Original Article

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۵)
دوره‌ی ۱ - ۳۲، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۱۱-۳

ارائه‌ی مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله‌ی دیرترین زمان‌ها در شبکه‌های پروژه با مدت زمان انجام غیرقطعی

رضا مروت‌دار (دکترا)
عبداله آقائی* (استاد)
عماد روغنیان (دانشیار)
احمد اصل حداد (استادیار)
مسعود معینی‌پور (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

این نوشتار به بررسی مسئله‌ی تعیین دیرترین زمان‌های وقوع رویدادها، در شبکه‌های با مدت زمان انجام بازه‌یی می‌پردازد. در این زمینه تاکنون تحقیقات زیادی انجام شده و الگوریتم‌هایی برای حل این مسئله ارائه شده، ولی تمامی این الگوریتم‌ها بسیار پیچیده‌اند و برای حل آنها برنامه‌نویسی کامپیوتری ضرورت دارد، اگرچه تاکنون هیچ‌گونه مدل برنامه‌ریزی ریاضی ساده برای حل این مسئله پیشنهاد نشده است. در این نوشتار با استفاده از مفاهیم شبکه‌ی پروژه ابتدا دو مدل برنامه‌ریزی خطی ساده برای تعیین حدود بالا و پایین زودترین زمان‌های وقوع رویدادهای شبکه ارائه شده، و سپس با ترکیب مدل مسئله‌ی طولانی‌ترین مسیر و دوگان آن دو مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی صفر و ۱ برای تعیین حدود بالا و پایین دیرترین زمان‌های وقوع رویدادهای شبکه‌ی پروژه پیشنهاد خواهد شد. همچنین با استفاده از برش اعداد فازی، مسئله‌ی دیرترین زمان‌ها در شبکه‌ی بازه‌یی به شبکه‌ی فازی گسترش خواهد یافت.

واژگان کلیدی: زمان‌بندی پروژه، اعداد بازه‌یی، شبکه‌های پروژه فازی، دیرترین زمان‌ها.

morovatdar@dena.kntu.ac.ir
aaghaie@kntu.ac.ir
e_roghanian@kntu.ac.ir
ahaddad@kntu.ac.ir,
mp.masoud@yahoo.com

۱. مقدمه

تعیین زمان‌های انجام هریک از فعالیت‌های پروژه به گونه‌یی که یک سری از محدودیت‌ها مانند روابط پیش‌نیاز بین فعالیت‌ها رعایت شود، اساس برنامه‌ریزی و زمان‌بندی پروژه را تشکیل می‌دهد. معمولاً زمان‌های انجام فعالیت‌ها در بازه‌یی از زودترین زمان‌ها و دیرترین زمان‌های ممکن قرار می‌گیرد؛ بنابراین برای مدیریت هرچه بهتر پروژه و تعیین بهترین زمان انجام هر فعالیت، نیازمند روش‌هایی برای محاسبه‌ی زودترین و دیرترین زمان‌های شبکه هستیم. روش‌های گوناگونی بدین منظور پیشنهاد شده است: روش مسیر بحرانی (CPM)[1] یکی از چندین روشی است که در سال ۱۹۵۹ پیشنهاد شد. این روش با فرض قطعی بودن مدت زمان انجام فعالیت‌ها، با استفاده از محاسبات پیشرو و پسرو زمان‌بندی پروژه را انجام می‌دهد.[1] اما اولین نکته‌یی که تمام مدیران پروژه بر آن صحه می‌گذارند این است که تعیین مدت زمان قطعی انجام فعالیت‌ها برای یک پروژه غیرممکن است، زیرا با توجه به خاصیت تفضیل فزاینده‌ی پروژه، در ابتدا تیم پروژه دید ناقصی نسبت به فعالیت‌های آینده دارد و با پیشرفت هرچه بیشتر پروژه در طول زمان، اطلاعات تیم پروژه نسبت به فعالیت‌های آتی افزایش می‌یابد. از این رو تقریباً همزمان با روش CPM در سال ۱۹۵۹ روش بازنگری و ارزیابی برنامه(PERT)[2] نیز پیشنهاد شد. در این روش با فرض تبعیت مدت زمان انجام فعالیت‌ها از توزیع احتمال بتا، و با استفاده از سه تخمین خوش‌بینانه، محتمل و بدبینانه، امید ریاضی و واریانس مدت زمان انجام پروژه تعیین می‌شود.[2] هرچند به‌دلیل وجود فرض‌های زیاد و محدودکننده در این روش، تاکنون انتقادات زیادی متوجه روش PERT شده است.

یکی از خصوصیت‌های مهم پروژه، یکتایی آن است.[3] به بیان دیگر تکرار یک پروژه‌ی مشابه بدین معنا نیست که فعالیت‌های پروژه‌ی قبل بدون هیچ‌گونه تغییری در پروژه‌ی جدید نیز تکرار خواهد شد. بنابراین اولین ویژگی استفاده از توزیع‌های احتمالی یعنی تکرار با تردید روبه‌رو است، زیرا هنگامی که برای یک پدیده تکرار وجود نداشته باشد، تخمین چگالی احتمال مناسب نیز برای آن غیر ممکن است. از سوی دیگر به‌دلیل وجود اطلاعات ناقص، ممکن است تمامی برآمدهای محتمل در یک رویداد از ابتدا مشخص نبوده و در نتیجه مجموع احتمال برآمدهای شناسایی شده ۱ نباشد.[4] با توجه به نقصان‌های بیان شده، و با در نظرگرفتن این امرکه مدت‌زمان انجام فعالیت‌ها به‌طور معمول توسط خبرگان تخمین زده شده و عبارات نادقیق در آن بسیار به کار گرفته می‌شود، استفاده از روش‌های فازی به‌جای روش‌های احتمالی توصیه شده است.[5] همچنین ادعا شده است که استفاده از روش‌های فازی در زمان‌بندی پروژه

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۷/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۴/۳/۶، پذیرش ۱۳۹۴/۳/۱۲.

به محاسباتی با حجم و پیچیدگی به‌مراتب کم‌تر از روش‌های احتمالی نیازمند است.[۶]

در ابتدای دهه‌ی هشتاد میلادی با توجه به مطالعات انجام شده درخصوص زمان‌بندی تولید با استفاده از ریاضیات فازی، برای اولین‌بار زمان‌بندی فازی پروژه پیشنهاد شد.[۷] در روش‌های اولیه‌ی زمان‌بندی فازی پروژه، مدت زمان‌های فازی فعالیت‌ها به برش‌های آلفا[۳] تقسیم، و برای مقادیر مختلف برش زمان قطعی انجام کار محاسبه می‌شد. سپس با گردآوری کلیه‌ی اعداد محاسبه شده برای سطوح مختلف آلفا، یک عدد فازی برای نمایش تاریخ انجام هر فعالیت و نیز زمان خاتمه‌ی پروژه به دست می‌آمد.[۷و۸] اما چون این روش به حجم محاسبات بالایی نیاز داشت، پیشنهاد شد که مدت زمان انجام فعالیت‌ها به‌صورت یک عدد فازی (پیوسته) نمایش داده شود و از روابط معمول برای انجام محاسبات شبکه‌ی پروژه استفاده شود، با این تفاوت که عملگرهای عادی جمع، منها، کمینه و بیشینه با عملگرهای توسعه‌یافته‌ی فازی[۴] خود جایگزین شوند.[۹] براین اساس، محاسبات پیشرو به‌خوبی زودترین زمان‌های ممکن برای انجام فعالیت‌ها را محاسبه می‌کند ولی در محاسبات برگشت که از عملگرهای کمینه و منهای توسعه‌یافته استفاده می‌شود جواب‌های نادرستی برای دیرترین زمان‌ها حاصل می‌شود. فرض اولیه‌ی تمامی عملگرهای توسعه‌یافته‌ی فازی بر روی دو عدد، استقلال این دو عدد از یکدیگر است، ولی از آنجا که زمان خاتمه‌ی پروژه با استفاده از مدت زمان انجام فعالیت‌ها محاسبه می‌شود، در محاسبات برگشت فرض استقلال نقض می‌شود و بعضاً باعث به وجود آمدن اعداد منفی برای زمان‌های پروژه می‌شود.

تحقیقات بسیاری برای جایگزینی عملگرهای فازی با عملگرهای اصلاح‌شده انجام شده است[۱۰و۱۱] ولی هیچ‌یک نتوانستند دیرترین زمان‌های پروژه را به‌درستی محاسبه کنند. در اولین تلاش‌ها برای حل صحیح مسئله‌ی دیرترین زمان‌های فازی[۱۲] روشی برای شبکه‌های سری ـ موازی ارائه شد. سپس با اثبات قضایایی در این رابطه، محدوده‌ی حل مسئله بسیار کوچک‌تر شد[۱۳] تا این که روشی برای محاسبه‌ی دیرترین زمان شروع فعالیت‌های پروژه در حالت کلی برای شبکه‌هایی با مقادیر بازه‌یی ارائه‌شد.[۱۴] در همان تحقیق روشی برای توسعه‌ی الگوریتم پیشنهادی به شبکه‌های با مدت زمان انجام فعالیت‌های فازی پیشنهاد شد. روش ارائه‌شده[۱۴] دارای یک سری مشکلات جزئی بود که در تحقیقات بعدی[۱۵] به آنها اشاره شده و مرتفع شد. ولی از آنجا که الگوریتم پیشنهادی پیچیده بود، الگوریتمی ساده‌تر با فضای جست‌وجوی کم‌تر ارائه شد[۱۶] که باز هم پیاده‌سازی آن نیاز به فهم دقیق و برنامه‌نویسی الگوریتم دارد.

در مطالعه‌ی حاضر برای حل مسئله‌ی دیرترین زمان‌های شبکه با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی دو مدل برنامه‌ریزی خطی، یکی برای حد پایین و دیگری برای حد بالای دیرترین زمان‌های وقوع رویدادهای پروژه پیشنهاد خواهد شد. این مدل‌ها در مقایسه با روش‌هایی که تاکنون ارائه‌شده، بسیار قابل فهم‌تر بوده و می‌توان با استفاده از کلیه‌ی نرم‌افزارهای تحقیق در عملیات به‌راحتی جواب‌های مورد نیاز را از آنها استخراج کرد. لازم به ذکر است فرض کلیه‌ی مدل‌های پیشنهادی در این مقاله عدم محدودیت منابع است.

۲. مدل‌های برنامه‌ریزی فازی برای تحلیل شبکه‌ی غیرقطعی

«شبکه‌ی پروژه» نموداری جهت‌دار، هم‌بند و فاقد حلقه است که به‌صورت $G=(V,E)$ نمایش داده می‌شود و در آن، مجموعه‌ی رأس‌های نمودار V یک بردار $n\times 1$ و بیانگر رویدادهای پروژه است؛ مجموعه یال‌های نمودار $E\in V\times V$ یک ماتریس $n\times n$ و نشانگر فعالیت‌های پروژه است. این شبکه را اصطلاحاً «شبکه‌ی برداری (AOA)[۵]» می‌نامند. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض می‌شود رویدادها (گره‌ها) در شبکه چنان شماره‌گذاری شده‌اند که فعالیت‌های (یال‌های) پروژه همیشه از رویداد با شماره کوچک‌تر شروع شده و به رویدادی با شماره بزرگ‌تر منتهی می‌شود. همچنین همیشه یک گره آغازین با اولین شماره در شبکه وجود دارد که گره پایانی هیچ یالی نیست، و یک گره خاتمه با آخرین شماره وجود دارد که گره شروع هیچ یالی نیست. بنابراین ماتریس E یک ماتریس بالامثلثی خواهد بود. در هر شبکه‌ی پروژه به‌ازای هریک از عناصر ماتریس E یک مقدار غیرقطعی (فازی/بازه‌یی) به‌صورت $\tilde{d}_{ij}$ وجود دارد که بیان‌گر مدت زمان غیرقطعی انجام فعالیت$i-j$ (فعالیت بین رویداد i و رویداد j) یا وزن یال $i-j$ است. در این مقاله از اعداد بازه‌یی[۶] به‌شکل $\tilde{d}_{ij}=[\underline{d}_{ij},\overline{d}_{ij}]$ به‌قسمی که $\underline{d}_{ij}\geq 0$ باشد، برای نمایش مدت زمان انجام فعالیت‌ها استفاده می‌شود. البته در بخش ۴ راهکارهایی برای توسعه‌ی مدل‌های پیشنهادی برنامه‌ریزی ریاضی، با در نظر گرفتن اعداد فازی (مانند اعداد ذوزنقه‌یی[۷]) به‌عنوان مدت زمان انجام فعالیت‌ها ارائه خواهد شد.

مسئله‌ی مسیر بحرانی را در حالت قطعی می‌توان به‌شکل معکوس مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر[۸] نمایش داد. به بیان دیگر، برای پیدا کردن مسیر بحرانی در شبکه‌یی از فعالیت‌ها کافی است به دنبال بلندترین مسیر از ابتدا تا انتهای شبکه باشیم، با فرض آن که یک واحد جریان از گره آغازین شبکه تا گره پایانی شبکه وجود دارد. مدل‌سازی فازی خطی برای یافتن مسیر بحرانی در شبکه‌ی فازی پروژه چنین نمایش داده می‌شود:[۱۷]

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & \tilde{T}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{d}_{ij}x_{ij} & & \\
\text{s.t.}\ \ & \sum_{j=1}^{n}x_{1j}=1 & & \\
& \sum_{i=1}^{n}x_{ik}=\sum_{j=1}^{n}x_{kj} & & i=2,\dots,n-1 \\
& \sum_{i=1}^{n}x_{in}=1 & & \\
& x_{ij}\geq 0, & & (i,j)\in E
\end{aligned}
\tag{1}
$$

که در آن x_{ij} متغیر تصمیم و بیانگر وجود جریان در فعالیت $i-j$ است؛ محدودیت‌ها نیز وجود جریان در شبکه را تضمین می‌کنند به‌گونه‌یی که در شبکه‌ی مورد نظر (به‌جز رویداد اول و آخر) هیچ جریانی به وجود نمی‌آید و هیچ جریانی از بین نمی‌رود. بنابراین محدودیت‌های مسئله خود به خود فرض صفر و ۱ بودن متغیرهای x_{ij} را برآورده می‌کنند.

به‌منظور تشریح بیشتر، محدودیت اول که به‌ازای اندیس $i=1$ تعریف شده، نشانگر ایجاد جریان از رویداد (مجازی) اول است. همچنین محدودیت‌های دوم استمرار جریان در شبکه را حفظ کرده و محدودیت سوم به‌ازای اندیس $j=n$ رسیدن جریان به رویداد (مجازی) آخر را نمایش می‌دهد. از آنجا که نمودار جهت‌دار شبکه‌ی پروژه هیچ‌گاه به‌صورت درخت نبوده و این نمودار فقط یک گره شروع و یک گره پایانی دارد، هریک از محدودیت‌های اول و سوم می‌تواند متضمن ایجاد جریان در شبکه باشد. به بیان دیگر اگر بدانیم که یک جریان از گره اول شروع شده و تا آخرین یال‌های متصل به گره آخر نیز ادامه دارد، می‌توانیم مطمئن باشیم که به آخرین گره هم رسیده است، یا این که اگر بدانیم یک جریان به آخرین گره رسیده و از یال‌های متصل به گره اول تا انتها عبورکرده، می‌توانیم مطمئن باشیم که از گره اول نیز عبورکرده است. بنابراین یکی از محدودیت‌های اول یا سوم زاید است و می‌توان آن را به دلخواه حذف کرد و باز هم وجود جریان در شبکه از رویداد اول تا رویداد انتهایی را حفظ کرد. مسیر بحرانی برای مدل فوق عبارت است از فعالیت‌هایی که

در جواب بهینه برای آنها داریم $x^*_{ij} = ۱$، درنتیجه $\tilde{T}$ مدت زمان انجام کل پروژه[۹] به‌صورت یک عدد فازی از جمع مدت زمان‌های فازی انجام فعالیت‌ها روی خط بحرانی به دست می‌آید.

با استفاده از دوگان مدل ۱ می‌توان زمان‌های وقوع رویدادهای شبکه را نیز محاسبه کرد. مدل دوگان این مسئله عبارت است از:[۱۸]

$$\begin{aligned} \min \quad & y_n - y_۱ \\ \text{s.t.} \quad & y_j - y_i \geq \tilde{d}_{ij}, \qquad (i,j) \in E \\ & y_i \quad free\ in\ sign \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن y_i متغیر تصمیم و نشانگر زمان وقوع رویداد iام است. در این مدل هر محدودیت وابسته به یک فعالیت است و روابط پیش‌نیاز بین فعالیت‌ها را نمایش می‌دهد. به بیان دیگر محدودیت $y_j - y_i \geq \tilde{d}_{ij}$ برای فعالیت $i - j$ بیان می‌کند که رویداد jام نمی‌تواند زودتر از زمان $y_i + \tilde{d}_{ij}$ واقع شود.

در مدل فوق با فرض این که $y_۱$ زمان وقوع رویداد آغازین شبکه معادل صفر باشد می‌توان نتیجه گرفت که کلیه‌ی y_iها نیز بزرگ‌تر مساوی صفر هستند. فرض صفر بودن زمان وقوع اولین رویداد، هیچ تأثیری بر عملکرد مدل فوق ندارد زیرا چنانچه $y_۱$ برابر k (مخالف صفر) باشد آنگاه جواب بهینه و متغیرهای بهینه‌ی تصمیم در مدل ۲ با اضافه کردن مقدار k به هریک از مقادیر به دست آمده از مدل ۳ به دست می‌آید. البته چنانچه فرض $y_۱ = ۰$ به‌عنوان یک محدودیت ذکر نشود، سایر محدودیت‌ها برای کمینه کردن مقدار تابع هدف این فرض را نتیجه خواهند داد. بنابراین می‌توان مدل فوق را چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_n \\ \text{s.t.} \quad & y_j - y_i \geq \tilde{d}_{ij}, \qquad (i,j) \in E \\ & y_i \geq ۰, \quad \forall i = ۱, ..., n \end{aligned} \qquad (۳)$$

البته زاید در نظر گرفتن محدودیت اول در مدل ۱ نیز سبب حذف $y_۱$ از تابع هدف مدل ۲ می‌شود.

زمان‌های به دست آمده برای وقوع رویدادها در مدل فوق به‌صورت تصادفی در بازه بین زودترین زمان ممکن و دیرترین زمان ممکن قرار می‌گیرد. بنابراین کمینه (یا بیشینه) مقادیر متغیرهای تصمیم متناظر با جواب‌های بهینه‌ی چندگانه در مدل فوق، یعنی $e_i = \min\ y^*_i$ ($l_i = \max\ y^*_i$)، می‌تواند زودترین (یا دیرترین) زمان وقوع رویدادهای شبکه را نتیجه دهد. اما حل مدل‌های برنامه‌ریزی فازی به‌سادگی حل مدل‌های عادی برنامه‌ریزی نیست، و بنابراین در بخش‌های بعدی راه حلی برای ارائه‌ی یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی پیشنهاد خواهد شد.

۳. زمان‌بندی پروژه با حضور اعداد بازه‌یی

چنان که گفته شد در شبکه‌های بازه‌یی برای نمایش عدم اطمینان در مدت زمان انجام فعالیت‌ها از بازه‌یی مثل $\tilde{d}_{ij} = [\underline{d}_{ij}, \overline{d}_{ij}]$ استفاده می‌شود که در آن $\underline{d}_{ij} \geq ۰$ است. برای تحلیل شبکه‌های بازه‌یی تعریف یک مفهوم جدید به‌نام پیکره‌بندی[۱۰] ضروری است.[۱۹] پیکره‌بندی Ω تحققی قطعی از یک شبکه‌ی بازه‌یی است؛ به بیان دیگر $d_{ij}(\Omega) \in \tilde{d}_{ij}$. بنابراین کلیه‌ی روش‌های معمول برای زمان‌بندی قطعی شبکه‌های پروژه را می‌توان برای یک پیکره‌بندی نیز به کار برد. به‌خصوص مدل‌های ۱ و ۳ را با تبدیل $\tilde{d}_{ij}$ به $d_{ij}(\Omega)$ می‌توان به‌عنوان یک برنامه‌ریزی خطی ساده حل کرد.

برای یافتن مشخصات شبکه به‌صورت بازه‌یی، ازجمله زودترین و دیرترین زمان‌ها، فقط در نظر گرفتن حد بالا و پایین بازه‌های مدت زمان انجام فعالیت‌ها ضروری است و پیکره‌بندی‌هایی که مقادیر میانی بازه‌ها را به خود تخصیص می‌دهند در محاسبات تأثیری نخواهند داشت.[۱۳] بنابراین یک روش محاسبه‌ی زودترین و دیرترین زمان‌ها در شبکه‌های بازه‌یی، بررسی تمامی پیکره‌بندی‌های ممکن برای حد بالا و پایین مدت زمان انجام فعالیت‌هاست که با ω نمایش داده می‌شود و تعداد اعضای آن ۲^n خواهد بود.

حال اگر در یک شبکه‌ی بازه‌یی زودترین زمان وقوع رویداد i را با $t^e_i = [\underline{t}^e_i, \overline{t}^e_i]$ و دیرترین زمان وقوع آن رویداد را با $t^l_i = [\underline{t}^l_i, \overline{t}^l_i]$ نمایش دهیم روابط زیر می‌تواند در به دست آوردن این مقادیر راهگشا باشد:

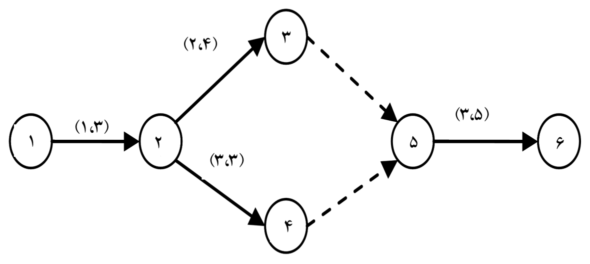
$$\underline{t}^e_i = \min_{\Omega \in \omega} t^e_i(\Omega), \qquad \overline{t}^e_i = \max_{\Omega \in \omega} t^e_i(\Omega)$$
$$\underline{t}^l_i = \min_{\Omega \in \omega} t^l_i(\Omega), \qquad \overline{t}^l_i = \max_{\Omega \in \omega} t^l_i(\Omega)$$

به‌عنوان مثال شبکه‌ی پروژه‌ی بازه‌یی نمایش داده شده در شکل ۱ را در نظر می‌گیریم. در این شبکه چهار فعالیت اصلی و دو فعالیت مجازی وجود دارد که مدت زمان انجام هریک از آنها روی یال‌های شبکه رسم شده است.

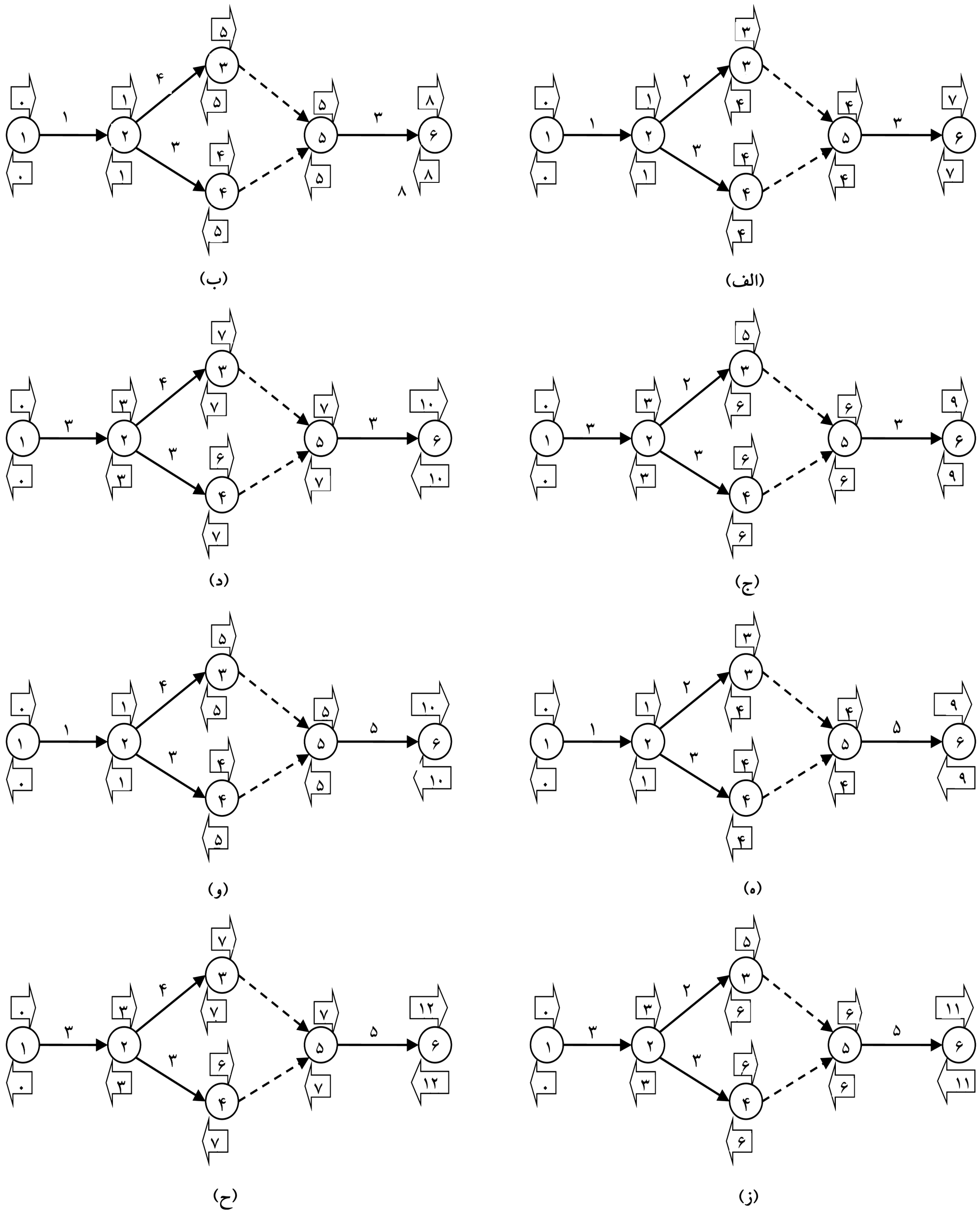
با توجه به این که یکی از فعالیت‌های اصلی (فعالیت ۲.۴) دارای زمان قطعی است، تعداد هشت پیکره‌بندی ممکن برای این شبکه قابل تصور است (شکل ۲). محاسبات مسیر رفت و برگشت برای تعیین زودترین و دیرترین زمان‌ها روی هریک از پیکره‌بندی‌های انجام شده است. با در نظر گرفتن رویداد ۳ و با استفاده از مقادیر محاسبه شده برای زودترین زمان رویداد ۳، رابطه‌ی $\underline{t}^e_۳ = \min t^e_۳(\Omega) = ۳$ از پیکره‌بندی‌های ۲الف و ۲هـ نتیجه شده و پیکره‌بندی‌های ۲د و ۲ح نیز رابطه‌ی $\overline{t}^e_۳ = \max t^e_۳(\Omega) = ۷$ را نتیجه می‌دهند. بنابراین می‌توان اذعان کرد که اولاً نمی‌توان هیچ‌گونه پیکره‌بندی پیدا کرد که در آن رویداد ۳ بتواند قبل از زمان ۳ (حدپایین زودترین زمان) اتفاق بیفتد، ثانیاً بزرگ‌ترین زمان در حداقل یک پیکره‌بندی که رویداد ۳ نتواند زودتر از آن شروع شود زمان ۷ است (حد بالای دیرترین زمان). به بیان دیگر:

- حد پایین زودترین زمان اگر رعایت نشود الزاماً (برای تمام پیکره‌بندی‌ها) زمان شروع پروژه تحت تأثیر قرار خواهد گرفت.
- حد بالای زودترین زمان اگر رعایت نشود ممکن است (حداقل برای یک پیکره‌بندی) زمان شروع پروژه تحت تأثیر قرار گیرد.

همچنین پیکره‌بندی‌های ۲د و ۲ح رابطه‌ی $\overline{t}^l_۳ = \max t^l_۳(\Omega) = ۷$ و پیکره‌بندی‌های ۲الف و ۲هـ رابطه‌ی $\underline{t}^l_۳ = \min t^l_۳(\Omega) = ۴$ را نتیجه می‌دهند. با دقت در پیکره‌بندی‌های ارائه شده، می‌توان به‌راحتی مشاهده کرد که اولاً نمی‌توان هیچ‌گونه پیکره‌بندی پیدا کرد که رویداد ۳ بعد از زمان ۷ اتفاق بیفتد، ثانیاً کوچک‌ترین



شکل ۱. یک شبکه‌ی ساده با زمان‌های بازه‌یی.



شکل ۲. پیکره‌بندی‌های مختلف برای شبکه‌ی پروژه‌ی نمونه.

زمان در حداقل یک پیکره‌بندی که رویداد ۳ نتواند از آن دیرتر شروع شود زمان ۴ است. بنابراین مفاهیم زیر نیز برای دیرترین زمان وقوع رویداد قابل تعریف است:

- حد بالای دیرترین زمان اگر رعایت نشود الزاماً (برای تمام پیکره‌بندی‌ها) زمان خاتمه‌ی پروژه تحت تأثیر قرار خواهد گرفت.
- حد پایین دیرترین زمان اگر رعایت نشود ممکن است (دست کم برای یک پیکره‌بندی) زمان خاتمه‌ی پروژه تحت تأثیر قرار گیرد.

پیاده‌سازیِ روش شمارش کامل پیکره‌بندی‌ها به‌دلیل تعداد بالای پیکره‌بندی‌های ممکن در مسائل واقعی، بسیار زمان‌بر است. در بخش بعد مدل‌های ریاضی پیشنهادی برای یافتن این مقادیر ارائه می‌شود. مفاهیم ارائه‌شده در این بخش در ارائه‌ی مدل‌های ریاضی نقش کلیدی ایفا می‌کنند.

۱.۳. مدل‌های پیشنهادی برای زودترین زمان رویدادها

اگر ω مجموعه‌یی از تمامی پیکره‌بندی‌های ممکن برای مدت زمان انجام فعالیت‌ها باشد، آنگاه پیکره‌بندی $\overline{\Omega} \in \omega$ با $d_i(\overline{\Omega}) = \overline{d}_i$ پیکره‌بندی بدبینانه[۱۱] و پیکره‌بندی $\underline{\Omega} \in \omega$ با $d_i(\underline{\Omega}) = \underline{d}_i$ به‌عنوان پیکره‌بندی خوش‌بینانه[۱۲] تعریف می‌شود. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که پیکره‌بندی خوش‌بینانه زودترین زمان خاتمه‌ی پروژه را کمینه کرده و پیکره‌بندی بدبینانه زودترین زمان خاتمه‌ی پروژه را بیشینه می‌کند.[۲۰]

حل مستقیم مدل ۳ برای پیکره‌بندی خوش‌بینانه مطمئناً برای رویداد y_n (یا همان زمان خاتمه‌ی پروژه) پایین‌ترین حد ممکن را محاسبه خواهد کرد، اما لزومی ندارد که سایر رویدادهای شبکه نیز پایین‌ترین حد خود را داشته باشند. در حقیقت، رویداد i (به‌جز رویداد اول و آخر) می‌تواند بسته به زمان شناوری خود، هر عددی بین $\underline{t}^e_i(\underline{\Omega})$ و $\underline{t}^e_i(\underline{\Omega}) + f_i(\underline{\Omega})$ را در پیکره‌بندی خوش‌بینانه داشته باشد. برای اطمینان از این که سایر رویدادهای شبکه نیز در پایین‌ترین حد ممکن قرار می‌گیرند، مدل ۴ را ارائه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\min \ \sum_{i=1}^{n-1} y_i \\
&\min \ y_n \\
&\text{s.t.} \ \ y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij}, && (i,j) \in E \\
&\qquad y_i \geq 0, && i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{4}$$

مدل ۴ یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی دوهدفه‌ی خطی[13] است که در آن اولویت بهینه‌سازی با کمینه‌کردن y_n است. بدین‌منظور می‌توان آن را با کاربرد روش M بزرگ (رابطه‌ی ۵) بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&\min \ My_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \\
&\text{s.t.} \ \ y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij}, && (i,j) \in E \\
&\qquad y_i \geq 0, && i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{5}$$

که در آن M عددی به‌اندازه‌ی کافی بزرگ است. این مدل علاوه بر کمینه سازی y_n، مقادیر سایر رویدادها را نیز در کم‌ترین حد خود قرار می‌دهد.

لم ۱. در مدل ۵ مقدار M باید بزرگ‌تر یا مساوی n باشد.

اثبات: با توجه به نحوه‌ی شماره‌گذاری رویدادها، رابطه‌ی $y_n \geq y_i$ برای $i = 1, ..., n-1$ همواره برقرار است. درنتیجه واضح است که مقدار $\sum_{i=1}^{n-1} y_i$ همواره کوچک‌تر یا مساوی $(n-1)y_n$ خواهد بود. پس بدیهی است که برای تسلط My_n بر $\sum_{i=1}^{n-1} y_i$، مقدار M باید اکیداً بیشتر از $n-1$ باشد که برای سادگی مقدار n انتخاب می‌شود.■

بنابراین مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه‌ی حد پایین زودترین زمان وقوع رویدادهای شبکه عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned}
&\min \ ny_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \\
&\text{s.t.} \ \ y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij}, && (i,j) \in E \\
&\qquad y_i \geq 0, && i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{6}$$

برای پیداکردن حد بالای زودترین زمان‌های شبکه نیز کافی است در مدل ۳ طول فعالیت‌ها را برابر بیشترین زمان ممکن ($\overline{d}_{ij}$) قرار دهیم. بنابراین مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه‌ی حد بالای زودترین زمان وقوع رویدادهای شبکه عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\min \ ny_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \\
&\text{s.t.} \ \ y_j - y_i \geq \overline{d}_{ij}, && (i,j) \in E \\
&\qquad y_i \geq 0, && i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{7}$$

با به‌کارگیری مدل‌های ۶ و ۷ به‌سادگی تمامی حدود بالا و پایین زودترین زمان وقوع رویدادهای شبکه محاسبه می‌شود.

۲.۳. مدل‌های پیشنهادی برای دیرترین زمان رویدادها

چنان که پیش از این اشاره شد، روش‌های ارائه شده در مطالعات گذشته[14,16] قادرند مسئله‌ی حدود پایین و بالای دیرترین زمان وقوع رویدادهای یک شبکه با فعالیت‌های غیرقطعی را حل کنند، اما این روش‌ها بسیار دشوارند و نیازمند برنامه‌ریزی الگوریتم‌های رایانه‌یی پیچیده‌یی هستند که فهم عملکرد آنها مستلزم تلاش و دقت فراوان است. در این بخش، ابتدا مدل برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی برای حل هریک از مسائل فوق ارائه‌شده که درک آن برای محققین با دانش پایه‌ی برنامه‌ریزی ریاضی بسیار ساده است؛ سپس با کاربرد تکنیک‌های مناسب برنامه‌ریزی ریاضی، مدل برنامه‌ریزی مختلط عدد صحیح غیرخطی به مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و ۱ تبدیل می‌شود که به‌سادگی توسط نرم‌افزارهای تحقیق در عملیات قابل حل است.

۱.۲.۳. مدل تعیین حد بالای دیرترین زمان رویدادها

طبق تعریف، حد بالای دیرترین زمان وقوع یک رویداد هنگامی است که در تمامی پیکره‌بندی‌های ممکن، رویداد مذکور از آن زمان خاص دیرتر حادث نشود، در غیر این‌صورت زمان خاتمه‌ی پروژه بیشتر از حد بالای دیرترین زمان اتمام پروژه خواهد شد. به بیان دیگر، برای یافتن حد بالای دیرترین زمان وقوع یک رویداد به دنبال دیرترین زمانی هستیم که آن رویداد می‌تواند واقع شود، به‌طوری که حداقل برای یک پیکره‌بندی زمان اتمام پروژه افزایش نیابد. یعنی اگر رویداد m بعد از $\overline{t}^l_m$ واقع شود، مطمئناً طول پروژه را بیش از زمان پایان پروژه در پیکره‌بندی مربوطه‌اش خواهد کرد.

اگر طول بازه مدت زمان انجام فعالیت‌ها را با $\Delta_{ij} = \overline{d}_{ij} - \underline{d}_{ij}$ نمایش دهیم، مدت زمان انجام یک فعالیت در یک پیکره‌بندی را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی $d_{ij}(\Omega) = \underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}$ بیان کرد (متغیر z_{ij} می‌تواند مقادیر صفر تا ۱ را اختیار کند). در مقادیر حدی، در صورت صفر بودن z_{ij} حد پایین و در صورت ۱ بودن حد بالای مدت زمان انجام فعالیت نتیجه می‌شود. البته چنان که اثبات شده جواب بهینه فقط در یکی از دو حد بالا یا پایین $\tilde{d}_{ij}$ اتفاق می‌افتد، و لذا در عمل متغیر z_{ij} در جواب بهینه صفر و ۱ خواهد بود. هرچند مقادیر بین صفر و ۱ نیز جواب‌های غیرموجه برای مسئله ایجاد نخواهد کرد.

با توجه به موارد فوق برای محاسبه‌ی حد بالای دیرترین زمان وقوع رویدادهای شبکه باید به دنبال یک پیکره‌بندی باشیم که بزرگ‌ترین y_m را نتیجه دهد و در عین حال y_n مساوی با زمان پایان پروژه در این پیکره‌بندی، ثابت باشد.

$$\begin{aligned}
&\max \ y_m \\
&\text{s.t.} \ \ y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}, && (i,j) \in E \\
&\qquad y_n \leq T(\Omega_{z*}), \\
&\qquad 0 \leq z_{ij} \leq 1, && (i,j) \in E \\
&\qquad y_i \geq 0, && i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{8}$$

در این مدل z^* برابر مجموعه‌ی z_{ij} حاصل از حل مسئله است که پیکره‌بندی Ω_{z*} را تشکیل می‌دهد و $T(\Omega_{z*})$ زمان خاتمه‌ی پروژه با توجه به این پیکره‌بندی است. در این مدل، افزایش y_m آزاد نیست و تحت تأثیر زمان اتمام پروژه با توجه به پیکره‌بندی سازنده‌ی آن است. در واقع y_m تا جایی بزرگ می‌شود که y_n برابر $T(\Omega_{z*})$ رعایت شود.

زمان اتمام پروژه نیز با توجه به پیکره‌بندی Ω_{z*} و با استفاده از مدل غیرخطی ۹ قابل محاسبه است:

$$\begin{array}{lll}
\max & T(\Omega_{z*}) = \sum_{(i,j)\in E}(\underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z^*_{ij})x_{ij} & \\
\text{s.t.} & \sum_{(i,j)\in E} x_{1j} = 1 & \\
& \sum_{(i,k)\in E} x_{ik} = \sum_{(k,j)\in E} x_{kj}, & k = 2, \dots, n-1 \\
& x_{ij} \geq 0, & (i,j)\in E
\end{array} \tag{9}$$

بدین ترتیب، می‌توان با ادغام دو مدل ۸ و ۹، مدل دوهدفه‌ی ۱۰ را به دست آورد:

$$\begin{array}{lll}
\max & y_n & \\
\max & y_m & \\
\text{s.t.} & y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}, & (i,j)\in E \\
& y_n = \sum_{(i,j)\in E}(\underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij})x_{ij} & \\
& \sum_{(i,j)\in E} x_{1j} = 1 & \\
& \sum_{(i,k)\in E} x_{ik} = \sum_{(k,j)\in E} x_{kj}, & k = 2, \dots, n-1 \\
& x_{ij} \geq 0, & (i,j)\in E \\
& y_i \geq 0, & i = 1, \dots, n \\
& 0 \leq z_{ij} \leq 1, & (i,j)\in E
\end{array} \tag{10}$$

با توجه به این که تابع هدف $\max\ y_m$ خود به دنبال افزایش y_n تا حد ممکن است، نیازی به اعمال تابع هدف $\max\ y_n$ نیست و مدل به‌شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{array}{lll}
\max & y_m & \\
\text{s.t.} & y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}, & (i,j)\in E \\
& y_n = \sum_{(i,j)\in E}(\underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij})x_{ij} & \\
& \sum_{(i,j)\in E} x_{1j} = 1 & \\
& \sum_{(i,k)\in E} x_{ik} = \sum_{(k,j)\in E} x_{kj}, & k = 2, \dots, n-1 \\
& x_{ij} \geq 0, & (i,j)\in E \\
& y_i \geq 0, & i = 1, \dots, n \\
& 0 \leq z_{ij} \leq 1, & (i,j)\in E
\end{array} \tag{11}$$

مقدار y_m بهینه حاصل از حل مدل فوق حد بالای دیرترین زمان وقوع رویداد m یا $\bar{t}^l_m$ است. اگرچه مدل ۱۱ قابلیت محاسبه‌ی حد بالای دیرترین زمان وقوع رویدادهای پروژه را دارد، بخش مشکل‌ساز آن وجود معادله‌ی غیرخطی $y_n = \sum_{(i,j)\in E}(\underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij})x_{ij}$ است. چنانچه متغیرهای x_{ij} مقادیری برابر صفر یا ۱ داشته باشند، می‌توانیم برای $(i,j)\in E$ مقدار $\rho_{ij} = (\underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij})x_{ij}$ را از طریق مجموعه معادلات ۱۲ بازنویسی کنیم:

$$\begin{array}{l}
\rho_{ij} = \underline{d}_{ij}\beta_{ij} + \bar{d}_{ij}\gamma_{ij}, \\
\beta_{ij} + \gamma_{ij} = x_{ij}, \\
\beta_{ij} \leq 1 - z_{ij}, \\
\gamma_{ij} \leq z_{ij}, \\
\beta_{ij}, \gamma_{ij} \geq 0
\end{array} \tag{12}$$

سطر دوم بیان می‌دارد که اگر x_{ij} صفر نباشد متغیرهای β_{ij} و γ_{ij} می‌توانند مجموعاً مقدار ۱ بگیرند. سطر سوم و چهارم تصریح می‌کند که مقدارگرفتن β_{ij} و γ_{ij} به‌ترتیب به‌معنای انتخاب حد پایین و حد بالای طول بازه‌ی فعالیت مربوطه است. همچنین معادلات فوق به‌صورت ضمنی شرط کوچک‌تر یا مساوی ۱ بودن مقدار متغیرهای z_{ij}، β_{ij} و γ_{ij} را تأمین می‌کنند. با اضافه و جایگزینی مجموعه معادلات فوق در مدل ۱۱، مدل خطی صفر و ۱ مسئله‌ی حد بالای دیرترین زمان وقوع رویدادها به دست خواهد آمد:

$$\begin{array}{lll}
\max & M.y_m + y_n & \\
\text{s.t.} & y_j - y_i \geq \bar{d}_{ij} - \Delta_{ij} z_{ij}, & (i,j)\in E \\
& y_n = \sum_{(i,j)\in E} \underline{d}_{ij}\beta_{ij} + \bar{d}_{ij}\gamma_{ij} & \\
& \beta_{ij} + \gamma_{ij} = x_{ij}, & (i,j)\in E \\
& \beta_{ij} \leq 1 - z_{ij}, & (i,j)\in E \\
& \gamma_{ij} \leq z_{ij}, & (i,j)\in E \\
& \sum_{(i,j)\in E} x_{1j} = 1 & \\
& \sum_{(i,k)\in E} x_{ik} = \sum_{(k,j)\in E} x_{kj}, & k = 2, \dots, n-1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, & (i,j)\in E \\
& y_i \geq 0, & i = 1, \dots, n \\
& \beta_{ij}, \gamma_{ij}, z_{ij} \geq 0, & (i,j)\in E
\end{array} \tag{13}$$

۲.۲.۳. مدل تعیین حد پایین دیرترین زمان رویدادها

طبق تعریف، می‌توان حداقل یک پیکره‌بندی برای شبکه یافت که در آن اگر رویداد m بعد از $\underline{t}^l_m$ حادث شود، طول پروژه بیشتر از زمان خاتمه‌ی پروژه در آن پیکره‌بندی خاص بشود. به‌عبارت دیگر اگر فعالیت m بعد از $\underline{t}^l_m$ شروع شود، ممکن است طول پروژه با توجه به پیکره‌بندی رخ داده افزایش بیابد.

دیرترین زمان وقوع یک رویداد را می‌توان توسط تابعی از مسیرهای پروژه نیز نمایش داد. اگر P مجموعه مسیرهای شبکه از رویداد اول تا رویداد آخر باشد و $P_{m,n}$ نیز مجموعه مسیرهای رویداد m تا رویداد آخر باشد، آنگاه دیرترین زمان وقوع رویداد mام با توجه به رابطه‌ی ۱۴ برابر خواهد بود با تفاوت طول طولانی‌ترین مسیر رویداد اول تا رویداد آخر و طول طولانی‌ترین مسیر رویداد mام تا رویداد آخر:

$$t^l_i(\Omega) = \max_{p\in P} W_p(\Omega) - \max_{p\in P_{m,n}} W_p(\Omega) \tag{14}$$

که در آن $W_p(\Omega)$ طول مسیر p است. واضح است که مقدار عبارت سمت چپ (قبل از منها) در رابطه‌ی فوق یعنی $\max_{p\in P} W_p(\Omega)$ برابر $y_n(\Omega)$ است. از سوی دیگر اگر طولانی‌ترین مسیر رویداد اول تا رویداد آخر پروژه را که حتماً از رویداد m می‌گذرد با P_m نمایش دهیم، برای سمت راست عبارت بالا خواهیم داشت $P_m(\Omega) = \max_{p\in P_{1,m}} W_p(\Omega) + \max_{p\in P_{m,n}} W_p(\Omega)$، که در آن $\max_{p\in P_{1,m}} W_p(\Omega)$ برابر با $y_m(\Omega)$ خواهد بود. مدل ۱۵ که توسعه‌یافته‌ی مدل ۱ است می‌تواند مقادیر

بهینه‌ی P_m را محاسبه کند:

$$\begin{aligned}
\max \quad & P_m = \sum\nolimits_{(i,j)\in E} (\underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}) x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum\nolimits_{i:(i,m)\in E} x_{im} = 1 \\
& \sum\nolimits_{j:(1,j)\in E} x_{1j} = 1 \\
& \sum\nolimits_{(i,k)\in E} x_{ik} = \sum\nolimits_{(k,j)\in E} x_{kj}, \qquad k = 2, ..., n-1 \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in E
\end{aligned} \tag{15}$$

در مدل فوق مقادیر z_{ij} پیکره‌بندی Ω را تعیین می‌کند. بنابراین رابطه‌ی ۱۴ را می‌توان چنین بازنویسی کرد:

$$t^l_m(\Omega) = y_n(\Omega) - (P_m(\Omega) - y_m(\Omega)) \tag{16}$$

از آنجا که هدف یافتن یک پیکره‌بندی است که کم‌ترین مقدار را برای $t^l_m(\Omega)$ نتیجه دهد، با توجه به محدودیت‌های مدل ۳ و ۱۵ می‌توان مدل ۱۷ را برای یافتن حد پایین دیرترین زمان وقوع رویدادهای شبکه ارائه کرد.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \underline{t}^l_m = y_n + y_m - P_m \\
\text{s.t.} \quad & y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}, \qquad (i,j) \in E \\
& P_m = \sum\nolimits_{(i,j)\in E} (\underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}) x_{ij}, \\
& \sum\nolimits_{i:(i,m)\in E} x_{im} = 1, \\
& \sum\nolimits_{j:(1,j)\in E} x_{1j} = 1, \\
& \sum\nolimits_{(i,k)\in E} x_{ik} = \sum\nolimits_{(k,j)\in E} x_{kj}, \qquad k = 2, ..., n-1 \\
& 0 \leq z_{ij} \leq 1, \qquad (i,j) \in E \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in E \\
& y_i \geq 0, \qquad i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{17}$$

در مدل فوق، محدودیت اول مربوط به روابط پیش‌نیاز است و با توجه به z_{ij}ها (پیکره‌بندی) مقادیر کمینه را برای y_m و y_n تعیین می‌کند. محدودیت دوم طول مسیری است که از رویداد m عبور می‌کند، و محدودیت سوم نشان‌گر الزام عبور از این رویداد است. با حل مدل فوق، مقدار حد پایین دیرترین زمان شروع رویداد m طبق معادله‌ی $\underline{t}^l_m = y_m + y_n - P_m$ به دست می‌آید.

با توجه به توضیحات ارائه شده در مسئله‌ی خطی‌سازی حد بالای دیرترین زمان رویدادها که منجر به ارائه‌ی مدل ۱۳ شد، می‌توان مدل خطی یافتن حد پایین دیرترین زمان رویدادها را ارائه کرد:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \underline{t}^l_m = y_n + y_m - P_m \\
\text{s.t.} \quad & y_j - y_i \geq \underline{d}_{ij} + \Delta_{ij} z_{ij}, \qquad (i,j) \in E \\
& P_m = \sum\nolimits_{(i,j)\in E} \underline{d}_{ij} \beta_{ij} + \overline{d}_{ij} \gamma_{ij}, \\
& \beta_{ij} + \gamma_{ij} = x_{ij}, \qquad (i,j) \in E \\
& \beta_{ij} \leq 1 - z_{ij}, \qquad (i,j) \in E \\
& y_{ij} \leq z_{ij}, \qquad (i,j) \in E \\
& \sum\nolimits_{i:(i,m)\in E} x_{im} = 1, \\
& \sum\nolimits_{j:(1,j)\in E} x_{1j} = 1, \\
& \sum\nolimits_{(i,k)\in E} x_{ik} = \sum\nolimits_{(k,j)\in E} x_{kj}, \qquad k = 2, ..., n-1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad (i,j) \in E \\
& y_i \geq 0, \qquad i = 1, ..., n \\
& \beta_{ij}, \gamma_{ij}, z_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in E
\end{aligned} \tag{18}$$

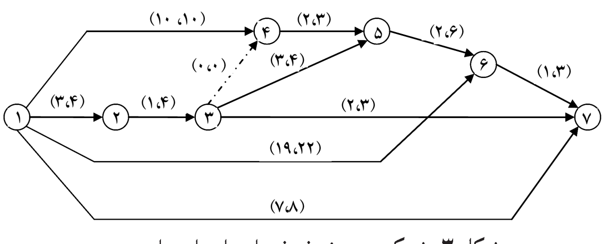
در بخش بعد با ارائه‌ی یک مثال عددی پاسخ حاصل از اجرای مدل‌های پیشنهادی را بررسی می‌کنیم.

۳.۳. مثال عددی

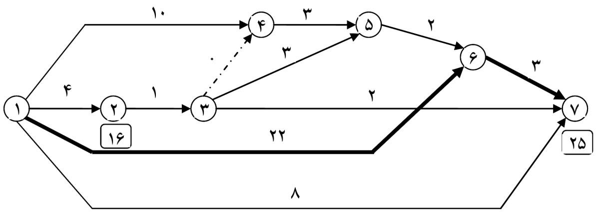
به‌منظور صحه‌گذاری نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی، پروژه‌ی نمونه‌یی[۱۴] را در نظر گرفته و با استفاده از روش پیشنهادی مقادیر مربوط به حد پایین و بالای دیرترین زمان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

در شکل ۳ شبکه‌ی AOA پروژه مذکور به‌همراه بازه‌های زمانی هر فعالیت نمایش داده شده است. در این پروژه فعالیت ۱.۴ به‌طور قطع ۱۰ واحد زمانی طول کشیده و فعالیت ۳.۴ یک فعالیت مجازی به طول صفر است. تعداد کل فعالیت‌ها (بدون احتساب فعالیت مجازی) ۱۰ عدد بوده و طول بازه‌یی هر فعالیت روی یال مربوطه نمایش داده شده است.

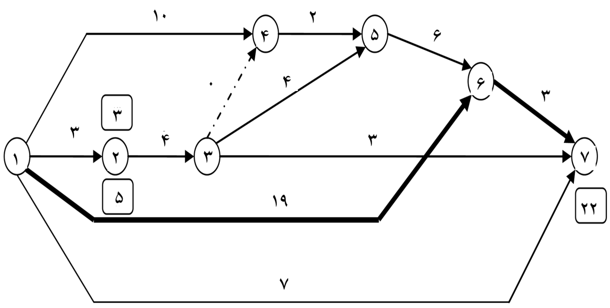
محاسبه‌ی حد بالای دیرترین زمان رویداد: با حل مدل ۱۳ برای این مسئله و با توجه به شکل ۴، برای رویداد دوم حد بالای دیرترین زمان برابر ۱۶ واحد زمانی محاسبه می‌شود. این عدد بیان می‌دارد که هیچ‌گونه پیکره‌بندی نمی‌توان یافت که در آن حد بالای دیرترین زمان رویداد دوم بیش از ۱۶ واحد باشد و طول پروژه (در پیکره‌بندی مربوطه) به‌واسطه‌ی آن افزایش نیابد. پیکره‌بندی بهینه برای این مسئله بر روی یال‌ها و مسیر بحرانی پروژه در این پیکره‌بندی توسط خط درشت نمایش داده شده است. حد بالای دیرترین زمان پایان پروژه برابر ۲۵ واحد زمانی محاسبه شده است.



شکل ۳. شبکه‌ی پروژه نمونه با زمان‌های بازه‌یی.



شکل ۴. شبکه‌ی پروژه نمونه پس از حل توسط مدل ۱۳.



شکل ۵. شبکه‌ی پروژه نمونه پس از حل توسط مدل ۱۸.

محاسبه‌ی حد پایین دیرترین زمان رویداد: با حل مدل ۱۸، حد پایین زودترین زمان رویداد دوم برابر ۳ واحد، زمان پایان پروژه در پیکره‌بندی منظور شده برابر ۲۲ واحد، و حد پایین دیرترین زمان رویداد دوم برابر ۵ واحد زمانی محاسبه می‌شود. این عدد بیان می‌دارد که می‌توان دست کم یک پیکره‌بندی برای پروژه پیدا کرد که در آن اگر رویداد دوم بعد از زمان ۵ حادث شود، طول پروژه در آن پیکره‌بندی خاص افزایش خواهد یافت. پیکره‌بندی حاصل از مدل به‌همراه مسیر بحرانی در شکل ۵ قابل مشاهده است.

گفتنی است نتایج به دست آمده در حل هردو مدل برای تمامی گره‌ها با نتایج حاصل از رویکردهای موجود در ادبیات موضوع تطابق دارد.

۴. دیرترین زمان وقوع رویدادها در شبکه با زمان‌های فازی

پس از مطرح کردن حالت بازه‌یی، می‌توان رویکرد ارائه شده را به حالتی که در آن زمان فعالیت‌ها فازی هستند تعمیم داد. فرض کنید تمامی عناصر شبکه‌ی G همانند حالت بازه‌یی هستند به‌غیر از زمان فعالیت‌ها که به‌شکل اعداد فازی $\tilde{d}_{ij}, (i,j) \in E$ نمایش داده شده‌اند. عدد $\tilde{d}_{ij}$ یک توزیع امکانی[14] به‌صورت $\pi(d_{ij}) = \mu_{\tilde{d}_{ij}}(d_{ij})$ برای طول فعالیت مهیا می‌سازد. اگر Ω یک پیکره‌بندی ممکن با فعالیت‌هایی به‌طول $d_{ij} \in \Re+, (i,j) \in E$ باشد، با فرض استقلال طول فعالیت‌ها از یکدیگر داریم:

$$\pi(\Omega) = \min_{(i,j)\in E} \mu_{\tilde{d}_{ij}}(d_{ij}) \tag{۱۹}$$

که در آن $\pi(\Omega)$ تابع توزیع امکان ترکیبی روی پیکره‌بندی Ω است. بنابراین می‌توان تابع توزیع امکان دیرترین زمان رویداد k را چنین ارائه کرد:

$$\mu_{\tilde{t}^l_k}(x) = Poss(t^l_k = x) = \sup_{\Omega: x = t^l_k(\Omega)} \pi(\Omega) \tag{۲۰}$$

که در آن $t^l_k(\Omega)$ دیرترین زمان رویداد k در پیکره‌بندی Ω است. با کاربرد تکنیک برش‌های آلفا، می‌توان یک عدد فازی را به مجموعه‌یی از اعداد بازه‌یی تبدیل کرد. از آنجا که در معادلات شبکه تنها از عملگرهای جمع، منها، بیشینه و کمینه استفاده می‌شود، این عملگرها را می‌توان مستقیماً روی برش‌های آلفای مدت زمان انجام فعالیت‌ها اعمال کرد تا به برش‌های آلفای مقادیر فازی جواب دست بیابیم. بدین‌ترتیب $T^l_k(\alpha)$ها را برای شبکه‌یی با طول فعالیت‌های بازه‌یی برابر $\tilde{d}_{ij}(\alpha) = [\underline{d}_{ij}(\alpha), \overline{d}_{ij}(\alpha)]$ محاسبه کرده و سپس با چیدن $T^l_k(\alpha)$ها روی هم، تابع توزیع دیرترین زمان رویدادها $\mu_{\tilde{t}^l_k}(x)$ را به دست می‌آوریم. رویکرد برش‌های آلفا در الگوریتم‌های ارائه شده[14،16] نیز به کار گرفته شده‌است.

۵. نتیجه‌گیری

برای یافتن حد بالا و پایین زودترین و دیرترین زمان رویدادها و فعالیت‌های پروژه، با فرض عدم محدودیت منابع، شیوه‌های گوناگونی توسط محققین این حوزه ارائه شده است. ولی رویکردهای ارائه شده تاکنون برپایه‌ی الگوریتم‌های رایانه‌یی بوده و فهم و پیاده‌سازی آنها امری زمان‌بر و پیچیده است.

در این نوشتار ابتدا دو مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی برای یافتن حد پایین و بالای زودترین زمان وقوع رویدادهای شبکه پیشنهاد شد. سپس با استفاده از ترکیب مدل طولانی‌ترین مسیر و دوگان آن مدلی برای محاسبه‌ی حد بالای دیرترین زمان رویدادهای پروژه ارائه شد و با استفاده از مفاهیم شبکه، این مدل به یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی صفر و ۱ تبدیل شد. همچنین با به‌کارگیری مسیرهای مختلف شبکه مدل جدیدی نیز برای محاسبه‌ی حد پایین دیرترین زمان رویدادهای پروژه ارائه شد. در مقایسه با سایر الگوریتم‌های ارائه شده در این موضوع، مدل‌های پیشنهادی کارایی بیشتری دارند زیرا می‌توان آنها را با استفاده از کلیه‌ی نرم‌افزارهای مرسوم تحقیق در عملیات حل کرد و نیازی به برنامه‌نویسی و پیاده‌سازی الگوریتم‌های پیچیده نیست.

برای تحقیقات آتی، می‌توان برای یافتن حدود پایین و بالای زمان شناوری رویدادها و فعالیت‌ها مدل‌های ریاضی ارائه داد. همچنین از میان بردن محدودیت صفر و ۱ متغیرهای تصمیم، می‌تواند در افزایش سرعت حل مدل‌ها تأثیر چشمگیری داشته باشد.

پانوشت‌ها

1. Critical Path Method
2. Program evalution review techniqe
3. α - cut
4. fuzzy extended operators
5. activity on arc
6. interval numbers
7. trapezoidal fuzzy numbers
8. shortest path problem
9. make span
10. configuration
11. pessimistic configuration
12. optimistic configuration
13. bi-objective linear mathematical model
14. possibility distribution

منابع (References)

1. Kelley, J.E. and Walker, M.R. "Critical path planning and scheduling", *Eastern Joint Computer Conference*, **16**, pp. 160-172 (1959).
2. Malcolm, D.G., Rosenbloom, J.H., Clark, C.E. and Fazer, W. "Application of a technique for R&D program evaluation (PERT)", *Operations Research,* **7**(5), pp. 646-669 (1959).
3. Project Management Institute (PMI), *A Guide to the Project Management Body of Knowledge: PMBOK Guide*, 5th Edn, ANSI/PMI 99-001-2008, Pennsylvania (2013).
4. Bonnal, P., Gourc, D. and Lacoste, G. "Where do we stand with fuzzy project scheduling", *Journal of Construction Engineering and Management,* **130**(1), pp. 114-123 (2004).
5. Herroelen, W. and Leus, R. "Project scheduling under uncertainty: Survey and research potentials", *European Journal of Operational Research,* **165**, pp. 289-306 (2005).
6. Dubois, D., Fargier, H. and Fortemps, P. "Fuzzy scheduling: Modeling flexible constraints vs. coping with incomplete knowledge", *European Journal Operational Research,* **147**, pp. 231-252 (2003).
7. Chanas, S. and Kamburowski, J. "The use of fuzzy variables in PERT", *Fuzzy Sets and Systems*, **5**, pp. 11-19 (1981).
8. Gazdik, I. "Fuzzy network planning", *IEEE Transaction on Reliability,* **32**(3), pp. 304-313 (1983).
9. Dubois, D. and Prade, H., *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum, New York (1988).
10. Hapke, M., Jaszkiewicz, A. and Slowinski, R. "Fuzzy project scheduling system for software development", *Fuzzy Sets and Systems*, **67**(1), pp. 101-117 (1994).
11. Soltani, A. and Haji, R. "A project scheduling method based on fuzzy theory", *Journal of Industrial and Systems Engineering,* **1**, pp. 70-80 (2007).
12. Fargier, H., Galvagnon, V. and Dubois, D. "Fuzzy PERT in series-parallel graphs", *Proceeding of 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Piscataway, N.J., pp. 717-722 (2000).
13. Dubois, D., Fargier, H. and Galvagnon, V. "On latest starting times and floats in activity networks with ill-known durations", *European Journal Operational Research*, **147**, pp. 266-280 (2003).
14. Zielinski, P. "On computing the latest starting times and floats of activities in a network with imprecise durations", *Fuzzy Set and Systems*, **150**, pp. 53-76 (2005).
15. Yakhchali, S.H. and Ghodsypour S.H. "Erratum to: On computing the latest starting times and floats of activities in a network with imprecise durations", *Fuzzy Sets and Systems*, **159**, pp. 856 (2008).
16. Yakhchali, S.H. and Ghodsypour S.H. "On the latest starting times and criticality of activities in a network with imprecise durations", *Applied Mathematical Modelling,* **34**, pp. 2044-2058 (2010).
17. Chen, S.P. "Analysis of critical paths in a project network with fuzzy activity times", *European Journal of Operational Research*, **183**, pp. 442-459 (2007).
18. Chen, S.P. and Hsueh, Y.J. "A simple approach to fuzzy critical path analysis in project networks", *Applied Mathematical Modelling*, **32**, pp. 1289-1297 (2008).
19. Buckley, J.J., *Fuzzy PERT*, In Application of Fuzzy Set Methodologies in Industrial Engineering, Evans, G.W.; Karwowski, W. and Wilhelm, M. (Eds.), pp. 103-125, Elsevier, Amsterdam (1989).
20. Yakhchali, S.H. and Ghodsypour, S.H. "Computing latest starting times of activities in interval-valued networks with minimal time lags", *European Journal of Operational Research,* **200**(3), pp. 874-880 (2010)