مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۴)
دوره‌ی ۱ - ۳۱، شماره‌ی ۲/۱، ص. ۳-۱۳

Original Article

توسعه‌ی مدل مکان‌یابی ـ تخصیص بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی اشتراکی

جعفر باقری‌نژاد (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه الزهراء (س)
مهدی بشیری* (دانشیار)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد
حمیده نیکزاد (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه الزهراء (س)

در مدل‌های مرسوم مکان‌یابی پوشش، هر نقطه‌ی تقاضا تنها می‌تواند با یک وسیله پوشش داده شود. با پوشش اشتراکی که یکی از روش‌های توسعه‌ی این مدل‌هاست، هر نقطه‌ی تقاضا را می‌توان با یک یا چند وسیله پوشش داد. در این نوشتار مفهوم «پوشش اشتراکی» به مدل مکان‌یابی بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی با ارجاع گسسته در دو حالت بدون تخصیص برای سیگنال‌های فیزیکی و با تخصیص برای سیگنال‌های غیر فیزیکی توسعه داده شده و سپس مدل پیشنهادی در مثال‌های عددی تحلیل می‌شود. در ادامه، الگوریتم فراابتکاری تبرید شبیه‌سازی شده برای حل مدل پیشنهادی در مثال‌هایی با ابعاد بزرگ ارائه می‌شود. الگوریتم ارائه شده، برای جست‌وجوی چندین استقرار سطح پایین و انتخاب بهترین آنها در هر جابه‌جایی وسایل سطح بالا، قابل تنظیم است. مقایسه‌ی نتایج الگوریتم با روش حل دقیق نشان می‌دهد که عملکرد الگوریتم در مسائلی با ابعاد بزرگ مناسب است و در زمانی کوتاه به جواب نزدیک بهینه می‌رسد.

واژگان کلیدی: مدل بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی، ارجاع، پوشش اشتراکی، مکان‌یابی ـ تخصیص، تبرید شبیه‌سازی شده.

jbagheri@alzahra.ac.ir
bashiri@shahed.ac.ir
nikzaad.h@gmail.com

۱. مقدمه

هدف مسئله‌ی مکان‌یابی با بیشینه پوشش (MCLP)[1] انتخاب مکان وسایل برای بیشینه‌کردن تقاضاهایی است که دست‌کم توسط یک وسیله پوشش داده می‌شود.[۱] وجود انواع مختلف تقاضا و ایجاد سلسله‌مراتب بین وسایل، استفاده از منطق فازی و همچنین استفاده از پوشش تدریجی و اشتراکی ازجمله روش‌های توسعه‌ی مدل‌های مکان‌یابی پوششی هستند.

یکی از توسعه‌هایی که در مدل‌های مکان‌یابی مطرح شده، در نظر گرفتن سلسله‌مراتب برای ارائه‌ی خدمت است. در سال ۱۹۸۲ مدل MCLP به‌صورت سلسله‌مراتبی (HMCLP)[2] ارائه شد[۲] که در آن سطوح متفاوتی از خدمت توسط وسایل مختلف تأمین می‌شود. محققین در سال ۲۰۰۱ مفهوم ارجاع[3] را در مدل HMCLP با در نظرگرفتن صف بررسی کردند.[۳] همچنین مدل HMCLP در شرایط وجود صف در حالت فازی ارائه شد.[۴] در سال ۲۰۰۷ مدل سلسله‌مراتبی ارائه شده توسط محققین[۳] به شرایط فازی توسعه داده شد.[۵]

در سال‌های اخیر برای توسعه‌ی مدل‌های مرسوم پوشش، تعمیم تابع پوشش کلاسیک به شکل‌های مختلف مطرح شده است. یکی از فرض‌های مسئله‌ی MCLP پایان ناگهانی پوشش است؛ بدین معنا که نقاط تقاضای داخل شعاع پوشش، کاملاً پوشش داده می‌شود در حالی که نقاط تقاضای خارج از این شعاع اصلاً پوشش داده نمی‌شود. این فرض در مدل‌سازی در بسیاری از کاربردها منطقی نیست و بهتر است فرض شود که پوشش نقاط تقاضا توسط وسایل تدریجاً کاهش می‌یابد. اولین مقاله درمورد این دسته از مدل‌ها توسط چرچ و رابرتز ارائه شد که یک مدل گسسته را با تابع پوشش پله‌یی شرح دادند.[۶]

به‌منظور ورود پوشش تدریجی به مدل‌های سلسله‌مراتبی،[۷] محققین یک مدل مکان‌یابی ـ تخصیص بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی با ارجاع را در شرایط پوشش جزئی (HMCLP(R)-P)[4] و در فضای گسسته ارائه کردند و برای حل آن یک الگوریتم ژنتیک توسعه دادند که در زمانی کوتاه، جوابی نزدیک به بهینه ارائه می‌دهد. پس از آن، مدل HMCLP بدون ارجاع ارائه شده[۲] را با پوشش تدریجی ارائه کرده و برای حل آن یک روش ابتکاری دومرحله‌یی بر مبنای روش جست‌وجوی ممنوع (TS)[5] توسعه دادند.[۸]

فرض دیگر مدل‌های مرسوم پوشش این است که پوشش یا عدم پوشش هرگره تقاضا تنها با توجه به یک وسیله که همان نزدیک‌ترین وسیله است تعیین می‌شود. در پوشش اشتراکی تمامی وسایل در پوشش نقاط تقاضا با یکدیگر مشارکت دارند.

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۴/۱۱، اصلاحیه ۱۳۹۳/۲/۱۸، پذیرش ۱۳۹۳/۴/۴.

در معرفی این نوع از مدل‌های پوشش،[۹] تعریف خاصی از تابع پوشش اشتراکی به‌صورت ارسال سیگنال از وسایل ارائه شد و آن را در مدل‌های LSCP،MCLP و P-Center[۶] در فضای مکان‌یابی مسطح به کار گرفتند. سپس طراحان مدل MCLP اشتراکی (CMCLP)، این مدل را برای توزیع تقاضای گسسته و پیوسته مورد تحلیل قرار دادند و نیز مثال‌هایی از کاربردهای این نوع پوشش اشتراکی برای سیگنال‌های فیزیکی و غیر فیزیکی در دنیای واقعی پیشنهاد کردند. پس از آن در سال ۲۰۱۱ مدل‌های ارائه شده[۹] را در شرایط گسسته بودن فضای مکان‌یابی ارائه دادند.[۱۰]

در سال ۲۰۱۰ محققین با مروری بر مطالعات انجام شده در زمینه توسعه‌ی تابع پوشش، خلاءهای موجود برای پژوهش‌های بیشتر در این زمینه‌ها را مشخص کردند.[۱۱] آنها در مطالعه‌ی خود مدل‌های سلسله‌مراتبی را بررسی نکردند. برخی از مقالات کلیدی که توسعه‌ی تابع پوشش در مدل‌های مکان‌یابی تک‌سطحی و سلسله‌مراتبی را مورد بررسی قرار داده‌اند و همچنین جایگاه تحقیق حاضر، در جدول ۱ ثبت شده است.

چنان که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود، عمده مطالعات انجام شده در حوزه‌ی توسعه‌ی تابع پوشش، در مدل‌های تک‌سطحی بوده و در این زمینه کم‌تر به مدل‌های سلسله‌مراتبی پرداخته شده است. بنابراین خلاءهای تحقیقاتی در این مدل‌ها وجود دارد که قابل مطالعه و بررسی‌اند.

در این مقاله مدل H-MCLP(R) در فضای مکان‌یابی گسسته در دو حالت بدون تخصیص و با تخصیص، به شرایط وجود پوشش اشتراکی توسعه داده می‌شود. به‌عنوان مثالی از کاربرد پوشش اشتراکی در سیستم‌های سلسله‌مراتبی می‌توان به سیستم‌های ارسال و دریافت امواج مخابراتی ــ شامل آنتن‌های زمینی و ماهواره ــ اشاره کرد. امواج دریافت شده توسط هر گیرنده می‌تواند ترکیبی از امواج ارسال شده از آنتن‌های مختلف باشد. همچنین در یک سیستم توزیعی ــ شامل انبار و فروشگاه‌ها ــ به‌دلایل مختلف ازجمله محدود بودن حجم انبارها، محدودیت زمان نگه‌داری کالاهای فاسدشدنی، یا نیاز به تجهیزات جابه‌جایی خاص برای مسافت‌های طولانی، ممکن است یک انبار نتواند همواره پاسخ‌گوی تقاضاهای فروشگاه‌های زیرمجموعه‌ی خود باشد. با استفاده از پوشش اشتراکی هر فروشگاه می‌تواند نیاز ماهانه‌ی خود را از انبارهای مختلف تأمین کند.

ساختار این مقاله بدین گونه است که در بخش ۲ مفاهیم مدل‌های سلسله‌مراتبی و همچنین مفهوم پوشش اشتراکی شرح داده می‌شود و در بخش ۳ مدل پیشنهادی ارائه می‌شود. روش کار مدل در یک مثال عددی در بخش ۴ مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. در بخش ۵ ضمن توسعه‌ی الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده (SA)[۷] برای مدل، کارایی آن با استفاده از مثال‌های عددی در ابعاد مختلف با نتایج حل‌کننده‌ی سیپلکس[۸] در نرم‌افزار GAMS ۲۴/۱/۲ مقایسه می‌شود. در بخش ۶ نیز نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

جدول ۱. مطالعات در زمینه مدل‌های پوشش، خلاءهای موجود و جایگاه تحقیق.

نوع مدل	توسعه‌ی تابع پوشش	شماره مرجع
تک‌سطحی	تدریجی	[۶و۱۲-۱۵]
	اشتراکی	[۹و۱۰]
سلسله‌مراتبی	تدریجی	[۷و۸]
	اشتراکی	تحقیق حاضر

۲. تعاریف و مفاهیم

۱.۲. مفاهیم مرتبط با مدل سلسله‌مراتبی پیشنهادی

ــ الگوی چندجریانی: جریان در این الگو می‌تواند از هر وسیله‌ی سطح پایینی (بالایی) به هر وسیله‌ی سطح بالایی (پایینی) برقرار شود.

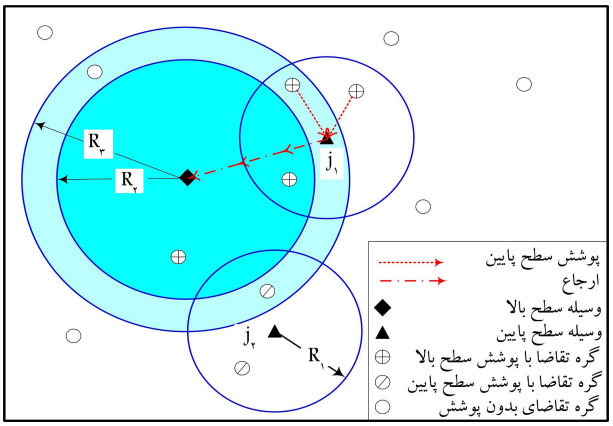
ــ سیستم آشیانه‌یی[۹]: سرویس سطح بالا فقط توسط وسایل سطح بالا ارائه می‌شود ولی سرویس سطح پایین توسط وسایل هر دو سطح قابل ارائه است.

ــ ارجاع: در بعضی موارد، تقاضا اول توسط وسیله‌ی سطح پایین و سپس توسط وسیله‌ی سطح بالا پوشش داده می‌شود. در این موارد تقاضا از وسیله‌ی سطح پایین به‌وسیله‌ی سطح بالا ارجاع داده می‌شود. فرض کنید شعاع پوشش وسایل سطح پایین R_1 و شعاع پوشش وسایل سطح بالا R_2 است (به‌طوری که $R_2 > R_1$). در مدل‌های شامل ارجاع، فاصله‌ی بحرانی سوم R_3 نیز تعریف می‌شود و آن بیشینه فاصله‌یی است که در آن، ارجاع تقاضا از یک وسیله‌ی سطح پایین به یک وسیله‌ی سطح بالا امکانپذیر است. بنابراین وسایل سطح پایینی که داخل فاصله‌ی R_3 از وسایل سطح بالا قرار گرفته‌اند، تحت پوشش وسایل سطح بالا هستند.

در شکل ۱ نقاط تقاضایی که فقط داخل فاصله‌ی R_1 از وسیله‌ی سطح پایین قرار دارند، بدون ارجاع و مستقیماً با وسیله‌ی سطح بالا پوشش داده نمی‌شوند. چون وسیله‌ی سطح پایین j_1 داخل فاصله‌ی R_3 از وسیله‌ی سطح بالاست، تمامی نقاط تحت پوشش j_1 می‌تواند از طریق ارجاع تحت پوشش وسیله‌ی سطح بالا قرار بگیرد. وسیله‌ی سطح پایین j_2 قادر به ارجاع تقاضاهای سطح بالا نیست.

۲.۲. تعاریف مرتبط با مدل پوشش اشتراکی

در این نوع پوشش، تأمین پوشش هر نقطه‌ی تقاضا با وسایل مختلف در همسایگی آن ممکن است. این مدل در فضای مسطح ارائه شده[۹] و در آن پوشش چنین تعریف می‌شود: هر وسیله سیگنالی صادر می‌کند که تحت فاصله پراکنده می‌شود. هرگره‌ی تقاضا درصورتی پوشش داده می‌شود که سیگنالی که دریافت می‌کند به‌اندازه‌ی کافی قوی باشد، یعنی از حد آستانه‌ی معینی تجاوز کند. بنابراین ناحیه‌یی در اطراف هر وسیله که شدت سیگنال ارسال شده از وسیله در آن ناحیه، از حد آستانه‌ی معین تجاوز کند به‌عنوان شعاع پوشش وسیله تعیین می‌شود. سیگنال ارسال شده ممکن است فیزیکی (مانند موارد مکان‌یابی آژیرهای هشداردهنده یا آنتن‌های تلفن همراه) یا غیر فیزیکی (مانند مکان‌یابی سیستم‌های اضطراری یا سیستم‌های توزیع) باشد.



شکل ۱. نمایش پوشش با ارجاع در مدل‌های سلسله‌مراتبی.

به‌عنوان مثال در کاربردهای سیستم‌های اضطراری، سیگنال می‌تواند متوسط زمان سفر بین وسیله و گره تقاضا باشد. اگر بتوان در مدت زمان از پیش تعیین شده، از گره تقاضا به‌وسیله‌ی مورد نظر رسید پوشش اتفاق می‌افتد. در بسیاری از موارد که فرض پوشش اشتراکی مناسبتر است این موضوع نادیده گرفته می‌شود و فقط نزدیک‌ترین وسیله در تصمیم‌گیری لحاظ می‌شود. چنین حالتی ممکن است منجر به پاسخ‌های غیر بهینه شود و هزینه‌ها را افزایش دهد. در مثال‌های مختلف ارائه‌شده[۹] این روش موجب می‌شود در مقایسه با حالتی که پوشش اشتراکی کاربرد دارد، به وسایل بیشتری نیاز باشد. بنابراین در مدل‌های مکان‌یابی پوشش تصمیم‌گیری در مورد این که کدام‌یک از روش‌های پوشش تکی یا اشتراکی مناسبتر است، بسیار مهم است.

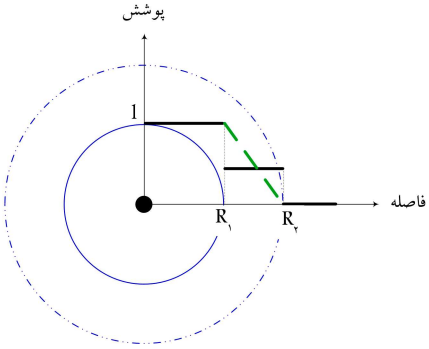
میزان سیگنال دریافتی از هر وسیله، با افزایش فاصله کاهش می‌یابد. مقدار این کاهش توسط تابع شدت سیگنال تعیین می‌شود؛ تابع شدت سیگنال تابعی غیر صعودی است که بسته به محل کاربرد می‌تواند پیوسته یا گسسته، خطی یا غیر خطی باشد. در ادبیات موضوع از این تابع با عنوان تابع فروپاشی[۱۰] پوشش یاد می‌شود. مشابه این تابع در مدل‌های پوشش تدریجی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. دو نمونه از تابع فروپاشی پوشش در شکل ۲ نمایش داده شده است. چنان که در شکل ۲ دیده می‌شود تابع فروپاشی پوشش خطی[۱۱] که به‌صورت خط چین نشان داده شده، در فاصله‌ی بین R_1 و R_2 به‌صورت خطی کاهش می‌یابد تا به صفر برسد. در تابع پوشش پله‌یی[۱۲]، پوشش به‌صورت گسسته و گام به گام کاهش می‌یابد. انواع دیگری از توابع فروپاشی پوشش نیز برای مدل‌های اشتراکی معرفی شده است.[۹]

درمورد سیگنال‌های فیزیکی منطقی‌تر است که تابع شدت سیگنال پیوسته باشد. درمورد تابع پله‌یی می‌توان این مثال را در نظرگرفت که در یک سیستم توزیع (سیگنال غیرفیزیکی)، تأمین‌کننده‌ی کالا به‌دلیل محدودیت‌هایی که در حمل‌ونقل دارد فواصلی را مشخص کرده و برای مسیرهای کم‌تر از این فواصل، بیشینه درصد تقاضایی را که از کل تقاضای هر گره می‌تواند پاسخ بگوید تعیین می‌کند.

اگر n شعاع پوشش برای مسئله‌ی تعیین شده باشد، تابع شدت سیگنال پله‌یی را می‌توان چنین نوشت:

$$\phi(d_{ij}) = \begin{cases} 1 & d_{ij} \le R_1 \\ \phi_1 & R_1 < d_{ij} \le R_2 \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{n-1} & R_{n-1} < d_{ij} \le R_n \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$0 < \phi_{n-1} < \ldots < \phi_1 < 1$$



شکل ۲. نمایشی از توابع فروپاشی پوشش ـ خطی و پله‌یی.

در مثال‌های بررسی شده در این مقاله برای توابع شدت سیگنال، از تابع پوشش پله‌یی با سه شعاع پوشش استفاده شده است.

درمورد سیگنال‌های فیزیکی مانند نور، صدا و امواج الکترومغناطیسی، میزان سیگنال دریافت شده برای هر نقطه‌ی تقاضا مد نظر است و تعیین منبع ارسال ارزشی برای مسئله ندارد؛ لذا در چنین مواردی متغیر تخصیص اهمیت چندانی ندارد. این در حالی است که برای مسائلی با سیگنال‌های غیر فیزیکی متغیر تخصیص مهم است؛ به‌عنوان مثال در سیستم‌های توزیع و زنجیره‌ی تأمین، این که کالای مورد نیاز هر نقطه‌ی تقاضا توسط کدام نقطه‌ی عرضه پوشش داده می‌شود مد نظر خواهد بود و تخصیص ناکارآمد موجب افزایش هزینه‌ها می‌شود. چنین شرایطی ــ علی‌رغم اهمیت قابل توجهی که دارند ــ در مدل‌های ارائه شده در مطالعاتی که ارائه‌کننده‌ی پوشش اشتراکی‌اند[۹و۱۰] در نظر گرفته نشده است. بر این اساس، مدل‌های پیشنهادی در این نوشتار به دو صورت ارائه می‌شود: ابتدا مدل سلسله‌مراتبی بدون تخصیص (CHMCLP(R)[۱۳]) با استفاده از مفاهیم پوشش اشتراکی مطرح شده در دیگر مطالعات[۹و۱۰] ارائه شده و سپس همان مدل به شرایط وجود تخصیص (CHMCLAP(R)[۱۴]) توسعه داده می‌شود.

۳. مدل مکان‌یابی بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی با ارجاع با استفاده از پوشش اشتراکی

۱.۳. تعریف مسئله

فرض‌های مورد نظر برای مدل پیشنهادی عبارت است از:

- در این مدل مجموعه‌یی از نقاط تقاضا و مجموعه‌یی از مکان‌های بالقوه‌ی استقرار وسایل معلوم است. محدودیتی درباره‌ی بازگشایی وسایل سطح پایین و بالا در یک مکان وجود ندارد.
- فرض می‌شود که تقاضاها فقط درگره‌ها وجود دارند و مقدار تقاضای هرگره نیز قطعی و غیراحتمالی است. هدف مدل بیشینه کردن مقدار کل تقاضای پوشش داده شده با تعداد معینی وسایل سلسله‌مراتبی به‌طور آشیانه‌یی و چندجریانی است به‌طوری که پوشش به‌صورت «دریافت سیگنال کافی از وسایل» تعریف می‌شود.
- تمامی نقاط تقاضا نیاز به هر دو سطح سرویس دارند. به‌علاوه، ممکن است نتوان از پیش تعیین کرد که تقاضا مربوط به کدام یک از سطوح است. بنابراین افراد در یک گره تقاضای یکسان ممکن است فقط به سرویس سطح پایین یا فقط به سرویس سطح بالا و یا به هر دو سرویس به‌طور همزمان نیاز داشته باشند. یک گره تقاضا پوشش داده نمی‌شود مگر این که همه‌ی سطوح نیازمندی‌های آن ارضا شود. با استفاده از پوشش اشتراکی، تقاضا در یک نقطه را می‌توان تقسیم کرد و هر بخش را به یک وسیله تخصیص داد.
- در مدل پیشنهادی، سیستم از نوع آشیانه‌یی با ارجاع در نظرگرفته می‌شود یعنی وسیله‌ی سطح بالاتر، سرویس سطح پایین‌تر را نیز ارائه می‌کند. بنابراین نیاز سطح پایین هرگره تقاضا می‌تواند یا با تعدادی وسیله سطح بالا، یا با تعدادی وسیله سطح پایین و یا با ترکیبی از این دو نوع وسیله پوشش یابد.
- نیاز سطح بالا در هرگره تقاضا می‌تواند یا مستقیماً با تعدادی وسیله سطح بالا، یا با تعدادی وسیله سطح پایین و سپس ارجاع به وسایل سطح بالا و یا با ترکیبی از این دو نوع وسیله پوشش یابد.

ـ در این ساختار سلسله‌مراتبی، تقاضا یا به‌طور مستقیم یا غیر مستقیم با وسایل سطح بالا پوشش داده می‌شود و یا این‌که اصلاً پوشش داده نمی‌شود. بنابراین باید همه‌ی نیازهای سرویس یک گره تقاضای پوشش داده شده ارضا شود. از طرفی با فرض این‌که هر وسیله‌ی سطح پایین تنها در مکان‌هایی می‌تواند قرار بگیرد که تحت پوشش ارجاعی وسایل سطح بالا باشد، اگر گره تقاضایی با وسیله‌ی سطح پایین پوشش داده شود به این معنی است که به طور غیر مستقیم تحت پوشش وسایل سطح بالا نیز هست.

ـ در یک گره تقاضا نیاز سرویس سطح پایین و نیاز سرویس سطح بالا تفکیک نمی‌شود. کل تقاضای گره i با r_i نشان داده می‌شود و هر گره تقاضا نیاز به هر دو سطح سرویس پایین و بالا دارد.

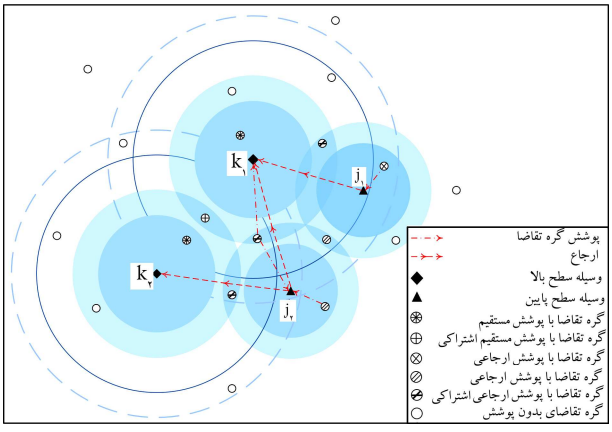
در شکل ۳ نمای ساده‌یی از حالات مختلف پوشش گره‌های تقاضا در این مدل ارائه شده است. منظور از پوشش در این شکل پوشش سطح بالاست.

در شکل ۳ سطوح دایره‌یی پررنگ و کم‌رنگ نشان‌دهنده‌ی نواحی تحت پوشش وسایل برای نقاط تقاضا هستند. دایره‌های توخالی با خطوط کم‌رنگ و پررنگ نواحی تحت پوشش ارجاعی وسایل سطح بالا برای وسایل سطح پایین را نشان می‌دهند. وسیله‌ی سطح پایین j_1 که داخل دایره‌ی توخالی کوچکتر با خط پررنگ قرار گرفته، با وسیله سطح بالای k_1 پوشش داده می‌شود و تمامی تقاضاهای تحت پوشش j_1، برای نیازهای سطح بالا به‌وسیله‌ی k_1 ارجاع داده می‌شود. وسیله‌ی سطح پایین j_2 به‌صورت اشتراکی توسط دو وسیله‌ی سطح بالای k_1 و k_2 پوشش داده می‌شود.

۲.۳. مدل پیشنهادی پوشش سلسله‌مراتبی اشتراکی

در این قسمت مدل مکان‌یابی بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی با ارجاع به حالت پوشش اشتراکی در دو حالت بدون تخصیص برای سیگنال‌های فیزیکی و با تخصیص برای سیگنال‌های غیر فیزیکی توسعه داده می‌شود. در حالت بدون تخصیص، مسئله‌ی مکان‌یابی بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی اشتراکی با ارجاع (CHMCLP(R)) برای سیگنال‌های فیزیکی که از این پس آن را با عنوان «مدل ۱» مورد اشاره قرار می‌دهیم، چنین مدل‌سازی می‌شود:

$$\text{Max}\left(\sum_{i\in I} r_i x_i\right) \qquad (۱)$$



شکل ۳. نمایی از پوشش اشتراکی در مدل سلسله‌مراتبی ارائه شده در مطالعه‌ی حاضر.

s.t.

$$Tx_i \le \sum_{j\in J} \phi^1(d_{ij})\, y_j + \sum_{k\in J} \phi^2(d_{ik})\, z_k \qquad \forall i \in I \qquad (۲)$$

$$Ty_j \le \sum_{k\in J} \phi^3(d_{jk})\, z_k \qquad \forall j \in J \qquad (۳)$$

$$\sum_{j\in J} y_j \le p \qquad (۴)$$

$$\sum_{k\in J} z_k = q \qquad (۵)$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I \qquad (۶)$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J \qquad (۷)$$

$$z_k \in \{0,1\} \qquad \forall k \in J \qquad (۸)$$

I: مجموعه‌ی گره‌های تقاضا $(i \in I)$؛

J: مجموعه‌ی مکان‌های بالقوه برای استقرار وسایل سطح پایین و/یا بالا $(j,k \in J)$ مجموعه‌ی J را می‌توان زیرمجموعه‌یی از I در نظر گرفت. $(j$ اندیس وسیله‌ی سطح پایین و k اندیس وسیله‌ی سطح بالای قرار گرفته در یک مکانِ عضو مجموعه‌ی J هستند)؛

r_i: تقاضا در گره i (وزن گره i)؛

d_{ij}: کوتاه‌ترین فاصله (فاصله‌ی مستقیم) بین گره i و گره j؛

T: حد آستانه‌ی شدت سیگنال $(T > 0)$؛

p: تعداد وسایل سطح پایین که مکان‌یابی می‌شوند؛

q: تعداد وسایل سطح بالا که مکان‌یابی می‌شوند؛

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{اگر گره تقاضای } i \text{ پوشش داده شود (نیاز سطح پایین و بالای آن ارضا شود)} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$y_j \begin{cases} 1 & \text{اگر یک وسیله‌ی سطح پایین در مکان } j \text{ قرار بگیرد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$z_k \begin{cases} 1 & \text{اگر یک وسیله‌ی سطح بالا در مکان } k \text{ قرار بگیرد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

به‌دلیل سلسله‌مراتبی بودن مدل، سه تابع شدت سیگنال تعریف می‌شود:

$\phi^1(d_{ij})$: شدت سیگنال دریافتی توسط گره تقاضای i از وسیله‌ی سطح پایین در مکان j؛

$\phi^2(d_{ik})$: شدت سیگنال دریافتی توسط گره تقاضای i از وسیله‌ی سطح بالا در مکان k؛

$\phi^3(d_{jk})$: شدت سیگنال دریافتی توسط وسیله‌ی سطح پایین در نقطه‌ی j از وسیله‌ی سطح بالا در مکان k (جهت ارجاع).

هدف ۱ بیشینه‌سازی پوشش تقاضا (با استفاده از پوشش اشتراکی) توسط وسایل سطح بالا و پایین است. سمت راست محدودیت ۲ مجموع شدت سیگنال دریافتی توسط گره i از تمامی وسایل سطح بالا و سطح پایین است. اگر این مجموع کم‌تر از حد آستانه‌ی سیگنال برای پوشش باشد، هیچ تقاضایی در گره i نمی‌تواند پوشش داده شود و در غیر این‌صورت یک گره پوشش داده شده محسوب می‌شود. در صورتی که وسیله‌ی سطح پایینی در پوشش یک گره تقاضا نقش داشته باشد،

خدمت سطح بالا توسط این وسیله‌ی سطح پایین از طریق ارجاع به وسیله یا وسایل سطح بالا فراهم می‌شود؛ چرا که با استفاده از محدودیت ۳ وسایل سطح پایین تنها در مکان‌هایی می‌توانند مستقر شوند که پوشش ارجاعی به وسایل سطح بالا برای آنها فراهم باشد. یعنی وسیله‌ی سطح پایین در مکانی می‌تواند قرار بگیرد که مجموع سیگنال دریافتی آن از وسایل سطح بالا بزرگ‌تر یا مساوی حد آستانه‌ی T باشد. محدودیت ۴ اطمینان ایجاد می‌کند که بیشترین تعداد وسایل سطح پایین برابر p است. در محدودیت ۵ تعداد وسایل سطح بالا برابر q قرار داده می‌شود. محدودیت‌های ۶ تا ۸ متغیرهای تصمیم مدل را از نوع باینری تعریف می‌کند.

مسئله‌ی مکان‌یابی ـ تخصیص بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی اشتراکی با ارجاع (CHMCLAP(R)) برای کاربردهای سیگنال‌های غیر فیزیکی را که از این پس آن را «مدل ۲» می‌نامیم، می‌توان چنین مدل‌سازی کرد:

$$\text{Max} \left(w_1 \sum_{i\in I} r_i x_i - w_2 \left(\begin{array}{l} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c^1_{ij} v^1_{ij} \\ + \sum_{i\in I}\sum_{k\in J} c^2_{ik} v^2_{ik} \\ + \sum_{j\in J}\sum_{k\in J} c^3_{jk} v^3_{jk} \end{array} \right) \right) \quad (9)$$

s.t.

$$Tx_i \le \sum_{j\in J} \phi^1(d_{ij})\, v^1_{ij} + \sum_{k\in J} \phi^2(d_{ik})\, v^2_{ik} \qquad \forall i \in I \quad (10)$$

$$Ty_j \le \sum_{k\in J} \phi^3(d_{jk})\, v^3_{jk} \qquad \forall j \in J \quad (11)$$

$$v^1_{ij} \le a^1_{ij} y_j \qquad \forall i \in I,\ j \in J \quad (12)$$

$$v^2_{ik} \le a^2_{ij} z_k \qquad \forall i \in I,\ k \in J \quad (13)$$

$$v^3_{jk} \le a^3_{jk} z_k \qquad \forall j \in J,\ k \in J \quad (14)$$

$$\sum_{j\in J} y_j \le p \quad (15)$$

$$\sum_{k\in J} z_k = q \quad (16)$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I \quad (17)$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J \quad (18)$$

$$z_k \in \{0,1\} \qquad \forall k \in J \quad (19)$$

$$v^1_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \quad (20)$$

$$v^2_{ik} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, k \in J \quad (21)$$

$$v^3_{jk} \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J, k \in J \quad (22)$$

c^1_{ij}: هزینه‌ی تخصیص گره تقاضای i به‌وسیله‌ی سطح پایین استقرار یافته در مکان j؛

c^2_{ik}: هزینه‌ی تخصیص گره تقاضای i به‌وسیله‌ی سطح بالای استقرار یافته در مکان k؛

c^3_{jk}: هزینه‌ی تخصیص وسیله‌ی سطح پایین استقرار یافته در مکان j به‌وسیله‌ی سطح بالای استقرار یافته در مکان k؛

w_1: وزن اهمیت عبارت پوشش در تابع هدف؛

w_2: وزن اهمیت عبارت هزینه‌ی تخصیص در تابع هدف.

وزن‌های w_1 و w_2 که نقش نرمال‌سازی دو عبارت تابع هدف را نیز دارند، توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود به‌طوری که $w_1 + w_2 = 1$.

a^1_{ij}: ۱ اگر گره تقاضای i داخل شعاع پوشش وسیله‌ی سطح پایین مستقر در مکان j باشد؛ ۰ در غیر این‌صورت

a^2_{ik}: ۱ اگر گره تقاضای i داخل شعاع پوشش وسیله‌ی سطح بالای مستقر در مکان k باشد؛ ۰ در غیر این‌صورت

a^3_{jk}: ۱ اگر وسیله سطح پایین در مکان j داخل شعاع پوشش ارجاعی وسیله سطح بالا در مکان k باشد؛ ۰ در غیر این‌صورت

v^1_{ij}: ۱ اگر گره تقاضای i به وسیله سطح پایین مستقر در مکان j تخصیص داده شود؛ ۰ در غیر این‌صورت

v^2_{ik}: ۱ اگر گره تقاضای i به وسیله سطح بالای مستقر در مکان k تخصیص داده شود؛ ۰ در غیر این‌صورت

v^3_{jk}: ۱ اگر وسیله سطح پایین در مکان j به وسیله سطح بالا مستقر در مکان k تخصیص داده شود؛ ۰ در غیر این‌صورت

هدف ۹ همزمان با کمینه‌سازی کل هزینه‌های تخصیص، پوشش تقاضا را بیشینه می‌کند. سمت راست محدودیت ۱۰ مساوی است با مجموع شدت سیگنال دریافتی توسط گره تقاضای i از تمامی وسایل سطح پایین و بالایی که به آنها تخصیص یافته؛ اگر این مجموع بزرگ‌تر یا مساوی با حد آستانه باشد، گره i پوشش داده می‌شود. تقاضای گره نیز در این مسئله می‌تواند به‌عنوان حد آستانه در نظرگرفته شود که در این‌صورت هر یک از توابع شدت سیگنال به‌صورت مقدار تقاضای تأمین شده با توجه به فاصله تعریف می‌شود. محدودیت ۱۱ تضمین می‌کند هر وسیله‌ی سطح پایین تنها در مکان‌هایی قرار بگیرد که مجموع شدت سیگنال دریافتی از وسایل سطح بالا در آن مکان حداقل برابر با حد آستانه T باشد.

محدودیت ۱۲ اطمینان ایجاد می‌کند که گره i در صورتی می‌تواند به j تخصیص یابد که اولاً یک وسیله‌ی سطح پایین در j استقرار یافته باشد و ثانیاً گره i داخل منطقه‌ی تحت پوشش سطح پایین j باشد. محدودیت ۱۳ اطمینان ایجاد می‌کند که گره i در صورتی می‌تواند به k تخصیص یابد که اولاً یک وسیله‌ی سطح بالا در k استقرار یافته باشد و ثانیاً گره i داخل منطقه‌ی تحت پوشش سطح بالای مکان k باشد. محدودیت ۱۴ اطمینان ایجاد می‌کند که وسیله‌ی سطح پایین j در صورتی می‌تواند به k تخصیص یابد که اولاً یک وسیله‌ی سطح بالا در k استقرار یافته باشد و ثانیاً مکان j داخل منطقه‌ی تحت پوشش سطح بالای مکان k باشد. با محدودیت‌های ۱۵ تا ۱۷ متغیرهای تصمیم تخصیص مدل از نوع باینری تعیین می‌شود.

جدول ۲. مختصات و تقاضای گره‌ها در مثال ۱.

گره‌های تقاضا	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
مختصات افقی	۸۱۵	۹۰۶	۱۲۷	۹۱۴	۶۳۲	۹۷	۲۷۸	۵۴۷	۹۵۸	۹۶۵	۱۵۷	۹۷۱	۹۵۸	۴۸۵	۸۰۱
مختصات عمودی	۲۷۶	۶۸۰	۶۵۵	۱۶۲	۱۱۹	۴۹۸	۹۶۰	۳۴۰	۵۸۵	۲۲۴	۷۵۲	۲۵۵	۵۰۶	۶۹۹	۸۹۱
مقدار تقاضا	۵۸	۹۰	۶۵	۷۶	۵۸	۸۰	۶۳	۸۳	۸۵	۸۸	۷۲	۵۴	۶۱	۹۶	۵۷
گره‌های تقاضا	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
مختصات افقی	۱۴۲	۴۲۲	۹۱۶	۷۹۲	۹۶۰	۶۵۶	۳۵	۸۴۹	۹۳۴	۶۷۹	۷۵۸	۷۴۳	۳۹۲	۶۵۶	۱۷۱
مختصات عمودی	۹۶۰	۵۴۷	۱۳۸	۱۴۹	۲۵۷	۸۴۱	۲۵۴	۸۱۵	۲۴۳	۹۳۰	۳۵۰	۱۹۶	۲۵۱	۶۱۶	۴۷۳
مقدار تقاضا	۹۲	۷۷	۱۰۰	۵۳	۷۲	۵۵	۹۹	۵۰	۸۹	۹۱	۹۴	۵۴	۷۰	۶۳	۹۰

هر دو مدل ارائه شده‌ی ۱ و ۲ از نوع PILP [15] هستند. با توجه به NP-Hard بودن مدل MCLP گسسته، می‌توان نتیجه گرفت که این دو مدل نیز NP-Hard هستند.[11]

۴. مثال عددی و تحلیل حساسیت

اکنون برای درک بهتر مطالب، مدل ۲ در یک مثال عددی کوچک که به‌صورت تصادفی تولید شده بررسی می‌شود.

۱.۴. مثال ۱.

فرض کنید ۳ وسیله‌ی سطح بالا باید میان ۳۰ گره تقاضا استقرار یابند و حداکثر می‌توان ۶ وسیله‌ی سطح پایین برای پوشش گره‌های تقاضا تأسیس کرد. مشخصات گره‌های تقاضا در جدول ۲ ثبت شده است. فرض می‌شود وسایل می‌توانند روی هر گره تقاضا استقرار یابند ($J \subseteq I$). هزینه‌ی هر تخصیص ثابت و برابر با $c = ۱۰$ در نظرگرفته می‌شود. در این مسئله پوشش دادن تقاضاها مهم‌تر از هزینه‌ی تخصیص است، بنابراین اوزان تابع هدف به‌صورت $w_۱ = ۰/۹۹۹$ و $w_۲ = ۰/۰۰۱$ فرض شده است.

همچنین فرض می‌شود در این مثال سه تابع شدت سیگنال به‌صورت نزولی پله‌یی هستند و مقدار آنها از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

$$\phi^۱(d_{ij}) = \begin{cases} ۱ & d_{ij} \le ۱۰۰ \\ ۰/۶ & ۱۰۰ < d_{ij} \le ۱۵۰ \\ ۰/۴ & ۱۵۰ < d_{ij} \le ۲۰۰ \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$\phi^۲(d_{ij}) = \begin{cases} ۱ & d_{ij} \le ۲۰۰ \\ ۰/۶ & ۲۰۰ < d_{ij} \le ۲۵۰ \\ ۰/۴ & ۲۵۰ < d_{ij} \le ۳۰۰ \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$\phi^۳(d_{ij}) = \begin{cases} ۱ & d_{ij} \le ۳۰۰ \\ ۰/۶ & ۳۰۰ < d_{ij} \le ۳۵۰ \\ ۰/۴ & ۳۵۰ < d_{ij} \le ۴۰۰ \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

هر گره تقاضا زمانی پوشش داده می‌شود که همه‌ی تقاضای مورد نیازش را دریافت کند (یعنی $T = ۱$). این مثال با استفاده از حل‌کننده‌ی سیپلکس در نرم‌افزار GAMS ۲۴/۱/۲ حل شده است که نتایج حاصل در جداول ۳ و ۴ ارائه شده است. با توجه به جدول ۳، وسایل سطح بالا در گره‌های ۲۱، ۲۶ و ۳۰، و وسایل سطح پایین در گره‌های ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۷، ۲۲ و ۲۸ استقرار یافته‌اند.

اعمال محدودیت ۱۱ موجب شده که وسایل سطح پایین در مکان‌هایی قرار بگیرند که پوشش ارجاعی توسط وسایل سطح بالا به‌صورت تکی یا اشتراکی برای آنها فراهم باشد. از سطر تخصیص جدول ۳ مشخص است که وسایل سطح پایین ۹ و ۲۸ به‌صورت اشتراکی توسط وسایل سطح بالا پوشش یافته‌اند.

با توجه به جدول ۴ گره‌های ۵، ۷ و ۱۶ که سیگنال کافی از وسایل سطح پایین و بالا دریافت نکرده‌اند، پوشش داده نمی‌شوند. هریک از گره‌های ۲، ۸، ۱۴، ۱۹ و ۲۹ به‌صورت اشتراکی پوشش داده می‌شود. این پوشش اشتراکی می‌تواند توسط وسایل هم‌سطح (مانند گره ۲۹) یا غیر هم‌سطح (مانند گره‌های ۲، ۸، ۱۴ و ۱۹) فراهم شود. در گره‌های ۱، ۳، ۴، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۲ و ۲۴ که شدت سیگنال دریافتی بیش از حد آستانه‌ی $T = ۱$ است، تخصیص به‌گونه‌یی انجام شده که بیش‌ترین پوشش و کم‌ترین هزینه را ایجاد کند. مقدار تابع هدف برابر با ۲۰۱۹/۵۷۸ و مقدار تقاضای پوشش داده شده برابر با ۲۰۲۲ است (هزینه‌ی تخصیص در محاسبه‌ی مقدار تقاضای پوشش یافته در نظرگرفته نمی‌شود).

شکل ۴ نمایش مکان‌یابی وسایل سطح پایین و بالا در مثال ۱ است. نقاط پوشش داده شده و بدون پوشش نیز در این شکل مشخص شده‌اند. استفاده از پوشش اشتراکی در مدل موجب می‌شود در مقایسه با مدل با تابع پوشش مرسوم، تقاضای بیشتری تحت پوشش وسایل قرار بگیرد؛ چراکه در مدل غیراشتراکی HMCLP(R) هر نقطه‌ی تقاضا تنها می‌تواند از خدمات یک وسیله استفاده کند. برای نشان دادن این موضوع تعدادی مسئله تصادفی در ابعاد مختلف ایجاد شده و با هر دو مدل حل می‌شوند. برای حل مسائل با مدل غیراشتراکی فرض می‌شود شعاع پوشش

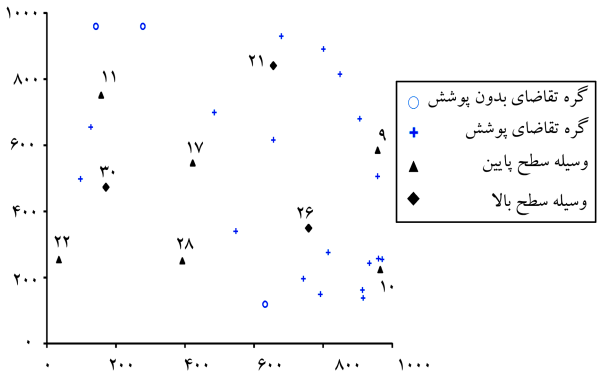
جدول ۳. نتایج استقرار وسایل سطح بالا و پایین و ارتباط آنها (میزان پوشش) در مثال ۱.

مکان وسایل	مکان وسایل سطح پایین					
سطح بالا	۹	۱۰	۱۱	۱۷	۲۲	۲۸
۲۱	۰/۴			۰/۴		
۲۶	۰/۶	۱		۰/۴		۰/۴
۳۰			۱	۱	۱	۰/۶
تخصیص	۲۶،۲۱	۲۶	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰،۲۶

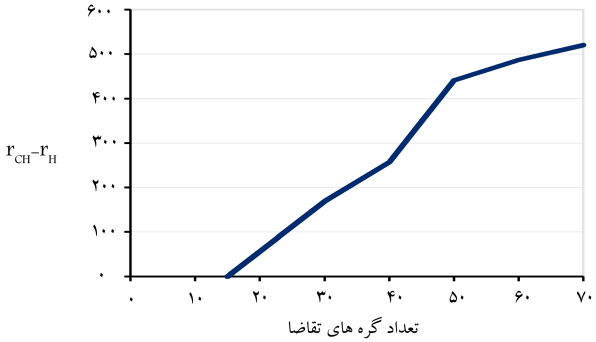
جدول ۴. نتایج پوشش گره‌های تقاضا و تخصیص آنها در مثال ۱.

مکان وسایل	گره‌های تقاضا														
سطح پایین	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۹		۰٫۶							۱				۱		
۱۰	۰٫۴			۱						۱		۱			
۱۱			۰٫۶								۱				
۱۷														۰٫۴	
۲۲															
۲۸								۰٫۴							
مکان وسایل سطح بالا	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۲۱		۰٫۴												۰٫۶	۱
۲۶	۱			۰٫۶	۰٫۴			۰٫۶		۰٫۶		۰٫۶	۰٫۴		
۳۰			۱			۱					۰٫۴				
تخصیص	۲۶	۹،۲۱	۳۰	۱۰	ــ	۳۰	ــ	۲۸،۲۶	۹	۱۰	۱۱	۱۰	۹	۲۱،۱۷	۲۱

مکان وسایل	گره‌های تقاضا														
سطح پایین	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۹															
۱۰			۱	۰٫۴	۱				۱						
۱۱															
۱۷		۱													
۲۲							۱								
۲۵													۱		
مکان وسایل سطح بالا	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۲۱						۱		۱		۱				۰٫۶	
۲۶			۰٫۴	۰٫۶	۰٫۶				۰٫۶		۱	۱		۰٫۴	
۳۰		۰٫۴					۰٫۴								۱
تخصیص	ــ	۱۷	۱۰	۲۶،۱۰	۱۰	۲۱	۲۲	۲۱	۱۰	۲۱	۲۶	۲۶	۲۸	۲۶،۲۱	۳۰



شکل ۴. مکان‌یابی وسایل سطح پایین و بالا در مثال ۱.



شکل ۵. مقایسه‌ی تقاضای پوشش داده شده توسط مدل غیر اشتراکی و مدل اشتراکی.

وسایل سطح پایین $R_1 = ۱۰۰$، شعاع پوشش وسایل سطح بالا $R_2 = ۲۰۰$ و شعاع ارجاع $R_3 = ۳۰۰$ باشند؛ یعنی همان شعاع‌های پوشش کامل سه تابع شدت سیگنال در مدل سلسله‌مراتبی اشتراکی مثال ۱.

اگر تقاضای پوشش داده شده توسط دو مدل اشتراکی و غیراشتراکی را به‌ترتیب با r_{CH} و r_H نشان دهیم، تفاضل این دو مقدار برای مسائل حل شده در شکل ۵ نشان داده شده است.

چنان که مشاهده می‌شود اگر تعداد وسایل نسبت به تعداد گره‌ها زیاد باشد دو مدل نتیجه‌ی یکسانی دارند و هر دو تقاضای یکسانی را پوشش می‌دهند؛ زیرا به‌دلیل زیاد بودن تعداد وسایل، همه نقاط به‌طور کامل توسط یک وسیله پوشش داده می‌شوند و نیازی به پوشش اشتراکی وجود ندارد. صعودی بودن نمودار نشان از این دارد که با افزایش تعداد گره‌های تقاضا، تفاوت تقاضای پوشش داده شده بین دو مدل افزایش یافته و تأثیر پوشش اشتراکی بیشتر شده است.

جدول ۵. نتایج استقرار وسایل سطح بالا و پایین و ارتباط آنها وقتی شعاع ارجاعی کوچک باشد.

مکان وسایل	مکان وسایل سطح پایین					
سطح بالا	۶	۱۳	۱۴	۱۹	۲۳	۲۷
۳	۱					
۲۰		۱		۱		۱
۲۱			۱		۱	
تخصیص	۳	۲۰	۲۱	۲۰	۲۱	۲۰

تنظیم شعاع‌های پوشش تأثیر زیادی برکارایی مدل دارد. شعاع پوشش وسایل و شعاع ارجاع باید به‌طور مناسب و با توجه به ویژگی‌های مسئله و وسایل تعیین شوند. به‌عنوان مثال اگر شعاع کمینه و بیشینه در هر تابع شدت سیگنال نزدیک به هم انتخاب شود، مدل اشتراکی مانند مدل مرسوم عمل می‌کند. به‌عنوان نمونه در مثال ۱، اگر شعاع‌های پوشش در تابع $\phi^1(d_{ij})$ برابر ۱۰۰، ۱۱۰، ۱۲۰ و در تابع $\phi^2(d_{ij})$ برابر ۲۰۰، ۲۱۰، ۲۲۰، و در تابع $\phi^3(d_{ij})$ برابر ۳۰۰، ۳۱۰، ۳۲۰ باشد دقیقاً همان نتایجی به دست می‌آید که توسط مدل غیراشتراکی HMCLP(R) حاصل می‌شود.

همچنین به‌دلیل الزام استقرار وسایل سطح پایین در مناطقی که تحت پوشش ارجاعی وسایل سطح بالا هستند (محدودیت‌های ۳ و ۱۱)، اگر شعاع ارجاعی کوچک در نظر گرفته شود وسایل سطح پایین در اطراف وسایل سطح بالا متمرکز می‌شوند و ضمن این که همه‌ی آنها به‌صورت غیر اشتراکی توسط وسایل سطح بالا پوشش داده می‌شوند خودشان نیز تقاضای کم‌تری را پوشش می‌دهند. این مورد در مثال ۲ نشان داده شده است. برعکس حالت فوق، هرچه شعاع ارجاعی بزرگ‌تر باشد امکان استقرار پراکنده‌تر وسایل سطح پایین درکل منطقه مورد بررسی و درنتیجه امکان استفاده از مزیت پوشش اشتراکی بین وسایل دو سطح بیشتر می‌شود.

۲.۴. مثال ۲.

در مثال ۱ اگر شعاع‌های پوشش در تابع $\phi^3(d_{ij})$ برابر ۲۵۰، ۲۸۰، ۳۰۰ در نظر گرفته شود و سایر فرض‌های مسئله بدون تغییر باقی بماند، گره‌های ۷، ۸، ۱۶، ۱۷، ۲۲ و ۲۸ پوشش داده نمی‌شود. نتایج استقرار وسایل سطح بالا و پایین و تخصیص آنها در جدول ۵ ثبت شده است. در سطر تخصیص این جدول ملاحظه می‌شود که هیچ پوشش مشترکی بین وسایل دو سطح وجود ندارد.

لازم به ذکر است که در تعیین شعاع‌های پوشش، باید محدودیت‌های شرایط واقعی ازجمله ظرفیت و توانایی خدمت‌رسانی وسایل و همچنین فاصله‌ی منطقی بین وسایل و نقاط تقاضا نیز در نظر گرفته شود.

۵. توسعه‌ی الگوریتم SA برای مدل پیشنهادی

الگوریتم SA یک الگوریتم فرابتکاری احتمالی است که عملکرد مناسبی در فضای جست‌وجوی گسسته دارد. نکته‌ی مهم در این روش این است که این روش ابزاری فراهم می‌کند که بتوان از نقاط بهینه‌ی محلی دور شد و با پذیرش جواب‌های بدتر، به نقطه‌ی بهینه‌ی سراسری دست یافت. در این الگوریتم باید تغییرات غیر بهبوددهنده‌ی تابع هدف با احتمال معینی انتخاب شود به‌طوری که با افزایش عمر الگوریتم، این احتمال نیزکاهش یابد. بدین‌ترتیب الگوریتم با تمایل به واگرایی آغاز شده و با گذشت زمان به‌تدریج به سمت همگرایی جواب‌ها میل پیدا می‌کند. برای ایجاد واگرایی در الگوریتم از احتمال $\exp(-\Delta z/t)$ استفاده می‌شود.

۱.۵. پارامترهای الگوریتم

t_1 دمای اولیه؛ t_0 دمای انجماد؛ α ضریب سرد شدن؛ $M_{\max}$ تعداد دفعات قبول بردار استقرار در هر دما؛ $N_{\max}$ تعداد دفعات تکرار الگوریتم در هر دما.

۲.۵. ساختار جواب

به‌منظور شدنی بودن جواب‌های الگوریتم، بردار مکان‌یابی z_k با توجه به محدودیت ۸ به‌صورت یک آرایه‌ی باینری $n \times 1$ تعریف می‌شود که n در آن برابر تعداد مکان‌های بالقوه‌ی استقرار وسایل است. همچنین با توجه به محدودیت ۵ تعداد ۱ها برابر q است. برای مثال:

n	...	۴	۳	۲	۱	
۰	...	۱	۰	۱	۰	z_k :

به‌طور مشابه، بردار مکان‌یابی y_j نیز به‌صورت یک آرایه‌ی باینری $n \times 1$تعریف می‌شود که تعداد ۱ها در آن برابر p است (محدودیت‌های ۷ و ۴).

۳.۵. سازوکار ایجاد جواب همسایه

به‌دلیل ثابت بودن تعداد وسایل، شدنی بودن جواب همسایه مستلزم این است که تعداد ۱ها و صفرهای جواب اولیه تغییر نکند. در واقع هر جواب همسایه از جابه‌جا کردن یک یا چند وسیله در جواب فعلی به دست می‌آید.

در الگوریتم توسعه یافته در این مطالعه، روش ایجاد جواب همسایه (که توسط برمن و همکاران[۱۰] نیز مورد استفاده قرار گرفته) بدین‌گونه است که یک وسیله‌ی سطح بالا از مکان فعلی برداشته شده و در مکانی بدون وسیله‌ی سطح بالا قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال فرض کنید تعداد وسایل ۳ و تعداد نقاط ۷ است و الگوریتم جواب فعلی را چنین ایجاد کرده:

فعلی z_k:	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰

دو مکان که مقدار z_k آنها برابر نیست به‌صورت تصادفی انتخاب شده و جابه‌جایی وسیله صورت می‌گیرد:

جدید z_k:	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰

در مثال فوق وسیله‌ی موجود درگره ۲ به گره ۷ انتقال یافته است.

از آنجا که در مدل ارائه شده محل استقرار وسایل سطح پایین وابسته به محل استقرار وسایل سطح بالاست، پس از ایجاد بردار مکان‌یابی وسایل سطح بالا، ابتدا باید مکان‌های مجاز استقرار وسایل سطح پایین ــ نقاطی که میزان سیگنال دریافتی آنها از وسایل سطح بالا صفر نباشد ــ مشخص شود. سپس از بین آنها تعداد p مکان به‌صورت تصادفی انتخاب شده و وسایل سطح پایین در آن مکان‌ها استقرار یابند. ساختار جواب y_j نیز چنان‌که در بخش ۲.۵. شرح داده شده مشابه z_k است.

برای تعیین نحوه‌ی استقرار وسایل سطح پایین، می‌توان با فرض ثابت بودن محل استقرار وسایل سطح بالا، تعداد معینی y_j ایجاد کرد و برای همه‌ی آنها پوشش تقاضا را محاسبه کرد. سپس استقراری که بیشترین تقاضا را پوشش می‌دهد به‌عنوان جواب جدید انتخاب می‌کنیم. همچنین می‌توان این تعداد را در الگوریتم برابر با ۱ در نظر گرفت. هرچه تعداد y_jهای بررسی شده در هر همسایگی بیشتر باشد به‌دلیل جست‌وجوی دقیق‌تر فضای جواب، الگوریتم پاسخ‌های بهتری ارائه خواهد کرد اما زمان اجرا نیز افزایش می‌یابد. این مورد در بخش ۶.۵ با مثال بررسی شده است.

۴.۵. تنظیم پارامترها

تنظیم پارامترها نقش مهمی در کارایی الگوریتم‌های فراابتکاری دارد. به‌منظور تنظیم پارامترها باید ابتدا الگوریتم چندین بار با اعداد مختلف اجرا شود تا سطوح مناسب آزمایش برای هریک از پارامترها مشخص شود.

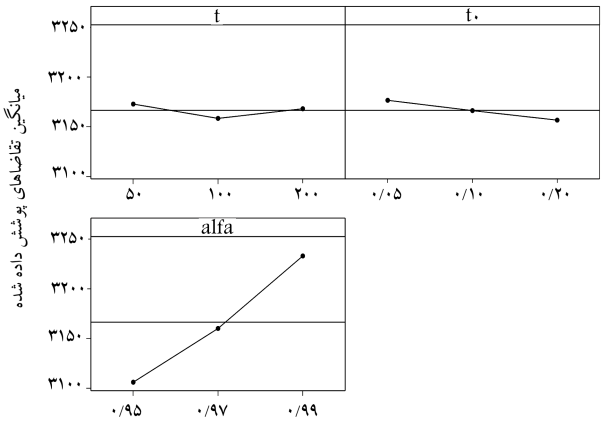
پارامترهای $M_{\max}$ و $N_{\max}$ را ثابت و به‌ترتیب برابر با ۵ و ۱۰ در نظر می‌گیریم. برای هریک از سه عامل دیگر سه سطح در نظر گرفته می‌شود. پارامتر t_1 در سطوح ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰؛ پارامتر α در سطوح ۰٫۹۵، ۰٫۹۷ و ۰٫۹۹؛ و پارامتر t_0 در سطوح ۰٫۰۵، ۰٫۱ و ۰٫۲ آزمایش می‌شود. بنابراین پارامترهای الگوریتم SA توسعه داده شده با استفاده از طراحی [۳۳] آزمایش تنظیم می‌شوند. بدین‌منظور از روش تحلیل تاگوچی[۱۶] در نرم‌افزار مینی‌تب[۱۷] استفاده می‌کنیم.

این آزمایشات در یک مثال با ۱۲۵ گره تقاضا اجرا می‌شود. در هر آزمایش، الگوریتم ۱۰ بار تکرار شده و میانگین نتایج مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شکل ۶ نمودارهای تغییرات پوشش تقاضا در مدل ۲ برای مقادیر مختلف پارامترهای t_0 ،t_1 و α نشان داده شده است. با توجه به این نمودارها، پارامترهای الگوریتم را به‌صورت $t_1 = ۵۰$، $t_0 = ۰٫۰۵$ و $\alpha = ۰٫۹۹$ تنظیم می‌کنیم.

۵.۵. مراحل اجرای SA

مراحل اجرای الگوریتم SA برای مدل ۲ عبارت است از:

۱. اطلاعات اولیه را وارد کنید (مختصات گره‌های تقاضا، مقدار تقاضای هر گره، تعداد وسایل سطح بالا و پایین و...).



شکل ۶. نمودارهای تغییرات پوشش تقاضا با تغییر پارامترهای الگوریتم SAدر مدل ۲.

۲. توابع شدت سیگنال $\phi^1(d_{ij})$، $\phi^2(d_{ik})$ و $\phi^3(d_{jk})$ را ایجاد کنید.

۳. مقدار پارامترهای الگوریتم را مشخص کنید.

۴. بردار اولیه‌ی z_k را به‌صورت تصادفی ایجاد کنید به‌گونه‌یی که شدنی باشد (محدودیت‌های مسئله را ارضا کند).

۵. با توجه به نحوه‌ی استقرار وسایل سطح بالا، مکان‌های مجازی را که وسایل سطح پایین را می‌توان در آن مستقر کرد تا مسئله شدنی باشد، با استفاده از محدودیت ۱۱ تعیین کنید.

۶. بردار y_j را به‌صورت تصادفی از میان مکان‌های مجازی تعیین شده در مرحله‌ی قبل ایجاد کنید. در این مرحله می‌توان چندین بردار y_j را ایجاد کرد و از میان آنها موردی که بیشترین تقاضا را پوشش می‌دهد انتخاب کرد.

۷. سایر متغیرهای مدل را با توجه به محدودیت‌های ۱۲ تا ۱۴ محاسبه کنید و سپس مقدار تابع هدف را با استفاده از معادله‌ی ۹ به دست آورید. حل بهینه را برابر با این حل اولیه قرار دهید.

۸. M و N را برابر صفر قرار دهید.

۹. یک حل شدنی (z_k) جدید با جابه‌جا کردن مکان یک وسیله‌ی سطح بالا که به‌صورت تصادفی انتخاب شده، ایجاد کنید. بردار مکان‌یابی وسایل سطح پایین (y_j)، سایر متغیرهای مدل و تابع هدف جدید را مانند مراحل ۵ تا ۷ محاسبه کنید.

۱۰. اگر مقدار تابع هدف جدید بهتر از قبلی است، حل جدید را بپذیرید و حل بهینه را به روز کنید؛ یک واحد به مقدار M و N بیفزایید و به مرحله‌ی ۱۲ بروید. در غیر این‌صورت به مرحله‌ی بعد بروید.

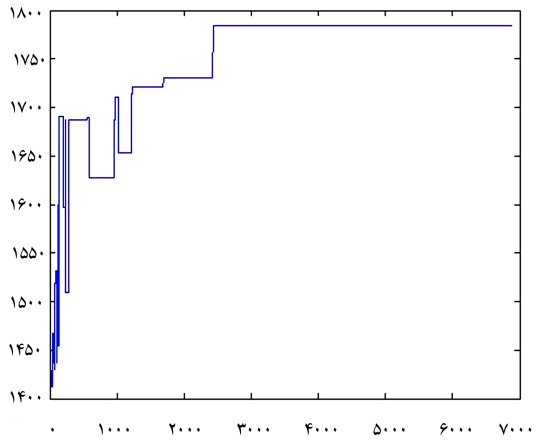
۱۱. یک عدد تصادفی در بازه (۱و۰) تولید کرده و با حاصل عبارت $\exp(\frac{-\Delta z}{t})$ مقایسه کنید (که Δz مقدار تغییر در تابع هدف و t دمای فعلی است). اگر عدد تصادفی کم‌تر از مقدار عبارت بود حل جدید پذیرفته شده و یک واحد به مقدار M و N افزوده می‌شود. در غیر این‌صورت حل جدید رد شده و تنها به N یک واحد اضافه می‌شود. به مرحله‌ی بعد بروید.

۱۲. اگر $M = M_{\max}$ یا $N = N_{\max}$ بود به مرحله‌ی بعد بروید. در غیر این‌صورت به مرحله‌ی ۹ بروید.

۱۳. دمای الگوریتم را از طریق ضرب آن در α کاهش دهید و حاصل را با دمای انجماد مقایسه کنید. اگر دمای جدید الگوریتم کوچک‌تر یا مساوی دمای انجماد بود الگوریتم به پایان می‌رسد و بهترین حل نمایش داده می‌شود. در غیر این‌صورت به مرحله‌ی ۸ بازگردید. شکل ۷ روند همگرایی الگوریتم SA توسعه داده شده برای مدل ۲ را در یک مثال نشان می‌دهد.

۶.۵. اجرای الگوریتم و مقایسه با روش حل دقیق

برای تشخیص کارایی این الگوریتم، مسائل تصادفی در اندازه‌های مختلف تولید شده است. برای تولید مختصات افقی و عمودی هر یک از نقاط تقاضا در مسئله با ۵۰ نقطه و کم‌تر، از تابع یکنواخت گسسته در بازه (۱۰۰۰ و ۰) استفاده شده است. با افزایش تعداد نقاط، بازه فوق نیز افزایش داده شده است. همچنین مقادیر تقاضا به‌صورت تصادفی با استفاده از تابع توزیع یکنواخت گسسته و در بازه (۱۰۰ و ۵۰) تولید شده‌اند. برای تمامی مسائل فرض می‌شود $p = ۶$ و $q = ۳$ است.



شکل ۷. روند همگرایی الگوریتم SA برای مدل ۲.

جدول ۶. نتایج حل مدل ۲ توسط نرم‌افزار سیپلکس ۱۲.

تعداد گره‌ها	تابع هدف	پوشش تقاضا	زمان (ثانیه)	گپ نسبی
۳۰	۲۰۱۹٫۵۷۸	۲۰۲۲	۴	۰
۵۰	۳۳۱۷٫۰۲۹	۳۳۲۱	۲۸۵	۰
۷۵	۳۵۷۶٫۷۷۹	۳۵۸۱	۱۰۰۰	۰٫۱۳۱۳۷۴
۱۰۰	۳۵۲۰٫۸۳۵	۳۵۲۵	۱۰۰۰	۰٫۱۸۱۳۰۶
۱۲۵	۳۵۴۵٫۷۹	۳۵۵۰	۱۰۰۰	۰٫۲۱۲۸۱۲

جدول ۶ تابع هدف، تقاضای پوشش داده شده و زمان اجرای حل با سیپلکس را گزارش می‌کند. چنان که در جدول ۶ نشان داده شده، سیپلکس برای مسائل با ۷۵ نقطه و بیشتر، در محدوده‌ی زمانی ۱۰۰۰ ثانیه که پیش‌فرض نرم‌افزار GAMS است نتوانسته به جواب بهینه دست پیدا کند. درمورد این مثال‌ها میزان گپ نسبی نتیجه‌ی حاصل در جدول درج شده است. با توجه به مقادیر گزارش شده مشخص است که با افزایش تعداد نقاط، میزان این گپ افزایش داشته است.

در جدول ۷ نیز نتایج حل همان مثال‌ها با استفاده از الگوریتم SA ثبت شده است. الگوریتم با دو روش جست‌وجوی استقرار وسایل سطح پایین در هر بار جابه‌جایی وسایل سطح بالا مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت اول تنها یک استقرار تصادفی از میان استقرارهای مجاز، برای وسایل سطح پایین در نظر گرفته می‌شود. در حالت دوم برای هر استقرار وسایل سطح بالا، سه استقرار سطح پایین بررسی شده و بهترین آنها انتخاب می‌شود. برای هریک از دو مورد فوق، الگوریتم ۱۰ بار اجرا شده و بهترین، متوسط، و بدترین حل همراه با متوسط زمان حل گزارش شده است.

مقایسه‌ی نتایج الگوریتم با نتایج حل دقیق نشان می‌دهد که الگوریتم توسعه داده شده در مسائل با اندازه بزرگ کارایی مناسبی دارد و در زمانی اندک به جواب نزدیک به بهینه دست می‌یابد. مقایسه‌ی نتایج دو روش جست‌وجوی ۱ و ۳ استقرار سطح پایین در الگوریتم در جدول ۷، نشان می‌دهد در روش دوم نتایج اندکی بهتر شده در حالی که زمان اجرا افزایش یافته است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل مکان‌یابی - تخصیص بیشینه پوشش سلسله‌مراتبی با پوشش اشتراکی در دو حالت بدون تخصیص و با تخصیص توسعه داده شد. مدل ارائه شده با استفاده از مثال عددی مورد تحلیل قرار گرفت و نشان داده شد که تنظیم مناسب شعاع پوشش وسایل نقش مهمی در عملکرد مدل دارد. تصمیم‌گیری در این مورد باید با در نظر گرفتن ویژگی‌های مسئله، ظرفیت وسایل و سایر عوامل مؤثر در آن انجام گیرد. برای حل مدل در ابعاد بزرگ الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده توسعه داده شده و در مسائل تصادفی با ابعاد مختلف حل شد. مقایسه‌ی نتایج الگوریتم با نتایج سیپلکس نشان می‌دهد که در مسائل با ابعاد بزرگ، این الگوریتم عملکرد مناسبی در مقایسه با روش حل دقیق دارد و در زمانی اندک، به پاسخ نزدیک به بهینه می‌رسد. همچنین الگوریتم در دو حالت بررسی ۱ و ۳ استقرار سطح پایین در هر بار ایجاد همسایگی حل شده است. مقایسه‌ی این دو روش جست‌وجو نشان می‌دهد درمورد روش دوم نتایج کمی بهتر است در حالی که زمان اجرا افزایش یافته است.

جدول ۷. تقاضای پوشش یافته و زمان‌های اجرای مدل ۲ توسط الگوریتم SA.

تعداد گره‌ها	الگوریتم SA با بررسی ۱ استقرار y_j				الگوریتم SA با بررسی ۳ استقرار y_j			
	پوشش تقاضا			زمان (ثانیه)	پوشش تقاضا			زمان (ثانیه)
	بهترین	متوسط	بدترین	متوسط	بهترین	متوسط	بدترین	متوسط
۳۰	۱۹۵۳	۱۸۶۶٫۵	۱۷۷۰	۵٫۷۸	۱۹۵۲	۱۹۱۴٫۱	۱۸۵۴	۸٫۸۶
۵۰	۳۰۲۹	۲۹۶۴٫۹	۲۸۹۲	۸٫۵۳	۳۱۳۸	۳۰۶۴٫۴	۲۹۷۳	۱۴٫۷۸
۷۵	۳۳۲۰	۳۱۷۱٫۳	۳۰۹۴	۱۴٫۹۴	۳۳۱۸	۳۲۲۳٫۷	۳۱۴۰	۲۹
۱۰۰	۳۳۸۲	۳۲۲۳٫۶	۳۰۶۸	۲۳٫۹۷	۳۳۸۳	۳۳۴۰٫۲	۳۳۰۸	۴۷
۱۲۵	۳۴۱۴	۳۲۳۵	۳۰۸۴	۳۸٫۴	۳۵۶۶	۳۳۲۴٫۶	۲۹۷۸	۷۵

پانوشت‌ها

1. maximal covering location problem
2. hierarchical maximal covering location problem
3. referral
4. hierarchical maximal covering location problem with referral in the presence of partial coverage
5. tabu search
6. location set covering problem
7. simulated annealing
8. Cplex
9. nested
10. decay function
11. step decay function
12. linear decay function
13. cooperative hierarchical maximal covering location problem with referral
14. cooperative hierarchical maximal covering location allocation problem with referral
15. pure integer linear programming
16. Taguchi
17. Minitab

منابع (References)

1. Church, R. and ReVelle, C. "The maximal covering location problem", *Papers of the Regional Science Association*, **32**, pp. 101-118 (1974).
2. Moore, G.C. and ReVelle, C. "The hierarchical service location problem", *Management Science*, **28**(7), pp. 775-780 (1982).
3. Marianov, V. and Serra, D. "Hierarchical location-allocation models for congested systems", *European Journal of Operational Research*, **135**, pp. 195-208 (2001).
4. Shavandi, H., Mahlooji, H., Eshghi, K., and Khanmohammadi, S. "A fuzzy coherent hierarchical location-allocation model for congested systems", *Scientia Iranica*, **13**(1), pp. 14-24 (2006).
5. Shavandi, H. and Mahlooji, H. "Fuzzy hierarchical location-allocation models for congested systems", *Journal of Industrial and Systems Engineering*, **1**(2), pp. 171-189 (2007).
6. Church, R.L. and Roberts, K.L. "Generalized coverage models and public facility location", *Papers of the Regional Science Association*, **53**, pp. 117-35 (1983).
7. Töreyen, Ö., Karasakal, E. and Karasakal, O. "Hierarchical maximal covering location problem with referral in the presence of partial coverage", M.Sc. Thesis, Middle East Technical University (2007).
8. Lee, J.M. and Lee, Y.H. "Tabu based heuristics for the generalized hierarchical covering location problem", *Computers & Industrial Engineering*, **58**, pp. 638-645 (2010).
9. Berman, O., Drezner, Z. and Krass, D. "Cooperative cover location problems: the planar case", *IIE Transactions,* **42**, pp. 232-246 (2010).
10. Berman, O., Drezner, Z. and Krass, D. "Discrete cooperative covering problems", *Journal of the Operational Research Society*, **62**, pp. 2002-2012 (2011).
11. Berman, O., Drezner, Z. and Krass, D. "Generalized coverage: New developments in covering location models", *Computers & Operations Research*, **37**, pp. 1675-1687 (2010).
12. Berman, O. and Krass, D. "The generalized maximal covering location problem", *Comput Oper Res*, **29**, pp. 563-581 (2002).
13. Berman, O., Krass, D. and Drezner, Z. "The gradual covering decay location problem on a network", *Eur J Oper Res*, **151**, pp. 474-480 (2003).
14. Drezner, Z., Wesolowsky, G.O., Drezner, T. "The gradual covering problem", *Naval Research Logistics*, **51**, pp. 841-855 (2004).
15. Karasakal, O. and Karasakal, E. "A maximal covering location model in the presence of partial coverage", *Comput Oper Res*, **31**, pp. 1515-1526 (2004).