی احتمالی بر پایه‌ی نرخ در نظرگیری حافظه‌ی هارمونی و نرخ تنظیم تن صدا استفاده می‌کند. اجراهای موسیقی به دنبال پیدا کردن هارمونی مطلوب (حالت کامل) است به‌طوری که از طریق تابع هدف تعیین می‌شود. تن صدای هر آلت موسیقی کیفیت زیبایی را تعیین می‌کند. [۱۸]

در شکل ۲ جزئیات تشابه بین بداهه‌گویی موسیقی و بهینه‌سازی مهندسی نشان داده شده است. در بداهه‌گویی موسیقی هر نوازنده تن صدای میان طیف ممکن را به صدا درمی‌آورد، که همراه با هم یک بردار هارمونی را ایجاد می‌کنند. اگر تمامی تن صداها، هارمونی خوبی ایجاد کنند، آن تجربه در حافظه‌ی هر نوازنده ذخیره می‌شود و احتمال ایجاد هارمونی خوب در زمان بعدی افزایش می‌یابد. به‌طور مشابه، در بهینه‌سازی مهندسی، هر متغیر تصمیم در ابتدا هر مقدار ممکن را در بازه‌ی شدنی اختیار می‌کند که با هم یک بردار جواب را ایجاد می‌کنند. اگر تمامی مقادیر متغیرهای تصمیم یک جواب خوب ایجاد کنند، آن تجربه در حافظه‌ی هر متغیر ذخیره می‌شود و احتمال ایجاد جواب خوب در زمان بعدی افزایش می‌یابد.

در شکل ۳ ساختار حافظه‌ی هارمونی، که بخش مرکزی جست‌وجوی هارمونی است، نشان داده شده است. یک جاز سه‌نفره متشکل از ساکسیفون، کنترباس و گیتار را در نظر بگیرید. میزان خاصی از تن صداها قابل ارجاع در حافظه‌ی هر موسیقی‌دان وجود دارد: نوازنده‌ی ساکسیفون {Do, Mi, Sol}، نوازنده‌ی کنترباس



شکل ۲. تشابه بین بداهه‌گویی موسیقی و بهینه‌سازی مهندسی. [۹]

با توجه به موارد ذکر شده مدل نهایی پیشنهادی عبارت است از:

$$\text{Min } \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij}$$

Subject to :

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^N [X_i (E(R_i) - (\lambda - \delta_i) h_i R_f)] \geq R_e$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1$$

$$(\alpha_i \delta_i + \theta_i (\lambda - \delta_i)) k_i \leq X_i \leq (\beta_i \delta_i + \gamma_i (\lambda - \delta_i)) k_i$$

$$K_{\min} \leq \sum_{i=1}^N k_i \leq K_{\max}$$

$$X_i = \text{free } \forall i$$

$$k_i, \delta_i = 0 \text{ or } 1 \quad \forall i$$

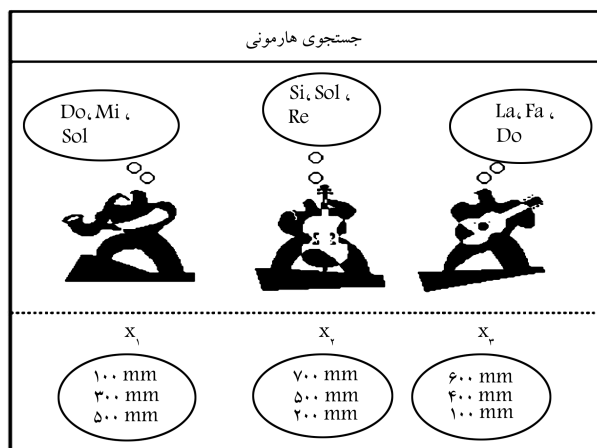
این مدل، یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی (MINLP) است که پیچیدگی محاسباتی دارد. لذا برای حل آن در اندازه‌های بزرگ نیازمند استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری هستیم که در ادامه به معرفی الگوریتم جست‌وجوی هارمونی خواهیم پرداخت.

۴. الگوریتم‌های فراابتکاری

۴.۱. کلیات

در طول چهارده‌ی گذشته، الگوریتم‌های زیادی به‌منظور حل مسائل متنوع بهینه‌سازی مهندسی توسعه یافته‌اند. اکثر این الگوریتم‌ها مبتنی بر روش‌های برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی عددی بوده‌اند که نیازمند اطلاعات گرادابانی معتبرند و معمولاً جست‌وجو را برای بهبود جواب در همسایگی نقطه‌ی شروع انجام می‌دهند. این الگوریتم‌های بهینه‌سازی عددی، استراتژی مفیدی برای به دست آوردن جواب بهینه‌ی کلی در مدل‌های ساده و ایده‌آل فراهم می‌کنند، اگرچه بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مهندسی دنیای واقعی ذاتاً پیچیده‌اند و حل آنها با استفاده از این الگوریتم‌ها کاملاً پیچیده است. اگر بیش از یک بهینه‌ی محلی در مسئله موجود باشد، نتایج ممکن است وابسته به انتخاب نقطه‌ی اولیه بوده و جواب بهینه‌ی حاصل ضرورتاً بهینه‌ی کلی نخواهد بود. بنابراین زمانی که مدل دارای تابع هدف و محدودیت‌های چندگانه یا قله‌های نوک‌تیز باشد، جست‌وجوی گرادابانی ممکن است مشکل و ناپایدار باشد.

پس‌زمینه‌ی محاسباتی روش‌های عددی موجود، محققین را مجبور به اتکا بر الگوریتم‌های فراابتکاری بر پایه‌ی شبیه‌سازی برای حل مسائل بهینه‌سازی مهندسی کرد. عامل رایج در الگوریتم‌های فراابتکاری این است که قواعد و تصادف را به‌منظور پیروی از پدیده‌های طبیعی ترکیب می‌کند. این پدیده‌ها شامل فرایند تکامل زیست‌شناختی (مثل برخی از الگوریتم‌های تکاملی پیشنهادی [۱۱-۱۳] و الگوریتم‌های ژنتیک پیشنهادی)، [۱۴، ۱۵] رفتار حیوانی (مثل جست‌وجوی ممنوع پیشنهادی گالور) [۱۶] و فرایند تبرید فیزیکی (مثل شبیه‌سازی تبرید پیشنهادی کرک پاتریک و دیگران). [۱۷] در دهه‌ی گذشته این الگوریتم‌های فراابتکاری، خصوصاً روش‌های مبتنی بر ژنتیک، توسط بسیاری از محققین برای حل مسائل متنوع بهینه‌سازی مهندسی مورد مطالعه قرار گرفته است. الگوریتم ژنتیک ابتدا توسط هالند



شکل ۳. ساختار حافظه‌ی هارمونی. [۱۹]

۳. انتخاب مقدار کاملاً تصادفی از بازه مقادیر ممکن که به عنوان «تصادفی کردن» تعریف می‌شود. سه قاعده‌ی الگوریتم جست‌وجوی هارمونی به‌طور مؤثر با به‌کارگیری دو پارامتر، همچون نرخ ملاحظه‌ی حافظه‌ی هارمونی (HMCR) و نرخ تنظیم تن صدا (PAR) هدایت شده است.

در شکل ۴ رویه‌ی بهینه‌سازی الگوریتم فراابتکاری جست‌وجوی هارمونی در پنج مرحله نشان داده شده است:

۱. مقداردهی اولیه‌ی مسئله‌ی بهینه‌سازی و پارامترهای الگوریتم. پارامترهای الگوریتم HS در این مرحله تعیین می‌شود؛ اندازه‌ی حافظه‌ی هارمونی (تعداد بردارهای جواب در حافظه‌ی هارمونی HMS) ^۵، نرخ ملاحظه‌ی حافظه‌ی هارمونی (HMCR)، نرخ تنظیم تن صدا (PAR) و شرط خاتمه (بیشینه تعداد جست‌وجو). در اینجا HMCR و PAR پارامترهایی هستند که برای بهبود بردار جواب استفاده می‌شوند.

۲. مقداردهی اولیه‌ی حافظه‌ی هارمونی (HM). در این مرحله «حافظه‌ی هارمونی» ماتریس HM نمایش داده شده در رابطه‌ی ۷ با بردارهای جواب تصادفی ایجاد شده و با مقادیر تابع هدف مرتب‌شده $f(x)$ پر می‌شود.

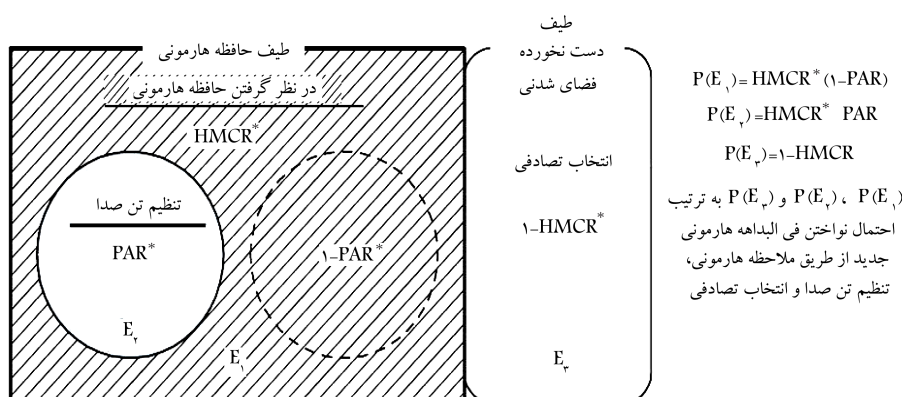
$$HM = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{HMS} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

۳. نواختن فی‌البداهه‌ی هارمونی جدید از حافظه‌ی هارمونی. در این مرحله یک بردار هارمونی جدید $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ از حافظه‌ی هارمونی تولید می‌شود (شکل ۵). به‌عنوان نمونه مقدار اولین متغیر (x'_1) برای بردار جدید می‌تواند از هر مقداری در طیف معین حافظه‌ی هارمونی $(x'_1 - x_1^{HMS})$ انتخاب شود. مقادیر سایر متغیرهای (x'_i) را می‌توان در وضعیت مشابه انتخاب کرد. در اینجا ممکن است انتخاب مقدار جدید با استفاده از پارامتر HMCR که بین ۰ و ۱ متغیر است چنین دنبال شود:

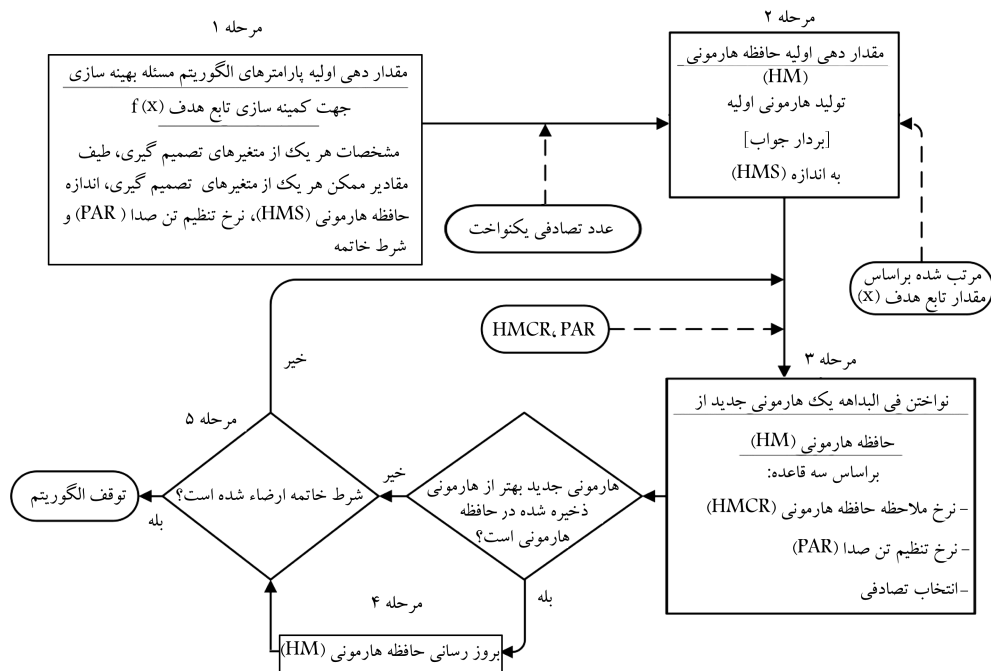
$$x'_i \leftarrow \begin{cases} x'_i \in \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{HMS}\} & \text{با احتمال HMCR} \\ x'_i \in X_i & \text{با احتمال (1 - HMCR)} \end{cases} \quad (۷)$$

{Si, Sol, Re} و گیتاریست {La, Fa, Do}. اگر نوازنده‌ی ساکسیفون به‌طور تصادفی {Sol} را از حافظه‌ی خود یعنی {Do, Mi, Sol}، نوازنده کترباس {si} را از حافظه‌ی خود یعنی {Si, Sol, Re} و گیتاریست {Do} را از {La, Fa, Do} خارج کند، آن هارمونی یعنی {Sol, Si, Do} هارمونی دیگری ایجاد می‌کند (در موسیقی، تار C-۷). چنانچه این هارمونی جدید بهتر از بدترین هارمونی موجود در حافظه‌ی هارمونی باشد، هارمونی جدید در حافظه‌ی هارمونی وارد شده و بدترین هارمونی از حافظه‌ی هارمونی خارج می‌شود. این رویه تا پیدا شدن هارمونی مطلوب تکرار می‌شود.

در بهینه‌سازی حقیقی، هر موسیقی‌دان می‌تواند با هر متغیر تصمیم جایگزین شود، و تن صداهای نوای برتر، با مقادیر برتر هر متغیر جایگزین می‌شود. هنگامی که یک موسیقی‌دان فی‌البداهه یک تن صدا می‌سازد، معمولاً یکی از این سه قاعده را دنبال می‌کند: ۱. یکی از تن صداهای حافظه‌ی خود را می‌نوازد؛ ۲. تن صدای نزدیک به یک تن صدا از حافظه‌ی خود را می‌نوازد؛ ۳. تن صدای کاملاً تصادفی از طیف صدای ممکن را می‌نوازد. به‌طور مشابه، زمانی که هر متغیر تصمیم مقداری را در الگوریتم جست‌وجوی هارمونی انتخاب می‌کند، یکی از این سه قاعده را دنبال می‌کند: ۱. انتخاب یکی از مقادیر حافظه‌ی جست‌وجوی هارمونی، که به‌عنوان «ملاحظات حافظه» تعریف می‌شود؛ ۲. انتخاب مقداری نزدیک از یک مقدار از حافظه‌ی جست‌وجوی هارمونی، که به‌عنوان تنظیم تن صدا تعریف می‌شود؛



شکل ۴. رویه بهینه‌سازی الگوریتم جست‌وجوی هارمونی. [۱۹]



شکل ۵. مفهوم نواختن فی البداهه‌ی هارمونی جدید (مرحله ۳). [۱۹]

۵. مطالعه‌ی موردی

چنان که در بخش ۲ مشاهده شد، حل مدل MINLP ارائه شده دارای پیچیدگی محاسباتی است و در مسئله‌های بزرگ ناچار به استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل این‌گونه مدل‌ها هستیم. در این بخش قصد داریم با استفاده از الگوریتم فراابتکاری جست‌وجوی هارمونی معرفی شده، به حل مدل پیشنهادی بپردازیم. به همین منظور ابتدا نحوه‌ی پی‌گیری ساختار جواب پیشنهادی برای ایجاد جمعیت اولیه در الگوریتم جست‌وجوی هارمونی تشریح می‌شود. برای نشان دادن برتری کارایی الگوریتم جست‌وجوی هارمونی نسبت به نرم‌افزارهای استاندارد برنامه‌ریزی ریاضی (همانند گمز)، دو مسئله با اندازه‌ی کوچک (۱۵ سهم) و اندازه‌ی نسبتاً بزرگ (۵۰ سهم) مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از اطلاعات تاریخی قیمت‌های ماهانه‌ی سهام در بازه زمانی ۲۰۰۵/۰۵/۱۸ تا ۲۰۱۱/۰۶/۲۰ برگرفته از آدرس اینترنتی (<http://finance.yahoo.com>) اخذ شده است. ماتریس واریانس-کوواریانس و میانگین بازده به‌عنوان ورودی‌های این دو مسئله لحاظ می‌شود. همچنین تنظیم مقادیر پارامترهای الگوریتم و پارامترهای ورودی این دو مسئله در ادامه به ترتیب در جداول ۱ و ۲ آورده شده است.

در مسئله‌ی ۱۵ سهمی (اندازه‌ی کوچک) خروجی نرم‌افزار برنامه‌ریزی ریاضی گمز (GAMS) با خروجی الگوریتم جست‌وجوی هارمونی مقایسه شده است. ولی در مسئله‌ی ۵۰ سهمی (اندازه‌ی بزرگ)، با توجه به ناکارآمد بودن نرم‌افزار GAMS، صرفاً خروجی‌های الگوریتم جست‌وجوی هارمونی آورده شده است. لازم به ذکر است که تمامی کدنویسی‌های انجام شده برای الگوریتم فراابتکاری جست‌وجوی هارمونی در نرم‌افزار ریاضی MATLAB صورت گرفته است.

۱.۵. ساختار جواب پیشنهادی

ساختار جواب پیشنهادی برای ایجاد جمعیت اولیه مطابق شکل ۶ رمزگذاری شده

HMCR احتمال انتخاب یک مقدار از مقادیر ذخیره شده در HM است و $1 - HMCR$ احتمال انتخاب تصادفی یک مقدار شدنی است که متعلق به مجموعه‌ی HM نیست. هر مؤلفه از بردار هارمونی جدید، $x'_i = x'_1, x'_2, \dots, x'_N$ مورد بررسی قرار می‌گیرد تا تعیین شود که آیا تنظیم تن صدا برای آن مؤلفه صورت پذیرد یا خیر؟ این رویه توسط پارامتر PAR انجام می‌شود که نرخ تنظیم را برای تن صدای انتخابی از HM چنین تنظیم می‌کند:

$$(8) \quad \begin{cases} \text{با احتمال } PAR & \text{بله} \\ \text{با احتمال } (1 - PAR) & \text{خیر} \end{cases} \text{تنظیم تن صدا گردد؟}$$

فرایند تنظیم تن صدا پس از انتخاب یک مقدار از HM اجرا می‌شود. اگر تصمیم گرفته شود که تنظیم تن صدا برای x'_i صورت پذیرد، و نیز x'_i را K امین عنصر در X_i فرض کنیم، مقدار تنظیم شده تن صدای $x_i(k)$ برابر است با:

$$(9) \quad x'_i \leftarrow x'_i + \alpha$$

به طوری که α معادل $(-1, 1) \times u \times bw$ است، bw یک فاصله پهنای باند اختیاری برای متغیر طراحی شده پیوسته است، و $u(-1, 1)$ توزیع یکنواخت بین -1 و 1 است. پارامترهای HMCR و PAR معرفی شده در جست‌وجوی هارمونی به ترتیب کمک می‌کنند تا الگوریتم جواب‌های بهبود یافته‌ی کلی و محلی را بیابند.

۴. به‌روزرسانی HM. در این مرحله چنانچه بردار هارمونی جدید به‌لحاظ مقدار تابع هدف بهتر از بدترین هارمونی موجود در HM باشد، هارمونی جدید وارد HM می‌شود و بدترین هارمونی موجود از HM خارج خواهد شد. سپس HM به‌لحاظ مقدار تابع هدف مرتب می‌شود.

۵. تکرار مراحل ۳ و ۴ تا زمان ارضاء شدن شرط خاتمه. در این مرحله، زمانی که شرط خاتمه ارضاء شود، محاسبات متوقف می‌شود.

جدول ۱. تنظیم پارامتر الگوریتم جست‌وجوی هارمونی (HS).

پارامتر	مقدار
Max Iteration	۵۰۰۰۰
HMS	۵
bw	۰٫۰۰۵
HMCR	۰٫۹ تا ۰٫۹۵
PAR	۰٫۳ تا ۰٫۹

جدول ۲. تنظیم پارامترهای ورودی مدل پیشنهادی.

پارامتر	مسئله‌ی ۱۵ سهمی	مسئله‌ی ۵۰ سهمی
α_i	۰٫۱	۰٫۱
β_i	۱٫۲۵	۱٫۲۵
θ_i	-۰٫۷۵	-۰٫۷۵
γ_i	۰	۰
K_{min}	۰	۲۰
K_{max}	۱۰	۴۰
h_i	۰٫۷۵, ۰٫۵, ۰٫۲۵	۰٫۷۵, ۰٫۵, ۰٫۲۵
R_f (ماه‌یانه)	۰٫۳۳	۰٫۳۳

۳.۱.۵. بردار Negative Variable

مقادیر تخصیص داده شده به این بردار بستگی به حدود بالا و پایین متغیرها در وضعیت فروش استقراسی دارد و هر یک از اعضای آن به بازه $[\theta_i, \gamma_i]$ تعلق دارد.

نکته ۱. ۲ بردار Positive Variable و Negative Variable توأمأرضاءکننده محدودیت سقف و کف در مدل پیشنهادی خواهند بود.

نکته ۲. ارضاء شدن محدودیت اول مدل (محدودیت حداقل بازده مورد انتظار) با تابع پنالنتی و محدودیت دوم مدل (محدودیت بودجه) با نرمالیزه کردن متغیرها صورت گرفته است.

۲.۵. تنظیم پارامتر الگوریتم جست‌وجوی هارمونی

در محاسبات انجام شده، پارامترهای ورودی الگوریتم جست‌وجوی هارمونی به شکل جدول ۱ تنظیم شده است.

۳.۵. تنظیم پارامترهای مدل پیشنهادی

در دو مسئله‌ی ۱۵ و ۵۰ سهمی، پارامترهای معرفی شده مدل پیشنهادی در بخش ۱.۲. مطابق جدول ۲ مقداردهی شده‌اند.

۴.۵. محاسبات عددی

به‌ازای مقادیر مختلف R_e و تنظیم سه مقدار برای پارامتر h_i ، محاسبات با توجه به تنظیم پارامترهای صورت گرفته در جداول ۱ و ۲ انجام شد و نتایج حاصل از حل مدل برای دو مسئله‌ی ۱۵ سهمی و ۵۰ سهمی به ترتیب در جداول ۳ و ۴ آورده شده است. چنان که مشاهده می‌شود:

-- در مسئله‌ی ۱۵ سهمی، نرم‌افزار GAMS و الگوریتم فراابتکاری جست‌وجوی هارمونی به‌ازای تمامی مقادیر پاسخ‌گو است، در حالی که در مسئله‌ی ۵۰ سهمی نرم‌افزار GAMS قادر به ارائه‌ی جواب نیست. لذا تنها جواب حاصل از الگوریتم جست‌وجوی هارمونی در جدول ۴ آورده شده است.

-- مطابق انتظار، با افزایش مقدار R_e مقدار σ_p^2 (واریانس پرتفوی) نیز افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر کسب بازده بیشتر ریسک‌پذیری بالاتری را می‌طلبد.

در مدل پایه‌ی مارکویتز که در آن فروش استقراسی ممنوع است بیشترین مقدار بازده پرتفوی برابر بیشترین میانگین بازده سهام در دسترس است، در حالی که در صورت مجاز بودن فروش استقراسی، بازده پرتفوی می‌تواند بیشتر از بیشینه میانگین بازده سهام در دسترس باشد (طبق اطلاعات تاریخی اخذ شده بیشترین میانگین بازده متعلق به سهم MSI بوده که برابر ۴٫۲۱ است درحالی که طبق جدول ۳ و ۴ بازده پرتفوی می‌تواند مقادیر بیشتر از ۴٫۲۱ را نیز اختیار کند).

با افزایش مقدار h_i ، مقدار واریانس به‌ازای نقاط ابتدایی R_e ، تقریباً ثابت است در حالی که با افزایش R_e مقدار σ_p^2 کاهش می‌یابد. این بدان علت است که با افزایش مقدار R_e ، برای این که حداقل بازده پرتفوی برابر R_e شود، نیازمند فروش استقراسی در برخی سهام خواهیم بود؛ و چون در محدودیت حداقل بازده پرتفوی مدل پیشنهادی، فرض شده است که در صورت فروش استقراسی روی سهم خاص درصدی (h_i) از بازده بدون ریسک را در اختیار قرض‌دهنده سهام قرار دهیم لذا به افزایش مقدار h_i منجر خواهد شد. برای حفظ ارضاء محدودیت حداقل بازده پرتفوی، حجم فروش استقراسی بیشتر و به تبع آن مجموع متغیرهای X_i در وضعیت

i	۱	۲	N
وضعیت سهام در پرتفوی					
متغیر مثبت					
متغیر منفی					

شکل ۶. ساختار جواب پیشنهادی.

است. سه بردار Position، Positive Variable و Negative Variable به ترتیب نشان‌گر وضعیت سهام در پرتفوی -- متغیرهای مثبت (وضعیت خرید) و متغیرهای منفی (وضعیت فروش استقراسی) -- هستند. طول هر سه بردار برابر N (تعداد سهام در دسترس) است.

۱.۱.۵. بردار Position

این بردار به‌طور تصادفی با مقادیر $\{-1, 0, 1\}$ پر می‌شود. مقدار صفر برای آن نشان می‌دهد که خرید یا فروش استقراسی روی سهم نام صورت نمی‌پذیرد و لذا این سهم در پرتفوی انتخابی نیست. مقدار ۱ نشان‌دهنده‌ی خرید سهم نام و مقدار -۱ نشان‌دهنده‌ی فروش استقراسی در سهم نام است. این که چه تعداد از این بردار با مقادیر صفر و چه تعداد با مقادیر ۱ و -۱ پر شود، بستگی به محدودیت بیشینه و کمینه‌ی تعداد سهام در پرتفوی مدل دارد. این بردار ارضاءکننده‌ی محدودیت مذکور در مدل پیشنهادی خواهد بود.

۲.۱.۵. بردار Positive Variable

مقادیر تخصیص داده شده به این بردار بستگی به حدود بالا و پایین متغیرها در وضعیت خرید دارد و هر یک از اعضای آن به بازه $[\alpha_i, \beta_i]$ تعلق دارد.

جدول ۳. نتایج خروجی نرم افزار برنامه ریزی ریاضی گمز (GAMS) و الگوریتم جست و جوی هارمونی (HS)، با استفاده از اطلاعات تاریخی ۱۵ سهم.

R_e	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
σ_p^T										
$h = 0,25$	۱۳,۴۵۶	۱۷,۴۲۱	۲۹,۱۳۴	۴۸,۸۹۴	۷۷,۳۴۱	۱۱۱,۷۲۵	۱۵۴,۸۹۷	۲۰۷,۱۳۵	۲۷۴,۶۷۳	۳۴۷,۶۲۹
GAMS										
HS	۱۶,۳۲۲	۲۶,۸۵۶	۳۴,۱۸۳	۴۹,۴۸۶	۸۴,۵۴۷	۱۱۵,۵۴۳	۱۶۴,۷۳۱	۲۱۴,۴۳	۲۷۴,۴۸۷	۳۴۷,۵۶۸
σ_p^T										
$h = 0,5$	۱۳,۴۵۶	۱۷,۱۶۲	۲۸,۲۶۴	۴۶,۸۵۳	۷۲,۶۵۱	۱۰۹,۴۱۳	۱۴۷,۴۹۸	۱۹۴,۸۷۶	۲۵۶,۴۱۷	۳۲۴,۹۶۴
GAMS										
HS	۱۶,۳۲۱	۲۶,۳۷	۳۲,۹۵۴	۴۸,۸۷۸	۸۴,۶۲۷	۱۰۸,۷۲۴	۱۵۶,۴۱	۲۰۵,۰۱۸	۲۴۷,۹۹۷	۳۳۵,۶۳۲
σ_p^T										
$h = 0,75$	۱۳,۴۵۶	۱۶,۸۶۹	۲۷,۲۸۷	۴۴,۹۰۷	۶۸,۷۸۵	۹۹,۸۴۷	۱۳۸,۴۶۵	۱۸۷,۹۷۷	۲۴۰,۴۱۵	۳۳۳,۸۵۲
GAMS										
HS	۱۶,۳۱۵	۲۵,۴۸۹	۳۰,۶۶۸	۴۶,۹۶۶	۸۵,۹۰۴	۱۰۱,۹۰۲	۱۴۵,۱۷۲	۱۸۹,۶۴۲	۲۴۳,۴۲۷	۳۰۶,۲۹۳

جدول ۴. نتایج خروجی الگوریتم جست و جوی هارمونی (HS)، با استفاده از اطلاعات تاریخی ۵۰ سهم.

R_e	۱	۲	۳	۴	۵	۶
σ_p^T						
$h = 0,25$	۳,۶۲	۶,۸۳۱	۱۰,۵۸۳	۲۰,۷۰۷	۳۲,۹۵۳	۴۹,۳۵۸
HS						
σ_p^T						
$h = 0,5$	۳,۳۷	۵,۵۵۵	۱۰,۰۶۳	۱۸,۸۳	۲۵,۲۹۲	۴۳,۹۶۰۷
HS						
σ_p^T						
$h = 0,75$	۳,۰۰۶	۵,۴۱۸	۸,۸۱۸	۱۵,۶۰۸	۲۳,۲۲۷	۳۷,۴۹۲
HS						

۶. نتیجه گیری

تصمیم گیری مناسب برای تشکیل پرتفوی بهینه در بحران های اقتصادی که افت قیمت دارایی ها در بازار سرمایه را به دنبال دارد، از جمله مسائل مهم پیشروی سرمایه گذاران است. از این رو با فرض مجاز بودن فروش استقراضی و تحمیل برخی محدودیت های کاربردی بازار سرمایه، مدلی در حوزه مسائل انتخاب پرتفوی معرفی شد که دارای ماهیت برنامه ریزی عدد صحیح غیرخطی با پیچیدگی های محاسباتی بود. نتایج محاسباتی حاکی از عملکرد بهتر نرم افزار استاندارد GAMS در مقایسه با الگوریتم HS در مسائل با اندازه های کوچک است. ولی در مقیاس های نسبتاً بزرگ تر، تنها راهکار برای حل مدل پیشنهادی بهره گیری از الگوریتم های فراابتکاری نظیر الگوریتم بهینه سازی جست و جوی هارمونی است. انحراف کم الگوریتم HS از نتایج GAMS نشان دهنده عملکرد مناسب این الگوریتم فراابتکاری در حل مدل پیشنهادی است.

فروش استقراضی (با مقدار منفی) بیشتر خواهد بود و در نتیجه بیشتر شدن مقادیر منفی X_i ، کاهش σ_p^T به عنوان تابع هدف را به دنبال خواهد داشت.

۵.۵. مقایسه ی نتایج

برای مقایسه ی HS و GAMS، درصد انحرافات نسبی (RPD)^۷ نتایج حاصل از الگوریتم HS در مسئله ی ۱۵ سهمی را از نتایج GAMS محاسبه و فاصله ی اطمینان ۹۵٪ را برای انحرافات محاسبه کردیم که بازه [۰,۱۷۶, ۰,۰۶۰] به دست آمد. از آنجا که بازه حاصل مثبت است و شامل صفر نمی شود، الگوریتم HS در مقایسه با GAMS عملکرد ضعیف تری در مسئله ی کوچک ۱۵ سهمی دارد. اما چنان که پیش تر نیز ذکر شد GAMS قادر به حل مسائل با اندازه ی بزرگ نیست و بنابراین مجبور به استفاده از الگوریتم های فراابتکاری در حل مدل پیشنهادی برای تعداد دارایی های زیاد خواهیم بود.

پانوشته‌ها

1. short-rebate
2. mixed integer non linear programming
3. harmony memory consideration rate
4. pitch adjusted rate
5. harmony memory size
6. bandwidth
7. relative percentage deviation

منابع (References)

1. Markowitz, H. "Portfolio selection", *Journal of Finance*, **7**(1), pp. 77-91 (1952).
2. Black, F. "Capital market equilibrium with restricted borrowing", *Journal of Business*, **45**(3), pp. 444-455 (1972).
3. Jacobs, B., Levy, K.N. and Markowitz, H. "Portfolio optimization with factors, scenarios and realistic short positions", *Operations Research*, **53**(4), pp. 586-599 (2005).
4. Jacobs, B., Levy, K.N. and Markowitz, H. "Trimability and fast optimization of long-short portfolios", *Financial Analysts Journal*, **62**(2), pp. 36-46 (2006).
5. Kellerer, H. and Maringer, D. "Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm", *OR Spectrum*, **25**(4), pp. 481-495 (2003).
6. Schaerf, A. "Local search techniques for constrained portfolio selection problems", *Comput. Econ.*, **20**(3), pp. 177-190 (2002).
7. Maringer, D., *Portfolio Management with Heuristic Optimization*, Springer Verlag (2005).
8. Di Gaspero, L., di Tollo, G., Roli, A. and Schaerf, A. "Hybrid local search for constrained financial portfolio selection problems", *In Proceedings of Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems*, fourth International Conference, CPAIOR 2007, volume 4510 of LNCS, pp. 44-58. Springer Verlag (2007).
9. Armananzas, R. and Lozano, J.A. "A multiobjective approach to the portfolio optimization problem", *In Proceedings of the 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, CEC2005, **2**, pp. 1388-1395 (2005).
10. Fernandez, A. and Gomez, S. "Portfolio selection using neural networks", *Computers & Operations Research*, **34**, pp. 1177-1191 (2007).
11. Fogel, L.J., Owens, A.J. and Walsh, M.J., *Artificial Intelligence Through Simulated Evolution*, John Wiley, Chichester, UK (1966).
12. De Jong, K. "Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems", Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI (1975).
13. Koza, J.R. "Genetic programming: A paradigm for genetically breeding populations of computer programs to solve problems", Rep. No. STAN-CS-90-1314, Stanford University, CA (1990).
14. Holland, J.H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI (1975).
15. Goldberg, D.E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Wesley, Boston, MA (1989).
16. Glover, F. "Heuristic for integer programming using surrogate constraints", *Decision Sci*, **8**(1) pp. 156-166 (1977).
17. Kirkpatrick, S., Gelatt, C. and Vecchi, M. "Optimization by simulated annealing", *Science*, **220**(4598), pp. 671-680 (1983).
18. Geem, Z.W., Kim, J.H. and Loganathan, G.V. "A new heuristic optimization algorithm: Harmony search", *Simulation*, **76**(2), pp. 60-68 (2001).
19. Lee, K.S. and Geem, Z.W. "A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: Harmony search theory and practice", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, **194**, pp. 3902-3933 (2004).