مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۵)
دوره‌ی ۱ - ۳۲، شماره‌ی ۱/۱، ص. ۳-۱۲

Original Article

کنترل موجودی تک‌دوره‌یی دو مرحله‌یی تحت شرایط تخفیف و محدودیت بودجه به‌همراه الگوریتم فراابتکاری تجمعی ذرات

آرمین کشاورزی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
سید حمیدرضا پسندیده* (استادیار)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه خوارزمی

در این مطالعه کاربرد مسئله‌ی روزنامه‌فروش[۱] که حالت کلاسیک موجودی تک‌دوره‌یی است در حالت دوسطحی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نوشتار حاضر ضریب استفاده‌ی مواد اولیه برای تولید محصول نهایی متفاوت فرض شده، و برای تهیه‌ی مواد اولیه و تولید محصول نهایی مقدار بودجه‌ی محدودی درنظر گرفته شده است. محصول نهایی و مواد اولیه همگی تحت شرایط تخفیف قرار دارند و در حالی که مواد اولیه و محصول نهایی باید پیش از شروع دوره‌ی فروش آماده باشند، براساس میزان تقاضا فرض می‌شود مقداری از محصول نهایی در حین دوره‌ی فروش تولید خواهد شد. تعیین اندازه مواد اولیه و محصول نهایی که باید در ابتدای دوره‌ی فروش آماده باشند هدف این مسئله است، به‌طوری که متوسط سود نهایی بیشینه شود. پس از فرموله کردن یک مدل ریاضی برای این مسئله یک الگوریتم فراابتکاری براساس الگوریتم بهینه‌سازی تجمعی ذرات[۲] برای حل آن توسعه داده می‌شود و برای شفافیت‌دهی آن نیز یک مثال عددی ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: موجودی تک‌دوره‌یی، مسئله‌ی روزنامه‌فروش، کنترل موجودی، الگوریتم تجمعی ذرات.

armin.keshavarzi@gmail.com
shr_pasandideh@khu.ac.ir

۱. مقدمه

مسئله‌ی روزنامه‌فروش که حالت کلاسیک کنترل موجودی تک‌دوره‌یی است، نکات نظری و عملی بسیاری در خود دارد. از این مسئله می‌توان برای تصمیم‌گیری در میزان سطح موجودی یک محصول ــ به‌طوری که تنها یک فرصت خرید برای مواد اولیه پیش از آغاز دوره‌ی فروش، و تقاضا برای محصول تصادفی باشد ــ بهره گرفت. از یک طرف، موارد خریداری شده‌یی که تا پایان دوره فروش نرفته یا مورد استفاده قرار نگرفته بی‌مصرف می‌شود و فقط می‌توان آنها را با یک قیمت کاهش‌یافته (حراج) فروخت؛ از سوی دیگر، اگر خریدار مقداری کم‌تر از تقاضای پیش‌بینی شده خریداری کند ممکن است با کمبود مواجه شود و درآمدها و اعتبارش کاهش یابد. در این مسئله مهم‌ترین خصیصه‌ی محصول «تک‌دوره‌یی» بودن آن است، و اصلی‌ترین سؤالی که سعی می‌شود به آن پاسخ داده شود این است که چه مقدار خریداری شود تا سود (یا هزینه) بیشینه (یا کمینه) شود؟

در دنیای واقعی، محصولات زیادی را می‌توان دید که دوره‌ی فروش محدودی دارند، و مدل موجودی تک‌دوره‌یی برای چنین محصولاتی غالباً مناسب خواهد بود. این محصولات عموماً طول عمری کوتاه دارند (همانند گوشی‌های همراه و رایانه‌ها)، کالاهایی پرمصرف‌اند (همانند مواد خوراکی و کالاها برای مصارف روزانه که اغلب فاسد شدنی نیز هستند)، و فروش فصلی یا دوره‌ی دارند (همانند پوشاک، و...). برای کمک به تصمیم‌گیران حوزه‌ی مدیریت ظرفیت یا ارزیابی سفارش‌دهی چنین محصولاتی می‌توان از مدل کنترل موجودی تک‌دوره‌یی بهره گرفت. بانک‌های خون، رستوران‌ها، خواربارفروشی‌ها، تولیدکنندگان مواد لبنی و خوراکی، ازجمله موارد کاربرد این مدل هستند. درمورد مسئله‌ی موجودی تک‌دوره‌یی و بسط‌های آن مطالعات جامعی[۱و۲] انجام شده که در اختیار است.

از زمان ارائه‌ی مدل کنترل موجودی تک‌دوره[۳] در اواسط ۱۹۹۰، بسط‌های زیادی برای نزدیک کردن این مدل به دنیای واقعی در ادبیات این موضوع ارائه شده است. در ادبیات، در این زمینه مرور جامعی صورت گرفته[۱] که در آن مبنای مدل‌های بسط داده شده چنین طبقه‌بندی شده است: ۱. نوع تابع هدف، ۲. نوع تقاضا، ۳. محدودیت‌ها، ۴. سیاست‌های تخفیف، ۵. تعداد سطوح سیستم موجودی، ۶. بسط‌های دیگر. در بسط‌های نوع نخست، مدل‌هایی ارائه شده که هدف‌شان بیشینه‌سازی احتمال دست‌یابی به سود مدنظر است.[۲و۴]

در طبقه‌بندی نوع دوم، توزیع تعداد سفارشات از نوع پواسان فرض شده[۵و۶] و اندازه‌یی تصادفی مدنظر است. در مطالعات دیگر توزیع تقاضا به‌صورت کلی و همراه با هزینه‌های کمبود درنظر گرفته شده است.[۲] در برخی مطالعات تقاضا را

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۱۰/۱۹، اصلاحیه ۱۳۹۳/۱۰/۱۲، پذیرش ۱۳۹۳/۱۰/۲۷.

طوری درنظر گرفته‌اند که ابتدا یک سری از مشتریان پیش‌خرید می‌کنند و براساس این پیش‌خرید تقاضای کل پیش‌بینی می‌شود.[۷و۸] برخی از محققین توزیع کلی را با میانگین و واریانس معلوم درنظر گرفته‌اند.[۹] عده‌یی دیگر اثر تبلیغات را بر توزیع تقاضا، در حالی که توزیع تقاضا به‌صورت کلی درنظر گرفته می‌شود، بررسی کرده‌اند.[۱۰]

در طبقه‌بندی نوع سوم، مسئله‌ی تک‌دوره‌یی با محدودیت بودجه درنظر گرفته شده و برای توزیع تقاضای یکنواخت حلی دقیق ارائه شده است.[۱] در برخی از مطالعات این مسئله همراه با محدودیت سطح کمبود تحلیل شده است.[۳] عده‌یی از محققین نیز مسئله‌ی چندمحصولی را با محدودیت بودجه درنظر گرفتند.[۱۱و۱۲] آنان برای مسئله‌ی کنترل موجودی تک‌دوره‌یی همراه با محدودیت بودجه، به‌طوری که بتوان مواد اولیه را پیش‌خرید کرد، از رویکرد پورتفولیو بهره جستند.[۱۳]

گاهی فروشنده برای ترقیب خریدار به خرید سریع‌تر تخفیفاتی درنظر می‌گیرد تا بدین‌ترتیب سطح موجودی خود را کاهش دهد. بنابراین در طبقه‌بندی نوع چهارم بسط‌ها، تخفیف‌های مختلف همراه با مقدار فروش‌های مختلف فرموله شده است.[۱۴و۱۵]

در مسئله‌ی کنترل موجودی تک‌دوره‌یی، تنها یک تصمیم‌گیرنده وجود داشت بدون این که تعاملی بین تأمین‌کننده و خرده‌فروشان باشد.[۱۶] اما در بسط‌های نوع پنجم، مسئله‌ی موجودی تک‌دوره‌یی دوسطحی در حالتی که خرده‌فروش اطلاعات بیشتری نسبت به تأمین‌کننده دارد، مورد بررسی قرارگرفت.[۱۷] مسئله‌ی تک‌دوره‌یی دوسطحی نیز با عدم وجود تعادل اطلاعات در بازار به‌صورت ریاضی مدل‌سازی شد.[۱۸] این مسئله با درنظر گرفتن زنجیره‌ی تأمین N سطحی چنان بررسی شد که متوسط تابع سود بیشینه شود.[۱۹]

نهایتاً در طبقه‌بندی نوع ششم بسط‌ها، مدل موجودی تک‌دوره‌یی چنان مدنظر قرارگرفت که درصدی از محصولات فروخته شده بازگردانده شود،[۲۰] با این فرض که محصولات بازگشتی را بتوان دوباره فروخت مگر آن که خراب باشند. این مسئله با مدلی پویا همراه با افق زمانی ثابت درنظر گرفته شد،[۲۱] با این باورکه مدل مذکور را می‌توان در محیط‌های تولیدی به کار برد. همچنین تأثیرات استراتژی بازگشت بر تصمیمات خرده‌فروشان، به‌منظور تعیین اندازه سفارش بهینه مورد مطالعه قرارگرفته است.[۲۲]

با فرض محدودیت طول عمر یک محصول، مدلی ریاضی برای تعیین مدت چرخه‌ی عمر بهینه‌ی محصول و سطوح کمبود ارائه شد.[۲۳] محققین رویه‌یی برای سیستم تولیدی چندمحصولی با محدودیت‌های مختلف طول عمر، کمبود و ظرفیت ارائه کرده‌اند.[۲۴]

در مطالعه‌یی دیگر،[۱۵] مسئله‌ی موجودی تک‌دوره‌یی چندمحصولی با چندین محدودیت همراه با تخفیفات افزایشی برای خرید محصولات مدنظر قرار گرفت، به‌طوری که محصولات به‌صورت بسته‌یی سفارش داده شود. محدودیت‌های مدنظر عبارت است از سطوح خدمت و ظرفیت انبارکه برای حل مدل ریاضی ارائه شده از الگوریتم ژنتیک استفاده شد. سپس مسئله‌ی موجودی تک‌دوره‌یی چندمحصولی و چندمحدودیتی همراه با دو تابع هدف برای بیشینه‌سازی سود و بیشینه‌سازی نرخ خدمت درنظر گرفته شد،[۲۵] که در آن سیاست‌های تخفیف افزایشی و نیز تخفیف کلی به کار رفته است. مدلی که پیش‌تر محققین ارائه کرده‌بودند[۲۵] این بار با فازی درنظر گرفتن امید ریاضی هزینه‌های کمبود و نگه‌داری، توسعه یافت[۱۴] و روشی ترکیبی از برنامه‌ریزی آرمانی و الگوریتم جست‌وجوی هارمونی برای حل آن پیشنهاد شد.

ویژگی‌های مسئله‌ی کنترل موجودی تک‌دوره‌یی محققین را برآن می‌دارد تا گاه علاوه بر آماده‌سازی محصول نهایی در ابتدای دوره، در صورت نیاز در حین دوره نیز مواد اولیه مهیا باشد.[۱۴] از آنجا که محصولات نهایی فروخته نشده با قیمتی کاهش‌یافته در پایان دوره فروخته می‌شود، شاید اقتصادی‌تر باشد که محصولات کم‌تری در ابتدای دوره آماده شود و در صورت نیاز به تعداد بیشتر، حین دوره از مواد اولیه موجود برای تولید محصول استفاده شود. اگر مواد اولیه‌ی بلااستفاده با قیمتی کاهش‌یافته در پایان دوره به فروش رسد ضرر کم‌تری نسبت به فروختن محصولات نهایی در پایان دوره متحمل می‌شود.[۲۶] بنابراین هدف تعیین سطوح محصول نهایی و نیز مواد اولیه است به‌طوری که سود در حین دوره بیشینه شود. از آنجا که قیمت فروش محصول در پایان دوره به‌صورت حراج بسیار کم است، سیاست‌های تخفیف کلی می‌تواند در ترقیب مشتریان مؤثر واقع شود. براساس این نوع سیاست تخفیف، با خرید بیشتر توسط مشتریان سطح موجودی پایین‌تر می‌آید و محصولات کم‌تری در پایان دوره باقی خواهد ماند. بسیاری از تأمین‌کنندگان نیز برای پایین آوردن سطح موجودی خود سیاست‌های تخفیف کلی را پیشنهاد می‌دهند؛ بنابراین می‌توان برای کاهش هزینه‌های خرید از آنها بهره برد. برای تولید محصول نهایی معمولاً ضرایب استفاده از مواد اولیه متفاوت است و بنابراین مواد اولیه را باید به تعداد متفاوتی براساس ضرایب آنها تهیه کرد. براین اساس در پژوهش حاضر، یک مسئله‌ی تک‌دوره‌یی با توجه به محدودیت بودجه برای خرید مواد اولیه و تولید محصول نهایی در نظر گرفته شده که باید در ابتدای دوره تهیه شوند، اما ممکن است از مواد اولیه برای تولید محصول در حین دوره نیز استفاده شود. تابع هدف این مسئله در جست‌وجوی یافتن بهترین مقدار سفارش‌دهی برای مواد اولیه، با ضرایب استفاده‌ی متفاوت، و تعیین میزان تولید بهینه‌ی محصول نهایی در ابتدای دوره است، به‌طوری که امید ریاضی سود با نظر به سیاست‌های تخفیفی بیشینه شود.

در بخش ۲ مدل‌سازی مسئله شرح داده می‌شود. در بخش ۳ محدودیت‌های مسئله فرموله می‌شود. برای حل مدل الگوریتم تجمعی ذرات پیشنهاد می‌شود که توسعه یافته‌ی این مدل در بخش ۴ تشریح شده است. در بخش ۵ برای تشریح بهتر مدل و روش حل یک مثال عددی ارائه شده، و نهایتاً در بخش ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای مطالعات آتی بیان شده است.

۲. تعریف مسئله

در این پژوهش یک مسئله‌ی تک‌دوره‌یی با محدودیت بودجه، در شرایط تخفیف برای خرید مواد اولیه و نیز برای فروش محصول نهایی مدنظر است. مواد اولیه و محصول نهایی هر دو در ابتدای دوره‌ی فروش آماده می‌شود؛ در صورت نیاز می‌توان محصول را در حین دوره نیز تولید کرد. مشخصات کلی مسئله‌ی مدنظر عبارت است از:

- مواد اولیه و محصول نهایی یک بار و پیش از شروع دوره‌ی فروش آماده می‌شود.
- مواد اولیه‌یی که در حین دوره استفاده نشده با قیمت کاهش‌یافته در پایان دوره‌ی فروش فروخته می‌شود.
- محصولاتی که در حین دوره به فروش نرفته‌اند با یک قیمت کاهش‌یافته‌یی در پایان دوره فروخته می‌شوند.
- بودجه برای خرید مواد اولیه و تولید محصول نهایی محدود است.
- قیمت خرید مواد اولیه با توجه به روش تخفیف کلی توسط تأمین‌کننده تعیین می‌شود، به این صورت که اگر کم‌تر از مقدار q_{jk} از ماده‌ی اولیه kام خریداری

شود، آنگاه باید به‌ازای هر ماده‌ی اولیه‌ی kام، C_{jk} واحد پولی پرداخت شود: $j=1,\dots,m$، $k=1,\dots K$.

- قیمت فروش محصول نهایی از روش تخفیف کلی تبعیت می‌کند، با این فرض که اگر یک مشتری کم‌تر از یک مقدار q'_i، خریداری کند آنگاه باید به‌ازای هر محصول r_i واحد پولی پرداخت کند، $i=1,\dots,n$.
- رابطه‌ی مواد اولیه با محصول تولیدی ۱:۱ نیست؛ به این معنی که به‌ازای تولید هر واحد محصول نهایی به مواد اولیه با مقادیر متفاوت نیاز خواهد بود.
- نسبتی از مشتریان در صورت اتمام محصول نهایی در حین دوره‌ی فروش، در انتظار تولید محصول نهایی می‌مانند (بنابراین در حین دوره برای این دسته از مشتریان تولید وجود دارد).
- میزان تقاضای هر مشتری متغیر تصادفی نمایی با میانگین μ و تعداد مشتریان یک مقدار ثابت از پیش تعیین شده که نمایانگر میانگین تعداد مشتریان است درنظر گرفته می‌شود.

۳. مدل‌سازی مسئله

در این بخش ابتدا پارامترهای مدل گفته می‌شود و سپس روابط هزینه‌ها، درآمد، و در آخر سود برای ساختن مدل نهایی به دست می‌آید.

۱.۳. پارامترها

برای مقادیر $i=1,\dots,n$، $j=1,\dots,m$، $k=1,\dots,K$ و $a=1,\dots,A$ پارامترهای مدل چنین تعریف می‌شود:

۱.۱.۳. پارامترهای معلوم

β_k: ضریب استفاده از ماده‌ی اولیه‌ی kام برای تولید یک واحد محصول نهایی؛

C_{jk}: هزینه‌ی خرید یک واحد ماده‌ی اولیه‌ی kام در نقطه‌ی تخفیف jام؛

C': هزینه‌ی تولید یک واحد محصول نهایی؛

L_k: قیمت کاهش‌یافته برای فروش یک واحد ماده‌ی اولیه‌ی kام باقی‌مانده در پایان دوره؛

L': قیمت کاهش‌یافته برای فروش یک واحد محصول نهایی باقی‌مانده در پایان دوره؛

r_i: قیمت فروش یک واحد محصول نهایی در نقطه‌ی تخفیف iام (قیمت در حین دوره)؛

h_k: هزینه‌ی نگه‌داری یک واحد ماده‌ی اولیه‌ی kام که تا پایان دوره بلااستفاده مانده است؛

h': هزینه‌ی نگه‌داری یک واحد محصول نهایی که تا پایان دوره فروش نرفته است؛

α: نسبتی از تقاضای مشتریان که برای تولید محصول نهایی انتظار می‌کشند (اگر که محصول در حین دوره تمام شود)؛

π: هزینه‌ی کمبود هر واحد محصول نهایی؛

q_{jk}: نقطه‌ی شکست تخفیف کلی jام برای خرید ماده‌ی اولیه‌ی kام؛

q'_i: نقطه‌ی شکست تخفیف کلی iام برای خرید محصول نهایی؛

A: تعداد ورود مشتریان (مقدار ثابتی که نمایانگر میانگین تعداد مشتریان است)؛

D_a: متغیر تصادفی تقاضای هر مشتری (متغیر تصادفی نمایی با میانگین μ)؛

B: کل بودجه‌ی در دسترس برای خرید مواد اولیه و تولید محصول نهایی.

۲.۱.۳. متغیرهای تصمیم

QR_k: مقداری از ماده‌ی اولیه‌ی kام که پیش از شروع دوره‌ی فروش باید خریداری شود؛

QS: مقداری از محصول نهایی که پیش از شروع دوره‌ی فروش باید آماده شود؛

۳.۱.۳. دیگر پارامترها

$f_{D_a}(d_a)$: تابع چگالی احتمال تقاضای هر مشتری ($f_{D_a}(d_a)=\frac{1}{\mu}e^{-\left(\frac{d_a}{\mu}\right)}$)؛

$F(D)$: تابع توزیع تجمعی کل تقاضا؛

U: تابع سود؛

$\overline{U}$: میانگین تابع سود؛

$QR_{\min}$: کم‌ترین مقدار بین مواد اولیه‌ی در دسترس $QR_{\min}=\min\left\{\frac{1}{\beta_k}QR_k\right\}$؛

S_1: تعداد مشتریانی که مقدار خرید انباشته‌شان بیش از QS شده است؛

S_2: تعداد مشتریانی که مقدار خرید انباشته‌شان بیش از QS شده، اما از QS به‌علاوه مقدار محصول تولیدی در حین دوره کم‌تر است؛

S_3: تعداد مشتریانی که مقدار خرید انباشته‌شان بیش از QS به‌علاوه مقدار محصول تولیدی در حین دوره شده است؛

y_{jk}: یک متغیر صفر و ۱، به‌طوری که اگر QR_k کم‌تر از $q_{j,k+1}$ و بیشتر یا برابر q_{jk} باشد، آنگاه قیمت خرید هر واحد ماده اولیه C_{jk} خواهد بود؛

x_i: یک متغیر صفر و ۱، به‌طوری که اگر QS کم‌تر از q'_{i+1} و بیشتر یا برابر q'_i باشد، آنگاه قیمت فروش هر واحد محصول نهایی r_i خواهد بود.

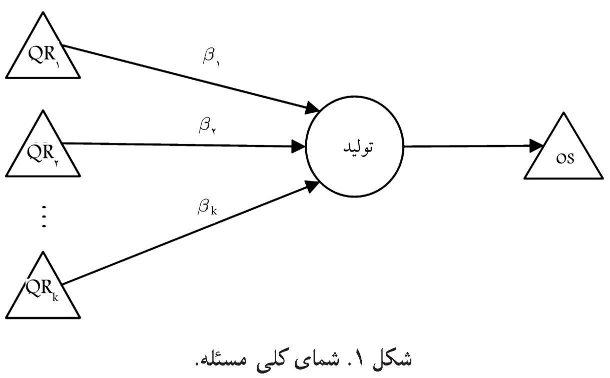
در شکل ۱ سطح موجودی برای مواد اولیه (QR_k)، سطح موجودی برای محصول نهایی QS (شامل محصولات تولیدی در حین دوره نمی‌شود) که در ابتدای دوره آماده می‌شود و نیز فرایند تولید نشان داده شده است.

۲.۳. به دست آوردن هزینه‌ها و درآمد

درآمد در یک مسئله‌ی تک‌دوره‌یی تنها از طریق فروش محصولات نهایی در حین دوره به دست نمی‌آید بلکه فروش محصولات و مواد اولیه‌ی باقی‌مانده با یک قیمت کاهش‌یافته در پایان دوره نیز بر درآمد تأثیر می‌گذارد. هزینه‌های وارده بر این مسئله را می‌توان به چهار مورد تقسیم کرد: ۱. هزینه‌ی خرید مواد اولیه برای تولید محصول نهایی؛ ۲. هزینه‌ی تبدیل مواد اولیه به محصول نهایی؛ ۳. هزینه‌ی کمبود؛ ۴. هزینه‌ی نگه‌داری (هزینه‌ی نگه‌داری در حین دوره‌ی فروش ناچیز فرض می‌شود).

براساس کل تقاضای مشتریان امکان وقوع حالت‌های زیر وجود خواهد داشت:

حالت ۱: تقاضای کل کم‌تر یا مساوی مقدار محصول نهایی آماده شده در ابتدای



شکل ۱. شمای کلی مسئله.

دوره‌ی فروش است، یعنی $\sum_{i=1}^{A} D_a \leq QS$. بر این اساس تابع سود عبارت خواهد بود از:

$$U_1(QR,QS,D)=\sum_{a=1}^{A}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a + \sum_{k=1}^{K} L_k\left(QR_k-\beta_k QS\right) + L'\left(QS-\sum_{a=1}^{A}D_a\right) - \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m} C_{kj}y_{kj}QR_k + C'QS+ \\ \sum_{k=1}^{K} h_k\left(QR_k-\beta_k QS\right)+h'(QS-\sum_{a=1}^{A} D_a)\end{bmatrix} \quad (1)$$

به‌طوری که:

- $U_1\left(QR,QS,D\right)$ تابع سود برای حالت اول است.
- $\sum_{a=1}^{A}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a$ میزان درآمد حاصل از فروش محصول نهایی در حین دوره است؛ قیمت هر واحد محصول براساس میزان خرید مشتری aام تعیین می‌شود (توجه داشته باشید مقدار محصول مورد تقاضا توسط هر مشتری براساس محدودیت‌های تعریف شده، میزان قیمت هر واحد محصول را تعیین می‌کند).
- $\sum_{k=1}^{K} L_k\left(QR_k-\beta_k QS\right)$ عبارت است از درآمد حاصل از فروش مواد اولیه‌ی باقی‌مانده در پایان دوره با قیمت کاهش‌یافته.
- $L'\left(QS-\sum_{a=1}^{A}D_a\right)$ درآمد حاصل از فروش محصولات باقی‌مانده در پایان دوره با قیمت کاهش‌یافته.
- $\sum_{k=1}^{K} C_{kj}y_{kj}QR_k$ هزینه‌ی کل خرید مواد اولیه.
- $C'QS$ هزینه‌ی کل تولید محصول در ابتدای دوره‌ی فروش.
- $\sum_{k=1}^{K} h_k\left(QR_k-\beta_k QS\right)$ هزینه‌ی نگه‌داری تا پایان دوره برای مواد اولیه‌ی باقی‌مانده.
- $h'(QS-\sum_{a=1}^{A} D_a)$ هزینه‌ی نگه‌داری محصولات باقی‌مانده تا پایان دوره.

با ساده‌سازی رابطه‌ی ۱ و مرتب کردن آن براساس $\sum_{a=1}^{A} D_a$، QS و QR_k رابطه‌ی ۲ به دست می‌آید:

$$U_1\left(QR,QS,D\right)=\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i - L' + h'\right)\sum_{a=1}^{A} D_a - \left(\sum_{k=1}^{K}\left(L_k-h_k\right)\beta_k + C' + h' - L'\right)QS + \sum_{k=1}^{K}\left(L_k-\sum_{j=1}^{m} C_{kj}y_{kj} - h_k\right)QR_k \quad (2)$$

حالت دوم: در این حالت، کل تقاضا از مقدار محصول نهایی تولید شده در ابتدای دوره بیشتر است، اما براساس نرخ مشتریانی که برای آماده شدن محصول انتظار می‌کشند، مقدار تقاضای این مشتریان از مقدار مواد اولیه‌ی در دسترس برای تولید در حین دوره کم‌تر است، یعنی: $\sum_{a=1}^{A} D_a > QS$ و $\alpha\left(\sum_{a=1}^{A} D_a - QS\right) \leq$ $(QR_{\min}-\beta_{\min}QS)$، ($\beta_{\min}$ ضریب استفاده مربوط به ماده اولیه‌یی است که به‌عنوان $QR_{\min}$ شناخته شده) بنابراین:

$$QS < \sum_{a=1}^{A} D_a \leq QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}$$

براساس نکات بالا تابع سود برای این حالت عبارت خواهد بود از:

$$U_2(QR,QS,D)=\sum_{a=1}^{S_1}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a + \sum_{a=S_1}^{S_2}\alpha\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a + \sum_{k=1}^{K} L_k\left(QR_k-\beta_k\left(QS+\alpha\left(\sum_{a=1}^{A} D_a - QS\right)\right)\right) - \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{m} C_{kj}y_{kj}QR_k + C'QS+ \\ C'\left(QS+\alpha\left(\sum_{a=1}^{A} D_a - QS\right)\right) \\ +\left(1-\alpha\right)\left(\sum_{i=1}^{A} D_i - QS\right)\pi + \\ \sum_{k=1}^{K} h_k\left(QR_k-\beta_k\left(QS+\alpha\left(\sum_{a=1}^{A} D_a - QS\right)\right)\right)\end{bmatrix} \quad (3)$$

به‌طوری که:

- $U_2\left(QR,QS,D\right)$ تابع سود برای حالت دوم.
- S_1 تعداد مشتریان انباشته‌یی که مقدار خرید تجمعی آنها برابر QS و S_2 تعداد مشتریان انباشته‌یی است که مقدار خرید انباشته‌شان کم‌تر از $QS+\frac{QR_{\min}-QS.\beta_{\min}}{\alpha}$ شده است.
- $\alpha\left(\sum_{a=1}^{A} D_a - QS\right)$ کل تقاضایی است که برای آماده شدن محصول در حین دوره انتظار می‌کشد.
- $\pi\left(\sum_{a=1}^{A} D_i - QS\right)\left(1-\alpha\right)$ میزان تقاضایی است که با کمبود مواجه شده.

با ساده‌سازی رابطه‌ی ۳ خواهیم داشت:

$$U_2(QR,QS,D)=\sum_{a=1}^{S_1}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a + \sum_{a=S_1}^{S_2}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a + \left(\sum_{k=1}^{K}\left(\alpha L_k + h_k\right)\beta_k - C'\alpha - \left(1-\alpha\right)\pi\right)\sum_{a=1}^{A} D_a + \left(\sum_{k=1}^{K}\left(\left(1-\alpha\right)h_k - \left(1+\alpha\right)L_k\right)\beta_k + \left(\alpha-2\right)C' + \left(1-\alpha\right)\pi\right)QS + \sum_{k=1}^{K}\left(L_k - h_k - \sum_{j=1}^{m} C_{kj}y_{kj}\right)QR_k \quad (4)$$

حالت سوم: در این حالت تقاضا از مقدار محصول نهایی بزرگ‌تر بوده و نیز مشتریانی که برای آماده شدن محصول در حین دوره انتظار می‌کشند از مقدار مواد اولیه در دسترس برای تولید محصول بیشتر است، یعنی، $\sum_{i=1}^{A} D_a > QS$، و

$\alpha\left(\sum_{a=1}^{A} D_a - QS\right) > (QR_{\min} - \beta_{\min} QS)$. بنابراین:

$$D > QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} U_3(QR, QS, D) &= \sum_{a=1}^{S_3}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a + \sum_{k=1}^{K} L_k \left(QR_k - QR_{\min}\right) \\ &\quad - \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{K} C_{kj} y_{kj} QR_k + C'\left(QS + \frac{1}{\beta_{\min}} QR_{\min}\right) \\ + \left(\sum\limits_{a=1}^{A} D_a - QS - \frac{1}{\beta_{\min}} QR_{\min}\right)\pi \end{array}\right] \end{aligned}$$

(۵)

به‌طوری که:

- $U_3\left(QR, QS, D\right)$ تابع سود برای حالت سوم است.
- $\frac{1}{\beta_k} QR_{\min}$ میزان تقاضایی از مشتریان در حال انتظار است که می‌توان برآورده ساخت.

با ساده‌سازی و مرتب کردن رابطه‌ی ۵ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U_3(QR, QS, D) = &- \pi \sum_{a=1}^{A} D_a + \sum_{a=1}^{S_3}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i D_a + \left(\pi - C'\right) QS \\ &+ \sum_{k=1}^{K}\left(L_k - \sum_{j=1}^{m} C_{kj} y_{kj}\right) QR_k \\ &+ \left(\frac{\pi - C'}{\beta_{\min}} + \sum_{k=1}^{K} L_k\right) QR_{\min} \end{aligned}$$

(۶)

۳.۳. به دست آوردن تابع سود

در این بخش تابع سود نهایی و میانگین آن به دست می‌آید اما ابتدا با تمرکز بر توزیع کلی تقاضا، رفتار آن مشخص می‌شود. اگر تقاضای کل با D نشان داده شود، آنگاه توزیع احتمال تقاضای کل برابر با مجموع A متغیر تصادفی می‌شود:

$$D \sim \sum_{a=1}^{A} D_a$$

از آنجا که مجموع A متغیر نمایی یکسان با میانگین μ، گاما با مشخصات $(A, \frac{1}{\mu})$ است، بنابراین برای کل تقاضا رابطه‌ی ۷ به دست می‌آید:

$$F\left\{D \le d\right\} = P\left\{D \le d\right\} = G\left(A, \mu\right) = \int_0^d \frac{e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)} z^{A-1}}{\mu^A A!} dz$$

(۷)

برای به دست آوردن تابع سود، با توجه به سه حالت شرح داده شده، می‌توان آن را چنین نوشت:

$$U\left(QR, QS, D\right) = \begin{cases} U_1\left(QR, QS, D\right), & \text{if } D \le QS \\ U_2\left(QR, QS, D\right), & \text{if } QS < D \le QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha} \\ U_3\left(QR, QS, D\right), & \text{if } D > QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha} \end{cases}$$

(۸)

بنابراین متوسط سود $(\overline{U})$ از رابطه‌ی ۹ به دست خواهد آمد:

$$\overline{U} = \int_0^{\infty} U\left(QR, QS, D\right) f_D\left(z\right) dz$$

(۹)

بنابراین:

$$\begin{aligned} \overline{U} = &\int_0^{QS} U_1 f_D\left(z\right) dz + \int_{QS}^{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}} U_2 f_D\left(z\right) dz \\ &+ \int_{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}}^{\infty} U_3 f_D\left(z\right) dz \end{aligned}$$

(۱۰)

با جایگذاری روابط ۲، ۴ و ۶ در معادله‌ی ۱۰، و نیز با توجه به این که:

$$\sum_{a=1}^{S_1} D_a \sim G\left(S_1, \frac{1}{\mu}\right),$$

$$\sum_{a=S_1+1}^{S_2} D_a \sim G\left(S_2 - S_1, \frac{1}{\mu}\right),$$

$$\sum_{a=1}^{S_3} D_a \sim G\left(S_3\right)$$

تابع متوسط سود عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} \overline{U} = &\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i - L' + h'\right) \int_0^{QS} D f_D\left(z\right) dz \\ &- \int_0^{QS} \left(\begin{array}{l} \left(\sum\limits_{k=1}^{K}\left(L_k - h_k\right)\beta_k + C' + h' - L'\right) QS \\ - \sum\limits_{k=1}^{K}\left(L_k - \sum\limits_{j=1}^{m} C_{kj} y_{kj} - h_k\right) QR_k \end{array}\right) f_D(z) dz \\ &+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i}{A!} \int_{QS}^{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}} \frac{e^{\left(-2\frac{z}{\mu}\right)}\left(z\right)^{\left(A-1+S_1-1\right)}}{\left(\mu^{A+S_1}\right) S_1!} dz \\ &+ \frac{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i}{A!} \int_{QS}^{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}} \frac{e^{\left(-2\frac{z}{\mu}\right)}\left(z\right)^{\left(A-1+S_2-S_1-1\right)}}{\mu^{\left(A+S_2-S_1\right)}\left(S_2 - S_1\right)!} dz \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{K}\left(\alpha L_k + h_k\right)\beta_k - C'\alpha - \left(1 - \alpha\right)\pi\right) \\ &\int_{QS}^{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}} D.f_D\left(z\right) dz \\ &+ \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{K}\left(\left(1-\alpha\right)h_k - \left(1+\alpha\right)L_k\right)\beta_k \\ + \left(\alpha - 2\right)C' + \left(1 - \alpha\right)\pi \end{array}\right) QS \\ + \sum\limits_{k=1}^{K}\left(L_k - h_k - \sum\limits_{j=1}^{m} C_{kj} y_{kj}\right) QR_k \end{array}\right] \\ &\int_{QS}^{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}} D.f_D\left(z\right) dz \\ &+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i}{A!} \int_{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}}^{\infty} \frac{e^{-\left(2\frac{z}{\mu}\right)}\left(z\right)^{\left(A-1+S_3-1\right)}}{\mu^{\left(A+S_3\right)} S_3!} dz \\ &\left(\begin{array}{l} \left(\pi - C'\right) QS + \sum\limits_{k=1}^{K}\left(L_k - \sum\limits_{j=1}^{m} C_{kj} y_{kj}\right) QR_k \\ + \left(\frac{\pi - C'}{\beta_{\min}} + \sum\limits_{k=1}^{K} L_k\right) QR_{\min} - \pi \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\int_{QS+\frac{QR_{\min}-QS.\beta_{\min}}{\alpha}}^{\infty} D.f_D(z)\,dz \tag{۱۱}$$

۴.۳. تعیین محدودیت‌ها

برای هزینه‌های خرید مواد اولیه و تولید محصولات بودجه‌ی محدودی دردسترس است:

$$\sum_{k=1}^{K} C_j y_j QR_k + C'QS \le B \tag{۱۲}$$

توجه داشته باشید، از آنجا که تمام محصولات تولید شده در ابتدای دوره باید فروخته شود، و نیز درصورت وجود مشتری در حین دوره تولید نیز وجود خواهد داشت، بنابراین از لحاظ کمبود سرمایه برای تولید در حین دوره مشکلی نخواهد بود. از آنجا که شرایط تخفیف برای خرید مواد اولیه و فروش محصول نهایی وجود دارد:

$$\begin{aligned} &QR_k < q_{kj+1} y_{kj}, \quad \forall\ k=1,...,K\ \&\ j=1,...m \\ &QR_k \ge q_{kj} y_{kj}, \quad \forall\ k=1,...,K\ \&\ j=1,...m \\ &\sum_{j=1}^{m} y_{kj} = 1, \quad \forall\ k=1,...,K \end{aligned} \tag{۱۳}$$

و برای تخفیف در فروش محصولات:

$$\begin{aligned} &D_a < q'_{i+1} x_i, \quad \forall\ i=1,...,n \\ &D_a \ge q'_i x_i, \quad \forall\ i=1,...,n \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{aligned}$$

و نیز با توجه به این که D_a یک متغیر تصادفی است می‌توان با درنظر گرفتن یک ضریب اطمینان این محدودیت را به یک محدودیت احتمالی تبدیل کرد و از طریق آن D_a مطلوب را به دست آورد:

$$\begin{aligned} &P\left\{D_a < q'_{i+1} x_i\right\} \ge p, \quad \forall\ i=1,...,n\ \&\ a=1,...A \\ &P\left\{D_a \ge q'_i x_i\right\} \ge p, \quad \forall\ i=1,...,n\ \&\ a=1,...A \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{aligned}$$

که در آن p سطح اطمینان مطلوب است. بنابراین روابط حاصله عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} &\int_0^{q'_{i+1}x_i} \frac{1}{\mu} e^{-\left(\frac{d_a}{\mu}\right)} dd_a \ge p, \quad \forall\ i=1,...,n\ \&\ a=1,...A \\ &\int_{q'_i x_i}^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\left(\frac{d_a}{\mu}\right)} dd_a \ge p, \quad \forall\ i=1,...,n\ \&\ a=1,...A \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{aligned}$$

با توجه به تابع توزیع تجمعی نمایی و با ln گرفتن از دو طرف رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &q'_{i+1} x_i < -\mu \ln(1-p), \quad \forall\ i=1,...,n \\ &q'_i x_i \ge -\mu \ln(p), \quad \forall\ i=1,...,n \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

در حقیقت از آنجا که احتمال مقدار خرید هر مشتری از توزیع همانندی پیروی می‌کند، احتمال می‌رود همگی از یک تخفیف استفاده خواهند کرد. میزان تولید محصول نهایی باید کم‌تر از مواد اولیه‌ی در دسترس باشد، و از آنجا که مقدار استفاده‌ی محصول از هر ماده‌ی اولیه متفاوت است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\beta_k} QR_k \ge QS + \left(QS + \alpha\left(\sum_{a=1}^{A} D_a - QS\right)\right), \quad \forall\ k=1,...,K$$

با امید ریاضی گرفتن و ساده‌سازی رابطه‌ی فوق در نهایت رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\beta_k} QR_k \ge (2-\alpha) QS + \alpha.A.\mu, \quad \forall\ k=1,...,K \tag{۱۵}$$

برای تعیین S_1، S_2 و S_3 به‌ترتیب می‌توان از محدودیت‌های زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^{S_1} D_a \le QS \\ &\sum_{a=1}^{S_2} D_a \le QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha} \\ &\sum_{a=1}^{S_3} D_a \ge \sum_{a=1}^{A} D_a - \left(QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}\right) \\ &\qquad \Rightarrow D < \left(QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به توزیع گاما و درنظر گرفتن یک سطح اطمینان، محدودیت‌های ۱۶ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\int_0^{QS} \frac{e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)} z^{S_1-1}}{\mu^{S_1} S_1!} dz \ge p \\ &\int_0^{QS+\frac{QR_{\min}-QS.\beta_{\min}}{\alpha}} \frac{e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)} z^{S_2-1}}{\mu^{S_2} S_2!} dz \ge p \\ &\int_0^{QS+\frac{QR_{\min}-QS.\beta_{\min}}{\alpha}} \frac{e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)} z^{A-S_3-1}}{\mu^{S_3} (A-S_3)!} dz \ge p \end{aligned} \tag{۱۶}$$

و در نهایت یک محدودیت برای $QR_{\min}$ باید باشد تا بتوان مقدار آن را تعیین کرد:

$$\frac{1}{\beta_{\min}} QR_{\min} \le \frac{1}{\beta_k} QR_k, \quad \forall\ k=1,...,K \tag{۱۷}$$

۵.۳. مدل

با استفاده از روابط ۱۱ تا ۱۶ در نهایت مدل مسئله‌ی مورد نظر را می‌توان چنین نوشت:

$$\max \overline{U} \tag{۱۸}$$

$$\mathrm{ST}:$$

$$\sum_{k=1}^{K} C_j y_j QR_k + C' QS \leq B \tag{۱۹}$$

$$QR_k < q_{kj+1} y_{kj}, \quad \forall\ k = 1, ..., K \quad \& \quad , j = 1, ...m \tag{۲۰}$$

$$QR_k \geq q_{kj} y_{kj}, \quad \forall\ k = 1, ..., K\ \&\ j = 1, ...m$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{kj} = 1, \quad \forall\ k = 1, ..., K \tag{۲۱}$$

$$q'_{i+1} x_i < -\mu \ln(1 - p), \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

$$q'_i x_i \geq -\mu \ln(p), \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{۲۲}$$

$$\frac{1}{\beta_k} QR_k \geq (2 - \alpha) QS + \alpha.A.\mu, \quad \forall\ k = 1, ..., K \tag{۲۳}$$

$$\int_0^{QS} \frac{e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)} z^{S_1 - 1}}{\mu^{S_1} S_1!} dz \geq p$$

$$\int_0^{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}} \frac{e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)} z^{S_2 - 1}}{\mu^{S_2} S_2!} dz \geq p$$

$$\int_0^{QS + \frac{QR_{\min} - QS.\beta_{\min}}{\alpha}} \frac{e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)} z^{A - S_3 - 1}}{\mu^{S_3} (A - S_3)!} dz \geq p \tag{۲۴}$$

$$\frac{1}{\beta_{\min}} QR_{\min} \leq \frac{1}{\beta_k} QR_k, \quad \forall\ k = 1, ..., K$$

$$QS \geq 0,\ \ QR_k \geq 0,\ \ S_1 \geq 0,\ \ S_2 \geq 0,\ \ S_3 \geq 0,$$

$$x_i = \{0, 1\},\ \ y_{jk} = \{0, 1\},$$

$$\forall\ i = 1, ...n\ \&\ j = 1, ..., m\ \&\ k = 1, ..., K \tag{۲۵}$$

۴. الگوریتم حل

۱.۴. الگوریتم بهینه‌سازی تجمعی ذرات (PSO)

الگوریتم تجمعی ذرات ابتدا با الهام از شبیه‌سازی رفتارهای گروه اجتماعی[۲۷] ارائه شد. این روش اخیراً برای بهینه‌سازی مسائل محدودیت‌دار و بدون محدودیت شهرت یافته و نتایج مناسبی در مسائل کنترل موجودی به‌همراه داشته است.[۲۸] الگوریتم تجمعی ذرات با یک جمعیت اولیه‌ی تصادفی که به‌عنوان جواب‌های اولیه انتخاب شده و آنها را ذرات می‌نامند شروع می‌شود. به هر ذره در هر تکرار یک بردار سرعت تخصیص داده می‌شود که براساس آن می‌تواند در هر تکرار فضای جواب را جست‌وجو کند. این ذرات براساس بردار سرعت در هر تکرار مقداری به سمت بهترین جواب ایجاد شده تا آن زمان، مقداری به سمت بهترین جواب به دست آمده در آن تکرار، و مقداری در جهت حرکت تکرار قبلی خود ــ که به آن اینرسی گفته می‌شود ــ حرکت می‌کنند و بر این اساس فضای جواب را جست‌وجو می‌کنند. الگوریتم تجمعی ذرات بدون هیچ اطلاعاتی درمورد گرادیان تابع هدف کار می‌کند. در هر تکرار تابع هدف با استفاده از مختصات موقعیت ذرات ارزیابی می‌شود و سپس در هر تکرار با توجه به مقدار جواب بهتر و جواب بهینه‌ی کلی، و نیز براساس یک مقدار اینرسی برای حفظ جهت اولیه‌ی ذره، بردار سرعت را تغییر داده و موجب تغییر در مختصات مکانی ذره در هر تکرار می‌شود. درخصوص این الگوریتم بهینه‌سازی پژوهش‌هایی صورت گرفته است.[۲۹-۳۱]

اگر بردار سرعت را با V_t، و مختصات هر ذره را با P_t برای تکرار tام نشان دهند، در تکرار نخست بردار سرعت برابر صفر درنظر گرفته می‌شود و مختصات هر ذره روی فضای جواب برابر با جواب اولیه‌ی تصادفی تولید شده درنظر گرفته می‌شود. پس از تعیین مختصات بهترین ذره براساس برازش تابع هدف، در تکرار بعدی می‌توان بردار سرعت را برای هر ذره براساس رابطه‌ی ۲۵ به‌روزرسانی کرد:

$$V_t = w(V_{t-1}) + c_1.r_1 \left(P^2_{t-1} - P_{t-1}\right) + c_2.r_2 \left(P^1_{t-1} - P_{t-1}\right) \tag{۲۶}$$

که در آن، P^1_{t-1} و P^2_{t-1} به‌ترتیب بهترین جواب به دست آمده در کل و بهترین جواب در هر تکرار است. همچنین c_1، r_1، به‌ترتیب ضریب سوگیری به سمت جواب بهتر در تکرار قبل، و یک عدد تصادفی بین صفر و ۱ هستند. به‌طور مشابه، c_2، r_2 به‌ترتیب ضریب سوگیری به سمت بهترین جواب تا آخرین تکرار، و یک عدد تصادفی بین صفر و ۱ هستند. توجه داشته باشید که اعداد تصادفی به‌منظور جست‌وجوی تصادفی فضای جواب توسط ذرات ضرورت می‌یابند. براساس بردار سرعت به دست آمده می‌توان مختصات جدید هر ذره را برای این تکرار براساس رابطه‌ی ۲۶ به‌دست آورد:

$$P_t = P_{t-1} + V_t \tag{۲۷}$$

به‌طورکلی الگوریتم بهینه‌سازی تجمعی ذرات را می‌توان چنین معرفی کرد:[۳۱]
برای هر ذره گام‌های زیر را تکرار کنید:

۱. سرعت‌ها را به‌روز کنید.
۲. موقعیت‌ها را به‌روز کنید.
۳. مقدار به دست آمده را براساس مقدار بهینه‌ی مدنظر ارزیابی کنید.
۴. بهترین حل و بهترین موقعیت هر ذره را در هر تکرار به‌روز کنید.
۵. هنگامی که تعداد تکرارها به اتمام رسید، یا معیار پایانی به وقوع پیوست، ایست کنید.

۲.۴. الگوریتم توسعه داده شده

الگوریتم تجمعی ذرات که برای حل این مدل توسعه داده شده عبارت است از:

۱. جمعیت اولیه را به‌صورت تصادفی براساس کران‌های بالا و پایین هر متغیر تولید کنید. در اینجا متغیرهای تصمیم عبارت‌اند از: QR_j و QS؛ ابتدا براساس میزان بودجه‌ی در دسترس B، بیشینه مقداری که می‌توان ماده‌ی اولیه خرید را تعیین کنید؛ بر این اساس کران بالای مقدار ماده‌ی اولیه به‌طور ضمنی به دست می‌آید. کران پایین مواد اولیه را برابر صفر درنظر بگیرید و سپس یک عدد تصادفی یکنواخت بین این دو کران تولید کنید. سپس میزان بودجه‌ی باقی‌مانده را تعیین

کنید. با تقسیم این بودجه بر هزینه‌ی تولید، بیشینه مقداری راکه می‌توان تولید کرد، تعیین کنید. اما اگر این بیشینه مقدار از $\frac{QR_{\min}}{\beta_{\min}}$ بیشتر شد، جواب تعیین شده غیرقابل قبول خواهد بود. بنابراین اگر بودجه‌ی باقی‌مانده را با $B_{۲}$ نشان دهیم: مقدار QS از رابطه‌ی $QS = \min\left(\frac{B_{۲}}{C_p}, \frac{QR_{\min}}{\beta_{\min}}\right)$ به دست می‌آید. بنابراین یک مختصات اولیه‌ی تصادفی برای QR_j و QS تعیین شد. سپس براساس این دو متغیر تصمیم دیگر متغیرهای وابسته را با تطابق‌دهی در محدودیت‌ها تعیین کنید.

۲. برای مدیریت میزان تغییری که هر ذره در هرگام پیدا می‌کند، بهتر است بیشینه مقداری برای بردارهای سرعت تعیین شود. این مقدار بیشینه را می‌توان برای هر متغیر تصمیم با تقسیم تفاضل کران بالا و پایین هر متغیر تصمیم بر یک عدد ثابت ایجاد کرد. در اینجا پس از اجراهای فراوان به‌طور تجربی مقدار عددی ۵ برای این دو متغیر تصمیم مناسب به نظر آمد.

۳. بردار سرعت اولیه را برابر با صفر و تابع هدف بهترین را برابر با بدترین حالت ممکن (برای مدل مختص بیشینه‌سازی معادل منفی بینهایت) درنظر بگیرید.

۴. ضرایب سوگیری به سمت بهترین مقدار به دست آمده و ذره‌ی بهتر و ضریب اینرسی را تعیین کنید. براساس پیشنهاد منابع موجود[۲۷] می‌توان ضرایب را چنین تعیین کرد:

$$w = \frac{۲}{(\varphi_{۱} + \varphi_{۲} - ۲ + \sqrt{(\varphi_{۱} + \varphi_{۲})^{۲} - (۴ \times (\varphi_{۱} + \varphi_{۲}))}}$$

$$c_{۱} = w \times \varphi_{۱}$$

$$c_{۱} = w \times \varphi_{۲}$$

با اجراهای متعدد اعداد ثابت $\varphi_{۱}$ و $\varphi_{۲}$ برابر با ۲٫۰۵ درنظر گرفته شد ($\varphi_{۱} = \varphi_{۲} = ۲٫۰۵$). از آنجا که پس از تکرارهای زیاد w به سمت صفر میل می‌کند، به‌صورت تجربی دیده شده که اگر پس از ۵۰۰ تکرار w دوباره به‌صورت بالا باز تعریف شود نتایج بهتری به دست می‌آید.

۵. بردار سرعت را براساس معادله‌ی ۱۸ به دست آورید.

۶. بردار سرعت نهایی را براساس رابطه‌ی زیر تعیین کنید:

$$V_t = \min\{V_t\ ,\ \text{بیشینه مقدار سرعت}\}$$

۷. مکان جدید ذره را براساس معادله‌ی ۱۹ تعیین کنید.

۸. براساس QR_jهای جدید، قیمت تخفیفی هر ماده، یعنی $QR_{\min}$ و $\beta_{\min}$ را حساب کنید.

۹. محدودیت ۱۶ را بررسی کنید. اگر محدودیت برقرار نبود، بردار سرعت این تکرار را معکوس کنید (در منفی یک ضرب کنید).

۱۰. مکان جدید ذرات را براساس بردارهای سرعت تغییرکرده به دست آورید.

۱۱. مجموع سرمایه‌ی مورد نیاز برای هر ذره را به دست آورید.

۱۲. اگر برای یک ذره مقدار سرمایه‌ی مورد نیاز بیشتر از B شد یا محدودیت ۱۵ برقرار نبود، بردار سرعت این تکرار را معکوس کنید، بدون آن که تابع هدف آن را حساب کنید. در غیر این صورت مقدار تابع هدف را برای هر ذره به دست آورید.

۱۳. سود بهتر در این تکرار را در بین سودهای به دست آمده تعیین کنید، و با سود بهتر تکرار قبلی جایگزین کنید.

۱۴. اگر سود بهتر به دست آمده در این تکرار از بهترین سود تا آن زمان نیز بهتر بود، سود بهتر را با سود بهترین جایگزین کنید.

۱۵. گام‌های ۵ تا ۱۴ را تا اتمام تعداد تکرارهای مدنظر دوباره انجام دهید.

۵. مثال عددی

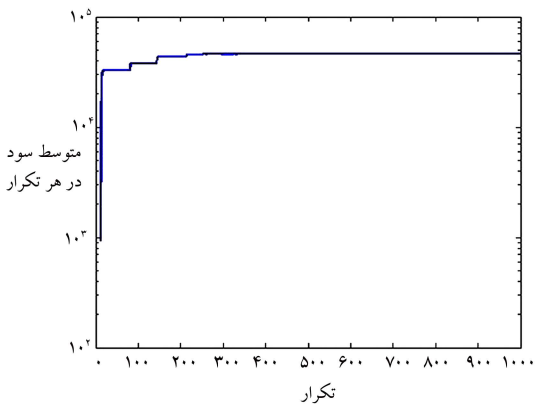
برای یک کالای به‌خصوص، فرض کنید که تقاضای هر مشتری از توزیع نمایی با میانگین ۳ عدد محصول پیروی می‌کند و تعداد مشتریان این محصول در دوره‌ی فروش ثابت و برابر ۴۰ است. این محصول با استفاده از سه ماده‌ی اولیه با ضرایب مصرف به‌ترتیب ۱، ۱ و ۲ تولید می‌شود و هزینه‌ی تولید هر محصول برابر با ۱۵ واحد پولی است. میزان بودجه‌ی در دسترس برای خرید مواد اولیه و تولید محصول ۲۰۰۰۰۰ واحد پولی درنظر گرفته شده است. ۳۰٪ مشتریان برای آماده شدن سفارش خود در حین دوره انتظار می‌کشند. دیگر پارامترهای مسئله در جداول ۱ و ۲ ارائه شده است.

برای حل این مسئله، الگوریتم توسعه داده شده ۵۰ بار اجرا شد و بهترین جواب به دست آمده به‌عنوان حل بهینه درنظر گرفته شد. پاسخ‌های به دست آمده در جدول ۳ ارائه شده است.

الگوریتم توسعه داده شده در هر بار ۱۰۰۰ تکرار را انجام می‌دهد. این رویه ۵۰ بار اجرا شد و سپس بهترین جواب به دست آمده به‌عنوان جواب نهایی درنظر گرفته شد. رویه‌ی حل الگوریتم پس از ۱۰۰۰ تکرار در شکل ۲ نمایش داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود پس از ۵۰۰ تکرار نخست الگوریتم به پاسخ نهایی خود رسیده است. تمام مراحل الگوریتم با استفاده از نرم‌افزار متلب کدنویسی و اجرا شده است. در ضمن برای اعتبارسنجی از روش جست‌وجوی تصادفی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش ارائه شده عملکرد بهتری داشته است.

۶. نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی

در این تحقیق یک مسئله‌ی تک‌دوره‌یی توسعه داده شد،که در آن یک محصول نهایی و چندین ماده‌ی اولیه با ضرایب مصرف متفاوت، همگی تحت شرایط تخفیف کلی، وجود دارد. محصول نهایی ممکن است در حین دوره نیز تولید شود؛ برای خرید مواد اولیه و همچنین تولید محصول نهایی محدودیت بودجه وجود دارد. هدف از تعیین بهینه مقدار خرید از هر ماده‌ی اولیه، تعیین بهترین مقدار برای تولید محصول است



شکل ۲. رویه‌ی حل الگوریتم توسعه داده شده.

جدول ۱. داده‌های مربوط به مواد اولیه.

ماده‌ی اولیه	ضریب مصرف	قیمت هر واحد اگر $QR_i < ۱۰۰$	قیمت هر واحد اگر $QR_i \geq ۱۰۰$	هزینه‌ی نگه‌داری هر واحد	قیمت فروش هر واحد پس از پایان دوره
(۱)	۱	۱۸۰۰	۱۷۰۰	۱۰۰	۲۰۰
(۲)	۱	۱۰	۸	۰	۱۰
(۳)	۲	۵	۵	۰	۰

جدول ۲. داده‌های مربوط به محصول نهایی.

قیمت هر واحد اگر $QS < ۳$	قیمت هر واحد اگر $۳ \leq QS < ۸$	قیمت هر واحد اگر $QS \geq ۸$	هزینه‌ی تولید هر واحد	هزینه‌ی نگه‌داری هر واحد	هزینه‌ی کمبود هر واحد	قیمت فروش در پایان دوره
۲۰۰۰	۱۹۰۰	۱۸۴۰	۱۵	۱۵۰	۲۱۰۰	۳۰۰

جدول ۳. پاسخ‌های نهایی به دست آمده.

میزان خرید از ماده‌ی اولیه (۱)	۱۰۹/۳۹۵
میزان خرید از ماده‌ی اولیه (۲)	۱۰۹/۷۰۳۵
میزان خرید از ماده‌ی اولیه (۳)	۲۱۸/۷۵۳۵
میزان تولید محصول نهایی	۱۰۹/۳۷۶۷
بودجه‌ی مصرفی	۱۸۹۵۸۳/۵۴۸۴
متوسط سود نهایی	۴۶۷۵۹/۷۲۵۹

به‌طوری که متوسط سود نهایی بیشینه شود. مسئله ابتدا به‌صورت ریاضی فرموله شد و سپس یک الگوریتم براساس الگوریتم تجمعی ذرات برای حل آن پیشنهاد شد. در نهایت، یک مثال عددی برای تشریح الگوریتم پیشنهادی نیز ارائه شد. برای توسعه‌ی مدل و تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود:

- علاوه بر محدودیت بودجه، محدودیت‌های دیگری نظیر محدودیت فضای انبار به مسئله اضافه شود.
- مدل این مسئله را می‌توان برای حالتی که چندین محصول نهایی وجود دارد توسعه داد.
- برخی از پارامترهای مدل را می‌توان فازی درنظر گرفت.
- می‌توان مسئله را در حالتی که ورود مشتریان احتمالی است جامع‌تر گردانید.

پانوشت‌ها

1. newsboy problem
2. particle swarm optimization (PSO) algorithm

منابع (References)

1. Khouja, M. "The single-period (news-vendor) problem: Literature review and suggestions for future research", *Omega The International Journal of Management Science*, **27**, pp. 537-553 (1999).
2. Silver, E.A., Pyke, D.F. and Peterson, R., *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, Wiley, USA (1998).
3. Hadley, G., *Whitin TM Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1963).
4. Das, B. and Maiti, M. "An application of bi-level newsboy problem in two substitutable items under capital cost", *Appl Math Comput*, **190**, pp. 410-422 (2007).
5. Dominey, M.J.G. and Hill, R.M. "Performance of approximations for compound poisson distributed demand in the newsboy problem", *Int. J. Prod Econ*, **92**, pp. 145-155 (2004).
6. Grubbström, R.W. "The newsboy problem when customer demand is a compound renewal process", *European Journal of Operational Research*, **203**, pp. 134-142 (2009).
7. Chen, L.-H. and Chen Y.-C. "A newsboy problem with a simple reservation arrangement", *Computers & Industrial Engineering*, **56**, pp. 157-160 (2008).
8. Mostard, J., Teunter, R. and de Koster. R. "Forecasting demand for single-period products: A case study in the apparel industry", *European Journal of Operational Research*, **211**, pp. 139-147 (2011).
9. Mostard, J., Koster, R. and Teunter, R. "The distribution-free newsboy problem with resalable returns", *Int J Prod Econ*, **97**, pp. 329-342 (2005).
10. Lee, Ch.-M. and Hsu, Sh.-L. "The effect of advertising on the distribution-free newsboy problem", *Int. J. Production Economics*, **129**, pp. 217-224 (2011).
11. Lau, A.H.L. and Lau, H.S. "Decision models for single-period products with two ordering opportunities", *Int J Prod Econ*, **55**, pp. 57-70 (1998).

12. Vairaktarakis, G.L. "Robust multi-item newsboy models with a budget constraint", *Int J Prod Econ*, **66**, pp. 213-226 (2000).

13. Zhang, B. and Hua, Z. "A portfolio approach to multi-product newsboy problem with budget constraint", *Computers & Industrial Engineering*, **58**, pp. 759-765 (2010).

14. Taleizadeh, A.A. and Niaki, S.T.A. "A hybrid meta-heuristic method to optimize bi-objective single period newsboy problem with fuzzy cost and incremental discount", *Journal of Industrial Engineering*, Qazvin Islamic Azad University, **3**, pp. 1-13 (2009).

15. Taleizadeh, A.A., Niaki, S.T.A. and Hoseini, V. "The multi-product multi-constraint newsboy problem with incremental discount and batch order", *Asian J Appl Sci*, **1**, pp. 110-122 (2008).

16. Silver, E.A., Pyke, D.F. and Peterson, R., *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, Wiley, USA (1998).

17. Lau, A.H.L. and Lau, H.S. "Some two-echelon style-goods inventory models with asymmetric market information", *Eur J Oper Res*, **134**, pp. 29-42 (2001).

18. Reyes, P.M. "A mathematical example of the two-echelon inventory model with asymmetric market information", *Appl Math Comput*, **162**, pp. 257-264 (2005).

19. Chung, C.-S., Flynn, J. and Stalinski, P. "A single-period inventory placement problem for a supply chain with the expected profit objective", *European Journal of Operational Research*, **178**, pp. 767-781 (2007).

20. Mostard, R. and Teunter, R. "The newsboy problem with resalable returns: A single period model and case study", *Eur J Oper Res*, **169**, pp. 81-96 (2006).

21. Kogan, K. "Scheduling parallel machines by the dynamic newsboy problem", *Comput Oper Res*, **31**, pp. 429-443 (2004).

22. Mantrala, M.K. and Raman, K. "Demand uncertainty and supplier's returns policies for a multi-store style-good retailer", *Eur J Oper Res*, **115**, pp. 270-284 (1999).

23. Sharma, S. "Optimal production policy with shelf life including shortages", *J Oper Res Soc*, **55**, pp. 902-909 (2004).

24. Sharma, S. "A procedure to optimize the constrained multiple-item production system", *J Eng Manuf*, **221**, pp. 467-476 (2007).

25. Taleizadeh, A.A., Niaki, S.T.A. and Hoseini, V. "Optimizing multi-product multi-constraint bi-objective newsboy problem with discount by a hybrid method of goal programming and genetic algorithm", *Journal of Engineering Optimization*, **41**, pp. 437-457 (2009).

26. Pasandideh, S.H.R., Niaki, S.T.A. and Rashidi. R. "A two-echelon single-period inventory control problem under budget constraint", *Int J Adv Manuf Technol*, **56**(9), pp. 1205-1214 (2011).

27. Kennedy, J. and Eberhart, R.C. "Particle swarm optimization", in: *Proc. IEEE Conf. on Neural Networks,* **IV**, Piscataway, NJ, pp. 1942-1948 (1995).

28. Pasandideh, S.H.R., Niaki, S.T.A. and Sharafzadeh, S. "Optimizing a bi-objective multi-product EPQ model with defective items, rework and limited orders: NSGA-II and MOPSO algorithms", *Journal of Manufacturing Systems*, **32**, pp. 764-770 (2013).

29. Pan, Q., Tasgetiren, M.F. and Liang, Y.C. "A discrete particle swarm optimization algorithm for the no-wait flow shop scheduling problem", *Computers & Operations Research*, **35**, pp. 2807-2839 (2008).

30. Marinakis, Y. and Marinaki, M. "A hybrid multi-swarm particle swarm optimization algorithm for the probabilistic traveling salesman problem", *Computers and Operations Research*, **37**, pp. 432-442 (2010).

31. Dong, X., Huang, H. and Chen, P. "An iterated local search algorithm for the permutation flow shop problem with total flow time criterion", *Computers and Operations Research*, **36**, pp. 1664-1669 (2009).