

پایش متغیر خروجی دوجمله‌یی با به‌کارگیری الگوهای خطی تعمیم‌یافته در فرایندهای دومرحله‌یی

محمد صالح اولیاء* (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه یزد

امیرحسین امیری (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

محمد هادی دورودیان (دانشجوی دکتری)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه یزد

علی عسگری (کارشناس ارشد)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۴ (دوره ۱ - شماره ۲/۲، ص. ۷۱-۶۸)

امروزه بیشتر محصولات و خدمات دارای فرایندهایی با چندین مرحله‌ی متوالی هستند. با توجه به وجود خاصیت آشناری در اغلب این فرایندها، پایش جداگانه‌ی مراحل بدون در نظر گرفتن رابطه‌ی بین مشخصه‌های کیفی در مراحل مختلف باعث افزایش خطا در نتایج می‌شود. در این نوشتار، یک نمودار کنترل براساس الگوهای خطی تعمیم‌یافته به‌منظور پایش فرایندهای دومرحله‌یی با مشخصه‌ی کیفی دوجمله‌یی در مرحله‌ی دوم پیشنهاد شده است. در روش پیشنهادی، به‌منظور پایش متغیر دوجمله‌یی در مرحله‌ی دوم، یک نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین مشخصه‌های کیفی در دو مرحله طراحی شده است. به‌منظور برقراری رابطه بین مشخصه‌های کیفی مراحل اول و دوم، از تابع رابط لجیت (Logit) که برای متغیر خروجی دوجمله‌یی مناسب است استفاده شده است. عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و براساس معیار متوسط طول دنباله ارزیابی شده است.

واژگان کلیدی: فرایندهای دومرحله‌یی، الگوهای خطی تعمیم‌یافته (GLM)، متغیر خروجی دوجمله‌یی، نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف (CSC)، تابع رابط لجیت (Logit).

۱. مقدمه

بیشتر محصولات و خدمات دارای فرایندهایی با چندین مرحله‌ی متوالی هستند. با توجه به وجود خاصیت آشناری در اغلب این فرایندها، پایش جداگانه‌ی مراحل بدون در نظر گرفتن رابطه‌ی بین مشخصه‌های کیفی در مراحل مختلف باعث افزایش خطا در نتایج می‌شود. در این نوشتار، یک نمودار کنترل براساس الگوهای خطی تعمیم‌یافته به‌منظور پایش فرایندهای دومرحله‌یی با مشخصه‌ی کیفی دوجمله‌یی در مرحله‌ی دوم پیشنهاد شده است. در روش پیشنهادی، به‌منظور پایش متغیر دوجمله‌یی در مرحله‌ی دوم، یک نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین مشخصه‌های کیفی در دو مرحله طراحی شده است. به‌منظور برقراری رابطه بین مشخصه‌های کیفی مراحل اول و دوم، از تابع رابط لجیت (Logit) که برای متغیر خروجی دوجمله‌یی مناسب است استفاده شده است. عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و براساس معیار متوسط طول دنباله ارزیابی شده است.

با استفاده از نمودارهای مرسوم شوهارت مناسب نیست و منجر به تصمیم‌گیری‌های اشتباه در این فرایندها می‌شود. همچنین پایش همه‌ی مراحل به‌وسیله‌ی یک نمودار کنترل چندمتغیره یا چند مشخصه‌ی وصفی مثل T^2 هتلینگ خالی از اشتباه نیست، زیرا هنگامی که یک هشدار خارج از کنترل در نمودار دیده می‌شود، به‌راحتی نمی‌توان مشخص کرد که کدام مرحله از فرایند خارج از کنترل است.^[۱]

ژنگ^[۲] ضمن ارائه‌ی کاربرد جدیدی از نمودارهای کنترلی برای پایش فرایندهای چندمرحله‌یی، نمودار انتخاب عامل انحراف را معرفی کرد. او یک فرایند دومرحله‌یی با مشخصه‌ی کیفی در هر مرحله در نظر گرفت و برای پایش مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم، ابتدا اثر مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول بر مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم را به‌وسیله‌ی آماره‌ی مقادیر باقی‌مانده (برای مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم) از بین برد و سپس مقادیر باقی‌مانده را با استفاده از نمودار انتخاب عامل انحراف مورد پایش قرار داد. نمودار کنترلی انتخاب عامل انحراف مشابه نمودار کنترلی رگرسیون پیشنهادی توسط مندل^[۳] است. هاوکینز^[۴] روش مندل را توسعه داد و نمودارهای کنترلی

بیشتر محصولاتی که امروزه تولید می‌شوند، حاصل مراحل مختلف به هم وابسته‌ی فرایند هستند. نمونه‌ی بارز چنین فرایندهایی، خط تولیدی است که در آن اجزاء و قطعات محصول قبل از مونتاژ در مرحله‌ی آخر، از چندین مرحله می‌گذرند. این‌گونه فرایندها را اصطلاحاً فرایندهای چندمرحله‌یی می‌نامند. در هر یک از مراحل این فرایندها ممکن است یک یا چند مشخصه‌ی کیفی وجود داشته باشد. بنابراین برای نیل به کیفیت بهتر محصول نهایی، اندازه‌گیری و کنترل این مشخصه‌های کیفی در هر مرحله از فرایند ضروری است. معمولاً در فرایندهای چندمرحله‌یی تغییر در مشخصه‌ی کیفی در هر یک از مراحل می‌تواند ناشی از تغییر در مشخصه‌های کیفی مراحل قبل باشد. در نتیجه کیفیت محصول نهایی نه تنها به عملکرد مرحله‌ی آخر، بلکه به عملکرد مراحل قبل نیز بستگی دارد. این ویژگی فرایندهای چندمرحله‌یی را خاصیت آشناری می‌نامند. به‌دلیل وجود خاصیت آشناری در اکثر این فرایندها، پایش آن‌ها

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۰/۲۱، اصلاحیه ۱۳۹۳/۵/۳، پذیرش ۱۳۹۳/۵/۲۹.

براساس تعدیل رگرسیونی متغیرها را پیشنهاد کرد. وید و وودال^[۱] یک نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف با حدود پیش‌گویی پیشنهاد کردند که عملکرد آماری بهتری داشت. لوکاس و ساکوسی^[۶] استفاده از نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA)^۱ را برای پایش مقادیر باقی‌مانده در مرحله‌ی دوم پیشنهاد کردند. هاوک و همکاران^[۷] ضمن توسعه‌ی مدل تعدیل رگرسیونی پیشنهادی هاوکینز، نمودارهایی کنترلی برای پایش فرایندهای چندمرحله‌ای با وجود چندین مشخصه‌ی کیفی متغیر در هر مرحله پیشنهاد کردند. نیاکی و داوودی^[۸] یک فرایند چندمتغیره‌ی چندمرحله‌ای را در نظر گرفتند که در آن ارتباط بین مراحل به‌وسیله‌ی سری‌های زمانی چندمتغیره برقرار می‌شود. آنها استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی را برای پایش این‌گونه فرایندها پیشنهاد کردند.

محققین دیگری نیز به بسط و گسترش نمودارهای کنترل برای پایش فرایندهای چندمرحله‌ای پرداختند. در بیشتر تحقیقاتی که در زمینه‌ی فرایندهای چندمرحله‌ای انجام گرفته است، همیشه این فرض به چشم می‌خورد که مشخصه‌های کیفی در مراحل مختلف فرایند به‌ویژه در مرحله‌ی آخر از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. اما در عمل همیشه این‌طور نیست و ممکن است مشخصه‌های کیفی از توزیعی غیر نرمال همچون توزیع‌های دوجمله‌ای، پواسون، نمایی یا گاما (خانواده‌ی توزیع‌های نمایی) پیروی کنند. در این شرایط تابع برازش رگرسیونی که برای توزیع نرمال استفاده می‌شود کاربرد و عملکرد خود را از دست می‌دهد و باید از روش‌های دیگری برای برازش خط رگرسیونی استفاده کرد. یکی از روش‌های پرکاربرد و مناسب برای مشخصه‌های کیفی از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی، روش الگوهای خطی تعمیم‌یافته است. در این روش از توابع رابط برای برقراری رابطه‌ی بین پارامتر مشخصه‌ی کیفی خروجی و مشخصه‌های کیفی مراحل قبل استفاده می‌شود.

محققین در تحقیقات خود یک فرایند دومرحله‌ای در نظر گرفته‌اند^[۹] که در آن مشخصه‌ی کیفی در مرحله‌ی دوم به‌ترتیب دارای توزیع گاما و پواسون است و برای برقراری ارتباط بین میانگین مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم با مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول از تابع رابط لگاریتم استفاده شده است. آن‌ها نشان دادند که مقادیر باقی‌مانده‌ی انحراف تقریباً از توزیع نرمال پیروی می‌کنند و یک نمودار کنترل براساس این آماره طراحی کردند. در مطالعه‌ی بعدی^[۱۱] یک فرایند دومرحله‌ای با مشخصه‌ی کیفی خروجی گاما در نظر گرفته شده است که طی آن، ضمن بررسی اثر وجود داده‌ی دور افتاده در داده‌های تاریخی، با استفاده از الگوهای خطی تعمیم‌یافته‌ی استوار یک نمودار کنترل پیشنهاد شده است. همچنین محققین یک فرایند سه‌مرحله‌ای با سه مشخصه‌ی کیفی ترکیبی نرمال، گاما و پواسون در هر مرحله در نظر گرفتند^[۱۲] و مقادیر انحراف از باقی‌مانده‌ها را برای هر یک از مشخصه‌های کیفی توسط نمودارهای کنترل جداگانه پایش کردند. در مطالعات بعدی^[۱۳] فرایندی با دو مرحله‌ی وابسته در نظر گرفته شد که در آن مشخصه‌های کیفی مراحل به‌ترتیب از توزیع‌های برنولی و پواسون پیروی می‌کنند؛ یک نمودار کنترلی جدید نیز برای پایش فرایند براساس توزیع عمومی پواسون پیشنهاد شد. یانگ و یه^[۱۴] استفاده از نمودار انتخاب عامل انحراف را برای پایش یک فرایند دومرحله‌ای با مشخصه‌های کیفی دوجمله‌ای در هر مرحله پیشنهاد کردند. آنها داده‌های زوجی را فقط در پایان مرحله‌ی دوم قابل دست‌یابی در نظر گرفتند و همچنین فرض کردند که داده‌های زوجی از توزیع دو متغیره‌ی برنولی پیروی می‌کنند. بدین ترتیب ابتدا متغیر خروجی را به‌وسیله‌ی تغییر متغیر آرک‌سینوس به توزیع نرمال تقریب زدند و سپس، رابطه‌ی بین دو مشخصه‌ی کیفی را به‌صورت خطی ساده بیان کردند. سپس از نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف برای پایش باقی‌مانده‌ی انحراف بهره بردند.

گاهی در عمل فرایندهایی وجود دارد که دو مرحله‌ی به هم وابسته با مشخصه‌ی

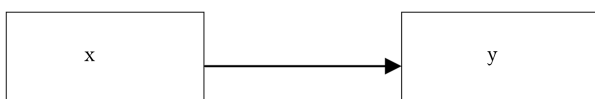
کیفی دوجمله‌ای در مرحله‌ی دوم دارند. به‌طور مثال در یک فرایند دریل‌کاری، که در مرحله‌ی قبل از آن عمل پوشش روی سطح قطعه انجام می‌گیرد، مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول ضخامت پوشش است که از توزیع نرمال پیروی می‌کند. از سوی دیگر، ضخامت لایه‌ی پوشش ممکن است بر تعداد نواقص دریل‌کاری تأثیرگذار باشد.

در نوشتار حاضر یک نمودار کنترل براساس الگوهای خطی تعمیم‌یافته به‌منظور پایش فرایندهای دومرحله‌ای با مشخصه‌ی کیفی دوجمله‌ای در مرحله‌ی دوم پیشنهاد شده است. در روش پیشنهادی، به‌منظور پایش متغیر دوجمله‌ای در مرحله‌ی دوم، یک نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین مشخصه‌های کیفی در دو مرحله طراحی شده است. به‌منظور برقراری رابطه بین مشخصه‌های کیفی مرحله‌ی اول (پیش‌بینی کننده) و مرحله‌ی دوم (خروجی)، از تابع رابط Logit که برای متغیر خروجی دوجمله‌ای مناسب است^[۱۵] استفاده شده است. تحقیق حاضر در فاز ۲ نمودارهای کنترل صورت می‌گیرد. بنابراین، فرض می‌کنیم پارامترهای مدل براساس تجزیه و تحلیل فاز ۱ مشخص‌اند. عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و براساس معیار متوسط طول دنباله ارزیابی شده است. نتایج حاصله نشان‌گر عملکرد بهتر نمودار کنترل پیشنهادی در مقایسه با نمودار کنترل np به‌عنوان روش موجود است. محققین با در نظر گرفتن یک فرایند دومرحله‌ای با مشخصه‌ی کیفی پواسون در مرحله‌ی دوم^[۱۶] برای ارتباط بین مشخصه‌های کیفی مرحله‌ی اول و دوم، تابع رابط جدیدی برای زمانی که مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم دارای توزیع پواسون است پیشنهاد کرده‌اند و آماره‌ی پیشنهادی آن‌ها نیز مقادیر استاندارد باقی‌مانده است. همچنین نمودار پیشنهادی آن‌ها برای پایش آماره‌ی مذکور، دو نمودار شوهارت و EWMA است. آن‌ها برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی، در دو مثال (یکی با مشخصه‌ی کیفی نرمال در مرحله‌ی اول و دیگری با مشخصه‌ی کیفی پواسون در مرحله‌ی اول) روش خود را با روش پیشنهادی اسکینز و همکاران^[۱۷] مقایسه کردند و نشان دادند که روش پیشنهادی عملکرد بسیار بهتری در کشف تغییرات کاهشی و افزایشی دارد.

در ادامه‌ی این نوشتار، بخش دوم به تشریح مسئله اختصاص یافته است. سپس در بخش سوم، الگوهای خطی تعمیم‌یافته به‌عنوان روشی برای محاسبه‌ی مقادیر باقی‌مانده‌ی انحراف در روش پیشنهادی تشریح می‌شود. بخش چهارم به تشریح نمودار کنترلی پیشنهادی برای پایش فرایند دومرحله‌ای اختصاص یافته است. در بخش پنجم، نتایج بررسی عملکرد روش پیشنهادی و مقایسه‌ی آن با نمودار کنترل np ارائه شده است. نتایج و پیشنهادات برای تحقیقات آتی نیز در بخش پایانی بیان شده است.

۲. تشریح مسئله

براساس مثال تشریح شده در مقدمه، فرض کنید که یک فرایند دومرحله‌ای به هم وابسته مطابق شکل ۱ وجود دارد که در آن تغییر در پارامتر میانگین مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول بر مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم اثرگذار است؛ این نکته حاکی از وجود خاصیت آشکاری در این فرایند است. مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول (x) دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص است و مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم (y) نیز از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند؛ پارامتر میانگین آن نیز با استفاده از



شکل ۱. شمای کلی فرایند دومرحله‌ای.

مدل خطی تعمیم یافته به صورت تابع رابط رگرسیونی از مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول به دست می‌آید.

در ادامه، نحوه‌ی برازش مدل خطی تعمیم یافته بر داده‌های در دسترس x و y به منظور تخمین رابطه‌ی رگرسیونی بین این دو مشخصه‌ی کیفی توضیح داده شده است.

$$L(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \quad (4)$$

آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته برای آزمون مورد نظر و یا به طور معادل برای آزمون $p = p_0$: H_0 در مقابل $p \neq p_0$: H_1 هنگامی که $\mu = np$ است، به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \ln[L(y, n, p_1)] - \ln[L(y, n, p_0)] &= \ln \left[\binom{n}{y} p_1^y (1-p_1)^{n-y} \right] \\ &- \ln \left[\binom{n}{y} p_0^y (1-p_0)^{n-y} \right] = y \ln p_1 \\ &+ (n-y) \ln(1-p_1) - y \ln p_0 - (n-y) \ln(1-p_0) \\ &= y \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) + (n-y) \ln \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

حال با جایگذاری $w^{-1}(x^T \beta)$ به جای p_0 و y/n به جای p_1 و سپس ضرب آن در ۲ و بعد گرفتن جذر از آن و ضرب آن در $\text{sign}[y - \mu_0]$ ، آماره‌ی مقادیر باقی‌مانده انحراف (DR) برای متغیر خروجی دوجمله‌ی به دست می‌آید:

$$DR = \text{sign}[y - \mu_0] \left\{ 2 \left[y \ln \left(\frac{\frac{y}{n}}{w^{-1}(x^T \beta)} \right) + (n-y) \ln \left(\frac{1 - \frac{y}{n}}{1 - w^{-1}(x^T \beta)} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

که در آن μ_0 برابر است با $n [w^{-1}(x^T \beta)]$. لازم به ذکر است که در رابطه‌ی ۶ عبارتی که جذر آن محاسبه شده همواره مقداری مثبت است. اثبات این موضوع در پیوست ارائه شده است. در ادامه، حدود کنترل انتخاب عامل انحراف طبق آماره‌ی مقادیر باقی‌مانده انحراف تعیین می‌شود. هنگامی که پایش در فاز ۲ شروع می‌شود، یک نمونه‌ی n تایی از محصولات گرفته می‌شود و تعداد اقلام نامنتجب (y) شمرده می‌شود، سپس آماره‌ی انحراف مقادیر باقی‌مانده (DR) محاسبه و بر نمودار پیشنهادی رسم می‌شود. حدود کنترل برای نمودار پیشنهادی عبارت است از:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_{DR} + L \times \sigma_{DR} \\ CL &= \mu_{DR} \\ LCL &= \mu_{DR} - L \times \sigma_{DR}, \end{aligned} \quad (7)$$

$\mu_{DR} = E(DR)$ و $\sigma_{DR}^2 = \text{Var}(DR)$ به ترتیب میانگین و واریانس جامعه‌ی DR هستند و L نیز ضریب حدود کنترل است.

۵. بررسی عملکرد روش پیشنهادی

در این قسمت ضمن بررسی عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی بر مبنای شاخص ARL آن را با نمودار کنترل سنتی np مقایسه می‌کنیم. نمودار کنترل np مستقیماً برای پایش متغیر خروجی (y) مورد استفاده قرار می‌گیرد، در صورتی که نمودار کنترل پیشنهادی (DR) برای پایش مقادیر انحراف باقی‌مانده یعنی DR پیشنهاد شده است.

۳. الگوی خطی تعمیم یافته

از آنجا که مشخصه‌ی کیفی در مرحله‌ی دوم -- که نقش متغیر خروجی را دارد -- دارای توزیع دوجمله‌ی است، برای تخمین رابطه‌ی بین دو متغیر پاسخ و متغیر مستقل (پیش‌بینی کننده) باید به جای روش حداقل مربعات، از مدل‌های خطی تعمیم یافته استفاده کرد.

مدل‌های خطی تعمیم یافته برای مواقعی که متغیرها از خانواده‌ی توزیع‌های نمایی هستند، کاربرد فراوانی دارد. این خانواده نیز شامل توزیع‌های نرمال، دوجمله‌ی، پواسون، نمایی و گاما است. هر یک از متغیرهای پاسخ که از یکی از توزیع‌های ذکر شده پیروی کند، دارای تابع رابط مخصوص به خود است. این توابع رابط در واقع پارامتر میانگین توزیع متغیرهای پاسخ را به صورتی با متغیرهای ورودی مرتبط می‌کنند. هنگامی که متغیر خروجی از توزیع دوجمله‌ی پیروی می‌کند، یک تابع رابط مخصوص به نام تابع Logit مطابق رابطه‌ی ۱ وجود دارد:

$$w(p) = \log \left(\frac{p}{1-p} \right) \quad (8)$$

که در آن p ، پارامتر توزیع دوجمله‌ی است که مقدار آن بین صفر و ۱ است. حال با مساوی قرار دادن سمت راست رابطه‌ی ۱ با $x^T \beta$ و انجام عملیات ساده روی آن، مقدار p به صورت رابطه‌ی ۲ به دست می‌آید:

$$p = \frac{e^{x^T \beta}}{1 + e^{x^T \beta}}. \quad (9)$$

در روابط بالا، بردار داده‌های مربوط به مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول به صورت $x^T = (1, x_1)$ می‌باشد. β بردار ضرایب رگرسیون GLM است که مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم را به مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول مرتبط می‌سازد و مقادیر آن در فاز ۱ تخمین زده می‌شود و در فاز ۲ معلوم فرض می‌شود. بنابراین میانگین متغیر خروجی دو جمله‌ی $(\mu = np)$ به صورت رابطه‌ی ۳ به دست می‌آید.

$$\mu = n \left(\frac{e^{x^T \beta}}{1 + e^{x^T \beta}} \right). \quad (10)$$

۴. نمودار کنترل پیشنهادی

اسکینرو همکاران^[۱۰] با استفاده از آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته به محاسبه‌ی آماره‌ی مقادیر باقی‌مانده انحراف، برای زمانی که متغیر خروجی به صورت پواسون است، پرداختند. دیگر محققین نیز از همین طریق آماره‌ی مقادیر باقی‌مانده انحراف را برای متغیر خروجی گاما به دست آوردند.^[۹] در نوشتار حاضر نیز از طریق همین آزمون، آماره‌ی مقادیر باقی‌مانده انحراف را برای متغیر خروجی دوجمله‌ی به دست می‌آوریم. به همین منظور و از همین طریق آزمون $\mu = \mu_0$: H_0 را در مقابل

۱.۵. تشریح مثال ۱

در یک سیستم تولیدی، یک فرایند دومرحله‌ای به هم وابسته وجود دارد که هر یک از مراحل آن دارای یک مشخصه‌ی کیفی ویژه است. مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول این فرایند برخورداری از توزیع نرمال، و مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم تبعیت از توزیع دوجمله‌ای است. بنابر خاصیت آبخاری، پارامتر میانگین مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم با استفاده از تابع رابط به مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول مرتبط می‌شود. در این مثال تابع رابط Logit به عنوان تابع رابط فرایند در نظر گرفته شده است. نمودار کنترلی پیشنهادی در این شرایط، نمودار انتخاب عامل انحراف است. در نمودارهای انتخاب عامل انحراف مشخصه‌ی کیفی مورد پایش (مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم) به گونه‌ی از متغیرهای ورودی فرایند (مقادیر مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول) مستقل می‌شوند تا تصمیم‌گیری در هنگام وجود انحرافات با دلیل بهینه شود.

در مثال مورد نظر فرض بر آن است که متغیر ورودی (x) دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس به ترتیب ۲ و ۱ است. متغیر خروجی نیز دارای توزیع دوجمله‌ای با تعداد آزمایشات (n) برابر با ۲۰ است. پارامتر p (احتمال عدم انطباق) متغیر خروجی نیز به وسیله‌ی رابطه‌ی ۳ به دست می‌آید. لازم به ذکر است که پارامترهای رگرسیونی یعنی β_0 و β_1 نیز به ترتیب برابر با -1 و -0.75 فرض شده‌اند. وقتی مرحله‌ی دوم فرایند خارج از کنترل است، فرض می‌شود که $\delta \pm \beta'_0 = \beta'_1$ و $\delta \pm \beta'_0 = \beta'_1$ ($\delta, \lambda \neq 0$). به عبارت دیگر در این مواقع احتمال عدم انطباق چنین محاسبه می‌شود:

$$p = \frac{e^{(\beta'_0 + \beta'_1 x)}}{1 + e^{(\beta'_0 + \beta'_1 x)}} \quad (8)$$

با توجه به این که توزیع آماری DR مشخص نیست و محاسبه‌ی تابع چگالی احتمال آن نیز کار پیچیده‌ی است، لذا محاسبه‌ی میانگین و واریانس آماری DR نیز با استفاده از روش تحلیل ریاضی امکان‌پذیر نیست. بنابراین برای محاسبه‌ی مقدار میانگین و واریانس آماری از شبیه‌سازی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در کاربردهای عملی، مقادیر میانگین و واریانس آماری DR با استفاده از مطالعات فاز ۱ و براساس داده‌های تاریخی تخمین زده می‌شود. شبیه‌سازی در نرم افزار متلب به ترتیب زیر انجام می‌شود:

- ابتدا یک مشاهده برای متغیر ورودی نرمال (x) تولید می‌شود.
- سپس پارامتر احتمال عدم انطباق متغیر خروجی محاسبه می‌شود.
- متغیر خروجی با استفاده از توزیع دوجمله‌ی تولید می‌شود.
- سپس آماری DR با استفاده از رابطه‌ی ۶ به دست می‌آید.
- این فرایند ۱۰۰۰۰ بار تکرار می‌شود و میانگین و واریانس DR تخمین زده می‌شود.

-- سپس ضریب حدود کنترل (L) برای رسیدن به ARL مورد نظر تعیین می‌شود و حدود کنترل رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود.

-- شبیه‌سازی با ۱۰۰۰۰ بار تکرار انجام می‌شود و عملکرد روش پیشنهادی براساس سه نوع تغییر زیر در پارامترها بررسی می‌شود.

- ایجاد تغییر در میانگین متغیر خروجی به این صورت که براساس آن $\beta_0 \pm \delta$ تغییر یابد؛
- ایجاد تغییر در میانگین متغیر خروجی به این صورت که براساس آن $\beta_1 \pm \lambda$ تغییر یابد؛

- ایجاد تغییر افزایشی و کاهششی در میانگین متغیر ورودی (μ_0).

لازم به ذکر است که همین فرایند شبیه‌سازی برای تخمین پارامترها و حدود نمودار کنترل np انجام می‌شود، تنها تفاوت شبیه‌سازی بین دو روش این است که نمودار کنترل پیشنهادی برای پایش مقادیر DR مورد استفاده قرار می‌گیرد، در صورتی که نمودار کنترل np برای پایش مستقیم متغیر خروجی (y) به کار گرفته می‌شود. در نهایت نیز عملکرد دو روش با یکدیگر مقایسه می‌شود.

۲.۵. مقایسه‌ی عملکرد دو روش به وسیله‌ی شاخص متوسط طول دنباله

برای مقایسه‌ی عملکرد روش پیشنهادی با نمودار کنترل np ، حدود کنترل دو روش به گونه‌ی تعیین می‌شود که متوسط طول دنباله تحت کنترل آنها برابر ۱۶۰ شود و عملکرد دو روش براساس معیار متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل مقایسه می‌شود. لازم به ذکر است با توجه به گسسته بودن توزیع دوجمله‌ی نزدیک‌ترین مقدار به ۲۰۰ برابر ۱۶۰ به دست آمده است.

حد بالا و پایین به دست آمده برای نمودار کنترل پیشنهادی (DR) به ترتیب برابر با ۲۷۰۵ و ۲۷۰۹- به دست آمده است، همچنین این حدود برای نمودار کنترل np به ترتیب برابر با ۹ و ۰ تخمین زده شد. بعد از تعیین حدود کنترل آماری پیشنهادی و نمودار np ، سه نوع شیفت به منظور بررسی عملکردشان در نظر گرفته شده، که در ادامه هر یک از آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

۱.۲.۵. شیفت در پارامتر β_0

نتایج شبیه‌سازی بر مبنای شاخص ARL روی نمودار کنترل پیشنهادی (DR) و نمودار کنترل np در زمان تغییرات ایجاد شده در پارامتر β_0 در جدول ۱ نشان داده شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که گرچه عملکرد نمودار پیشنهادی DR در کشف شیفت‌های کوچک مثبت ضعیف‌تر است، در کشف شیفت‌های بزرگ اما قوی‌تر است. همچنین نمودار کنترلی پیشنهادی دارای عملکرد مناسبی در زمان تغییرات کاهششی است، در صورتی که نمودار np عملکرد بسیار ضعیفی از خود نشان می‌دهد و با افزایش تغییرات منفی در پارامتر β_0 ، متوسط طول دنباله (ARL) نیز افزایش می‌یابد که این یک نقص بزرگ در این نمودار است.

۲.۲.۵. شیفت در پارامتر β_1

نتایج شبیه‌سازی روی نمودار کنترل پیشنهادی (DR) و نمودار کنترل np در زمان تغییرات ایجاد شده در پارامتر β_1 در جدول ۲ جمع‌آوری شده است. نتایج حاصل از این شبیه‌سازی نشان می‌دهد که عملکرد نمودار پیشنهادی DR در زمان تغییرات افزایششی و کاهششی بسیار بهتر است، در صورتی که نمودار np عملکرد مناسبی از خود نشان نمی‌دهد. در تغییرات کاهششی، بهبود عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی بهتر نشان داده شده است.

۳.۲.۵. بررسی شیفت‌های همزمان در پارامترهای β_0 و β_1

از آنجا که عملکرد روش‌ها به‌ازای تغییرات مثبت و منفی ممکن است متفاوت باشد، در این قسمت تغییرات همزمان و غیر هم‌جهت در پارامترهای β_0 و β_1 نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. دلیل اعمال این‌گونه تغییرات در پارامترهای رگرسیونی این است که ممکن است تغییرات غیر هم‌جهت در پارامترها باعث خنثی شدن تغییرات شود و در نتیجه انحراف با دلیل موجود در فرایند با استفاده از نمودارهای کنترلی شناسایی نشود. نتایج شبیه‌سازی بر مبنای شاخص ARL روی نمودار کنترل پیشنهادی (DR) و نمودار کنترل np در زمان تغییرات ایجاد شده در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت $\beta_0 \pm \delta$.

$\beta_0 + \delta$				
δ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۱۵۶	۱/۵	۱۵۶	۱/۵
۰/۰۵	۱۳۳/۱	۱/۲	۱۴۰/۱	۱/۴
۰/۱	۱۰۱/۸	۱	۱۱۶/۲	۱/۲
۰/۲۵	۶۱/۱	۰/۵۸	۶۳/۱	۰/۶
۰/۴	۳۶/۱	۰/۳۳	۳۲/۶	۰/۳
۰/۷۵	۱۲/۴	۰/۰۹	۸/۹	۰/۰۹
۱	۶/۷	۰/۰۶	۴/۲	۰/۰۳
۱/۴	۳/۱	۰/۰۲	۱/۸	۰/۰۰۶

$\beta_0 - \delta$				
δ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۱۵۶	۱/۵	۱۵۶	۱/۵
۰/۴	۸۷۹/۸	۸/۸	۱۳۴/۲	۱/۳
۰/۵	> ۱۰۰۰	-	۱۰۸/۸	۱/۰۴
۰/۶	> ۱۰۰۰	-	۸۰/۵	۰/۷۵
۰/۷۵	> ۱۰۰۰	-	۵۶/۵	۰/۴۷
۱	> ۱۰۰۰	-	۳۴/۹	۰/۳
۲/۵	> ۱۰۰۰	-	۸/۶	۰/۰۸
۵	> ۱۰۰۰	-	۵/۷	۰/۰۵

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت همزمان β_0 و β_1 .

$\beta_0 + \xi$ & $\beta_1 - \xi$				
ζ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۱۵۶	۱/۵	۱۵۶	۱/۵
۰/۱	۱۴۱/۴	۱/۲	۱۱۸/۹	۰/۱
۰/۲۵	۷۱/۷	۰/۷	۷۳/۸	۰/۲۵
۰/۴	۳۷/۵	۰/۵	۵۰/۷	۰/۴
۰/۷۵	۱۱/۹	۰/۲۹	۳۰/۸	۰/۷۵
۱	۷/۱	۰/۲۱	۲۳/۶	۱
۱/۵	۳/۹	۰/۱۲	۱۶/۴	۱/۵
۳	۱/۹	۰/۰۹	۱۱/۲	۳

$\beta_0 - \xi$ & $\beta_1 + \xi$				
ζ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۱۵۶	۱/۶	۱۵۶	۱/۶
۰/۱	۱۱۰/۸	۲/۱	۲۱۷/۹	۰/۱
۰/۱۵	۷۶	۲/۵	۲۵۸/۹	۰/۱۵
۰/۲	۴۷/۵	۲/۸	۲۸۲/۲	۰/۲
۰/۳	۲۰/۷	۲/۳	۳۲۷/۵	۰/۳
۰/۵	۵/۲	۱/۸	۱۸۰/۴	۰/۵
۰/۷۵	۲/۵	۰/۳	۲۶/۸	۰/۷۵
۱	۱/۸	۰/۰۶	۶/۵	۱

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت β_1 به $\beta_1 \pm \lambda$.

$\beta_1 + \lambda$				
λ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۱۵۶	۱/۵	۱۵۶	۱/۵
۰/۲۵	۱۵۵/۵	۱/۵	۱۳۴/۳	۱/۳
۰/۵	۱۴۴/۱	۱/۴	۱۱۳/۷	۱/۱
۰/۱	۱۴۰/۲	۱/۳۵	۷۸/۶	۰/۸
۰/۲۵	۸۸/۳	۰/۸	۲۰/۹	۰/۲
۰/۵	۱۵/۳	۰/۱	۳/۶	۰/۰۳
۰/۷۵	۲/۹	۰/۰۲	۱/۷	۰/۰۱۵

$\beta_1 - \lambda$				
λ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۱۵۶	۱/۵	۱۵۶	۱/۵
۰/۵	۱۳۲/۲	۱/۳	۱۳۴/۱	۱/۳
۰/۷۵	۱۲۰/۵	۱/۲	۸۲/۹	۰/۷۸
۱	۱۱۲/۱	۱/۱	۵۵/۹	۰/۵
۱/۵	۸۸/۱	۰/۸	۲۹/۳	۰/۲

نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تنها در یک مورد، عملکرد نمودار پیشنهادی DR ضعیف‌تر است. همچنین نمودار کنترلی np با افزایش تغییرات منفی تا میزان ۰/۵ در پارامتر β_0 و متناظر با آن تغییرات مثبت در پارامتر β_1 ، عملکرد بسیار ضعیفی از خود نشان می‌دهد به طوری که متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل (ARL₁) نیز افزایش می‌یابد که این یک نقص بزرگ در این نمودار است.

۴.۲.۵. بررسی شیفت‌های ایجاد شده در $E(X)$

در جدول ۴ نتایج حاصل از شبیه‌سازی براساس تغییرات ایجاد شده در پارامتر میانگین متغیر ورودی (μ_x) ارائه شده است. هدف اصلی نمودارهای انتخاب عامل انحراف جدا کردن اثر مراحل قبل از مرحله‌ی جاری فرایند است. برای رسیدن به این هدف سعی می‌شود به گونه‌ی اثر مشخصه‌های کیفی مراحل قبل از مشخصه‌های کیفی مرحله‌ی آخر حذف شود؛ و به عبارت دیگر، تغییرات در هر مرحله از فرایند توسط نمودار کنترل همان مرحله شناسایی شود. این موضوع کمک می‌کند که اگر نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف که برای پایش مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم طراحی شده هشدار دهد، اطمینان حاصل شود که انحراف با دلیل قطعاً در مرحله‌ی دوم صورت گرفته است و مشکل مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول روی نتیجه نمودار کنترل در مرحله‌ی دوم تأثیری ندارد. در نمودار پیشنهادی محققین^[۱۲] نشان داده شده است که با تغییر پارامترهای هر مرحله تغییراتی در متوسط طول دنباله مراحل بعدی ایجاد نشده است. در این نوشتار نیز، برای بررسی این که آیا مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم که توسط نمودار

جدول ۴. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت $E(X) \pm \nu$.

$E(X) + \nu$				
ν	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
	دنباله	معیار	دنباله	معیار
۰	۱۵۶	۱,۵	۱۵۶	۱,۵
۰,۱	۲۰۰,۵	۱,۹	۱۶۶	۱,۶
۰,۲۵	۲۴۷,۱	۲,۴	۱۷۴,۹	۱,۷
۰,۵	۴۷۲,۲	۴,۶	۱۸۳,۸	۱,۷۸
۰,۷۵	۸۲۵,۸	۸,۱	۱۹۸,۸	۲
۱	> ۱۰۰۰	-	۲۱۶,۸	۲,۱
۱,۵	> ۱۰۰۰	-	۲۳۰,۵	۲,۲
۲	> ۱۰۰۰	-	۲۳۸,۱	۲,۳

$E(X) - \nu$				
ν	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
	دنباله	معیار	دنباله	معیار
۰	۱۵۶	۱,۵	۱۵۶	۱,۵
۰,۱	۱۳۲,۳	۱,۳	۱۵۹,۷	۱,۶
۰,۳	۹۴,۱	۰,۹	۱۴۴,۶	۱,۴
۰,۵	۶۱,۲	۰,۶	۱۳۶,۷	۱,۳
۰,۷۵	۳۷,۱	۰,۳	۱۲۵,۵	۱,۲
۱	۲۵,۷	۰,۲	۱۱۲,۴	۱,۱
۱,۵	۱۲,۷	۰,۰۹	۱۰۸,۵	۱,۱
۲	۶,۵	۰,۰۵	۱۰۶,۱	۱,۱

جدول ۵. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت $\beta_0 \pm \delta$.

$\beta_0 + \delta$				
δ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
	دنباله	معیار	دنباله	معیار
۰	۱۱۴,۶	۱,۱	۹۶,۹	۰,۹
۰,۱	۶۸,۷	۰,۷	۹۴,۶	۰,۹
۰,۲	۴۳,۳	۰,۴	۷۲	۰,۴۷
۰,۳	۲۹,۳	۰,۲	۵۵,۴	۰,۵
۰,۵	۱۳,۱	۰,۱	۲۲,۲	۰,۱۷
۰,۷۵	۶,۳	۰,۰۵	۹,۱	۰,۰۷
۱	۳,۳	۰,۰۳	۳,۸	۰,۰۳
۱,۲۵	۲,۳	۰,۰۲	۱,۲	۰,۰۱
۱,۵	۱,۷	۰,۰۱	۱,۶	۰,۰۱

$\beta_0 - \delta$				
δ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
	دنباله	معیار	دنباله	معیار
۰	۱۱۴,۶	۱,۱	۹۶,۹	۰,۹
۰,۱	۲۰۵,۳	۲	۷۷	۰,۷
۰,۲۵	۴۵۷,۱	۴,۴	۵۴,۶	۰,۴۷
۰,۵	> ۱۰۰۰	-	۲۶,۶	۰,۲
۰,۷۵	> ۱۰۰۰	-	۱۴,۵	۰,۱
۱,۵	> ۱۰۰۰	-	۴,۵	۰,۰۳
۳	> ۱۰۰۰	-	۱,۶	۰,۰۱

کنترل انتخاب عامل انحراف مورد پایش قرار می‌گیرد مستقل از مرحله‌ی قبل است یا خیر باید شیفتی که در میانگین مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول یعنی x ایجاد می‌شود تأثیر محسوس بر شاخص متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترلی انتخاب عامل انحراف نگذارد. به همین منظور در این بخش شیفت‌های افزایشی و کاهش‌ی در $E(X)$ ایجاد شده است که نتایج آن در جدول ۴ ارائه شده است. این شیفت‌ها به صورتی است که براساس آن $E(X) \pm \nu$ تغییر می‌یابد.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی انجام گرفته در جدول ۴ نشان می‌دهد که هر دو نمودار نسبت به تغییرات ایجاد شده در μ_x واکنش نشان می‌دهند، اما نمودار کنترل پیشنهادی DR خیلی کم‌تر تحت تأثیر این نوع تغییرات قرار می‌گیرد و این نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در امر جداسازی اثر مرحله‌ی اول بر مرحله‌ی دوم فرایند بهتر عمل می‌کند و کم‌تر تحت تأثیر این نوع تغییرات قرار می‌گیرد. در نتیجه بهتر است برای تصمیم‌گیری بهتر در مورد مرحله‌ی دوم فرایند از روش پیشنهادی استفاده شود.

به‌طور کلی و با در نظر گرفتن عملکرد هر دو نمودار در انواع مختلف تغییرات ایجاد شده در پارامترها، مشخص است که عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی در مقایسه با نمودار کنترل np بهینه است و توصیه می‌شود که برای کنترل بهتر این‌گونه از فرایندها از روش پیشنهادی استفاده شود.

۳.۵. تشریح مثال ۲

در این مثال به منظور بررسی بیشتر عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی و تابع رابط $Logit$ ، شرایطی در نظر گرفته شده است که مشخصه‌های کیفی هر دو مرحله از توزیع دوجمله‌ی پیروی می‌نمایند. تعداد آزمایشات (n) برای هر دو مشخصه برابر و در دو سطح ۲۰ و ۸۰ در نظر گرفته شده است. همچنین، پارامتر p در متغیر ورودی (x) در دو سطح ۰,۱ و ۰,۵ مورد بررسی قرار گرفته است. پارامتر p در متغیر خروجی نیز به وسیله‌ی رابطه‌ی ۳ با پارامترهای رگرسیونی β_0 و β_1 به ترتیب برابر با ۱- و ۰,۵- به دست می‌آید. وقتی مرحله‌ی دوم فرایند خارج از کنترل است، فرض می‌شود که $\beta'_1 = \beta_1 \pm \lambda$ و $\beta'_0 = \beta_0 \pm \delta$ (که $\lambda \neq 0$) است و احتمال عدم انطباق به صورت رابطه‌ی ۸ محاسبه می‌شود. در ادامه عملکرد دو نمودار کنترل به‌ازای مقادیر مختلف تغییر در پارامترهای رگرسیونی براساس معیار متوسط طول دنباله مقایسه شده است.

در بخش اول، متغیر مرحله‌ی اول دارای توزیع دوجمله‌ی با اندازه نمونه‌ی ۲۰ و احتمال موفقیت ۰,۵ است. با ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی حدود کنترل روش پیشنهادی برابر ۲,۸۳۸- و ۲,۶۸۸+ به ازای متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل ۹۷ به دست می‌آید. همچنین نزدیک‌ترین متوسط طول دنباله تحت کنترل قابل دست‌یابی در نمودار np برابر ۱۱۴ است که براساس حدود کنترل ۰ و ۹,۹ به دست می‌آید. نتایج حاصل از مقایسه‌ی دو نمودار کنترل براساس متوسط طول دنباله در جداول ۵ تا ۷ ارائه شده است.

چنان که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، علی‌رغم عملکرد بهتر نمودار np در شیفت‌های مثبت در پارامتر β_0 ، عملکرد نمودار پیشنهادی در شیفت‌های منفی به مراتب بهتر است. لازم به ذکر است که متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل در نمودار کنترل np در شیفت‌های منفی بیشتر از حالت تحت کنترل است. این موضوع به‌عنوان نقص این نمودار کنترل محسوب می‌شود، در حالی که در نمودار کنترل پیشنهادی چنین نقصی مشاهده نمی‌شود. همچنین، مطابق نتایج جدول ۶

جدول ۶. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت β_1 به $\lambda \pm \beta_1$.

$\beta_1 + \lambda$					
λ	روش پیشنهادی		نمودار np		انحراف
	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	
	دنباله	دنباله	دنباله	دنباله	معیار
۰	۹۶٫۹	۹۶٫۹	۱٫۱	۱۱۴٫۶	۰
۰٫۰۵	۹۳٫۱	۹۳٫۱	۱٫۱	۱۱۲٫۵	۰٫۰۵
۰٫۱	۹۱٫۲	۹۱٫۲	۱٫۰۱	۱۰۵٫۶	۰٫۱
۰٫۲	۶۳٫۱	۶۳٫۱	۱٫۰۱	۱۰۴٫۹	۰٫۲
۰٫۳	۳۷٫۵	۳۷٫۵	۰٫۷۸	۸۲٫۹	۰٫۳
۰٫۴	۱۹٫۵	۱۹٫۵	۰٫۶	۶۸	۰٫۴
۰٫۶	۷	۷	۰٫۲	۲۳٫۱	۰٫۶
۱	۲٫۶	۲٫۶	۰٫۰۲	۳٫۶	۱
۱٫۵	۱٫۷	۱٫۷	۰٫۰۱	۲	۱٫۵

$\beta_1 - \lambda$					
λ	روش پیشنهادی		نمودار np		انحراف
	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	
	دنباله	دنباله	دنباله	دنباله	معیار
۰	۹۶٫۹	۹۶٫۹	۱٫۱	۱۱۴٫۶	۰
۰٫۰۵	۹۳٫۵	۹۳٫۵	۱٫۲	۱۱۹٫۱	۰٫۰۵
۰٫۱	۸۳٫۶	۸۳٫۶	۱٫۰۷	۱۰۸٫۳	۰٫۱
۰٫۲	۶۴٫۵	۶۴٫۵	۱٫۱	۱۱۹٫۱	۰٫۲
۰٫۳	۵۰٫۲	۵۰٫۲	۱٫۱	۱۱۶٫۴	۰٫۳
۰٫۴	۳۹٫۶	۳۹٫۶	۱٫۱	۱۲۰٫۹	۰٫۴
۰٫۶	۲۶٫۲	۲۶٫۲	۱٫۱	۱۱۹٫۷	۰٫۶
۱	۱۲٫۷	۱۲٫۷	۱٫۱	۱۱۴٫۱	۱
۱٫۵	۶٫۷	۶٫۷	۱٫۱	۱۱۹٫۱	۱٫۵
۳٫۵	۲٫۹	۲٫۹	۱٫۱	۱۱۸٫۲	۳٫۵
۴	۲٫۷	۲٫۷	۱٫۲	۱۲۲٫۵	۴

جدول ۷. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت همزمان β_1 و β_0 .

$\beta_0 + \xi$ & $\beta_1 - \xi$					
ξ	روش پیشنهادی		نمودار np		انحراف
	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	
	دنباله	دنباله	دنباله	دنباله	معیار
۰	۹۶٫۹	۹۶٫۹	۱٫۱	۱۱۴٫۶	۰
۰٫۱	۹۷٫۵۳	۹۷٫۵۳	۰٫۷	۷۱٫۷	۰٫۱
۰٫۲	۸۶٫۸	۸۶٫۸	۰٫۴۴	۴۵٫۶	۰٫۲
۰٫۳	۷۴٫۵	۷۴٫۵	۰٫۳	۳۰٫۴	۰٫۳
۰٫۴	۶۰٫۸	۶۰٫۸	۰٫۲	۲۲٫۳	۰٫۴
۰٫۶	۳۴٫۴	۳۴٫۴	۰٫۱	۱۱٫۴	۰٫۶
۱	۹٫۷	۹٫۷	۰٫۰۴	۴٫۸	۱
۱٫۵	۳٫۸	۳٫۸	۰٫۰۲	۲٫۹	۱٫۵

$\beta_0 - \xi$ & $\beta_1 + \xi$					
ξ	روش پیشنهادی		نمودار np		انحراف
	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	متوسط طول	
	دنباله	دنباله	دنباله	دنباله	معیار
۰	۹۶٫۹	۹۶٫۹	۱٫۱	۱۱۴٫۶	۰
۰٫۱	۸۹٫۹	۸۹٫۹	۱٫۸	۱۸۰٫۹	۰٫۱
۰٫۲	۷۶٫۴	۷۶٫۴	۳	۲۹۷	۰٫۲
۰٫۳	۶۱٫۱	۶۱٫۱	۴٫۶	۴۶۶٫۹	۰٫۳
۰٫۴	۴۲٫۱	۴۲٫۱	۷٫۷	۷۱۷٫۳	۰٫۴
۰٫۶	۲۱	۲۱	-	> ۱۰۰۰	۰٫۶
۱	۷٫۵	۷٫۵	-	> ۱۰۰۰	۱
۱٫۵	۳٫۸	۳٫۸	-	> ۱۰۰۰	۱٫۵

در تمامی تغییرات در پارامتر β_1 نمودار کنترل پیشنهادی بر نمودار np برتری دارد. با توجه به نیمه‌ی بالای جدول ۷، عملکرد روش پیشنهادی در تغییرات همزمان و غیر هم‌جهت در پارامترهای β_0 و β_1 بدتر از نمودار np است ولی همان‌طور که در نیمه‌ی پایین این جدول مشخص است این نمودار (برخلاف روش پیشنهادی) با افزایش تغییرات منفی در پارامتر β_0 و متناظر با آن تغییرات مثبت در پارامتر β_1 ، عملکرد بسیار ضعیفی از خود نشان می‌دهد به طوری که متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل (ARL_1) در این نوع تغییرات روند صعودی و افزایشی دارد که این یک نقص بزرگ در این نمودار است.

در بخش دوم، متغیر مرحله‌ی اول دارای توزیع دو جمله‌ی با اندازه نمونه‌ی ۲۰ و احتمال موفقیت ۰٫۱ است. حدود کنترل روش پیشنهادی برای متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل ۳۱۰ به وسیله‌ی شبیه‌سازی برابر مقادیر ۲۸۸- و ۲۷۲ به دست می‌آید. همچنین حدود کنترل در نمودار np برابر ۰ و ۹۷ به دست می‌آید. در جداول ۸ تا ۱۰ مقایسه‌ی عملکرد دو نمودار کنترل براساس متوسط طول دنباله نشان داده شده است. چنان که ملاحظه می‌شود، در تغییرات کوچک مثبت در پارامتر β_0 عملکرد نمودار کنترل np بهتر است، در حالی که در شیفت‌های بزرگ مثبت عملکرد روش پیشنهادی بهتر است. همچنین همانند بخش قبل، نمودار np در شیفت‌های منفی دارای اشکال است. البته نمودار کنترل پیشنهادی نیز تا حدودی دارای چنین نقصی است ولی این اشکال در روش پیشنهادی در شیفت‌های بزرگ برطرف شده است.

نتایج ارائه شده در جدول ۹ نشان می‌دهد که در روش پیشنهادی تغییرات مثبت در پارامتر β_1 زودتر از نمودار np کشف می‌شود. نتایج تحلیل حساسیت روی پارامتر p در این مثال نشان می‌دهد که به ازای مقدار ۰٫۱ در پارامتر p متغیر مرحله‌ی اول، هر دو نمودار در کشف تغییرات منفی دچار مشکل می‌شوند.

نتایج ارائه شده در جدول ۱۰ نشان می‌دهد که تغییرات همزمان مثبت در β_0 و منفی در β_1 نمودار کنترل np عملکرد بهتری دارد. همچنین روش پیشنهادی در کشف تغییرات کوچک دارای اشکال است که این مشکل با افزایش اندازه تغییرات برطرف شده است. در تغییرات همزمان منفی در β_0 و مثبت در β_1 عملکرد روش پیشنهادی به مراتب بهتر است، به نحوی که نمودار کنترل np در این تغییرات دچار مشکل است.

در بخش سوم، متغیر مرحله‌ی اول دارای توزیع دو جمله‌ی با اندازه نمونه‌ی ۸۰ و احتمال موفقیت ۰٫۱ است. برای متوسط طول دنباله تحت کنترل ۳۳۲ حدود کنترل روش پیشنهادی به وسیله‌ی شبیه‌سازی برابر مقادیر ۳- و ۲٫۶ به دست می‌آید. همچنین حدود کنترل در نمودار np برابر ۰ و ۱۲٫۱ به دست می‌آید. نتایج مقایسه‌ی عملکرد دو نمودار کنترل براساس متوسط طول دنباله در جداول ۱۱ تا ۱۳ ارائه شده است. براین اساس، با افزایش اندازه نمونه نقص موجود در روش پیشنهادی تا حدود زیادی برطرف شده است، به نحوی که در بخش قبلی روش پیشنهادی در کشف تغییرات منفی در پارامتر β_1 ناتوان بود، در حالی که این نقص با افزایش اندازه نمونه تا حدودی بهبود یافته است. لازم به ذکر است که افزایش اندازه نمونه در رفع اشکال نمودار کنترل np تأثیری نداشته است. همچنین در کشف تغییرات مثبت جداگانه در هر دو پارامتر تابع رابط، عملکرد روش پیشنهادی در مقایسه با نمودار np بهتر است.

با توجه به نیمه‌ی بالای جدول ۱۳، عملکرد روش پیشنهادی در تغییرات کوچک همزمان و غیر هم‌جهت در پارامترهای β_0 و β_1 بدتر از نمودار np است ولی در تغییرات بزرگ روش پیشنهادی اصلاح می‌شود و تغییرات را کشف می‌کند؛ این در

جدول ۸. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت $\beta_0 \pm \delta$.

$\beta_0 + \delta$				
δ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۱۰	۳٫۱	۳۱۲٫۴	۳٫۱
۰٫۱	۱۹۴٫۸	۱٫۹	۱۹۹٫۳	۱٫۹
۰٫۲	۱۱۵٫۵	۱٫۱	۱۲۴٫۹	۱٫۲
۰٫۳	۷۵٫۱	۰٫۷	۷۴٫۸	۰٫۶۷
۰٫۵	۳۱٫۷	۰٫۲۸	۲۹٫۷	۰٫۲
۰٫۷۵	۱۴٫۹	۰٫۱	۱۱٫۳	۰٫۰۹
۱	۷٫۵	۰٫۰۷	۴٫۹	۰٫۰۴
۱٫۲۵	۴٫۴	۰٫۰۳	۲٫۸	۰٫۰۲
۱٫۵	۳	۰٫۰۲	۱٫۷	۰٫۰۱

$\beta_0 - \delta$				
δ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۱۰	۳٫۱	۳۱۲٫۴	۳٫۱
۰٫۲۵	> ۱۰۰۰	-	۶۴۳٫۳	۶٫۴
۰٫۵	> ۱۰۰۰	-	۴۱۸٫۵	۴٫۱
۰٫۷۵	< ۱۰۰۰	-	۲۰۷٫۷	۲٫۱
۰٫۹	> ۱۰۰۰	-	۱۳۳٫۶	۱٫۳
۱	> ۱۰۰۰	-	۱۰۰٫۸	۰٫۹۸
۱٫۲۵	> ۱۰۰۰	-	۶۱٫۹	۰٫۵۷
۱٫۵	> ۱۰۰۰	-	۴۰٫۴	۰٫۳
۲	> ۱۰۰۰	-	۲۰٫۸	۰٫۱۷
۳	> ۱۰۰۰	-	۱۱٫۴	۰٫۰۸
۴	> ۱۰۰۰	-	۸٫۷	۰٫۰۷

جدول ۹. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت $\beta_1 \pm \lambda$.

$\beta_1 + \lambda$				
λ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۱۰	۳٫۱	۳۱۲٫۴	۳٫۱
۰٫۰۵	۳۰۱٫۲	۳	۱۹۸٫۷	۱٫۹
۰٫۰۷۵	۲۸۶٫۳	۲٫۸	۱۶۶٫۲	۱٫۶
۰٫۱	۲۶۶٫۳	۲٫۶	۱۲۹٫۹	۱٫۲
۰٫۱۵	۲۶۳٫۱	۲٫۶	۷۵٫۷	۰٫۷
۰٫۲	۲۴۳٫۸	۲٫۴	۴۴٫۸	۰٫۴
۰٫۳	۱۷۵٫۷	۱٫۷	۱۷٫۹	۰٫۱
۰٫۴	۹۷٫۳	۰٫۹	۷٫۴	۰٫۰۷
۰٫۵	۴۳٫۱	۰٫۳۸	۴٫۱	۰٫۰۳
۰٫۶	۱۵٫۲	۰٫۱	۲٫۸	۰٫۰۲
۰٫۸	۳٫۳	۰٫۰۲۷	۱٫۸	۰٫۰۱

$\beta_1 - \lambda$				
λ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۱۰	۳٫۱	۳۱۲٫۴	۳٫۱
۰٫۰۵	۳۲۳٫۵	۳٫۲	۴۷۱٫۸	۴٫۷
۰٫۱	۳۲۱٫۳	۳٫۲	۶۵۶٫۸	۶٫۵
۰٫۲	۳۴۷٫۱	۳٫۴	> ۱۰۰۰	-
۰٫۵	۳۳۷٫۶	۳٫۳	> ۱۰۰۰	-
۱	۳۵۶٫۲	۳٫۵	> ۱۰۰۰	-
۱٫۵	۳۵۶٫۵	۳٫۵	> ۱۰۰۰	-
۵	۳۶۶٫۱	۳٫۶	> ۱۰۰۰	-

جدول ۱۰. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت همزمان β_0 و β_1 .

$\beta_0 + \xi$ & $\beta_1 - \xi$				
ξ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۱۰	۳٫۱	۳۱۲٫۴	۳٫۱
۰٫۱	۱۹۹٫۳	۲	> ۱۰۰۰	-
۰٫۲	۱۲۹٫۶	۱٫۳	> ۱۰۰۰	-
۰٫۳	۹۱٫۴	۰٫۹	> ۱۰۰۰	-
۰٫۴	۵۹٫۴	۰٫۵۵	۶۴۶٫۵	۶٫۴
۰٫۶	۳۳٫۲	۰٫۳	۲۸۰٫۱	۲٫۸
۱	۱۳٫۱	۰٫۱	۹۱٫۱	۰٫۱
۱٫۵	۸٫۸	۰٫۰۸	۴۲٫۵	۴٫۲
۲٫۵	۸٫۲	۰٫۰۷۶	۲۶٫۸	۰٫۲
۴	۵٫۷	۰٫۵	۱۳٫۳	۰٫۱
۵	۵٫۶	۰٫۰۴	۱۰٫۳	۰٫۱

$\beta_0 - \xi$ & $\beta_1 + \xi$				
ξ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۱۰	۳٫۱	۳۱۲٫۴	۳٫۱
۰٫۰۵	۴۰۲٫۲	۳٫۹	۱۴۲٫۹	۱٫۴
۰٫۱	۵۰۴٫۵	۵	۶۶٫۳	۰٫۷
۰٫۲	۷۶۲٫۶	۷٫۵	۱۳٫۴	۰٫۱
۰٫۳	> ۱۰۰۰	-	۳٫۴	۰٫۰۳
۰٫۴	> ۱۰۰۰	-	۱٫۸	۰٫۰۱

جدول ۱۱. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت $\beta_0 \pm \delta$.

$\beta_0 + \delta$				
δ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۲۳٫۷	۳٫۲	۳۲۱٫۷	۳٫۳
۰٫۰۵	۲۷۲٫۶	۲٫۷	۲۷۷٫۳	۲٫۷
۰٫۱	۲۴۱٫۵	۲٫۴	۲۲۳٫۸	۲٫۲
۰٫۲	۱۷۶٫۷	۱٫۷	۱۵۴٫۵	۱٫۵
۰٫۳	۱۳۶٫۸	۱٫۳	۱۰۰٫۹	۱
۰٫۴	۱۰۲٫۳	۰٫۹	۶۳٫۹	۰٫۶
۰٫۵	۸۵٫۱	۰٫۸	۴۲٫۱	۰٫۴
۰٫۷	۶۴٫۳	۰٫۶	۱۹٫۶	۰٫۲
۱	۲۶٫۶	۰٫۲	۷٫۳	۰٫۰۶
۲	۵٫۹	۰٫۰۵	۱٫۸	۰٫۰۱

$\beta_0 - \delta$				
δ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول	انحراف معیار	متوسط طول	انحراف معیار
۰	۳۲۳٫۷	۳٫۲	۳۲۱٫۷	۳٫۳
۰٫۱	۴۳۱٫۱	۴٫۲	۵۰۶٫۴	۵
۰٫۲	۶۳۶٫۵	۶٫۳	۶۱۳٫۷	۶٫۱
۰٫۳	> ۱۰۰۰	-	۶۴۹٫۵	۶٫۵
۰٫۴	> ۱۰۰۰	-	۷۴۱٫۷	۷٫۳
۰٫۵	> ۱۰۰۰	-	۶۱۸٫۶	۶٫۱
۰٫۶	> ۱۰۰۰	-	۴۸۶	۴٫۸
۰٫۷	> ۱۰۰۰	-	۳۶۵٫۴	۳٫۶
۰٫۸	> ۱۰۰۰	-	۲۹۳٫۸	۲٫۸
۱٫۲۵	> ۱۰۰۰	-	۱۰۹٫۳	۱٫۱
۱٫۷۵	> ۱۰۰۰	-	۶۵٫۵	۰٫۶
۲٫۵	> ۱۰۰۰	-	۳۴٫۹	۰٫۳
۶	> ۱۰۰۰	-	۳۰	۰٫۲۶

جدول ۱۲. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت β_1 به $\lambda \pm \beta_1$.

$\beta_1 + \lambda$				
λ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۳۳۱٫۷	۳٫۲	۳۳۱٫۷	۳٫۲
۰٫۰۱	۳۰۷٫۴	۳٫۱	۲۶۶٫۳	۲٫۶
۰٫۰۳	۲۶۲٫۳	۲٫۵	۱۴۹٫۲	۱٫۵
۰٫۰۵	۲۴۲٫۴	۲٫۴	۹۳٫۶	۰٫۹
۰٫۰۷۵	۱۹۰٫۸	۱٫۸۳	۵۲٫۴	۰٫۵
۰٫۱	۱۵۱٫۹	۱٫۴۷	۲۸٫۶	۰٫۲
۰٫۱۵	۱۰۵٫۱	۱	۱۰	۰٫۰۷
۰٫۲	۵۹٫۱	۰٫۵	۳٫۷	۰٫۰۲
۰٫۳	۱۵	۰٫۱	۱٫۳	۰٫۰۱

$\beta_1 - \lambda$				
λ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۳۳۱٫۷	۳٫۲	۳۳۱٫۷	۳٫۲
۰٫۱	۵۲۵٫۸	۵٫۲	۱۸۹٫۷	۱٫۸
۰٫۲	۷۹۰٫۶	۷٫۸	۱۰۱۲٫۸	۱۰
۰٫۳	۱۰۸۴٫۹	۱۰٫۶	۳۹۳٫۸	۳٫۸
۰٫۴	۱۴۱۶٫۳	۱۴٫۱	۲۰۸٫۱	۲٫۱
۰٫۵	۱۵۸۰٫۷	۱۵٫۷	۱۱۷	۱٫۱
۱	> ۱۰۰۰	-	۴۰٫۱	۰٫۳۵
۲٫۵	> ۱۰۰۰	-	۲۹٫۴	۰٫۲۳
۵	> ۱۰۰۰	-	۲۷٫۹	۰٫۲

جدول ۱۳. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت همزمان β_0 و β_1 .

$\beta_0 + \xi$ & $\beta_1 - \xi$				
ζ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۳۳۱٫۷	۳٫۲	۳۳۱٫۷	۳٫۲
۰٫۱	۴۸۱٫۷	۴٫۸	> ۱۰۰۰	-
۰٫۲	۵۲۶٫۶	۵٫۳	> ۱۰۰۰	-
۰٫۳	۵۳۵	۵٫۳	> ۱۰۰۰	-
۰٫۵	۶۲۴٫۱	۶٫۲	۳۴۷	۳٫۷
۰٫۷۵	۶۰۷٫۱	۶٫۱	۱۴۱٫۴	۱٫۴
۱	۶۳۲٫۳	۶٫۳	۷۸٫۶	۰٫۷۶
۱٫۲۵	۶۳۶٫۷	۶٫۳	۵۲٫۸	۰٫۵
۳	۶۲۷٫۳	۶٫۳	۳۱٫۸	۰٫۲۸

$\beta_0 - \xi$ & $\beta_1 + \xi$				
ζ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۳۳۱٫۷	۳٫۲	۳۳۱٫۷	۳٫۲
۰٫۱	۲۲۵٫۶	۲٫۲	۳۹٫۳	۰٫۴
۰٫۱۵	۱۶۵٫۴	۱٫۶	۱۵٫۸	۰٫۱۵
۰٫۲	۱۲۷٫۵	۱٫۳	۶٫۶	۰٫۰۶
۰٫۲۵	۸۵٫۸	۰٫۸	۳٫۱	۰٫۰۲
۰٫۵	۱٫۴	۰٫۰۷	۱٫۰۲	۰٫۰۰۱

جدول ۱۴. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت β_0 به $\delta \pm \beta_0$.

$\beta_0 + \delta$				
δ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۲۵۰٫۵	۲٫۵	۲۵۵٫۱	۲٫۵
۰٫۱	۱۴۸٫۹	۱٫۴۵	۱۵۰٫۲	۱٫۴۵
۰٫۲	۸۰٫۵	۰٫۹	۹۷٫۶	۰٫۹
۰٫۳	۳۷٫۴	۰٫۵۲	۶۰٫۶	۰٫۵۲
۰٫۴	۲۱٫۲	۰٫۴	۴۴٫۳	۰٫۴
۰٫۵	۱۱٫۴	۰٫۲۸	۳۲٫۵	۰٫۲۸
۰٫۷۵	۴	۰٫۱	۱۵٫۵	۰٫۱
۱	۲٫۱	۰٫۰۷	۸٫۸	۰٫۰۷
۱٫۲۵	۱٫۴	۰٫۰۴	۵٫۵	۰٫۰۴

$\beta_0 - \delta$				
δ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۲۵۰٫۵	۲٫۵	۲۵۵٫۱	۲٫۵
۰٫۱	۳۰۰٫۳	۴٫۷	۴۷۴٫۹	۴٫۷
۰٫۲	۲۸۳٫۴	۹٫۷	۹۷۵٫۵	۹٫۷
۰٫۳	۱۴۸٫۷	-	> ۱۰۰۰	-
۰٫۴	۸۶٫۷	-	> ۱۰۰۰	-
۰٫۵	۵۴٫۷	-	> ۱۰۰۰	-
۰٫۷۵	۲۰٫۸	-	> ۱۰۰۰	-
۱	۹٫۷	-	> ۱۰۰۰	-
۱٫۵	۵	-	> ۱۰۰۰	-
۳	۲٫۵	-	> ۱۰۰۰	-

جدول ۱۵. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت β_1 به $\lambda \pm \beta_1$.

$\beta_1 + \lambda$				
λ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۲۵۰٫۵	۲٫۵	۲۵۵٫۱	۲٫۵
۰٫۰۱	۲۶۶٫۳	۳٫۰۷	۳۰۷٫۴	۳٫۰۷
۰٫۰۳	۱۴۹٫۲	۲٫۵	۲۶۲٫۳	۲٫۵
۰٫۰۵	۹۳٫۶	۲٫۴	۲۴۲٫۴	۲٫۴
۰٫۰۷۵	۵۲٫۴	۱٫۸	۱۹۰٫۸	۱٫۸
۰٫۱	۲۸٫۶	۱٫۴	۱۵۱٫۹	۱٫۴
۰٫۱۵	۱۰	۱	۱۰۵٫۱	۱
۰٫۲	۳٫۷	۰٫۵۶	۵۹٫۱	۰٫۵۶
۰٫۳	۱٫۳	۰٫۱	۱۵	۰٫۱

$\beta_1 - \lambda$				
λ	روش پیشنهادی		نمودار np	
	متوسط طول	انحراف	متوسط طول	انحراف
۰	۲۵۰٫۵	۲٫۵	۲۵۵٫۱	۲٫۵
۰٫۱	۲۴۴٫۳	۲٫۷	۲۷۳٫۲	۲٫۷
۰٫۱۵	۱۴۷٫۷	۲٫۶	۲۶۲٫۶	۲٫۶
۰٫۲	۸۴٫۷	۲٫۸	۲۸۲٫۵	۲٫۸
۰٫۲۵	۵۶	۲٫۷	۲۶۸٫۸	۲٫۷
۰٫۳	۳۶٫۲	۲٫۶	۲۶۸٫۵	۲٫۶
۰٫۴	۱۹٫۱	۲٫۷	۲۷۴٫۳	۲٫۷
۰٫۵	۱۰٫۱	۲٫۷۴	۲۸۰٫۳	۲٫۷۴
۱	۳٫۵	۲٫۶	۲۶۵٫۶	۲٫۶
۲	۲٫۵	۲٫۶	۲۶۱٫۵	۲٫۶

جدول ۱۶. نتایج شبیه‌سازی تحت شیفت همزمان β_0 و β_1 .

$\beta_0 + \xi$ & $\beta_1 - \xi$				
ζ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول دنباله	انحراف معیار	متوسط طول دنباله	انحراف معیار
۰	۲۵۵٫۱	۲٫۵	۲۵۰٫۵	۲٫۵
۰٫۱	۱۵۶٫۶	۱٫۵	۳۶۲٫۳	۳٫۶
۰٫۲	۱۱۲٫۷	۱٫۱	۱۹۵٫۱	۲
۰٫۳	۹۲٫۵	۰٫۹	۹۷٫۱	۱
۰٫۴	۷۰٫۶	۰٫۶۷	۵۳٫۱	۰٫۵
۰٫۵	۶۴٫۲	۰٫۵۷	۳۱٫۸	۰٫۲۵
۰٫۷۵	۶۱	۰٫۵۳	۱۲٫۶	۰٫۱
۱	۵۸٫۲	۰٫۵	۷٫۳	۰٫۰۶
۲	۵۶٫۶	۰٫۵۱	۳٫۲	۰٫۰۲

$\beta_0 - \xi$ & $\beta_1 + \xi$				
ζ	نمودار np		روش پیشنهادی	
	متوسط طول دنباله	انحراف معیار	متوسط طول دنباله	انحراف معیار
۰	۲۵۵٫۱	۲٫۵	۲۵۰٫۵	۲٫۵
۰٫۱	۴۲۴٫۳	۴٫۳	۵۱٫۹	۰٫۵
۰٫۲	۸۱۰٫۵	۸٫۱	۱۰٫۷	۰٫۱
۰٫۳	> ۱۰۰۰	-	۳٫۱	۰٫۰۳
۰٫۴	> ۱۰۰۰	-	۱٫۸	۰٫۰۱

می‌آید. همچنین حدود کنترل در نمودار np برابر صفر و $۱۴٫۳$ به دست می‌آید. نتایج مقایسه‌ی عملکرد دو نمودار کنترل براساس متوسط طول دنباله در جداول ۱۴ تا ۱۶ نشان داده شده است. بر اساس نتایج جداول ۱۴ و ۱۵، در تمامی تغییرات در هر دو پارامتر مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم، روش پیشنهادی نسبت به نمودار کنترل np عملکرد بهتری دارد. لازم به ذکر است که نمودار کنترل np همانند بخش اول در کشف تغییرات منفی در پارامتر β_0 دارای اشکال است. همچنین این نقص با افزایش اندازه نمونه برطرف نشده است.

با توجه به قسمت بالای جدول ۱۶، مشخص است که عملکرد روش پیشنهادی در تغییرات کوچک همزمان و غیر هم‌جهت در پارامترهای β_0 و β_1 بدتر از نمودار np است، درحالی‌که در تغییرات بزرگ روش پیشنهادی اصلاح می‌شود و تغییرات را کشف می‌کند ولی نمودار np در تغییرات بزرگ عکس‌العملی از خود نشان نمی‌دهد و با بزرگ شدن تغییرات میزان متوسط طول دنباله در این نمودار ثابت باقی می‌ماند و کاهش نمی‌یابد. همچنین براساس نیمه‌ی پایین جدول، نمودار پیشنهادی با افزایش تغییرات منفی در پارامتر β_0 و متناظر با آن تغییرات مثبت در پارامتر β_1 ، عملکرد بسیار بهتری نسبت به نمودار np از خود نشان می‌دهد و تغییرات اعمالی را به راحتی کشف می‌کند ولی نمودار کنترل np در این‌گونه تغییرات عکس‌العمل نامناسب و بدی از خود نشان می‌دهد و در واقع توانایی کشف تغییرات را ندارد.

۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، یک نمودار کنترل انتخاب عامل انحراف در یک فرایند دومرحله‌ی، در شرایطی که مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم به صورت دوجمله‌ی است، پیشنهاد شد. در این نمودار آماری نمودار کنترل برای پایش مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی دوم حاصل از الگوهای خطی تعمیم‌یافته است. مقایسه‌ی عملکرد نمودار کنترلی پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و نیز مقایسه‌ی متوسط طول دنباله با نمودار کنترل np نشان داد که روش پیشنهادی در کشف شیفت‌های کاهش و افزایش، عملکرد بسیار بهتری دارد و نسبت به تغییرات در میانگین مشخصه‌ی کیفی مرحله‌ی اول از ثبات بیشتری برخوردار است. به‌عنوان تحقیقات آتی، پیشنهاد می‌شود از نمودارهای کنترل با حافظه مانند نمودار کنترل EWMA و CUSUM برای پایش آماری پیشنهادی استفاده شود و عملکرد آن‌ها با نمودارهای کنترل باحافظه‌ی متناظر مقایسه شود.

پانویس

1. Exponentially Weighted Moving Average

منابع (References)

- Wade, M.R. and Woodall, W.H. "A review and analysis of cause-selecting control charts", *Journal of Quality Technology*, **25**(3), pp. 161-169 (1993).
- Zhang, G.X. "A new type of control charts and theory of

حالی است که نمودار np به روند بد خود در کشف تغییرات ادامه می‌دهد. چنان‌که در نیمه‌ی پایین جدول مشاهده می‌شود نمودار پیشنهادی با افزایش تغییرات منفی در پارامتر β_0 و متناظر با آن تغییرات مثبت در پارامتر β_1 ، عملکرد بسیار بهتری نسبت به نمودار np از خود نشان می‌دهد و تغییرات اعمالی را سریع‌تر کشف می‌کند. در بخش چهارم، متغیر مرحله‌ی اول دارای توزیع دوجمله‌ی با اندازه نمونه ۸۰ و احتمال موفقیت $۰٫۰۵$ است. برای متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل ۲۵۰ حدود کنترل روش پیشنهادی به‌وسیله‌ی شبیه‌سازی برابر مقادیر $-۲٫۹$ و $۲٫۷$ به دست

diagnosis with control charts", *World Quality Congress Transactions*, American Society for Quality Control, pp. 175-185 (1984).

- Mandel, B.J. "The regression control chart", *Journal of Quality Technology*, **1**(1), pp. 1-9 (1969).
- Hawkins, D.M. "Multivariate quality control based on regression adjusted variables", *Technometrics*, **33**(1), pp. 61-75 (1991).
- Hawkins, D.M. "Regression adjustment for variables in multivariate quality control", *Journal of Quality Technology*, **25**(3), pp. 170-182 (1993).

6. Lucas, J.M. and Saccucci, M.S. "Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements", *Technometrics*, **32**(1), pp. 1-29 (1990).
7. Hauck, D.J., Runger, G.C. and Montgomery, D.C. "Multivariate statistical process monitoring and diagnosis with grouped regression-adjusted variables", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **28**(2), pp. 309-328 (1999).
8. Niaki, S.T.A. and Davoodi, M. "Designing a multivariate-multistage quality control system using artificial neural networks", *International Journal of Production Research*, **47**(1), pp. 251-271 (2009).
9. Jeankpaporn, D., Montgomery, D.C., Runger, G.C. and Borror, C.M. "Process monitoring for correlated gamma-distributed data using generalized-linear model-based control charts", *Quality and Reliability Engineering International*, **19**(6), pp. 477-491 (2003).
10. Skinner, K.R., Montgomery, D.C. and Runger, G.C. "Process monitoring for multiple count data using generalized-linear model-based control charts", *International Journal of Production Research*, **41**(6), pp. 1167-1180 (2003).
11. Jeankpaporn, D., Montgomery, D.C., Runger, G.C. and Borror, C.M. "Model-based process monitoring using robust generalized linear models", *International Journal of Production Research*, **43**(7), pp. 1337-1354 (2005).
12. Jeankpaporn, D., Borror, C.M., Runger, G.C. and Montgomery, D.C. "Process monitoring for mean shifts for multiple stage processes", *International Journal of Production Research*, **45**(23), pp. 5547-5570 (2007).
13. Aghaie, A., Samimi, Y. and Asadzadeh, Sh. "Monitoring and diagnosing a two-stage production process with attribute characteristics", *Iranian Journal of Operations Research*, **2**(1), pp. 1-16 (2010).
14. Yang, S.F. and Yeh, J.T. "Using cause selecting control charts to monitor dependent process stages with attributes data", *Expert Systems With Applications*, **38**(1), pp. 667-672 (2011).
15. Yeh, A.B., Huwang, L. and Li, Y.M. "Profile monitoring for a binary response", *IIE Transactions on Quality and Reliability Engineering*, **41**(11), pp. 931-941 (2009).
16. Asgari, A., Amiri, A. and Niaki, S.T.A. "A new link function in GLM-based control charts to improve monitoring of two-stage processes with Poisson response", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **7**(9-12), pp. 1243-1256 (2014).

در ادامه با جایگذاری توابع درست‌نمایی، لگاریتم گرفتن و ساده کردن روابط داریم:

$$\ln \left[\binom{n}{y} p_1^y (\lambda - p_1)^{n-y} \right] - \ln \left[\binom{n}{y} p_0^y (\lambda - p_0)^{n-y} \right] \geq 0$$

$$y \ln p_1 + (n - y) \ln (\lambda - p_1) - y \ln p_0 - (n - y) \ln (\lambda - p_0) \geq 0$$

$$y \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) + (n - y) \ln \left(\frac{\lambda - p_1}{\lambda - p_0} \right) \geq 0$$

حال با جایگذاری y/n (تخمین حداکثر درست‌نمایی) به جای p_1 و p_0 (تابع رابط) بجای p_0 داریم:

$$y \ln \left(\frac{\frac{y}{n}}{w^{-1}(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})} \right) + (n - y) \ln \left(\frac{\lambda - \frac{y}{n}}{\lambda - w^{-1}(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})} \right) \geq 0$$

$$y \left[\ln \left(\frac{\frac{y}{n}}{w^{-1}(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})} \right) + (n - y) \ln \left(\frac{\lambda - \frac{y}{n}}{\lambda - w^{-1}(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})} \right) \right] \geq 0$$

در نتیجه مقدار زیر رادیکال همواره عددی مثبت است.

پیوست

اثبات مثبت بودن عبارت زیر رادیکال در رابطه‌ی ۶

تابع $L(y, n, p)$ را به‌عنوان تابع درست‌نمایی برای مشخصه‌ی کیفی خروجی y با تابع توزیع دوجمله‌ی (n, p) در نظر بگیرید. در این صورت اگر مقدار p_1 تخمین حداکثر درست‌نمایی پارامتر p باشد، آنگاه تابع درست‌نمایی $L(y, n, p_1)$ حداکثر مقدار را دارا است و از هر مقدار دیگری مانند $L(y, n, p_0)$ بزرگتر است. بنابراین همواره داریم:

$$L(y, n, p_1) \geq L(y, n, p_0)$$

حال با توجه به این که تابع لگاریتم تابعی اکیدا صعودی است داریم:

$$\ln[L(y, n, p_1)] \geq \ln[L(y, n, p_0)]$$

در نتیجه:

$$\ln[L(y, n, p_1)] - \ln[L(y, n, p_0)] \geq 0$$