مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۵)
دوره‌ی ۱ - ۳۲، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۲۳-۳۲

Original Article

توسعه‌ی نمودار کنترل (EWMA_۳) تطبیقی با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر برای پایش پروفایل‌های خطی ساده

نگین چائی‌چی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات ساوه
امیرحسین امیری* (دانشیار)
گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

در این مطالعه یک نمودار کنترل تطبیقی با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر برای پایش پروفایل‌های خطی ساده که توسط یک رابطه‌ی خطی بین یک متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل توصیف می‌شود، توسعه داده شد. در این نوشتار از ۳ نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA_۳) با فواصل نمونه‌گیری متغیر (VSI) برای پایش پروفایل‌های خطی ساده استفاده شده است. عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با استفاده از متوسط زمان تا هشدار تعدیل شده (AATS) اندازه‌گیری می‌شود که برای محاسبه‌ی آن از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف استفاده شده است. با استفاده از یک مثال عددی عملکرد نمودار کنترل VSI پیشنهادی با نمودار کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت (FSI) مقایسه، و نشان داده شده که سرعت کشف تغییر در نمودارهای کنترل (VSI) نسبت به نمودارهای (FSI) بیشتر است.

واژگان کلیدی: کنترل فرایند آماری، نمودار کنترل EWMA_۳، زنجیره‌ی مارکوف، فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر، متوسط زمان تا هشدار تعدیل شده.

neginchaichi@yahoo.com
amiri@shahed.ac.ir

۱. مقدمه

کنترل فرایند آماری مجموعه‌ی قدرتمندی از شیوه‌ها و روش‌هاست که به‌منظور پایش مؤثر و بهبود کیفیت فرایندها مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمودار کنترل از مهم‌ترین ابزارهای مورد توجه در کنترل فرایند آماری است که در کیفیت محصول خروجی تأثیر به‌سزایی دارد. بنابراین باید برای بهبود عملکرد این حوزه کوشید. پس از این که دکتر والتر شوهارت در سال ۱۹۲۴ اولین نمودار کنترل را پیشنهاد نمود، شیوه‌های متنوعی برای نمودارهای کنترل توسعه یافت و به‌صورت گسترده به‌عنوان ابزار اولیه در کنترل فرایند آماری به کار برده شد. نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) اولین‌بار توسط روبرت[۱] معرفی شد و به‌صورت گسترده به‌منظور شناسایی تغییرات فرایند، به‌خصوص هنگامی که تغییرات کوچک‌اند مورد استفاده قرار گرفت. در روش‌های قبلی کنترل آماری فرایند همواره متغیر پاسخ را به‌عنوان یک مشخصه‌ی کیفی، که دارای توزیع آماری مشخصی است و با ترسیم بر نمودارهای کنترل اعم از یک‌متغیره یا چندمتغیره مورد پایش و نظارت قرار گیرد، فرض می‌کردیم. اما در بسیاری از موقعیت‌های عملی کیفیت یک فرایند یا عملکرد یک محصول را توسط یک رابطه‌ی رگرسیونی بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل ایجاد می‌کنیم که محققین این رابطه را پروفایل می‌نامند. پروفایل خطی ساده، پروفایل خطی چندگانه، پروفایل چندجمله‌یی، پروفایل غیرخطی، پروفایل اسپیلاین و موجی‌شکل از جمله‌ی پروفایل‌های مختلف است.

در بین انواع پروفایل‌ها، تحقیقات انجام شده بیشتر درخصوص پایش پروفایل‌های خطی ساده بوده است. ابتدا برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۱ روشی مبتنی بر آماره‌ی F پیشنهاد شد[۲] و به‌دنبال آن رویکرد نقطه‌ی تغییر براساس نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته[۳] ارائه شد. برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ دو استراتژی مطرح شد:[۴] ۱. استراتژی استفاده از نمودار کنترل چندمتغیره‌ی T^2؛ ۲. استراتژی ترکیب نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با نمودار پراکندگی. در مطالعات بعدی استفاده از سه نمودار کنترل (EWMA_۳) به‌صورت همزمان برای پایش عرض از مبدأ، شیب و پراکندگی خطا پیشنهاد شد.[۵] همچنین پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲، زمانی که متغیر مستقل متغیر تصادفی است، مورد بررسی قرار گرفت.[۶] محققین دیگری نیز پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ را با استفاده از رویکرد p-value بررسی کردند.[۷] آنان از قوانین حساس‌سازی برای بهبود عملکرد روش‌های پایش پروفایل‌ها استفاده کردند.[۸] عملکرد روش‌های فاز ۲ پایش پروفایل‌های خطی ساده، زمانی که پارامترها برآورد می‌شوند با استفاده از انحراف معیار متوسط طول دنباله مقایسه شد.[۹] در ادامه‌ی مطالعات، یک نمودار کنترل EWMA براساس میانگین مربع انحرافات از پروفایل تحت کنترل به‌منظور پایش انحراف معیار خطا به‌همراه دو

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۱۱/۱۵، اصلاحیه ۱۳۹۳/۱۲/۴، پذیرش ۱۳۹۴/۱/۲۳.

نمودار کنترل EWMA دیگر برای پایش عرض از مبدأ و شیب پروفایل خطی ساده ــ زمانی که هر پروفایل فقط شامل دو مشاهده است ــ پیشنهاد شد.[۱۰] مطالعات متعدد دیگری نیز درخصوص انواع روش‌های پایش پروفایل‌ها در دسترس است.[۱۱-۱۳]

رویکرد سنتی برای نمونه‌گیری در نمودارهای کنترل، استفاده از نرخ نمونه‌گیری ثابت (FSR) است که در آن پارامترهای اندازه نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت فرض می‌شوند. در سال‌های اخیر به‌منظور بهبود نمودارهای کنترل در قابلیت کشف تغییرات، تحقیقات بسیار زیادی در رابطه با استفاده از نمودارهای کنترل با نرخ نمونه‌گیری متغیر (VSR) به جای استفاده از نمودارهای کنترل با نرخ نمونه‌گیری ثابت انجام شده است. در این نمودارها اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری با توجه به نتایج نمونه‌ی قبلی تغییر می‌کند. نمودارهای کنترلی که فاصله‌ی نمونه‌گیری در آن‌ها متغیر است، نمودارهای کنترل VSI نامیده می‌شوند. در این نمودارها اگر نشانه‌یی از تغییرات در فرایند دیده شود از اندازه نمونه کوچک و در غیر این صورت از اندازه نمونه بزرگ استفاده می‌شود. در این رابطه، نمودار کنترل $\bar{X}$VSS [۱۴] و نمودار کنترل VSS CUSUM [۱۵] مورد بررسی قرار گرفت.

روش دیگر استفاده از فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر (VSI) است که در این نمودارها اگر علائمی مبنی بر وقوع تغییر در پارامترها وجود داشته باشد فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی کوتاه انتخاب می‌شود، اما اگر هشداری وجود نداشته باشد فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی بلند انتخاب می‌شود.[۱۶-۱۹] در نمودارهای کنترل با نرخ نمونه‌گیری متغیر (VSR)، اندازه نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر در نظر گرفته می‌شود. محققین نمودار کنترل VSR EWMA را پیشنهاد داده‌اند.[۲۰]

تحقیقات بسیار زیادی در رابطه با نمودارهای کنترل تطبیقی VSR انجام شده، اما مطالعات درخصوص نمودارهای کنترل تطبیقی VSR برای پایش پروفایل‌های خطی ساده اندک است. محققین استفاده از نمودار T^2VSSI را به‌منظور افزایش سرعت شناسایی شیفت‌ها در پارامترهای پروفایل خطی پیشنهاد دادند.[۲۱] آنان نمودارهای کنترل T^2VSS، T^2VSI، T^2VSSI و VSIFT را بررسی،[۲۲] و نتایج حاصله را با هم مقایسه کردند. همچنین نمودار MEWMA را با تطبیقی کردن ضریب هموارسازی مطالعه کردند.[۲۳] در تحقیقات بعدی[۲۴] از روش VSI برای تطبیقی‌کردن نمودار کنترل MEWMA به‌منظور بهبود پایش پروفایل‌های خطی استفاده شد. از دیگر تحقیقات انجام شده در این حوزه می‌توان به روش VSI ELR[۲۵] و روش VSIEWMA_۳ [۲۶] اشاره کرد.

در نوشتار حاضر طراحی نمودار VSI EWMA_۳ با استفاده از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف و با هدف کاهش متوسط زمان تا هشدار تعدیل شده پیشنهاد شده است. تفاوت این مطالعه با روش پیشنهادی پیشین[۲۶] این است که در آن روش اولاً آماره‌ی سوم برای پایش پراکندگی تغییر کرده است و ثانیاً، سه آماره به یک آماره تبدیل شده و آن را با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر تطبیقی می‌کنند. اما در نوشتار حاضر سه نمودار مجزا در نظرگرفته شده و این نمودارها تطبیقی است. محاسبه‌ی متوسط زمان تا هشدار تعدیل شده در نمودار کنترل تطبیقی VSI EWMA_۳ از دیگر نوآوری‌های این مطالعه است.

ساختار این نوشتار چنین است که در بخش ۲ نمودار کنترل EWMA_۳ پیشنهادی شامل دو نمودار EWMA برای پایش عرض از مبدأ[۵] و شیب و نمودار EWMA سوم پیشنهادی برای پایش پراکندگی خطا[۲۴] معرفی می‌شود. در بخش ۳ بررسی تطبیقی نمودار EWMA_۳ پیشنهادی انجام می‌شود. در بخش ۴ عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی تطبیقی با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف بررسی می‌شود. در بخش ۵ نیز عملکرد نمودار کنترل تطبیقی پیشنهادی با نمودار EWMA_۳ براساس فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت مقایسه شده و نهایتاً در بخش ۶ نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲. نمودارهای کنترل EWMA برای پایش پروفایل‌های خطی ساده

در این بخش نمودار کنترل EWMA_۳ به‌منظور پایش پروفایل‌های خطی ساده تشریح می‌شود.

۱.۲. نمودارهای کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ و شیب

فرض کنید برای jامین نمونه‌ی تصادفی که در طول زمان جمع‌آوری شده، مشاهده‌ی $(X_i, Y_{i,j})$ را داشته باشیم. هنگامی که فرایند تحت کنترل است رابطه‌ی بین متغیر پاسخ و متغیرهای مستقل عبارت است از:

$$y_{i,j} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{i,j} \qquad i = 1, 2, ..., \qquad (1)$$

که در آن متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 است. مقادیر متغیر تصادفی x مقادیری ثابت است. $y_{i,j}$ مقدار متغیر پاسخ را در سطح iام متغیر x در نمونه‌ی j نشان می‌دهد. محققین مقادیر x را در فاز ۲ به گونه‌یی کد کردند[۵] که میانگین مقادیر کد شده برابر صفر شود. این کار باعث می‌شود برآوردکننده‌های حداقل مربعات عرض از مبدأ و شیب برای هر نمونه از یکدیگر مستقل شوند. بعد از کد کردن مقادیر x آن‌ها مدل جایگزین مدل اصلی را به‌صورت رابطه‌ی ۲ معرفی کردند.

$$y_{i,j} = B_0 + B_1 X'_i + \varepsilon_{i,j} \qquad i = 1, 2, ..., \qquad (2)$$

که در آن $X'_i = X_i - \bar{X}$ و $B_1 = A_1$، $B_0 = A_0 + A_1\bar{X}$ است. برآوردکننده‌های حداقل مربعات و B_1 و σ^2 برای نمونه‌ی jام عبارت است از:

$$b_{0j} = \bar{y}_i,$$

$$b_{1j} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx(j)}},$$

$$MSE_j = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - b_{1j}x'_i - b_{0j})^2. \qquad (3)$$

در این روش از نمودارهای کنترل تک‌متغیره‌ی مجزا، بدون مشکلی که در صورت همبسته بودن برآوردکننده‌ها حاصل خواهد شد، استفاده شده است. روش پیشنهادی این محققین در فاز ۲ برای کشف شیفت در پارامترهای مدل، استفاده از سه نمودار کنترل EWMA برای پایش عرض از مبدأ، شیب و پراکندگی خطا بود که در این مقاله از دو نمودار اول برای پایش عرض از مبدأ و شیب استفاده می‌شود. EWMA عرض از مبدأ و شیب به‌ترتیب با استفاده از روابط ۴ و ۵ محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{EWMA}_I(j) = \lambda_I b_{0j} + (1-\lambda_I)\mathrm{EWMA}_I(j-1), \qquad (4)$$

$$\mathrm{EWMA}_S(j) = \lambda_S b_{1j} + (1-\lambda_S)\mathrm{EWMA}_S(j-1). \qquad (5)$$

همچنین EWMA_I و EWMA_S از توزیع نرمال با پارامترهای زیر تبعیت می‌کنند:

$$\mathrm{EWMA}_I \sim N\left(B_0, \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\lambda_I}{2-\lambda_I}\right),$$

$$\mathrm{EWMA}_S \sim N\left(B_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\cdot\frac{\lambda_S}{2-\lambda_S}\right).$$

حدود کنترل بالا و پایین برای نمودار EWMA_I به‌صورت $B_0 \pm L_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}$ و برای نمودار EWMA_S به‌صورت $B_1 \pm L_S\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{XX}}}$ تعریف می‌شود. آماره‌ی سوم پیشنهادی[5] به‌صورت رابطه‌ی ۶ بود که در این مقاله براساس روش زو و همکاران[24] آماره‌ی جدید جایگزین می‌شود.

$$\mathrm{EWMA}_E(j) = \max\{\lambda_E \ln(MSE_j) + (1-\lambda_E)\mathrm{EWMA}_E(j-1), \ln(\sigma_0^2)\}. \quad (6)$$

که در آن $(0 < \lambda_I, \lambda_S, \lambda_E < 1)$ پارامترهای ثابت هموارسازی است و B_0 و B_1 به‌ترتیب بیانگر پارامتر عرض از مبدأ و شیب است. L_I و L_S به‌ترتیب نشانگر ضریب حدود کنترل برای نمودارهای عرض از مبدأ و شیب است و n پارامتر اندازه نمونه است.

$$\mathrm{EWMA}_I(0) = B_0, \mathrm{EWMA}_S(0) = B_1, \mathrm{EWMA}_E(0) = \ln\sigma_0^2$$

۲.۲. طراحی نمودار EWMA_۳ با استفاده از آماره‌ی زو

در این مقاله بر طراحی تطبیقی نمودار کنترل EWMA_۳ تمرکز داریم، اما به‌دلیل این که آماره‌ی کیم و همکاران[5] برای پایش پراکندگی خطا توزیع مشخصی ندارد، به‌جای استفاده از آماره‌ی فوق یک آماره‌ی جدید[24] برای پایش پراکندگی خطا پیشنهاد می‌شود.

$$z_j(\sigma) = \phi^{-1}\{F[(n-p)\sigma_j^2/\sigma^2]; n-p\}$$
$$\mathrm{EWMA}_E(j) = \lambda_E z_j(\sigma) + (1-\lambda_E)\mathrm{EWMA}_E(j-1),$$
$$\mathrm{EWMA}_E \sim N\left(0, \frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}\right),$$
$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-p}\left(y_j - X\hat{\beta}_j\right)^T\left(y_j - X\hat{\beta}_j\right),$$
$$\hat{\beta}_j = \left(X'X\right)^{-1}X^T y_j. \quad (7)$$

در رابطه‌ی ۷، ϕ^{-1} بیانگر معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد، $F(0, v)$ تابع توزیع مربع‌کای با v درجه آزادی، و X ماتریس طراحی است که شامل مقادیر مشاهدات است و یک ماتریس $n \times p$ است.

در نمودار کنترل پیشنهادی برای پایش انحراف معیار خطا، هنگامی که فرایند تحت کنترل آماری است، توزیع $z_j(\sigma)$ مستقل از n است. از طرف دیگر حدود کنترل تحت تأثیر اندازه نمونه نخواهد بود و طراحی نمودار کنترل به‌سادگی انجام می‌شود. همچنین نمودار کنترل پیشنهادی به کاهش پراکندگی خطا حساس است در صورتی که نمودار پیشنهادی کیم و همکاران[5] قادر به کشف شیفت کاهشی در انحراف معیار خطا نیست. هنگامی که فرایند در حالت خارج از کنترل است، آماره‌یی که برای پایش پراکندگی خطا استفاده می‌شود به $\frac{z_j(\sigma)}{\delta_2}$ تغییر می‌کند. δ_2 بیانگر شیفت رخ داده در انحراف معیار خطا در حالت خارج از کنترل است. در نظرگرفتن این موضوع مهم است که در رابطه‌ی $z_j(\sigma)$، عبارت $[(n-p)\hat{\sigma}_j^2/\sigma^2]$ دارای توزیع χ^2_{n-p} است. رابطه‌ی ۸ بیانگر احتمال حالتی است که آماره‌ی $\frac{z_j(\sigma)}{\delta_2}$ درون محدوده‌ی کنترل قرار گرفته است.

$$F(F^{-1}(\phi(\delta_2 L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2)/\delta_2^2; n-2) - F(F^{-1}(\phi(-\delta_2 L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2/\delta_2^2; n-2), \quad (8)$$

$F(.)$ تابع توزیع تجمعی مربع کای است که در محاسبات زنجیره‌ی مارکوف[27] استفاده شده است. برای محاسبه‌ی درجه‌ی آزادی، چون در رگرسیون خطی ساده دو پارامتر B_0 و B_1 تخمین زده می‌شود، درجه‌ی آزادی توزیع مربع کای برابر با $n-2$ است.

۳. نمودار کنترل EWMA_۳ تطبیقی VSI

در نمودارهای کنترل تطبیقی با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر، موقعیت نمونه‌ی فعلی فاصله‌ی نمونه‌گیری برای نمونه‌ی بعدی را تعیین می‌کند. نمودارهای کنترل EWMA_I، EWMA_S، EWMA_E هرکدام به دو منطقه تقسیم می‌شوند: ۱. ناحیه‌ی بین حد هشدار بالا و حد هشدار پایین که «منطقه‌ی مرکزی» نامیده می‌شود؛ ۲. ناحیه‌ی بین حد کنترل پایین و حد هشدار پایین یا ناحیه‌ی بین حد هشدار بالا و حد کنترل بالا که «منطقه‌ی هشدار» نامیده می‌شود.

حدود منطقه‌ی مرکزی و هشدار ۳ نمودار کنترل EWMA برای عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار به‌ترتیب در روابط زیر نشان داده شده است:

منطقه‌ی مرکزی نمودار کنترل عرض از مبدأ:

$$R_{I_1} = (B_0 - W_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}, B_0 + W_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}) \quad (9)$$

منطقه‌ی هشدار نمودار کنترل عرض از مبدأ:

$$R_{I_2} = (B_0 - L_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}, B_0 - W_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}) \cup (B_0 + W_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}, B_0 + L_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}) \quad (10)$$

منطقه‌ی مرکزی نمودار کنترل شیب:

$$R_{S_1} = (B_1 - W_s\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}, B_1 + W_s\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}) \quad (11)$$

منطقه‌ی هشدار نمودار کنترل شیب:

$$R_{S_2} = (B_1 - L_s\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}, B_1 - W_s\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}) \cup (B_1 + W_s\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}, B_1 + L_s\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}), \quad (12)$$

منطقه‌ی مرکزی نمودار کنترل انحراف معیار:

$$R_{E_1} = (-W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}, W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}), \quad (13)$$

منطقه‌ی هشدار نمودار کنترل انحراف معیار:

$$R_{E_2} = (-L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}, -W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}) \cup (W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}, L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}). \quad (14)$$

در روش تطبیقی پیشنهادی ۴ فاصله‌ی نمونه‌گیری به‌صورت $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ تعریف شده است.

اگر آماره‌های EWMA_I، EWMA_S، EWMA_E درون مناطق مرکزی قرار بگیرد فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی باید بلند انتخاب شود (t_4). اگر دو آماره درون منطقه‌ی مرکزی و دیگری درون منطقه‌ی هشدار قرار بگیرد فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی (t_3) انتخاب می‌شود. اگر یکی از آماره‌ها درون منطقه‌ی مرکزی و دو تای دیگر درون منطقه‌ی هشدار قرار بگیرد فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی (t_2) است. اگر سه آماره درون منطقه‌ی هشدار قرار بگیرد فاصله‌ی نمونه‌گیری بعدی کوتاه (t_1) خواهد بود. P_iها احتمالات متناظر با وقوع زمان‌های تعریف شده است که احتمال وقوع t_4 با p_1، t_3 با $p_4+p_3+p_2$ و احتمال وقوع t_2 با $p_7+p_6+p_5$ و t_1 با p_8 محاسبه می‌شود. احتمالات متناظر با زمان‌های فوق به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ است. در این بخش فقط نتایج نهایی حاصل از محاسبه‌ی احتمالات قید شده است. برای آگاهی از نحوه‌ی محاسبه‌ی احتمالات به پیوست الف مراجعه شود.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{2\phi(W_I)-1}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(W_S)-1}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(W_E)-1}{2\phi(L_E)-1}\\
P_2 &= \frac{2\phi(W_I)-1}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(L_S)-2\phi(W_S)}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(W_E)-1}{2\phi(L_E)-1}\\
P_3 &= \frac{2\phi(W_I)-1}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(W_S)-1}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(L_E)-2\phi(W_E)}{2\phi(L_E)-1}\\
P_4 &= \frac{2\phi(L_I)-2\phi(W_I)}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(W_S)-1}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(W_E)-1}{2\phi(L_E)-1}\\
P_5 &= \frac{2\phi(W_I)-1}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(L_S)-2\phi(W_S)}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(L_E)-2\phi(W_E)}{2\phi(L_E)-1}\\
p_6 &= \frac{2\phi(L_I)-2\phi(W_I)}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(L_S)-2\phi(W_S)}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(W_E)-1}{2\phi(L_E)-1}\\
P_7 &= \frac{2\phi(L_I)-2\phi(W_I)}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(W_S)-1}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(L_E)-2\phi(W_E)}{2\phi(L_E)-1}\\
P_8 &= \frac{2\phi(L_I)-2\phi(W_I)}{2\phi(L_I)-1}.\frac{2\phi(L_S)-2\phi(W_S)}{2\phi(L_S)-1}.\frac{2\phi(L_E)-2\phi(W_E)}{2\phi(L_E)-1}
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

۱.۳. طراحی نمودار FSI ۳_EWMA

در این نوشتار به‌منظور ساده کردن محاسبات، احتمال این که آماره‌های EWMA_I، EWMA_S و EWMA_E درون منطقه‌ی مرکزی قرار بگیرند ــ به شرط آن که فرایند تحت کنترل آماری باشد، یا به‌عبارتی هر ۳ آماره داخل حدود کنترل قرار گیرند ــ برابر فرض شده است.

$$
\begin{aligned}
&p(|\mathrm{EWMA}_I| < W_I \mid |\mathrm{EWMA}_I| < L_I\ , \delta_1 = 0)\\
&\quad = p(|\mathrm{EWMA}_S| < W_S \mid |\mathrm{EWMA}_S| < L_s\ , \delta_2 = 0)\\
&\quad = p(|\mathrm{EWMA}_E| < W_E \mid |\mathrm{EWMA}_E| < L_E\ , \delta_3 = 0)
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

رابطه‌ی ۱۶ دلالت بر این موضوع دارد که:

$$
L_I = L_S = L_E = L, \qquad W_I = W_S = W_E = W,
$$
$$
\lambda_I = \lambda_S = \lambda_E = \lambda
$$

اگر $W_I = 0$، $W_E = W_S$ و $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_0$، آنگاه نمودار VSI به نمودار FSI با فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت t_0 تبدیل خواهد شد.

۲.۳. مقایسه‌ی نمودارهای کنترل VSI و FSI

نمودارهای کنترل را باید تحت شرایط برابر با یکدیگر مقایسه کرد. نمودارهای کنترل VSI و FSI با متوسط فاصله‌ی نمونه‌گیری برابر در حالت تحت کنترل با هم مقایسه می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
E\left[\begin{array}{l} t_m \,|\mathrm{EWMA}_I| < L, |\mathrm{EWMA}_S| < L, |\mathrm{EWMA}_E| \\ < L \,|\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0 \end{array}\right] &= t_0\\
t_2.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_1} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_1} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_1} \,|\delta_3 = 0)&\\
+ t_3.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_1} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_2} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_1} \,|\delta_3 = 0)&\\
+ t_3.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_1} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_1} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_2} \,|\delta_3 = 0)&\\
+ t_3.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_2} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_1} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_1} \,|\delta_3 = 0)&\\
+ t_2.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_2} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_2} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_1} \,|\delta_3 = 0)&\\
+ t_2.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_2} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_1} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_2} \,|\delta_3 = 0)&\\
+ t_2.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_1} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_2} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_2} \,|\delta_3 = 0)&\\
+ t_1.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_2} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_2} \,|\delta_2 = 0)&\\
.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_2} \,|\delta_3 = 0) &= t_0
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

اگر زمان‌های تعریف شده و احتمالات محاسبه‌شده در رابطه‌ی ۱۵ را در رابطه‌ی ۱۷ جایگزین کنیم، یک معادله‌ی درجه ۳ به دست می‌آید که براساس آن می‌توان حدود هشدار را محاسبه کرد.

$$
\begin{aligned}
&\phi(w)^3\,[8t_4 - 24t_3 + 24t_2 - 8t_1]\\
&+\phi(w)^2\left[\begin{array}{l} -12t_4 + 24\phi(l).t_3 + 24t_3 - 48\phi(l).t_2 \\ -12t_2 + 24\phi(l).t_1 \end{array}\right]\\
&+\phi(w)\left[\begin{array}{l} 6t_4 - 24\phi(l).t_3 - 6t_3 + 24\phi(l)^2.t_2 + 24\phi(l).t_2 \\ -24\phi(l)^2.t_1 \end{array}\right]\\
&-t_4 + 6\phi(l).t_3 - 12\phi(l)^2.t_2 + 8\phi(l)^3.t_1\\
&-t_0\left[8\phi(l)^3 - 12\phi(l)^2 + 6\phi(l) - 1\right] = 0
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

$\phi(.)$ بیان‌گر تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. برای محاسبه‌ی حدود هشدار علاوه بر استفاده از رابطه‌ی ۱۸ به محدودیت‌های زیر نیاز داریم:

$$
0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_0 < t_4 < \infty
$$

۴. ارزیابی عملکرد

سرعت شناسایی شیفت‌های فرایند در نمودار کنترل، کارایی آماری نمودار نامیده می‌شود. برای نمودارهای کنترل با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر، سرعت کشف شیفت توسط AATS اندازه‌گیری می‌شود. AATS متوسط زمان تا هشدار توسط حداقل یکی از سه نمودار کنترل است. T_{SC_i} بیان‌گر مدت زمانی است که نمودار تحت کنترل باقی می‌ماند و دارای توزیع نمایی با پارامتر γ_i است.

$$T_{SC_i} = \exp(-\gamma_i t), \qquad t > ۰, \quad i = ۱, ۲, ۳ \tag{۱۹}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین انحراف با دلیل اتفاق بیفتد عبارت است از:

$$T_۱ = \min(T_{SC_۱}, T_{SC_۲}, T_{SC_۳})$$
$$T_۱ = \exp(\gamma_۱ + \gamma_۲ + \gamma_۳)$$
$$AATS = ATC - \frac{۱}{\gamma_۱ + \gamma_۲ + \gamma_۳} \tag{۲۰}$$

متوسط زمان در یک دوره (ATC) عبارت است از متوسط زمان از شروع فرایند تا موقعی که حداقل یک هشدار درست از یک یا هر سه نمودار پیشنهادی به دست آید. برای محاسبه‌ی ATC از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف استفاده می‌شود. بر مبنای آن که فرایند تحت کنترل یا خارج از کنترل است (حالت خارج از کنترل می‌تواند به‌ازای شیفت در یک یا بیش از یک پارامتر عرض از مبدأ، شیب و پراکندگی خطا اتفاق بیفتد) و محل قرارگیری سه آماره‌ی EWMA در مناطق مرکزی و هشدار مطابق جدول ۱، تعداد ۶۴ حالت ایجاد می‌شود.

جدول ۱. حالات مختلف ماتریس احتمال گذار.

حالت	انحراف با دلیل ۱	هشدار $\mathbf{EWMA}_I$	انحراف با دلیل ۲	هشدار $\mathbf{EWMA}_S$	انحراف با دلیل ۳	هشدار $\mathbf{EWMA}_E$
۱	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر، مرکزی
۲	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر، هشدار	خیر	خیر، مرکزی
۳	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر، هشدار
۴	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر، هشدار	خیر	خیر، هشدار
۵	خیر	خیر، هشدار	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر،مرکزی
۶	خیر	خیر،هشدار	خیر	خیر، هشدار	خیر	خیر، مرکزی
۷	خیر	خیر، هشدار	خیر	خیر، مرکزی	خیر	خیر، هشدار
۸	خیر	خیر، هشدار	خیر	خیر، هشدار	خیر	خیر، هشدار
۹	خیر	خیر، مرکزی	بله	خیر، مرکزی	خیر	خیر، مرکزی
۱۰	خیر	خیر، مرکزی	بله	خیر، هشدار	خیر	خیر، مرکزی
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۵۷	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، مرکزی
۵۸	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، مرکزی
۵۹	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، هشدار
۶۰	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، هشدار
۶۱	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، مرکزی
۶۲	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، مرکزی
۶۳	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، مرکزی	بله	خیر، هشدار
۶۴	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، هشدار	بله	خیر، هشدار

۱.۴. محاسبه‌ی ATC برای روش پیشنهادی

$$ATC = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-۱}\mathbf{t}$$
$$\mathbf{b}' = (p_۱, p_۲, p_۳, p_۴, p_۵, p_۶, p_۷, p_۸, ۰, ۰, ..., ۰) \tag{۲۱}$$

$\mathbf{b}'$ ماتریس احتمال اولیه برای حالت‌های ۱, ۲, ..., ۶۴ است که در آن فاصله‌ی نمونه‌گیری $t_۴$ دارای احتمال $p_۱$ است. احتمالات $p_۲$ و $p_۳$ و $p_۴$ متعلق به فاصله‌ی نمونه‌گیری $t_۳$، و احتمالات $p_۵$ و $p_۶$ و $p_۷$ متعلق به فاصله‌ی نمونه‌گیری $t_۲$، و احتمال $p_۸$ متعلق به $t_۱$ است. $\mathbf{I}$ یک ماتریس همانی ۶۴ × ۶۴ است و $\mathbf{Q}$ ماتریس احتمال گذار است که درایه‌های آن با احتمال گذار $p_{ij}(t_m)$ از $i = ۱, ۲, ..., ۶۴$ به $j = ۱, ۲, ..., ۶۴$ تعیین می‌شوند. t بردار فاصله‌ی نمونه‌گیری برای ۱-۶۴ حالت تعریف شده در جدول ۱ است و مطابق با توضیحات مطرح شده در رابطه با تقسیم‌بندی نمودارهای کنترل به مناطق مرکزی و هشدار در بخش ۳ می‌توان برای هریک از ۶۴ حالت زمان متناظر را تعیین کرد. در جدول ۱ به تعدادی از حالات ماتریس احتمال گذار اشاره شده است. این حالات با در نظرگرفتن وجود یا عدم وجود انحراف با دلیل در مناطق مرکزی یا هشدار بیان شده است. در این قسمت محاسبه‌ی ماتریس احتمال اولیه با توجه به احتمالات محاسبه شده امکان‌پذیر است در حالی که در تحقیقات پیشین روشی برای محاسبه‌ی این احتمال ارائه نشده و از مقدار احتمال اولیه‌ی سایر مقالات استفاده شده است.

برای مثال، احتمال گذار از درایه‌ی ۱ به درایه‌ی ۳ با فاصله‌ی نمونه‌گیری $t_۴$ چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} p_{۱,۳}(t_۴) =& p(T_{AC_۱} > t_۴).p(T_{AC_۲} > t_۴).p(T_{AC_۳} > t_۴) \\ & .p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_۱} \,|\delta_۱ = ۰) \\ & .p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_۱} \,|\delta_۲ = ۰) \\ & .p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_۲} \,|\delta_۳ = ۰) \\ =& e^{-\gamma_۱ t_۴}.e^{-\gamma_۲ t_۴}.e^{-\gamma_۳ t_۴}.(۲\phi(L) - ۲\phi(W))^۲.(۲\phi(W) - ۱) \end{aligned}$$

به‌منظور آگاهی از محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار به پیوست ب مراجعه شود.

۵. مثال عددی

در این بخش برای اعتبارسنجی نمودارکنترل پیشنهادی و محاسبه‌ی متوسط زمان تا هشدار تعدیل شده نمودار EWMA_۳ تطبیقی پیشنهادی از یک مثال عددی استفاده می‌شود. مثال عددی استفاده شده در این بخش همان مثال مقاله‌ی کیم و همکاران[۶] است که به‌صورت $y = ۳ + ۲x_i + \varepsilon_{ij}$ مطرح شده و در آن ε_{ij} متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ است. مقادیر ثابت x_i برابر است با: ۲، ۴، ۶ و ۸ که با استفاده از رابطه‌ی $X_i' = X_i - \bar{X}$ پروفایل خطی ساده زیر به دست می‌آید:

$$y = ۱۳ + ۲x_i' + \varepsilon_{ij}$$

پارامترهای حدود کنترل سه نمودار EWMA به‌گونه‌یی شبیه‌سازی شده که مقدار کل میانگین طول دنباله‌ی تحت کنترل برابر ۲۰۰ به دست آید. به‌همین منظور مقدار به دست آمده از شبیه‌سازی برای L_I، L_S، L_E برابر ۴ است. گفتنی است پارامتر

جدول ۲. مقایسه‌ی AATS نمودارهای کنترل VSI و FSI در نمودار کنترل پیشنهادی EWMA_۳.

		W	L	λ	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_0	ATC	AATS	درصد زمان ذخیره شده
۱	VSI	۱٫۳۶۴	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۰۳	۰٫۹۴۶	۱٫۱۲۹	۲٫۱۴۱	۱٫۶۳۴	۶٫۸۸۴	۰٫۶۳۴	۹۷٫۷۹۰
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۶۳۴	۱٫۶۳۴	۱٫۶۳۴	۱٫۶۳۴	۱٫۶۳۴	۱۸٫۴۲۱	۱۲٫۱۷۱	
۲	VSI	۱٫۶۴۹	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۰۸	۰٫۹۶۱	۱٫۴۱۸	۲٫۳۲۸	۱٫۷۴۲	۷٫۱۱۵	۰٫۸۶۵	۹۲٫۳۴۴
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۷۴۲	۱٫۷۴۲	۱٫۷۴۲	۱٫۷۴۲	۱٫۷۴۲	۱۷٫۵۴۹	۱۱٫۲۹۹	
۳	VSI	۱٫۳۵۳	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۱۴	۰٫۹۹۱	۱٫۱۲۰	۲٫۲۹۸	۱٫۵۵۱	۷٫۱۲۴	۰٫۸۷۴	۹۳٫۳۰۶
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۵۵۱	۱٫۵۵۱	۱٫۵۵۱	۱٫۵۵۱	۱٫۵۵۱	۱۹٫۳۱۲	۱۳٫۰۶۲	
۴	VSI	۱٫۳۵۹	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۰۲	۰٫۹۸۵	۱٫۲۴۳	۲٫۱۴۷	۱٫۸۱۵	۷٫۱۲۹	۰٫۸۷۹	۹۱٫۹۵۱
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۸۱۵	۱٫۸۱۵	۱٫۸۱۵	۱٫۸۱۵	۱٫۸۱۵	۱۷٫۱۸۱	۱۰٫۹۳۱	
۵	VSI	۱٫۳۵۳	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۱۴	۰٫۹۹۱	۱٫۰۸۳	۲٫۲۹۷	۱٫۵۳۸	۷٫۱۳۷	۰٫۸۸۷	۹۳٫۳۰۶
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۵۳۸	۱٫۵۳۸	۱٫۵۳۸	۱٫۵۳۸	۱٫۵۳۸	۱۹٫۵۰۶	۱۳٫۲۵۶	
۶	VSI	۱٫۶۲۹	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۰۷	۰٫۹۵۵	۱٫۳۷۱	۲٫۰۷۸	۱٫۵۵۲	۷٫۲۸۹	۱٫۰۳۹	۹۲٫۰۳۱
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۵۵۲	۱٫۵۵۲	۱٫۵۵۲	۱٫۵۵۲	۱٫۵۵۲	۱۹٫۲۹۰	۱۳٫۰۴۰	
۷	VSI	۱٫۳۴۱	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۰۱	۰٫۹۹۱	۱٫۱۸۲	۲٫۰۸۰	۱٫۸۱۴	۷٫۴۰۲	۱٫۱۵۲	۸۹٫۴۶۹
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۸۱۴	۱٫۸۱۴	۱٫۸۱۴	۱٫۸۱۴	۱٫۸۱۴	۱۷٫۱۹۰	۱۰٫۹۴	
۸	VSI	۱٫۲۹۸	۴	۰٫۲	۴	۰٫۱۰۷	۰٫۹۴۲	۱٫۳۰۸	۲٫۳۹۳	۱٫۷۲۸	۷٫۴۹۴	۱٫۲۴۴	۸۹٫۰۶۸
	FSI	-	۴	۰٫۲	۴	۱٫۷۲۸	۱٫۷۲۸	۱٫۷۲۸	۱٫۷۲۸	۱٫۷۲۸	۱۷٫۶۳۴	۱۱٫۳۸۴	

هموارسازی در هر سه نمودار کنترل EWMA برابر با ۰٫۲ در نظر گرفته شده است. مقدار پارامتر حدود هشدار برای هر سه نمودار، طبق محدودیت‌های فاصله‌ی نمونه‌گیری عبارت است از:

$$t_1 = ۰٫۱ - ۰٫۵, \quad t_2 = ۰٫۵ - ۱, \quad t_3 = ۱ - ۱٫۵, \quad t_4 = ۲ - ۲٫۵$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = ۱, \quad \gamma_1 = ۰٫۰۳, \quad \gamma_2 = ۰٫۰۶, \quad \gamma_3 = ۰٫۰۷$$

δ_iها به‌ترتیب بیان‌گر میزان تغییر رخ داده در پارامترهای عرض از مبدأ، شیب و پراکندگی خطاست. براساس نتایج مندرج در جدول ۲ که برای ۸ حالت مختلف، به‌ازای مقادیر مختلف داده شده به t_iها به دست آمده، مشاهده می‌شود که در تمامی حالات مقدار AATS در حالت VSIبسیار کم‌تر از حالت FSI است.

۶. نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در این نوشتار یک نمودار کنترل EWMA_۳ تطبیقی با ۴ فاصله‌ی نمونه‌گیری ارائه شد. روش پیشنهادی از ۳ نمودار کنترل مجزا برای پایش عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار خطا استفاده می‌کند و قادر به تشخیص پارامتر عامل هشدار است، در حالی که روش پیشنهادی لی و وانگ از یک نمودار کنترل ترکیبی استفاده می‌کند و قادر به تشخیص پارامتر عامل هشدار نیست. از دیگر تفاوت‌های این دو مطالعه می‌توان به آماره‌ی پراکندگی خطای پیشنهادی اشاره کرد که در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل براساس روابط ۷ و ۸ توزیع مشخصی دارد. همچنین در این مقاله روابطی برای محاسبه‌ی حدود هشدار و ماتریس احتمال اولیه ارائه شده است.

محاسبه‌ی متوسط زمان تا هشدار تعدیل شده در نمودار کنترل تطبیقی VSI EWMA_۳ با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف از دیگر نوآوری‌های این مقاله است. روش پیشنهادی مبتنی بر فواصل نمونه‌گیری متغیر، کارایی روش مبتنی بر فاصله‌ی نمونه‌گیری ثابت را از طریق افزایش سرعت شناسایی شیفت‌ها در عرض از مبدأ، شیب و پراکندگی خطا بهبود بخشید. نمودار کنترل VSI EWMA_۳ براساس مثال عددی همیشه بهتر از نمودار کنترل FSI EWMA_۳ در شناسایی شیفت‌ها عمل می‌کند و این نتیجه از طریق مقایسه‌ی AATS نمودارها که با استفاده از رویکرد زنجیره‌ی مارکوف محاسبه شد، به دست آمد. مقایسه‌ی عملکرد روش تطبیقی پیشنهادی با سایر روش‌های تطبیقی موجود در ادبیات پایش پروفایل‌ها مانند روش لی و وانگ را می‌توان در مطالعات آتی بررسی کرد. همچنین مطالعه در زمینه‌ی اندازه نمونه‌ی متغیر (VSS) یا اندازه و فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر (VSSI) یا پارامترهای متغیر (VP) نمودار کنترل EWMA_۳ می‌تواند موضوعاتی برای تحقیقات آتی محسوب شود.

فهرست علائم

EWMA_I: میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش عرض از مبدأ؛

EWMA_S: میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش شیب؛

EWMA_E: میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش پراکندگی خطا؛

$\phi(۰)$: تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد؛

$F(۰, \upsilon)$: تابع توزیع تجمعی مربع کای با υ درجه آزادی؛

ATC: متوسط زمان از شروع فرایند تا زمانی که حداقل یک هشدار درست از یک یا هر سه نمودار پیشنهادی به دست آید؛

AATS: متوسط زمان خارج ازکنترل شدن فرایند تا هشدار توسط حداقل یکی از سه نمودار کنترل؛

FSR: نرخ نمونه‌گیری ثابت؛

VSR: نرخ نمونه‌گیری متغیر؛

VSS: اندازه نمونه‌ی متغیر؛

VSI: فاصله‌ی بین دو بار نمونه‌گیری متغیر؛

VSSI: اندازه نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر؛

MEWMA: میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره.

منابع (References)

1. Robert, S.W. "Control chart tests based on geometric moving averages", *Technometrics*, **1**, pp. 239-250 (1959).
2. Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications", *Technometrics*, **48**, pp. 380-391 (2004).
3. Mahmoud, M.A., Parker, P.A., Woodall, W.H., Hawkins, D.M. "A change point method for linear profile data", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**, pp. 247-268 (2007).
4. Kang, L. and Albin, S.L. "On–line monitoring when the process yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, **32**, pp. 418-426 (2000).
5. Kim, K., Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "On the monitoring of linear profiles", *Journal of Quality Technology*, **35**, pp. 317-328 (2003).
6. Noorossana, R., Fatemi, S.A. and Zerehsaz, Y. "Phase II monitoring of simple linear profiles with random explanatory variables", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **76**, pp. 779-787 (2015).
7. Adibi, A., Montgomery, D.C. and Borror, C.M. "Phase II monitoring of linear profiles using a P–value approach", *International Journal of Quality Engineering and Technology*, **4**, pp. 97-106 (2014).
8. Riaz, M. and Touqeer, F. "On the performance of linear profile methodologies under runs rules schemes", *Published online in Quality and Reliability Engineering International*, **31**(8), pp. 1473-1482 (2014).
9. Aly, A.A., Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "A comparison of the performance of phase II simple linear profile control charts when parameters are estimated", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **44**, pp. 1432-1440 (2015).
10. Mahmoud, M.A., Morgan, J.P. and Woodall, W.H. "The monitoring of simple linear regression profiles with two observations per sample", *Journal of Applied Statistics*, **37**, pp. 1249-1263 (2010).
11. Woodall, W.H., Spitzner, D.J., Montgomery, D.C. and Gupta, S. "Using control charts to monitor process and product quality profiles", *Journal of Quality Technology*, **36**, pp. 309-320 (2004).
12. Woodall, W.H. "Current research on profile monitoring", *Produção*, **17**, pp. 420-425 (2007).
13. Noorossana, R., Saghaei, A. and Amiri, A., *Statistical Analysis of Profile Monitoring*, John Wiley & Sons (2011).
14. Prabhu, S.S., Runger, G.C. and Keats, J.B. "An adaptive sample size $\bar{X}$ chart", *International Journal of Production Research*, **31**, pp. 2895-2909 (1993).
15. Annadi, H.P., Keats, J.B., Runger, G.C. and Montgomery, D.C. "An adaptive sample size CUSUM control chart", *International Journal of Production Research*, **33**, pp. 1605-1616 (1995).
16. Reynolds, M.R., Amin, R.W., Arnold, J.C. and Nachlas, J.A. "$\bar{X}$-charts with variable sampling interval", *Technometrics*, **30**, pp. 181-192 (1988).
17. Reynolds, M.R. "Optimal variable sampling interval control charts", *Sequential Analysis*, **8**, pp. 361-379 (1989).
18. Runger, G.C. and Pignatiello, J.J. "Adaptive sampling for process control", *Journal of Quality Technology*, **23**, pp. 133-155 (1991).
19. Baxley, R.V. "An application of variable sampling interval control charts", *Journal of Quality Technology*, **27**, pp. 275-282 (1996).
20. Reynolds, M.R. and Arnold, J.C. "EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals", *IIE Transactions*, **33**, pp. 511-530 (2001).
21. Abdella, G.M., Yang, K. and Alaeddini, A. "Multivariate adaptive approach for monitoring simple linear profiles", *International Journal of Data Analysis Techniques and Strategies*, **6**, pp. 2-14 (2014).
22. Kazemzadeh, R.B., Amiri, A., Kouhestani, B. "Monitoring simple linear profiles with adaptive T^2 control charts in phase II", *Sharif Journal of Science and Technology-Industrial Engineering and Management*, **1-30**,PP. 73-85 (2015).
23. Amiri, A. and Hasani Anbuhi, M. "A new adaptive control approach for monitoring multiple linear profiles", *Sharif Journal of Science and Technology-Industrial Engineering and Management*, **30-1**(1/1), pp. 113-119 (2014). (In Persian)
24. Zou, C. Tsung, F. Wang, Z. "Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average schemes", *Technometrics*, **49**, pp. 395-408 (2007).
25. Zhang, J., Li, Z. and Wang, Z. "Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles", *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, pp. 1440-1448 (2009).
26. Li, Z. and Wang, Z. "An exponentially weighted moving average scheme with variable sampling intervals for monitoring linear profiles", *Computers & Industrial Engineering*, **59**, pp. 630-637 (2010).
27. Runger G.C. and Prabhu, S.S. "A markov chain model for the multivariate exponentially weighted moving averages control chart", *Journal of the American Statistical Association*, **91**, pp. 1701-1706 (1996).

پیوست

الف) احتمالات لازم برای محاسبه‌ی وقوع احتمال زمان‌های متفاوت در روش فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر

$$P_1 = P(B_0 - W_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}} < \text{EWMA}_I <$$

$$B_0 + W_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}} | B_0 - L_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}} <$$

$$\text{EWMA}_I < B_0 + L_I\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}, \delta_1 = 0)$$

$$.P(B_1 - W_S\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{XX}}}) < \mathrm{EWMA}_S <$$
$$B_1 + W_S\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}|B_1 - L_S\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}} <$$
$$\mathrm{EWMA}_S < B_1 + L_S\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{xx}}}, \delta_2 = 0)$$
$$P(-W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}) < \mathrm{EWMA}_E < W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}$$
$$|L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}} < \mathrm{EWMA}_E < L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{(2-\lambda_E)}}, \delta_2 = 0)$$
$$= \frac{2\phi(W_I)-1}{2\phi(L_I)-1}\cdot\frac{2\phi(W_S)-1}{2\phi(L_S)-1}\cdot\frac{2\phi(W_E)-1}{2\phi(L_E)-1}$$

محاسبه‌ی سایر احتمالات به طریق مشابه انجام می‌شود.

ب) محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار

در ادامه به محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار می‌پردازیم. در محاسبه‌ی هریک از درایه‌های مذکور پارامترهای η_{I_r}، η_{S_m}، η_{E_n} برای حالت تحت کنترل و پارامترهای β_{I_r}، β_{S_m} و β_{E_n} برای حالت خارج ازکنترل وجود دارند که در ابتدا درخصوص نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها توضیح داده می‌شود و سپس با جایگذاری پارامترهای فوق درایه‌های ماتریس احتمال گذار محاسبه می‌شود.

ηها نشان‌گر احتمالات محاسبه‌شده‌ی نمودارهای EWMA_I، EWMA_S و EWMA_E در مناطق مرکزی و هشدار در حالت تحت کنترل هستند.

$$\eta_{I_1} = P(\mathrm{EWMA}_I \in \text{منطقه مرکزی}|\mathrm{EWMA}_I \sim N$$
$$\left(B_0, \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\lambda_I}{2-\lambda_I}\right))$$
$$\eta_{I_1} = 2\phi(W) - 1$$
$$\eta_{I_2} = P(\mathrm{EWMA}_I \in \text{منطقه هشدار}|\mathrm{EWMA}_I \sim N$$
$$\left(B_0, \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\lambda_I}{2-\lambda_I}\right))$$
$$\eta_{I_2} = 2\phi(L) - 2\phi(W)$$
$$\eta_{S_1} = P(\mathrm{EWMA}_S \in \text{منطقه مرکزی}|\mathrm{EWMA}_S \sim N$$
$$\left(B_1, \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\cdot\frac{\lambda_S}{2-\lambda_S}\right))$$
$$\eta_{S_1} = 2\phi(W) - 1$$
$$\eta_{S_2} = P(\mathrm{EWMA}_S \in \text{منطقه هشدار}\mathrm{EWMA}_S \sim N$$
$$\left(B_1, \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\cdot\frac{\lambda_S}{2-\lambda_S}\right))$$
$$\eta_{S_2} = 2\phi(L) - 2\phi(W)$$
$$\eta_{E_1} = P(\mathrm{EWMA}_E \in \text{منطقه مرکزی}|\mathrm{EWMA}_E \sim N$$
$$\left(0, \frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}\right))$$
$$\eta_{E_1} = 2\phi(W) - 1$$
$$\eta_{E_2} = P(\mathrm{EWMA}_E \in \text{منطقه هشدار}|\mathrm{EWMA}_E \sim N$$
$$\left(0, \frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}\right))$$
$$\eta_{E_2} = 2\phi(L) - 2\phi(W)$$

βها نشان‌گر احتمالات محاسبه شده‌ی نمودارهای EWMA_I، EWMA_S و EWMA_E در مناطق مرکزی و هشدار در حالت خارج ازکنترل هستند.

$$\beta_{I_1} = P(\mathrm{EWMA}_I \in \text{منطقه مرکزی}|\mathrm{EWMA}_I \sim N$$
$$\left(B_0 + \delta_1\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}, \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\lambda_I}{2-\lambda_I}\right))$$
$$\beta_{I_1} = \phi(W+\delta_1) + \phi(W-\delta_1) - 1$$
$$\beta_{I_2} = P(\mathrm{EWMA}_I \in \text{منطقه هشدار}|\mathrm{EWMA}_I \sim N$$
$$\left(B_0 + \delta_1\sigma\sqrt{\frac{\lambda_I}{(2-\lambda_I)n}}, \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\lambda_I}{2-\lambda_I}\right))$$
$$\beta_{I_2} = \phi(L+\delta_1) + \phi(L-\delta_1) - \phi(W+\delta_1) - \phi(W-\delta_1)$$
$$\beta_{S_1} = P(\mathrm{EWMA}_S \in \text{منطقه مرکزی}|\mathrm{EWMA}_S \sim N$$
$$\left(B_1 + \delta_2\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{XX}}}, \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\cdot\frac{\lambda_S}{2-\lambda_S}\right))$$
$$\beta_{S_1} = \phi(W+\delta_2) + \phi(W-\delta_2) - 1$$
$$\beta_{S_2} = P(\mathrm{EWMA}_S \in \text{منطقه هشدار}|\mathrm{EWMA}_S \sim N$$
$$\left(B_1 + \delta_2\sigma\sqrt{\frac{\lambda_S}{(2-\lambda_S)S_{XX}}}, \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\cdot\frac{\lambda_S}{2-\lambda_S}\right)$$
$$\beta_{S_2} = \phi(L+\delta_2) + \phi(L-\delta_2) - \phi(W+\delta_2) - \phi(W-\delta_2)$$

برای نمودار EWMA_E در حالت خارج ازکنترل از آماره‌ی زو و همکاران استفاده شده که در آن احتمال قرارگیری نمونه‌ی درون مناطق مرکزی و هشدار و در حالت خارج ازکنترل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\beta_{E_1} = P(\text{منطقه مرکزی} \in \mathrm{EWMA}_E)$$
$$\begin{bmatrix} F(F^{-1}(\phi(\delta_2 W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2)/\delta_2^2; n-2) \\ -F(F^{-1}(\phi(-\delta_2 W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2/\delta_2^2; n-2) \end{bmatrix}$$
$$\beta_{E_2} = P(\text{منطقه هشدار} \in \mathrm{EWMA}_E)$$
$$\begin{bmatrix} F(F^{-1}(\phi(-\delta_2 W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2)/\delta_2^2; n-2) \\ -F(F^{-1}(\phi(-\delta_2 L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2/\delta_2^2; n-2) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} F(F^{-1}(\phi(\delta_2 L_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2/\delta_2^2; n-2) \\ -F(F^{-1}(\phi(\delta_2 W_E\sqrt{\frac{\lambda_E}{2-\lambda_E}}); n-2)/\delta_2^2; n-2) \end{bmatrix}$$

از روابط فوق در محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار استفاده می‌شود.

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۱ و ستون ۱ تا ۸، با در نظر گرفتن جدول ۲ و با توجه به این که در سطر ۱، نمونه‌ها در ۳ نمودار درون منطقه‌ی مرکزی قرار دارند، فاصله‌ی نمونه‌گیری t_2 خواهد بود. با توجه به عدم وجود انحراف با دلیل و قرارگیری نمونه‌ها در ناحیه‌ی مرکزی یا هشدار درایه‌های مذکور

چنین محاسبه می‌شود:

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} > t_4).p(T_{AC_2} > t_4).p(T_{AC_3} > t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 = 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 = 0) =$$
$$e^{-\gamma_1 t_4}.e^{-\gamma_2 t_4}.e^{-\gamma_3 t_4}.\eta_{I_r}.\eta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad r = 1 - 8$$

درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۱ و ستون ۹ تا ۱۶، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMAS و قرارگیری نمونه‌ها در ناحیه مرکزی یا هشدار چنین محاسبه می‌شود:

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} > t_4).p(T_{AC_2} < t_4).p(T_{AC_3} > t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 \neq 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 = 0) =$$
$$e^{-\gamma_1 t_4}.(1 - e^{-\gamma_2 t_4}).e^{-\gamma_3 t_4}.\eta_{I_r}.\beta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = 9 - 16, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۱ و ستون ۱۷ تا ۲۴، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMA_I و قرارگیری نمونه‌ها در ناحیه‌ی مرکزی یا هشدار از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} < t_4).p(T_{AC_2} > t_4).p(T_{AC_3} > t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 \neq 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 = 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 = 0) =$$
$$(1 - e^{-\gamma_1 t_4}).e^{-\gamma_2 t_4}.e^{-\gamma_3 t_4}.\beta_{I_r}.\eta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = 17 - 24, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2$$

در محاسبه‌ی درایه‌های سطر ۱ و ستون‌های ۲۵ تا ۳۲ ماتریس، انحراف با دلیل در نمودار EWMA_E وجود دارد.

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} > t_4).p(T_{AC_2} > t_4).p(T_{AC_3} < t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 = 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 \neq 0) =$$
$$e^{-\gamma_1 t_4}.e^{-\gamma_2 t_4}.(1 - e^{-\gamma_3 t_4}).\eta_{I_r}.\eta_{S_m}.\beta_{E_n}$$
$$j = 25 - 32, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2$$

درایه‌های سطر ۱ و ستون ۳۳ تا ۴۰ ماتریس احتمال گذار با در نظر گرفتن انحراف با دلیل در دو نمودار EWMA_I و EWMA_S چنین محاسبه می‌شوند:

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} < t_4).p(T_{AC_2} < t_4).p(T_{AC_3} > t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 \neq 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 \neq 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 = 0) =$$
$$(1 - e^{-\gamma_1 t_4}).(1 - e^{-\gamma_2 t_4}).e^{-\gamma_3 t_4}.\beta_{I_r}.\beta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = 33 - 40, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2$$

درایه‌های سطر ۱ و ستون ۴۱ تا ۴۸ ماتریس احتمال گذار با در نظرگرفتن انحراف با دلیل در دو نمودار EWMA_I و EWMA_E چنین محاسبه می‌شوند:

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} < t_4).p(T_{AC_2} > t_4).p(T_{AC_3} < t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 \neq 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 = 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 \neq 0) =$$
$$(1 - e^{-\gamma_1 t_4}).e^{-\gamma_2 t_4}.(1 - e^{-\gamma_3 t_4}).\beta_{I_r}.\eta_{S_m}.\beta_{E_n}$$
$$j = 41 - 48, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2$$

درایه‌های سطر ۱ و ستون ۴۹ تا ۵۶ ماتریس احتمال گذار با در نظرگرفتن انحراف با دلیل در دو نمودار EWMA_S و EWMA_E نیز با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} > t_4).p(T_{AC_2} < t_4).p(T_{AC_3} < t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 = 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 \neq 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 \neq 0) =$$
$$e^{-\gamma_1 t_4}.(1 - e^{-\gamma_2 t_4}).(1 - e^{-\gamma_3 t_4}).\eta_{I_r}.\beta_{S_m}.\beta_{E_n}$$
$$j = 49 - 56, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2$$

درایه‌های سطر ۱ و ستون ۵۷ تا ۶۴ ماتریس احتمال گذار با در نظرگرفتن انحراف با دلیل در سه نمودار EWMA_I، EWMA_S و EWMA_E چنین محاسبه می‌شوند.

$$p_{1,j}(t_4) = p(T_{AC_1} < t_4).p(T_{AC_2} < t_4).p(T_{AC_3} < t_4)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_1 \neq 0).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_2 \neq 0)$$
$$.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_3 \neq 0) =$$
$$(1 - e^{-\gamma_1 t_4}).(1 - e^{-\gamma_2 t_4}).(1 - e^{-\gamma_3 t_4}).\beta_{I_r}.\beta_{S_m}.\beta_{E_n}$$
$$j = 57 - 64, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2$$

احتمالات گذار $p_{2,j}(t_2)$، $p_{3,j}(t_2)$ و $p_{5,j}(t_2)$ با جایگزینی t_3 به‌جای t_4 در $p_{1,j}(t_4)$، و احتمالات گذار $p_{4,j}(t_2)$، $p_{6,j}(t_2)$ و $p_{7,j}(t_2)$ با جایگزینی t_2 به‌جای t_4، و احتمال گذار $p_{8,j}(t_1)$ با جایگزینی t_1 به جای t_4 محاسبه می‌شوند. بنابراین مقادیر احتمالات فوق برای ستون ۱ تا ۶۴ برابر است با مقدار احتمال $p_{1,j}(t_4)$، و فقط با جایگزینی t_iها محاسبه می‌شود.

$$p_{2,j}(t_2) = p_{3,j}(t_2) = p_{4,j}(t_2) = p_{5,j}(t_2) = p_{6,j}(t_2) =$$
$$p_{7,j}(t_2) = p_{8,j}(t_1) = p_{1,j}(t_4) \qquad j = 1 - 64$$

مقدار احتمال $p_{9,j}(t_4)$ برای سطر ۹ و ستون‌های ۱ تا ۸، ۱۷ تا ۳۲، و ۴۱ تا ۴۸ برابر صفر است و دلیل آن وجود انحراف با دلیل در حالت ۹ از جدول ۲ برای نمودار EWMA_S، و عدم وجود این انحراف در نمودار EWMA_S برای حالت‌های ذکر شده است.

$$p_{9,j}(t_4) = 0 \qquad j = 1 - 8, 17 - 32, 41 - 48$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۹ و ستون ۹ تا ۱۶، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMA_S و قرارگیری نمونه‌ها در ناحیه‌ی

مرکزی یا هشدار از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{۹,j}(t_۴) = p(T_{AC_۱} > t_۴).p(T_{AC_۲} > t_۴)$$
$$.p(\text{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ = ۰).p(\text{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ \neq ۰)$$
$$.p(\text{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ = ۰) = e^{-\gamma_۱ t_۴}.e^{-\gamma_۲ t_۴}.\eta_{I_r}.\beta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = ۹ - ۱۶, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۹ و ستون ۳۳ تا ۴۰، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMA_I و EWMA_S از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{۹,j}(t_۴) = p(T_{AC_۱} < t_۴).p(T_{AC_۲} > t_۴)$$
$$.p(\text{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ \neq ۰).p(\text{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ \neq ۰)$$
$$.p(\text{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ = ۰) =$$
$$(۱ - e^{-\gamma_۱ t_۴}).e^{-\gamma_۲ t_۴}.\beta_{I_r}.\beta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = ۳۳ - ۴۰, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۹ و ستون ۴۹ تا ۵۶، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMA_S و EWMA_E از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{۹,j}(t_۴) = p(T_{AC_۱} > t_۴).p(T_{AC_۲} < t_۴)$$
$$.p(\text{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ = ۰).p(\text{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ \neq ۰)$$
$$.p(\text{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ \neq ۰) =$$
$$e^{-\gamma_۱ t_۴}.(۱ - e^{-\gamma_۲ t_۴}).\eta_{I_r}.\beta_{S_m}.\beta_{E_n}$$
$$j = ۴۹ - ۵۶, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۹ و ستون ۵۷ تا ۶۴، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودارهای EWMA_I، EWMA_S و EWMA_E از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{۹,j}(t_۴) = p(T_{AC_۱} < t_۴).p(T_{AC_۲} < t_۴)$$
$$.p(\text{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ \neq ۰).p(\text{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ \neq ۰)$$
$$.p(\text{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ \neq ۰) =$$
$$(۱ - e^{-\gamma_۱ t_۴}).(۱ - e^{-\gamma_۲ t_۴}).\beta_{I_r}.\beta_{S_m}.\beta_{E_n}$$
$$j = ۵۷ - ۶۴, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲$$

به دلیل وجود انحراف با دلیل در نمودار EWMA_S برای حالت‌های ۱۰ تا ۱۶ از جدول ۲، و عدم وجود این انحراف در نمودار EWMA_S برای حالت‌های ۱ تا ۸، ۱۷ تا ۳۲ و ۴۱ تا ۴۸ ازجدول ۲، مقدار احتمال این درایه‌ها صفر است.

$$p_{۱۰,j}(t_۳) = p_{۱۱,j}(t_۳) = p_{۱۲,j}(t_۲) = p_{۱۳,j}(t_۳) = p_{۱۴,j}(t_۲) =$$
$$p_{۱۵,j}(t_۲) = p_{۱۶,j}(t_۱) = ۰$$
$$j = ۱ - ۸, ۱۷ - ۳۲, ۴۱ - ۴۸$$

احتمالات گذار $p_{۱۰,j}(t_۳)$، $p_{۱۱,j}(t_۳)$ و $p_{۱۳,j}(t_۳)$ با جایگزینی $t_۳$ به‌جای $t_۴$ در $p_{۹,j}(t_۴)$ و احتمالات گذار $p_{۱۲,j}(t_۲)$، $p_{۱۴,j}(t_۲)$ و $p_{۱۵,j}(t_۲)$ با جایگزینی $t_۲$ به‌جای $t_۴$ و احتمال گذار $p_{۱۶,j}(t_۱)$ با جایگزینی $t_۱$ به جای $t_۴$ محاسبه می‌شوند.

بنابراین مقادیر احتمالات فوق برای ستون ۱ تا ۶۴ برابر با مقدار احتمال $p_{۹,j}(t_۴)$ است و فقط با جایگزینی t_iها محاسبه می‌شود.

$$p_{۱۰,j}(t_۳) = p_{۱۱,j}(t_۳) = p_{۱۲j}(t_۲) = p_{۱۳j}(t_۳) = p_{۱۴j}(t_۲) =$$
$$p_{۱۵j}(t_۲) = p_{۱۶j}(t_۱) = p_{۹,j}(t_۴)$$
$$j = ۹ - ۱۶, ۳۳ - ۴۰, ۴۹ - ۵۶, ۵۷ - ۶۴$$

مقدار احتمال $p_{۱۷,j}(t_۴)$ برای سطر ۱۷ و ستون‌های ۱ تا ۸، ۹ تا ۱۶، ۲۵ تا ۳۲ و ۴۹ تا ۵۶ صفر است و دلیل این موضوع، وجود انحراف با دلیل در حالت ۱۷ از جدول ۲ برای نمودار EWMA_I و عدم وجود این انحراف در نمودار EWMA_I برای حالت‌های ذکر شده است.

$$p_{۱۷,j}(t_۴) = ۰ \qquad j = ۱ - ۸, ۹ - ۱۶, ۲۵ - ۳۲, ۴۹ - ۵۶$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۱۷ و ستون ۱۷ تا ۲۴، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMA_I برای حالت‌های ۱۷ تا ۲۴ و قرارگیری نمونه‌ها در ناحیه‌ی مرکزی یا هشدار از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{۱۷,j}(t_۴) = p(T_{AC_۲} > t_۴).p(T_{AC_۲} > t_۴)$$
$$.p(\text{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ \neq ۰).p(\text{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ = ۰)$$
$$.p(\text{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ = ۰) = e^{-\gamma_۲ t_۴}.e^{-\gamma_۲ t_۴}.\beta_{I_r}.\eta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = ۱۷ - ۲۴, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۱۷ و ستون ۳۳ تا ۴۰، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMA_I و EWMA_S از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{۱۷,j}(t_۴) = p(T_{AC_۲} < t_۴).p(T_{AC_۲} > t_۴)$$
$$.p(\text{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ \neq ۰).p(\text{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ \neq ۰)$$
$$.p(\text{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ = ۰) =$$
$$(۱ - e^{-\gamma_۲ t_۴}).e^{-\gamma_۲ t_۴}.\beta_{I_r}.\beta_{S_m}.\eta_{E_n}$$
$$j = ۳۳ - ۴۰, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۱۷ و ستون ۴۱ تا ۴۸، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودار EWMA_I و EWMA_E از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$p_{۱۷,j}(t_۴) = p(T_{AC_۲} > t_۴).p(T_{AC_۲} < t_۴)$$
$$.p(\text{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ \neq ۰).p(\text{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ = ۰)$$
$$.p(\text{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ \neq ۰) =$$
$$e^{-\gamma_۲ t_۴}.(۱ - e^{-\gamma_۲ t_۴}).\beta_{I_r}.\eta_{S_m}.\beta_{E_n}$$
$$j = ۴۱ - ۴۸, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲$$

به‌منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس احتمال گذار برای سطر ۱۷ و ستون ۵۷ تا ۶۴، با توجه به وقوع انحراف با دلیل در نمودارهای EWMA_I، EWMA_S و EWMA_E از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$
\begin{aligned}
p_{۱۷,j}(t_۴) &= p(T_{AC_۲} < t_۴).p(T_{AC_۳} < t_۴) \\
&.p(\mathrm{EWMA}_I \in R_{I_r} \,|\delta_۱ \neq ۰).p(\mathrm{EWMA}_S \in R_{S_m} \,|\delta_۲ \neq ۰) \\
&.p(\mathrm{EWMA}_E \in R_{E_n} \,|\delta_۳ \neq ۰) = \\
&(۱ - e^{-\gamma_r t_۴}).(۱ - e^{-\gamma_r t_۴}).\beta_{I_r}.\beta_{S_m}.\beta_{E_n} \\
&j = ۵۷ - ۶۴, \quad r = ۱, ۲, \quad m = ۱, ۲, \quad n = ۱, ۲
\end{aligned}
$$

احتمالات گذار $p_{۱۸,j}(t_۳)$، $p_{۱۹,j}(t_۳)$ و $p_{۲۱,j}(t_۳)$ با جایگزینی $t_۳$ به‌جای $t_۴$ در $p_{۱۷,j}(t_۴)$ و احتمالات گذار $p_{۲۰,j}(t_۲)$، $p_{۲۲,j}(t_۲)$ و $p_{۲۳,j}(t_۲)$ با جایگزینی $t_۲$ به‌جای $t_۴$ و احتمال گذار $p_{۲۴,j}(t_۱)$ با جایگزینی $t_۱$ به‌جای $t_۴$ محاسبه می‌شوند. بنابراین مقادیر احتمالات فوق برای ستون ۱ تا ۶۴ برابر با مقدار احتمال $p_{۱۷,j}(t_۴)$ است و فقط با جایگزینی t_iها محاسبه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&p_{۱۸,j}(t_۳) = p_{۱۹,j}(t_۳) = p_{۲۰,j}(t_۲) = p_{۲۱,j}(t_۳) = p_{۲۲,j}(t_۲) = \\
&\quad p_{۲۳,j}(t_۲) = p_{۲۴,j}(t_۱) = p_{۱۷,j}(t_۴) \qquad j = ۱ - ۶۴
\end{aligned}
$$

محاسبه‌ی سایر احتمالات گذار به طریق مشابه انجام می‌شود.