مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۱-۳۳، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۱۳۹-۱۴۹، (یادداشت فنی)

Research Note

مدل تولید، بازتولید و دفع اقلام قراضه با فرض کیفیت متفاوت کالاهای جدید و بازتولیدی همراه با خرابی و فرایند دوباره‌کاری

محمدصادق مشتاق (دانشجوی کارشناسی ارشد)
عطاءالله طالعی‌زاده* (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه تهران

مدیریت موجودی در زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. در بیشتر مطالعات انجام شده در ادبیات موضوع فرض بر این بوده که کالاهای تولیدی و بازتولیدی کیفیت یکسان دارند. اما در بیشتر این پژوهش‌ها فرض بر این بوده که فرایندهای تولید و بازتولید بی‌نقص و بدون خرابی هستند، در حالی که در دنیای واقعی تولید اقلام معیوب امری اجتناب‌ناپذیر است. در نوشتار حاضر یک مدل تولید، بازتولید و دفع اقلام قراضه، با درنظرگرفتن خرابی همراه با فرایند دوباره‌کاری مورد مطالعه قرارگرفته است و فرض بر این است که تقاضای کالاهای تولیدشده متفاوت از تقاضای کالاهای بازتولید شده است که این فرض منجر به کمبود فروش از دست رفته می‌شود. در این مقاله، پس از ارائه‌ی مدل ریاضی، یک الگوریتم حل برای بهینه‌سازی تابع هزینه معرفی شده و برای دو مثال عددی اجرا می‌شود. نتایج حاصل از مثال عددی و تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که در اکثر موارد سیاست بهینه، یک سیاست خالص (بازتولید یا دفع تمامی کالاهای بازگشتی از هر بازار) است. در این میان سیاستی که در آن کالاهای مصرفی از هر دو بازار اول و دوم برای بازتولید جمع‌آوری شود یا فقط از بازار اول جمع‌آوری شود بیش‌ترین سهم را دارند.

واژگان کلیدی: تولید، بازتولید، زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته، فروش از دست رفته، اقلام معیوب، فرایند دوباره‌کاری.

sadegh.moshtagh@ut.ac.ir
taleizadeh@ut.ac.ir

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر نگرانی‌های زیست‌محیطی ازجمله گرمای جهانی، آلودگی‌های زیست‌محیطی دفع زباله، آلودگی آب و هوا و کاهش سطح منابع طبیعی هوا به دغدغه‌ی اصلی بسیاری ازکشورها بدل شده است. درواقع استفاده از محصولاتی که به پایان عمر خود رسیده‌اند منجر به پیدایش لجستیک معکوس به‌عنوان یک عنصر مهم در کسب و کار شده است. اهمیت مدیریت موجودی در زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته همواره رو به رشد بوده و در ادبیات به‌خوبی مورد تأکید قرارگرفته است.[۱و۲] می‌توان با مراجعه به متون موجود[۳و۴] ادبیات این حوزه را مورد بررسی قرار داد.

در اولین مطالعات انجام شده در این زمینه، مقدار سفارش بهینه و اندازه‌ی بهینه‌ی بازیابی محاسبه شد و با فرض ثابت‌بودن نرخ بازگشت کالاها به سیستم برای تعمیر، این نتیجه حاصل شد که مقدار سفارش اقتصادی در این مدل با مدل کلاسیک سفارش بهینه‌ی اقتصادی برابر است.[۵] در سال ۱۹۹۶ این مطالعات پیگیری شد و با در نظرگرفتن مدل مقدار سفارش اقتصادی تولیدی و همچنین توسعه‌ی دفع زباله، نرخ بازگشت به عنوان متغیر تصمیم مد نظر قرارگرفت.[۶] با توسعه‌ی بیشتر این مطالعات[۷و۸] نشان داده شد که این استراتژی که «هیچ دفعی نداشته باشیم (همه‌ی اقلام بازتولید شوند) یا هیچ بازتولیدی نداشته باشیم (همگی دفع شوند)» استراتژی بهینه است.[۸] در یکی از اولین تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی توسعه‌ی مدل‌های موجود برای لجستیک معکوس،[۹-۱۲] مدلی ارائه شد که در آن همه‌ی اقلام نمی‌توانند بازتولید شوند و چنین فرض شد که پارامتر هزینه‌ی نگه‌داری برای اقلام تولید شده بیشتر از اقلام بازتولیدی است، چراکه هزینه‌های بازتولید کم‌تر از هزینه‌های تولید است.[۹] در این مطالعه، بررسی‌های پیشین با فرض چندین دوره‌ی تولید و بازتولید به‌جای یک دوره توسعه داده شد.[۱۱]

در سال ۲۰۰۳ نیز یک سیستم تولید/بازیافت با تقاضای ثابت ارائه شد، که در آن تولید و بازیافت به‌طور همزمان صورت نمی‌گیرد و یک دوره‌ی تولید و تعمیر

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۱/۱۹، اصلاحیه ۱۳۹۴/۶/۲۸، پذیرش ۱۳۹۴/۷/۱۸.

در هر بازه زمانی وجود دارد.[13] متعاقباً در سال ۲۰۰۴ مدل قبلی در شرایطی که چندین دوره تعمیر و تولید وجود دارد گسترش داده شد.[14] در سال ۲۰۰۶ محققین کار قبلی خود را با فرض این که کیفیت اقلام بازگشتی همیشه برای بازیافت مناسب نیست، توسعه دادند.[15] بعد از تجزیه و تحلیل مدل پایه، دیگر محققین مطالعات انجام شده توسط پژوهش‌گران را با آزادکردن بعضی از محدودیت‌ها و در نظرگرفتن فرضیات مختلف از جمله در نظر گرفتن پس‌افت، هزینه‌های تغییر، بازرسی و... بسط دادند.[16-18]

در تمامی تحقیقات یادشده، نرخ بازگشت ثابت فرض شده، و عوامل تأثیرگذار بر این نرخ نیز نادیده گرفته شد، که در عمل این‌گونه نیست. از این‌رو برخی از محققین میان کالاهای بازگشتی با توجه به کیفیت‌شان تمایز قائل شدند.[19و20] در همین راستا در سال ۲۰۱۰ سیستمی پیشنهاد شد که در آن نرخ کالاهای بازگشتی هم به کیفیت و هم به قیمت‌شان وابسته باشد.[21]

اخیراً نیز محققین یک مدل ترکیبی برنامه‌ریزی تولید ـ کنترل موجودی غیرقطعی در یک زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته بسط داده‌اند.[22] همچنین مدلی برای کنترل موجودی در یک زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته با درنظر گرفتن بازگشت محصول از سوی مشتری ارائه شد.[23]

در تمام پژوهش‌های معرفی‌شده تاکنون، فرض بر این بوده که اقلام بازیافتی (تعمیر یا بازتولید شده) به‌خوبی اقلام جدیدند. در سال ۲۰۰۹ سیستم بازیافت سفارش‌دهی معرفی شد که در آن اقلام بازیافتی نسبت به اقلام جدید کیفیت پایین‌تری دارند؛ این فرض سبب پیدایش کمبود فروش از دست رفته می‌شود.[24] همچنین حسن‌اف و همکاران در سال ۲۰۱۲ کار جابر و همکاران را با درنظرگرفتن این فرض که کمبود پس‌افت کامل یا پس‌افت جزئی باشد، توسعه دادند.[25]

در ادبیات موضوع زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته، مطالعات بسیار کمی، خرابی در فرایند تولید یا بازتولید را درنظر گرفته‌اند، در حالی که در دنیای واقعی تولید کالاهای معیوب به دلایل متعدد ــ ازجمله خطای نیروی انسانی، خرابی ماشین‌آلات و غیره ــ اجتناب‌ناپذیر است. جمال و همکاران در سال ۲۰۰۴ یک سیستم تولیدی قطعی در یک زنجیره‌ی تأمین روبه جلو با درنظرگرفتن تولید کالاهای معیوب ارائه دادند.[26] همچنین در سال ۲۰۰۵ ایندرفورس و همکاران کار جمال را با درنظرگرفتن دوباره‌کاری توسعه دادند. آن‌ها فرض کردند که کالاهای معیوب تولید شده پس از اتمام دوره‌ی تولید، دوباره‌کاری می‌شوند.[27] اخیراً (سال ۲۰۱۵) نیز یک سیستم زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته چندسطحی (شامل تولیدکننده، خرده‌فروش و جمع‌آوری کننده)، با فرض خرابی و دوباره‌کاری در فرایند تولید و همچنین نرخ بازگشت وابسته به کیفیت بسط داده شده است که در آن فرض می‌شود که در فرایند بازتولید کالاهای معیوب تولید نمی‌شود. همچنین در این مقاله فرض بر این است که آن دسته از کالاهای بازگشتی که قابلیت بازیابی ندارند، اوراق شده و دفع نمی‌شوند.[28]

در این مقاله برخلاف اکثر مدل‌های ادبیات موضوع، محصولات تولیدی متفاوت از محصولات بازتولیدی منظور شده، که به عالم واقعیت نزدیک‌تر است. با مروری بر ادبیات موضوع متوجه می‌شویم که در تعداد بسیار محدودی از مقالات این فرض مهم و اساسی تلقی شده است. در این زمینه اما برخی دیگر از محققین در مطالعات خود[24و25] نرخ تولید را بی‌نهایت فرض کرده‌اند (سیستم سفارش‌دهی است) و تولید اقلام معیوب را منتفی دانسته‌اند. آن‌ها همچنین هزینه‌هایی از قبیل هزینه دفع ضایعات و هزینه خرید اقلام بازگشتی و مواد خام را درنظر نگرفته بودند. این فرایند در مطالعات حاضر با در نظرگرفتن یک مدل تولیدی، خرابی همراه با دوباره‌کاری و هزینه‌ی خرید مواد خام و اقلام بازگشتی از خریدار بسط یافته است. بنابراین برخلاف مدل‌های مذکور، این مدل می‌تواند در محیط‌های تولیدی به کارگرفته شود. از طرف دیگر زمانی که یک مدل تولیدی داشته باشیم، تولید کالاهای معیوب اجتناب‌ناپذیر است. با مروری بر ادبیات موضوع، مشخص است که تنها یک مقاله در سال ۲۰۱۵، خرابی در فرایند تولید را درنظر گرفته است.[28] اکثر محققین در زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته فرض کرده بودند که در فرایند تولید و بازتولید خرابی وجود ندارد؛ و بنابراین در این مقاله فرض شده است که فرایند تولید و بازتولید بی‌نقص نیست و با نرخ متفاوتی کالاهای معیوب تولید می‌کنند و سپس این کالاهای معیوب دوباره‌کاری می‌شوند. پس این مقاله نسبت به مدل‌های قبلی به عالم واقعیت نزدیک‌تر است.

برای درک بهتر ادبیات موضوع، کارهای انجام شده در حوزه‌ی مورد بررسی مقایسه شده است (جدول ۱). در ادامه‌ی این بحث، در بخش دوم پس از تعریف مسئله، به بیان فرضیات، نمادهای مورد استفاده در مقاله، و مدل‌سازی مسئله پرداخته‌ایم و سپس الگوریتم حل نیز معرفی شده است. در بخش سوم یک مثال عددی مطرح شده و به‌وسیله‌ی الگوریتم حل می‌شود. بخش پایانی نیز به نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲. شرح مسئله

مدل تولید، بازتولید و دفع اقلام قراضه[24و25] در شکل ۱ نشان داده شده است. مدل توسعه‌یافته مشابه مدل ریچتر[6و7] است، با این تفاوت که در این مدل اقلام بازتولیدی در کیفیتی پایین‌تر از کیفیت اقلام تولیدی به بازار عرضه می‌شود. بنابراین تقاضای کالاهای بازتولیدی متفاوت از تقاضای کالاهای تولید شده در نظر گرفته می‌شود. همچنین در این مقاله فرض بر این است که کالاهای تولیدی برای دوره‌ی بازتولید (T_r) و نیز کالاهای بازتولیدی برای دوره‌ی تولید (T_p) ذخیره نمی‌شود. در واقع در دوره‌ی بازتولید کالاهای مصرف شده منحصر به تقاضای بازار اول (تقاضا برای کالاهای بازتولیدی)، و در دوره‌ی تولید کالاهای جدید منحصر به تقاضای بازار دوم (تقاضا برای کالاهای تولیدی) برآورده می‌شود. به‌همین دلیل در سیستم، کمبود فروش از دست رفته به وجود می‌آید.

سیستم نشان داده شده در شکل ۱ شامل دو محیط است: کالاهای تولید شده و بازتولید شده در محیط اول، و کالاهای بازگشتی در محیط دوم جمع‌آوری و بررسی می‌شود. بخشی از کالاهایی که قابل بازتولید نیستند نیز دفع می‌شود. چنان که ملاحظه می‌شود، تقاضاهای D_r و D_p به‌ترتیب از کالاهای بازتولیدی و کالاهای جدید تأمین می‌شود. در طول دوره‌ی زمانی T، $R_r \times T_R$ کالای بازتولیدی مصرف‌شده و $R_p \times T$ کالای جدید مصرف‌شده در انبارکالاهای بازگشتی جمع‌آوری می‌شوند و در آنجا عملیاتی از قبیل جداسازی، مرتب کردن و... انجام می‌شود. با توجه به سطح کیفیت قابل قبول برای کالاهای بازتولیدی بازگشتی (q_r) و همچنین سطح کیفیت قابل قبول برای کالاهای جدید بازگشتی (q_p)، درصدی از کالاهای تولیدی و بازتولیدی بازگشتی دفع می‌شود و درصدی از آن‌ها به منظور بازتولید به سمت تولیدکننده باز می‌گردد. هنگامی که سطح کیفیت قابل قبول کاهش (یا افزایش) یابد، $((1 - q_r)R_rT_R + (1 - q_p)R_pT_p)$ تعداد کالاهای دفع‌شده نیز کاهش (یا افزایش) می‌یابد و بقیه‌ی کالاهای بازگشتی که برای بازتولید مورد استفاده قرار می‌گیرد ($q_rR_rT_R + q_pR_pT_p$)، افزایش (یا کاهش) می‌یابد.

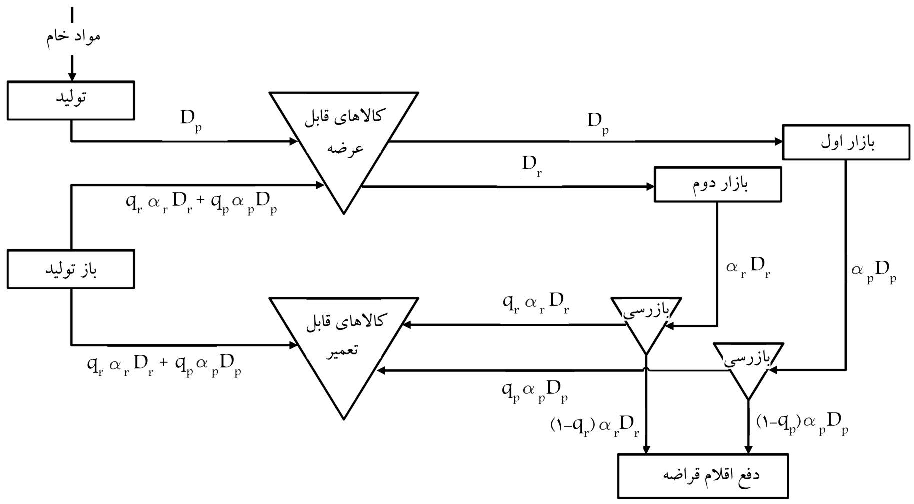
۱.۲. مفروضات

۱. کالاهای بازتولیدی به‌خوبی کالاهای جدید نیستند؛

۲. کمبود فروش از دست رفته مجاز است؛

جدول ۱. مقایسه‌ی کاهای انجام شده در ادبیات موضوع.

تحقیق	موضوع									
	سیستم تولید/ بازتولید (زنجیره تپمین حلقه‌بسته)	مدل تولیدی	درنظر گرفتن هزینه‌های دفع	درنظر گرفتن کیفیت متفاوت کالاهای تولیدی و بازتولیدی	نرخ بازگشت متغیر	کمبود: پس‌افت	کمبود: فروش از دست رفته	کمبود: جزئی	درنظر گرفتن خرابی	دوباره کاری
[۵]	√									
[۶و۷]	√		√							
[۸]	√		√							
[۱۴]	√	√	√							
[۱۵]	√	√	√							
[۱۰]	√	√								
[۱۱]	√	√								
[۱۷]	√	√				√				
[۱۸]	√			√						
[۲۴]	√		√	√			√			
[۲۵]	√			√		√		√		
[۲۱]	√	√	√		√					
[۲۶]		√							√	
[۲۷]		√							√	√
[۲۸]	√	√			√				√	√
این مقاله	√	√	√	√			√		√	√



شکل ۱. جریان مواد در یک زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته با فرض متفاوت بودن کیفیت کالاهای جدید و بازتولیدی.

۳. نرخ تولید و بازتولید محدود است (مدل تولیدی است)؛

۴. تقاضا معین، ثابت و مستقل است؛

۵. مدت زمان تحویل صفر است.

۲.۲. مدل‌سازی

در راستای مدل‌سازی مسئله مورد نظر، علائم زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

m: تعداد چرخه‌ی بازتولید؛

n: تعداد چرخه‌ی تولیدی؛

D_r: نرخ تقاضای کالاهای بازتولیدی؛

D_p: نرخ تقاضای کالاهای تولیدی؛

$\frac{D_r}{\gamma}$: نرخ بازتولید کالاهای بازگشتی ($0 < \gamma < 1$)؛

$\frac{D_p}{\beta}$: نرخ تولید کالاهای جدید ($0 < \beta < 1$)؛

α_r: درصدی ازکالاهای بازتولیدی بازگشتی که از سمت خریدار به منظور بازتولید به سمت تولیدکننده برمی‌گردد ($0 < \alpha_r < 1$)؛

α_p: درصدی ازکالاهای جدید بازگشتی که از سمت خریدار به منظور بازتولید به سمت تولیدکننده برمی‌گردد ($0 < \alpha_p < 1$)؛

q_r: سطح کیفیت قابل قبول کالاهای بازتولیدی بازگشتی، که به‌صورت درصدی از

اجزای قابل استفاده در یک کالای قابل بازیافت بیان می‌شود ($0 < q_r < 1$)؛

q_p: سطح کیفیت قابل قبول کالاهای جدید بازگشتی، که به‌صورت درصدی از اجزای قابل استفاده در یک کالای قابل بازیافت بیان می‌شود ($0 < q_p < 1$)؛

p_r: قیمت خرید کالاهای بازتولیدی بازگشتی از خریدار؛

p_p: قیمت خرید کالاهای جدید بازگشتی از خریدار؛

R_r: نسبتی از تقاضای کالاهای بازتولیدی که برای بازتولید مجدد یا دفع به سیستم بازمی‌گردد ($R_r = \alpha_r D_r$)؛

R_p: نسبتی از تقاضای کالاهای جدید که برای بازتولید یا دفع به سیستم بازمی‌گردد ($R_r = \alpha_r D_r$)؛

S_r: هزینه‌ی راه اندازی بازتولید؛

S_p: هزینه‌ی راه اندازی تولید؛

h_r: هزینه‌ی نگه‌داری هر واحد موجودی بازتولید شده در واحد زمان؛

h_p: هزینه‌ی نگه‌داری هر واحد موجودی تولید شده در واحد زمان؛

h_u: هزینه‌ی نگه‌داری هر واحد موجودی مصرف شده در واحد زمان؛

C_n: هزینه‌ی مواد اولیه برای تولید کالاهای جدید؛

C_r: هزینه‌ی بازتولید برای هریک از کالاهای بازگشتی که تعداد آن‌ها $q_r R_r T_R + q_p R_p T_p$ است؛

C_p: هزینه‌ی تولید برای هر کالای جدید که تعداد آن‌ها $D_p T_p$ است؛

C_{Rr}: هزینه‌ی دوباره‌کاری کالاهای معیوب بازتولیدی؛

C_{Rp}: هزینه‌ی دوباره‌کاری کالاهای معیوب تولید شده؛

C_{rl}: هزینه‌ی تقاضای از دست رفته‌ی کالای بازتولیدی؛

C_{pl}: هزینه تقاضای از دست رفته‌ی کالای تولید شده؛

C_w: هزینه دفع برای کالاهای بازگشتی که دفع می‌شوند و تعداد آن‌ها $(1 - q_r) R_r T_R + (1 - q_p) R_p T_p$ است؛

x: درصد خرابی در فرایند بازتولید؛

y: درصد خرابی در فرایند تولید.

مطابق شکل ۲، در هر چرخه‌ی بازتولید ($\frac{T_R}{m}$)، کالاهای بازتولیدی با نرخ $D_R(\frac{1}{\gamma} - 1)$ تولید می‌شود و هنگامی که سطح موجودی کالاهای بازتولیدی به $T_{R,m}$ رسید، تولید کالاهای بازتولیدی متوقف شده و کالاهای بازتولیدی با نرخ D_R مصرف می‌شود. به‌طور مشابه در هر چرخه‌ی تولید ($\frac{T_p}{n}$)، کالاهای جدید با نرخ $D_p(\frac{1}{\beta} - 1)$ تولید می‌شوند و هنگامی که سطح موجودی کالاهای جدید تولید شده به $I_{p,n}$ رسید، تولید کالاهای جدید متوقف شده و کالاهای جدید با نرخ D_p مصرف می‌شود. موجودی کالاهای بازگشتی در دوره‌ی دوباره‌کاری و مصرف کالاهای بازتولیدی (t_{r2}, t_{r3}) با نرخ $R_r q_r$ و همچنین در دوره‌ی تولید و مصرف کالاهای جدید (T_p) با نرخ $R_p q_p$ تا سطح I_u افزایش می‌یابد. سپس در چرخه‌ی تولید کالاهای بازتولیدی (t_{r1}) از کالاهای بازگشتی برای تولید کالاهای بازتولیدی استفاده شده و با نرخ $R_r q_r - \frac{D_r}{\gamma}$ کاهش می‌یابد و در چرخه‌ی دوباره‌کاری و مصرف کالاهای بازتولیدی، کالاهای بازگشتی با نرخ $R_r q_r$ افزایش می‌یابد و در نهایت، در انتهای آخرین دوره‌ی t_{r1} سطح موجودی کالاهای بازگشتی به صفر می‌رسد. سطح موجودی کالاهای قابل عرضه بازار و کالاهای بازگشتی در شکل ۲ نشان داده شده است.

برای ساده‌سازی در به دست آوردن هزینه‌های سیستم، ابتدا T_R و T_p را به‌صورت ضریبی از T به دست می‌آوریم؛ از آنجا که در هر چرخه تعداد کالاهای بازتولیدی با تعداد کل کالاهای بازگشتی که برای بازتولید می‌روند برابر است، داریم:

$$D_r T_R = R_r q_r T_R + R_p q_p T_p \quad (1)$$

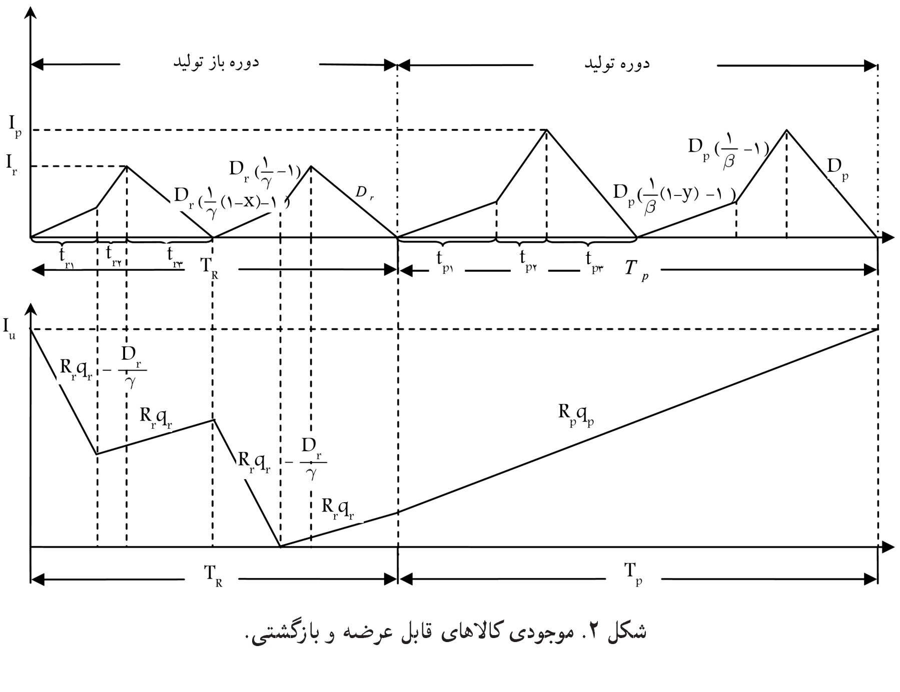
رابطه‌ی ۱ را چنین بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{T_p}{T_R} = \frac{D_r(1 - \alpha_r q_r)}{D_p(\alpha_p q_p)} \quad (2)$$

دوره‌ی تولیدی را به‌صورت نسبتی از دوره‌ی بازتولید می‌نویسیم:

$$T_p = kT_R, \qquad k = \frac{D_r(1 - \alpha_r q_r)}{D_p(\alpha_p q_p)} \quad (3)$$

مدل توسعه‌ی داده شده شامل m چرخه‌ی مساوی بازتولید و n چرخه‌ی مساوی



شکل ۲. موجودی کالاهای قابل عرضه و بازگشتی.

تولید در چرخه‌ی T است و بنابراین:

$$T_R + T_p = T \Rightarrow (1+k)T_R = T \Rightarrow T_R = \frac{1}{1+k}T \tag{4}$$

$$T_R = \lambda T, \qquad T_R = (1-\lambda)T \tag{5}$$

همچنین با توجه به شکل ۲ مقدار t_{r1}، t_{r2}، t_{r3}، t_{p1}، t_{p2} و t_{p3} را چنین به دست می‌آوریم:

$$t_{r1} = \gamma\frac{T_R}{m} = \frac{\gamma\lambda T}{m} \tag{6}$$

$$t_{r2} = x\gamma\frac{T_R}{m} = \frac{x\gamma\lambda T}{m} \tag{7}$$

$$t_{r3} = \frac{T_R}{m} - t_{r1} - t_{r2} = (1-\gamma(1+x))\frac{\lambda T}{m} \tag{8}$$

$$t_{p1} = \beta\frac{T_p}{n} = \frac{\beta(1-\lambda)T}{n} \tag{9}$$

$$t_{p2} = y\beta\frac{T_p}{n} = \frac{y\beta(1-\lambda)T}{n} \tag{10}$$

$$t_{p3} = \frac{T_p}{n} - t_{p1} - t_{p2} = (1-\beta(1+y))\frac{(1-\lambda)T}{n} \tag{11}$$

الف) هزینه‌های نگه‌داری

برای محاسبه‌ی هزینه‌های نگه‌داری، بیشینه و متوسط سطح موجودی کالاهای بازتولیدی، تولیدی و کالاهای بازگشتی چنین به دست می‌آید:

$$I_{R,m} = D_r t_{r3} = D_r(1-\gamma(1+x))\frac{\lambda T}{m} \tag{12}$$

$$I_{p,n} = D_p t_{p3} = D_p(1-\beta(1+y))\frac{(1-\lambda)T}{n} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} I_u =& R_r q_r (1-\gamma)\frac{T_R}{m} + R_p q_p T_p = \alpha_r q_r D_r(1-\gamma(1+x))\frac{\lambda T}{m} \\ &+ \alpha_p q_p D_p (1-\lambda)T \end{aligned} \tag{14}$$

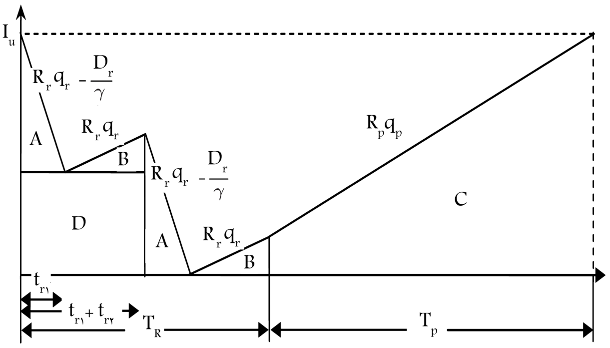
با توجه به روابط گفته شده و نیز با رجوع به شکل ۲، متوسط سطح موجودی کالاهای بازتولیدی، تولیدی و بازگشتی که معادل مساحت زیرنمودارهای مربوط به‌آنهاست، چنین نوشته می‌شود:

$$\overline{I_{R,m}} = \frac{1}{2}D_r T^2\frac{\lambda^2}{m}(\gamma(-x^2-x-1)+1) \tag{15}$$

$$\overline{I_{p,n}} = \frac{1}{2}D_p\frac{(1-\lambda)^2}{n}T^2(\beta(-y^2-y-1)+1) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \overline{I_u} =& \frac{1}{2}D_r T^2\Big[\frac{\gamma\lambda^2}{m}(1-\gamma\alpha_r q_r) + \frac{(1-\gamma)^2\lambda^2\alpha_r q_r}{m} \\ &+ \frac{(m-1)\lambda^2}{m}(1-\alpha_r q_r) + 2\alpha_r q_r\frac{(1-\gamma)\lambda(1-\lambda)}{m}\Big] \\ &+ \frac{1}{2}D_p T^2[\alpha_p q_p(1-\lambda)^2] \end{aligned} \tag{17}$$

نحوه‌ی محاسبه‌ی مساحت زیرنمودارهای کالاهای بازتولیدی، تولیدی و بازگشتی که معادل متوسط سطح موجودی آن‌هاست در پیوست و شکل ۳ آورده شده است. با توجه به متوسط سطح موجودی محاسبه شده در روابط ۱۵-۱۷، هزینه‌ی نگه‌داری



شکل ۳. محاسبه‌ی مساحت زیر نمودار کالاهای بازگشتی.

کالاهای بازتولیدی، جدید و بازگشتی چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} H_{R,m} =& h_r(\overline{I_{R,m}}) = \frac{1}{2}h_r D_r T^2\frac{\lambda^2}{m}\times(\gamma(-x^2-x-1)+1) \\ =& \frac{1}{2}D_r T^2\psi_r^r \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} H_{p,n} =& h_p(\overline{I_{p,n}}) = \frac{1}{2}h_p D_p T^2\frac{(1-\lambda)^2}{n}\times(\beta(-y^2-y-1)+1) \\ =& \frac{1}{2}D_p T^2\psi_p^p \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} H_u =& h_u\overline{I_u} = \frac{1}{2}D_r h_u T^2\Big[\frac{\gamma\lambda^2}{m}(1-\gamma\alpha_r q_r) + \frac{(1-\gamma)^2\lambda^2\alpha_r q_r}{m} \\ &+ \frac{(m-1)\lambda^2}{m}(1-\alpha_r q_r) + 2\alpha_r q_r\frac{(1-\gamma)\lambda(1-\lambda)}{m}\Big] \\ &+ \frac{1}{2}D_p h_u T^2[\alpha_p q_p(1-\lambda)^2] = \frac{1}{2}D_r T^2\psi_r^u + \frac{1}{2}D_p T^2\psi_p^u \end{aligned} \tag{20}$$

با ساده‌سازی روابط یادشده داریم:

$$\psi_r^r = h_r(\gamma(-x^2-x-1)+1) \tag{21}$$

$$\psi_p{}^p = h_p(\beta(-y^2-y-1)+1) \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \psi_r{}^u =& h_u\Big[\frac{\gamma\lambda^2}{m}(1-\gamma\alpha_r q_r) + \frac{(1-\gamma)^2\lambda^2\alpha_r q_r}{m} \\ &+ \frac{(m-1)\lambda^2}{m}(1-\alpha_r q_r) + 2\alpha_r q_r\frac{(1-\gamma)\lambda(1-\lambda)}{m}\Big] \end{aligned} \tag{23}$$

$$\psi_p{}^u = h_u[\alpha_p q_p(1-\lambda)^2] \tag{24}$$

همچنین فرض می‌کنیم:

$$\psi_p = \psi_p^p + \psi_p^u \tag{25}$$

$$\psi_r = \psi_r^r + \psi_r^u \tag{26}$$

نحوه‌ی محاسبه‌ی روابط بالا در پیوست آورده شده است توجه به روابط ۱۷-۱۹، برای محاسبه‌ی هزینه نگه‌داری کل سیستم در واحد زمان داریم:

$$H_{T,m,n} = \frac{H_{p,n} + H_{R,m} + H_{u,m,n}}{T} = T D_r\frac{\psi_r}{2} + T D_p\frac{\psi_p}{2} \tag{27}$$

ب) هزینه‌های کمبود

در این مقاله همانند مدل جابر و همکاران[24]، تقاضای کالاهای جدید در دوره‌ی بازتولید (T_R) و به طور مشابه تقاضای کالاهای بازتولیدی در دوره‌ی تولید کالاهای

جدید (T_p) از بین می‌رود و با کمبود فروش از دست رفته مواجه می‌شویم. بنابراین کل هزینه‌ی فروش از دست رفته در یک دوره‌ی زمانی T برابر است با:

$$C_{rl}D_rT_p + C_{pl}D_pT_R = C_{rl}D_r(1-\lambda)T + C_{pl}D_p\lambda T \quad (28)$$

ج) هزینه‌ی کل سیستم

هزینه‌ی کل سیستم چنین محاسبه می‌شود:

- هزینه‌ی کل راه اندازی در واحد زمان:

$$\frac{S}{T} = \frac{mS_r + nS_p}{T}$$

- هزینه‌ی کل نگه‌داری در واحد زمان:

$$TD_r\frac{\psi_r}{2} + TD_p\frac{\psi_p}{2}$$

(ψ_1 و ψ_p در معادله‌ی ۲۵ و ۲۶ داده شده است)

- هزینه‌های کمبود در واحد زمان:

$$\frac{1}{T}(C_{rl}D_r(1-\lambda)T + C_{pl}D_p\lambda T)$$

- هزینه‌ی دفع در واحد زمان: کالاهایی که کم‌ترین سطح کیفیت را برآورده نمی‌کنند، دفع می‌شوند.

$$\frac{1}{T}((1-q_r)\alpha_rD_r\lambda T + (1-q_p)\alpha_pD_p(1-\lambda)T)C_w$$

- هزینه‌ی بازتولید در واحد زمان: با توجه به میزان بازتولید معادل تقاضای کالاهای بازتولیدی داریم:

$$\frac{1}{T}(D_r\lambda T)C_r$$

- هزینه‌ی تولید در واحد زمان: با توجه به میزان تولید معادل تقاضای کالاهای جدید داریم:

$$\frac{1}{T}(D_p(1-\lambda)T)C_p$$

- هزینه‌ی خرید در واحد زمان: شامل هزینه‌ی خرید مواد اولیه به‌اندازه‌ی تولید کالاهای جدید و خرید کالاهای بازگشتی معادل کالاهای بازتولیدی است و چنین محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{T}((\alpha_rD_r\lambda T)p_r + (\alpha_pD_p(1-\lambda)T)p_p + (D_p(1-\lambda)T)C_n)$$

- هزینه‌ی دوباره‌کاری تولید در واحد زمان: درصدی از کالاهای تولیدی که معیوب‌اند دوباره تولید می‌شود:

$$\frac{1}{T}(yD_p(1-\lambda)T)C_{Rp}$$

- هزینه‌ی دوباره‌کاری بازتولید در واحد زمان: درصدی از کالاهای تولیدی که معیوب‌اند، دوباره بازتولید می‌شود:

$$\frac{1}{T}(xD_r\lambda T)C_{Rr}$$

بنابراین هزینه‌های کل سیستم چنین بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}C(T,n,m,q_r,q_p) &= \frac{S}{T} + \frac{TD_r\psi_r}{2} + \frac{TD_p\psi_p}{2}\\&+C_{rl}D_r(1-\lambda) + C_{pl}D_p\lambda\\&+(\lambda(1-q_r)\alpha_rD_r + (1-\lambda)(1-q_p)\alpha_pD_p)C_w\\&+(\lambda D_r)C_r + ((1-\lambda)D_p)C_p + (\lambda xD_r)C_{Rr}\\&+((1-\lambda)yD_p)C_{Rp} + (\lambda\alpha_rD_r)p_r\\&+((1-\lambda)\alpha_pD_p)p_p + ((1-\lambda)D_p)C_n\end{aligned} \quad (29)$$

چون تابع فوق نسبت به T محدب است، با مشتق گرفتن از تابع فوق، مقدار بهینه‌ی T به دست می‌آید.

$$T^* = \sqrt{\frac{2S}{D_r\psi_r + D_p\psi_p}} \quad (30)$$

با جایگذاری T^* در تابع هزینه داریم:

$$\begin{aligned}C(n,m,q_r,q_p) &= \sqrt{2S(D_r\psi_r + D_p\psi_p)} + C_{rl}D_r(1-\lambda)\\&+C_{pl}D_p\lambda + (\lambda(1-q_r)\alpha_rD_r + (1-\lambda)(1-q_p)\alpha_pD_p)C_w\\&+(\lambda D_r)C_r + ((1-\lambda)D_p)C_p + (\lambda xD_r)C_{Rr}\\&+((1-\lambda)yD_p)C_{Rp} + (\lambda\alpha_rD_r)p_r\\&+((1-\lambda)\alpha_pD_p)p_p + ((1-\lambda)D_p)C_n\end{aligned} \quad (31)$$

بنابراین مسئله‌ی برنامه‌ریزی ریاضی از رابطه‌ی ۳۱ تبدیل می‌شود به:

$$C = \text{Minimize } C(n,m,T,q_r,q_p) \quad (32\text{-}1)$$

Subject to :

$$n, m \geq 1, \ \text{are integers} \quad (32\text{-}2)$$

$$q_{p\min} \leq q_p \leq 1 \quad (32\text{-}3)$$

$$0 \leq q_r \leq 1 \quad (32\text{-}4)$$

در این مدل‌سازی یک حد پایین منطقی در محدودیت‌های (۳-۳۲) و (۴-۳۲) درنظر گرفته شده است. چنان که در شکل ۱ نشان داده شده است، کالاهای جدید و بازتولیدی به ترتیب در بازارهای اول و دوم به فروش می‌رسند. حالت اول را درنظر بگیرید که در آن $q_p > 0$ و $q_r = 0$ است؛ در این حالت کالاهای مصرف شده فقط از بازار اول با نرخ $\alpha_pq_p(\alpha_rq_r = 0)$ جمع‌آوری می‌شود. حال حالت دوم را در نظر بگیرید که در آن $q_p = 0$ و $q_r > 0$ است. در این حالت کالاهای مصرف شده با نرخ $\alpha_rq_r(\alpha_pq_p = 0)$ جمع‌آوری می‌شود. یادآور می‌شویم حالت ۲ شدنی نیست، چرا که جریان بازگشتی یک جریان حلقه‌بسته از تقاضای کالاهای بازتولیدی است که ظرفیت تأمین محدود و کاهنده‌یی دارد و زمانی به صفر خواهد رسید ($\lim_{t\to\infty}\alpha_p^tD_r$ و $0 < \alpha_r < 1$). بنابراین بازار دوم باید توسط کالاهای بازتولیدی جمع‌آوری شده از بازار اول نیز تغذیه شود؛ درنتیجه $q_{p\min}$ هرگز نمی‌تواند برابر با صفر باشد $(q_p \geq q_{p\min})$.

۳. الگوریتم حل

گام ۱. برای مجموعه‌یی از داده‌های ورودی D_r، D_p، α_r، α_p، h_r، h_p، h_u، γ، β، S_p، S_r، C_r، C_p، C_n، C_w، C_{rl}، C_{pl}، P_r، P_p، x و y قرار می‌دهیم $n = ۱$ و تابع هزینه $C(m,n,q_r,q_p)$ را به‌ازای $m = ۱$ و $m = ۲$ با استفاده از ابزار بهینه‌سازی (مانند حل‌کننده‌ی اکسل، متلب و...) بهینه می‌کنیم، که در آن $C(m,n,q_r,q_p)$ تابع هدف کمینه‌سازی و $۰ < q_r < ۱$ و $q_{p\min} < q_p < ۱$ محدودیت‌های آن، و q_r و q_p متغیرهای تصمیم آن هستند. کم‌ترین مقدار تابع هزینه را هنگامی که $m = ۱$ و $m = ۲$ باشد به دست می‌آوریم و q_r و q_p بهینه‌ی مربوط به آن را ثبت می‌کنیم.

گام ۲. مقادیر $C(m,n,q_r,q_p)$ را برای $m = ۱$ و $m = ۲$ مقایسه می‌کنیم. اگر رابطه‌ی $C(۱,۱,q_r,q_p) < C(۲,۱,q_r,q_p)$ برقرار بود. جست‌وجو برای $n = ۱$ تمام می‌شود و مقادیر بهینه ثبت می‌شود. اما اگر $C(۱,۱,q_r,q_p) > C(۲,۱,q_r,q_p)$ بود، گام ۱ و ۲ را برای $m = ۳,۴,\ldots$ انجام می‌دهیم تا جایی که $C(m_۱^* - ۱,۱,q_r,q_p) > C(m_۱^*,۱,q_r,q_p) < C(m_۱^* + ۱,۱,q_r,q_p)$. هنگامی که یک چرخه‌ی تولیدی داشته باشیم، $m_۱^*$ مقدار بهینه‌ی تعداد چرخه‌ی بازتولید است. در این گام مقادیر $C(m_۱^*,۱,q_r,q_p)$ و $m_۱^*$ و q_r و q_p را برای $n = ۱$ ثبت می‌کنیم.

گام ۳. برای مجموعه داده‌های ورودی که درگام ۱ ذکر شد، با فرض $n = ۲$، تابع $C(m,n,q,q_p)$ را این بار به‌ازای $m = ۱$ و $m = ۳$ بهینه می‌کنیم. چرا که ال‌سعدانی و همکاران در سال ۲۰۱۰ اثبات کردند که حالتی که در آن m,n هر دو زوج باشند، هیچ‌گاه جواب بهینه نیست.[21]

گام ۴. $C(m,n,q_r,q_p)$ را برای مقادیر $m = ۱$ و $m = ۳$ مقایسه می‌کنیم. اگر رابطه‌ی $C(۱,۲,q_r,q_p) < C(۳,۲,q_r,q_p)$ برقرار بود. جست‌وجو برای $n = ۲$ تمام می‌شود و مقادیر بهینه ثبت می‌شود. اما اگر $C(۱,۲,q_r,q_p) > C(۳,۲,q_r,q_p)$ بود،گام ۳ و ۴ را برای $m = ۵,۷,\ldots$ انجام می‌دهیم تا جایی که $C(m_۲^*-۲,۲,q_r,q_p) > C(m_۲^*,۲,q_r,q_p) < C(m_۲^*+۲,۲,q_r,q_p)$ هنگامی که دو چرخه‌ی تولیدی داشته باشیم، $m_۲^*$ مقدار بهینه‌ی تعداد چرخه‌ی بازتولید است. در این گام مقادیر $C(m_۲^*,۲,q_r,q_p)$ و $m_۲^*$ و q_r و q_p را برای $n = ۲$ ثبت می‌کنیم.

گام ۵. مقادیر بهینه‌ی $C(m,n,q_r,q_p)$ را برای $n = ۱$ و $n = ۲$ مقایسه می‌کنیم. اگر رابطه‌ی $C(m_۱^*,۱,q_r,q_p) < C(m_۲^*,۲,q_r,q_p)$ برقرار بود. جست‌وجو برای تمام می‌شود و $C(m_۱^*,۱,q_r,q_p)$ مقدار بهینه است. اما اگر $C(m_۱^*,۱,q_r,q_p) > C(m_۲^*,۲,q_r,q_p)$ بود، آنگاه $C(m_۱^*,۱,q_r,q_p)$ را کنار می‌گذاریم و گام ۱ و ۲ را برای $n = ۲$ انجام می‌دهیم و سپس $C(m,n,q_r,q_p)$ را برای $n = ۲$ و $n = ۳$ مقایسه می‌کنیم، اگر $C(m_۲^*,۲,q_r,q_p) > C(m_۳^*,۳,q_r,q_p)$ بود، جست‌وجو تمام می‌شود و $C(m_۲^*,۲,q_r,q_p)$ مقدار بهینه است. اما اگر $C(m_۲^*,۲,q_r,q_p) > C(m_۳^*,۳,q_r,q_p)$ بود، آنگاه $C(m_۱^*,۱,q_r,q_p)$ را کنار می‌گذاریم وگام ۳ و ۴ را برای $n = ۴$ انجام می‌دهیم.

گام ۶. گام‌های ۱ تا ۵ را تکرار می‌کنیم. هنگامی که رابطه‌ی:

$C(m_{i-۱}^*,i-۱,q_r,q_p) > C(m_i^*,i,q_r,q_p) < C(m_{i+۱}^*,i+۱,q_r,q_p)$ و $i = ۱,۲,۳,\ldots$ برقرار بود، جست‌وجو خاتمه می‌یابد و $C(m_i^*,i,q_r,q_p)$ مقدار بهینه‌ی تابع هدف و i، m_i^*، q_r و q_p مربوط به آن‌ها به‌ترتیب مقادیر بهینه‌ی تعداد چرخه‌ی تولیدی، تعداد چرخه‌ی بازتولید، سطح کیفیت قابل قبول کالاهای بازتولیدی بازگشتی برای بازتولید و سطح کیفیت قابل قبول کالاهای جدید بازگشتی برای بازتولید است.

همچنین برای به دست آوردن مقدار بهینه‌ی تولید و بازتولید داریم:

$$Q_r{}^* = D_r T_R^* = D_R \lambda^* T^* \tag{۳۳}$$

$$Q_p{}^* = D_p T_p^* = D_p(۱-\lambda^*)T^* \tag{۳۴}$$

۴. مثال عددی و تحلیل حساسیت

در این قسمت دو مثال عددی آورده شده[13,14] و پس از حل با استفاده از الگوریتم مطرح شده و مقایسه با مدل‌های قبلی نتایج آن مورد بررسی قرارگرفته و براساس آن نتیجه‌گیری شده است. توجه کنید که در این مطالعات، همانند اکثر مطالعات ادبیات موضوع فرض شده است که کالاهای بازتولید شده به‌خوبی کالاهای جدید هستند $(D = D_r = D_p)$ و $(\alpha = \alpha_r = \alpha_p)$؛ نرخ تولید بی‌نهایت است و سیستم سفارش‌دهی وجود دارد $\gamma = \beta = ۰$؛ هزینه نگه‌داری کالاهای تولیدی و بازتولیدی یکسان است $h_r = h_p = ۰$؛ هزینه‌ی تولید، بازتولید و دفع اقلام قراضه صفر است $C_r = C_p = C_w = ۰$؛ قیمت خرید مواد اولیه و کالاهای مصرف شده از خریدار صفر است $C_n = p_r = p_p = ۰$؛ و همچنین درصد خرابی در فرایند تولید و بازتولید صفر است $x = y = ۰$. بنابراین برای حل این مثال‌ها لازم است پارامترهای y، x، p_p، p_r، C_n، C_w، C_p، C_r، h_p، h_r، β، γ، α_p، α_r، D_p و D_r را فرض کنیم. همچنین در این مثال‌ها $q_{p\min} = ۰/۰۱$ فرض شده است.

۱.۴. مثال اول

دریک سیستم تولیدی و بازتولیدی یک زنجیره‌ی تأمین حلقه بسته داریم $D_r = ۲۰۰$، $D_p = ۲۰۰$، $\alpha_r = ۰/۶۶۷$، $\alpha_p = ۰/۶۶۷$، $h_r = ۳$، $h_p = ۱۲$، $h_u = ۳$، $\gamma = ۰/۵$، $\beta = ۰/۲$، $S_p = ۱۴۴$، $S_r = ۷۲$، $C_r = ۵$، $C_w = ۵$، $C_{Rr} = ۵$، $C_{Rp} = ۱۰$، $C_p = ۱۰$، $C_n = ۵۰$، $C_{rl} = ۳$، $C_{pl=۳}$، $p_r = ۱۵$، $p_p = ۲۰$، $x = ۰/۰۵$ و $y = ۰/۰۳$. با توجه به این مجموعه از داده‌های ورودی، جواب بهینه در حالت $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۱$ به دست می‌آید که هزینه‌یی معادل $C(m_۱^*,۱,q_r,q_p) = ۸۰۵۰/۴۴$ دارد. جزئیات حل با استفاده از الگوریتم در جدول ۲ آمده است. از مقایسه‌ی نتایج فوق با نتایج مثال عددی ۱ از مطالعات موجود[25] مشخص می‌شود که با توجه به درنظرگرفتن هزینه‌هایی از قبیل دفع، خرید، دوباره‌کاری و... و همچنین تولیدی بودن سیستم، هزینه‌ی به دست آمده در این مقاله بسیار بیشتر از هزینه به دست آمده در مطالعه‌ی یادشده[25] است. همچنین در این مقاله، همانند مقاله مذکور و سایر مقالات مشابه در ادبیات موضوع، سیاست بهینه یک سیاست خالص (فقط بازتولید یا فقط دفع) است. در این مثال فقط بازتولید صورت می‌گیرد و دفع نداریم؛ اما تعداد چرخه‌های بازتولیدی بهینه در این مقاله، برخلاف مطالعه‌ی مذکور[25] که ۲ دوره بود، ۱ دوره است. تعداد دوره‌های تولیدی بهینه در هر دو مقاله برابر است. به منظور بررسی رفتار مدل با تغییر پارامترهای فوق، تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای D_r، D_p، α_r، α_p، γ، β، S_p، S_r، x و y در جدول‌های ۲ تا ۵ آمده است.

تأثیر تغییر در پارامترهای S_r و S_p با فرض ثابت بودن پارامترهای دیگر در جدول ۳ نشان داده‌شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش S_r در بازه‌ی ۱ تا

جدول ۲. جزئیات حل مثال ۱.

گام	n	m	q_r	q_p	$C(m, n, q_r, q_p)$	توضیحات
۱	۱	۱	۱	۱	۸۰۵۰٫۴۴	$m^*_{۱} = ۱, \quad C(m^*_{۱}, ۱, q_r, q_p) = ۸۰۵۰٫۴۴$
۲	۱	۲	۱	۱	۸۰۶۲٫۲۲	
۳	۲	۱	۱	۱	۸۱۳۸٫۷۳	
۴	۲	۳	۱	۱	۸۱۱۲٫۲۷	$m^*_{۲} = ۱, \quad C(m^*_{۲}, ۲, q_r, q_p) = ۸۱۱۲٫۲۷$
۵	۲	۴	۱	۱	۸۱۳۱٫۱۰	
۷	۱	۱	۱	۱	۸۰۵۰٫۴۴	چون رابطه‌ی $C(m^*_{۱}, ۱, q_r, q_p) < C(m^*_{۲}, ۲, q_r, q_p)$ برقرار است، جواب بهینه در این حالت به دست می‌آید.

جدول ۳. تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای S_r و S_p.

S_r	m	n	q_r	q_p	Q_r	Q_p	C
۱	۱۰	۱	۱	۱	۱۲۱٫۶۵	۶۰٫۷۲	۷۸۷۷٫۲۵
۵۰	۲	۱	۱	۱	۱۳۵٫۲۸	۶۷٫۵۴	۸۰۲۰٫۶۳
۱۰۰	۱	۱	۱	۱	۱۱۹٫۸۶	۵۹٫۸۴	۸۰۸۲٫۵۵
۲۵۰	۱	۱	۱	۱	۱۵۲٫۳۱	۷۶٫۰۴	۸۲۲۹٫۵۹
۵۰۰	۱	۱	۱	۱	۱۹۴٫۷۲	۹۷٫۲۱	۸۴۲۱٫۷۸
S_p							
۱	۱	۶	۱	۱	۸۰٫۴۹	۴۰٫۱۸	۷۷۹۷٫۹۵
۵۰	۱	۱	۱	۱	۸۴٫۷۵	۴۲٫۳۱	۷۹۲۳٫۴۸
۱۰۰	۱	۱	۱	۱	۱۰۰٫۶۳	۵۰٫۲۴	۷۹۹۵٫۴۳
۱۵۰	۱	۱	۱	۱	۱۱۴٫۳۳	۵۷٫۰۸	۸۰۵۷٫۴۹
۲۵۰	۲	۱	۱	۱	۱۷۱٫۹۱	۸۵٫۸۲	۸۱۵۰٫۹۱
۵۰۰	۲	۱	۱	۱	۲۱۹٫۷۸	۱۰۹٫۷	۸۳۲۱٫۱۹

جدول ۴. تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای γ و β.

γ	m	n	q_r	q_p	Q_r	Q_p	C
۰٫۰۰۱	۲	۱	۱	۱	۱۲۹٫۵۰	۶۴٫۶۵	۸۱۳۲٫۷۷
۰٫۱۲۵	۲	۱	۱	۱	۱۳۳٫۲۵	۶۶٫۵۲	۸۱۱۶٫۰۵
۰٫۳۴	۲	۱	۱	۱	۱۴۰٫۶۲	۷۰٫۲۰	۸۰۸۵٫۸۴
۰٫۳۵	۱	۱	۱	۱	۱۰۵٫۸۱	۵۲٫۸۲	۸۰۸۴٫۰۷
۰٫۵	۱	۱	۱	۱	۱۱۲٫۷۷	۵۶٫۳۰	۸۰۵۰٫۴۴
۰٫۷۵	۱	۱	۱	۱	۱۲۸٫۲۳	۶۴٫۰۲	۷۹۸۸٫۸۳
۰٫۸۷۵	۱	۱	۱	۱	۱۳۸٫۸۰	۶۹٫۲۹	۷۹۵۴٫۶۱
β							
۰٫۰۰۱	۱	۱	۱	۱	۱۰۸٫۰۰	۵۳٫۹۲	۸۰۷۳٫۰۲
۰٫۱۲۵	۱	۱	۱	۱	۱۱۰٫۹۰	۵۵٫۳۶	۸۰۵۹٫۰۶
۰٫۲۵	۱	۱	۱	۱	۱۱۴٫۰۷	۵۶٫۹۵	۸۰۴۴٫۳۸
۰٫۵	۱	۱	۱	۱	۱۲۱٫۳۳	۶۰٫۵۷	۸۰۱۴٫۳۸
۰٫۵۱	۲	۱	۱	۱	۱۶۲٫۲۳	۸۰٫۹۹	۸۰۱۳٫۰۶
۰٫۷۵	۲	۱	۱	۱	۱۷۷٫۹۷	۸۸٫۸۵	۷۹۷۱٫۱۷
۰٫۸۷۵	۲	۱	۱	۱	۱۸۸٫۲۳	۹۳٫۹۷	۷۹۴۷٫۶۵

جدول ۵. تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای x و y.

x	m	n	q_r	q_p	Q_r	Q_p	C
۰	۱	۱	۱	۱	۱۱۲٫۱۲	۵۵٫۹۷	۸۰۲۰٫۰۴
۰٫۰۵	۱	۱	۱	۱	۱۱۲٫۷۷	۵۶٫۳۰	۸۰۵۰٫۴۴
۰٫۱	۱	۱	۱	۱	۱۱۳٫۴۹	۵۶٫۶۶	۸۰۸۰٫۵۴
۰٫۲	۱	۱	۱	۱	۱۱۵٫۱۸	۵۷٫۵۰	۸۱۳۹٫۸۰
۰٫۵	۱	۱	۱	۱	۱۲۲٫۶۱	۶۱٫۲۱	۸۳۰۹٫۵۹
y							
۰	۱	۱	۱	۱	۱۱۲٫۶۲	۵۶٫۲۲	۸۰۳۱٫۱۵
۰٫۰۵	۱	۱	۱	۱	۱۱۲٫۸۸	۵۶٫۳۵	۸۰۶۳٫۲۷
۰٫۱	۱	۱	۱	۱	۱۱۳٫۱۷	۵۶٫۵۰	۸۰۹۵٫۲۸
۰٫۲	۱	۱	۱	۱	۱۱۳٫۸۲	۵۶٫۸۲	۸۱۵۸٫۹۳
۰٫۵	۱	۱	۱	۱	۱۱۶٫۵۲	۵۸٫۱۷	۸۳۴۷٫۰۲

۵۰۰ سیاست بهینه‌ی سطح کیفیت $q_p = ۱$ و $q_r = ۱$ است ولی تعداد چرخه‌ی بازتولید بهینه در $S_r = ۱$، $m = ۱۰$ است و با افزایش S_r، مقدار بهینه‌ی m به‌تدریج کاهش می‌یابد و به ۱ می‌رسد. همچنین با تحلیل حساسیت S_p پارامتر مشخص می‌شود که در $S_p = ۱$، سیاست بهینه $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۶$ است.

با افزایش S_p در بازه‌ی $۱ \leq S_p \leq ۵۰۰$، سیاست بهینه $q_p = ۱$، $q_r = ۱$ و $m = ۱$ باقی می‌ماند و n از ۶ به‌تدریج به ۱ کاهش می‌یابد. در این بازه مقدار بهینه‌ی تولید و بازتولید نیز به‌تدریج افزایش می‌یابد. تحلیل حساسیت پارامترهای γ و β با فرض ثابت بودن پارامترهای دیگر در جدول ۴ نشان داده شده‌است. با فرض $\gamma = ۰٫۰۰۱$، مقادیر بهینه $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۲$ و $n = ۱$ به دست می‌آید و با افزایش γ تا ۰٫۳۴، این مقادیر بهینه ثابت باقی می‌ماند. اما با افزایش γ از ۰٫۳۴ به ۰٫۳۵، مقدار بهینه m از ۲ به ۱ تغییر می‌یابد و این مقدار ثابت باقی می‌ماند؛ مشخص است که با افزایش γ هزینه‌ی سیستم نیز کاهش می‌یابد.

از طرف دیگر با تغییر پارامتر β در محدوده‌ی $۰ < \beta \leq ۰٫۵$ سیاست بهینه $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۱$ است و با تغییر β از ۰٫۵ به ۰٫۵۱ سیاست بهینه به $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۲$ و $n = ۱$ تغییر می‌یابد. مشخص است که با افزایش β تعداد بهینه‌ی تولید و بازتولید افزایش، و هزینه‌ی سیستم نیز کاهش می‌یابد. تحلیل حساسیت مدل نسبت به پارامترهای x و y با فرض ثابت بودن پارامترهای دیگر در جدول ۵ ارائه شده است.

چنان‌که مشاهده می‌شود با تغییر x و y در بازه‌ی $۰ < x, y \leq ۰٫۵$، سیاست بهینه، $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۱$ است. و با افزایش x و y، مقدار بهینه‌ی تولید و بازتولید تدریجاً افزایش می‌یابد. همچنین هزینه‌ی کل سیستم نیز با افزایش درصد خرابی فرایند تولید یا بازتولید افزایش می‌یابد.

تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای D_r، D_p، α_r و α_p با فرض ثابت بودن دیگر پارامترها در جدول ۶ نشان داده شده است. با تغییر D_r در بازه‌ی $۵۰ \leq D_r \leq ۱۰۲$، سیاست بهینه $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۱$ است و با تغییر β از ۰٫۵ به ۰٫۵۱ سیاست بهینه به $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۲$ و $n = ۱$ تغییر می‌یابد؛ مشخص است که با افزایش D_r تعداد بهینه‌ی تولید و بازتولید افزایش، و نیز هزینه‌ی سیستم کاهش می‌یابد.

از طرف دیگر با تغییر پارامتر D_p در محدوده‌ی $۱ < D_p \leq ۳۹۰$ سیاست بهینه ابتدا در بازه‌ی $۱ < D_p \leq ۳۰$ به‌صورت $q_p = ۰٫۰۱$، $q_r = ۰$، $m = ۱$ و $n = ۱۵$ است و با تغییر D_p از ۳۱ به ۳۲ سیاست به $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۱$ تغییر می‌کند و تا $D_p = ۳۹۰$ ثابت است. با تغییر D_p از ۳۹۰ به ۳۹۱ سیاست بهینه به $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۲$ و $n = ۱$ تغییر می‌یابد و در همین سیاست ثابت باقی می‌ماند. همچنین با افزایش D_p تعداد بهینه‌ی تولید، بازتولید و هزینه‌ی سیستم افزایش می‌یابد.

جدول ۶. تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای D_r، D_p، α_r و α_p.

D_r	m	n	q_r	q_p	Q_r	Q_p	C
۵۰	۲	۱	۱	۱	۱۰۱٫۰۰	۵۰٫۴۲	۳۱۱۵٫۹۳
۱۰۲	۲	۱	۱	۱	۹۴٫۷۶	۴۷٫۳۱	۵۱۴۱٫۱۸
۱۰۳	۱	۱	۱	۱	۹۴٫۷۶	۴۷٫۳۱	۵۱۷۶٫۱۶
۲۵۰	۱	۱	۱	۱	۱۱۷٫۶۴	۵۸٫۷۳	۹۲۳۰٫۵۶
۵۰۰	۱	۱	۱	۱	۱۳۰٫۶۸	۶۵٫۲۴	۱۳۴۰۴
۱۰۰۰	۱	۱	۱	۱	۱۳۹٫۰۶	۶۹٫۴۳	۱۸۰۸۰٫۷۷
D_p							
۱۰	۱	۱۵	۰	۰٫۰۱	۱٫۷۴	۲۶۱٫۰	۱۵۴۱٫۱۵
۳۱	۱	۱۵	۰	۰٫۰۱	۳٫۰۶	۴۵۹٫۶	۳۲۸۶٫۸۲
۳۲	۱	۱	۱	۱	۵۶٫۴۴	۲۸٫۱۷	۳۳۷۴٫۲۴
۵۰	۱	۱	۱	۱	۶۸٫۴۱	۴۳٫۱۵	۴۳۴۲٫۷۱
۱۰۰	۱	۱	۱	۱	۸۹٫۸۱	۴۴٫۸۴	۶۱۳۷٫۱۰
۱۵۰	۱	۱	۱	۱	۱۰۳٫۱۱	۵۱٫۴۷	۷۲۵۹٫۱۲
۲۵۰	۱	۱	۱	۱	۱۱۹٫۴۱	۵۹٫۶۱	۸۶۵۸٫۸۱
۵۰۰	۲	۱	۱	۱	۱۸۶٫۰۱	۹۲٫۸۶	۱۰۵۳۸٫۵۳
۱۰۰۰	۲	۱	۱	۱	۲۰۸٫۳۳	۱۰۴٫۰	۱۲۷۴۴٫۲۹
α_r							
۰٫۰۱	۱	۱	۱	۱	۵۵٫۱۲	۸۱٫۸۲	۱۰۴۶۵٫۰۷
۰٫۳	۱	۱	۱	۱	۷۲٫۱۱	۷۵٫۶۸	۹۶۷۷٫۸۳
۰٫۶۶۷	۱	۱	۱	۱	۱۱۲٫۴۳	۵۶٫۱۳	۸۰۵۱٫۹۸
α_p							
۰٫۰۱	۱	۷	۱	۱	۱۶٫۳۵	۵۴۴٫۷	۱۳۲۰۶٫۰۵
۰٫۱	۱	۲	۱	۱	۴۶٫۷۶	۱۵۵٫۷	۱۱۵۹۸٫۱۵
۰٫۳	۱	۱	۱	۱	۶۹٫۱۹	۷۶٫۸۱	۹۶۱۳٫۳۵
۰٫۶۶۷	۱	۱	۱	۱	۱۱۲٫۴۳	۵۶٫۱۳	۸۰۵۱٫۹۸

با بررسی رفتار مدل نسبت به تغییر α_r مشخص می‌شود که با تغییر α_r در محدوده‌ی $\alpha_r \leq ۰٫۶۶۷$ سیاست بهینه‌ی $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۱$ ثابت باقی می‌ماند. همچنین مقدار بازتولید اقتصادی افزایش و مقدار تولید اقتصادی و هزینه‌ی کل سیستم کاهش می‌یابد.

با تحلیل حساسیت پارامتر α_p مشخص می‌شود، سیاست بهینه $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $m = ۱$ و $n = ۷$ است و با افزایش α_p سیاست بهینه تدریجاً به $q_p = ۱$، $q_r = ۱$، $n = ۱$ و $m = ۱$ می‌رسد. همچنین با افزایش α_p مقدار بازتولید اقتصادی افزایش و مقدار تولید اقتصادی و هزینه‌ی کل سیستم کاهش می‌یابد.

۲.۴. مثال دوم

مطابق[14] در یک زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته فرض می‌کنیم:
$D_r = ۱۰۰۰$، $D_p = ۱۰۰$، $\alpha_r = ۰٫۲$، $\alpha_p = ۰٫۲$، $h_r = ۸۰$، $h_p = ۸۵$، $h_u = ۸۰$، $\gamma = ۰٫۸$، $\beta = ۰٫۵$، $S_p = ۳۶۰$، $S_r = ۴۴۰$، $C_r = ۶۰$، $C_w = ۳۰$، $C_{Rr} = ۶۰$، $C_{Rp} = ۱۰۰$، $C_p = ۱۰۰$، $C_n = ۱۵۰$، $C_{rl} = ۵۰$، $C_{pl} = ۵۰$، $p_r = ۷۰$، $p_p = ۸۰$، $x = ۰٫۰۷$، $y = ۰٫۱$.
سیاست بهینه هنگامی اتفاق می‌افتد که $q_p = ۰٫۰۱$، $q_r = ۰$، $m = ۱$ و $n = ۱۷$ باشد که در این حالت هزینه‌ی کل سیستم معادل ۸۰۲۱۹٫۸۸، مقدار تولید اقتصادی معادل ۷۹۹۶۴٫۷۹ و مقدار بازتولید اقتصادی ۱٫۴۸ است. برخلاف مثال اول که در آن سیاست بهینه بازتولید تمامی کالاهای بازگشتی بود، در این مثال سیاست بهینه این است که کالاهای مصرفی از بازار دوم برای بازتولید جمع‌آوری نشود ($q_r = ۰$) و تنها کم‌ترین مقدار ممکن از بازار اول برای بازتولید جمع‌آوری شود ($q_p = ۰٫۰۱$). در حالی که در مثال ۱ پیشنهاد می‌شد که تمامی کالاهای مصرفی از هر دو بازار را برای بازتولید جمع‌آوری کند.

۵. نتیجه‌گیری

در اکثر مدل‌های زنجیره‌ی تأمین حلقه‌بسته که تاکنون ارائه شده است، فرض بر این بوده که کل اقلام بازتولیدی به‌خوبی اقلام جدید تولید شده است و کیفیت آن‌ها برابر است. در صورتی که در واقعیت این‌گونه نیست و اقلام بازتولیدی در کیفیتی پایین‌تر از اقلام تولید شده به بازار عرضه می‌شوند. جابر و ال‌سعدانی[24] و حسن‌اف و همکاران[25] یک مدل تولید، بازتولید و دفع زباله را با فرض متفاوت بودن کیفیت کالاهای بازتولیدی با کیفیت کالاهای جدید بسط دادند. فرض آن‌ها سبب ایجاد کمبود فروش از دست رفته در دوره‌های تولید و بازتولید می‌شد. در این نوشتار مطالعه‌ی جابر و همکاران[24] که یک مدل سفارش‌دهی بود، در یک محیط تولیدی و با در نظرگرفتن خرابی در حین فرایند تولید و بازتولید، دوباره‌کاری اقلام معیوب و همچنین درنظرگرفتن هزینه‌های تولید، بازتولید، دفع، خرید مواد اولیه و خرید اقلام مصرف شده‌ی بازگشتی بسط یافته است. در این مقاله برای به دست آوردن جواب بهینه یک الگوریتم حل معرفی شده است و سپس دو مثال عددی از ادبیات موضوع انتخاب شدند و یکی از این مثال‌ها به‌منظور بررسی رفتار مدل نسبت به پارامترهای مختلف

تحلیل حساسیت شده است. نتایج حاصل از تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که همانند دیگر مطالعات انجام شده[۲۴،۲۵] در اکثر موارد، سیاست بهینه در هر بازار یک سیاست خالص است (فقط بازتولید یا فقط دفع) و در بقیه‌ی موارد نیز جواب بهینه به سمت یک سیاست خالص میل می‌کند. در این میان سیاست خالصی که در آن کالاهای مصرفی از هر دو بازار اول و دوم برای بازتولید جمع‌آوری شود یا فقط از بازار اول جمع‌آوری شود بیش‌ترین سهم را دارند. در حالی که مطالعه‌ی دیگر[۲۱] نشان می‌دهد که جواب بهینه، سیاست خالص نیست و ترکیبی از هر دو حالت بازتولید و دفع، سیاست بهینه است. به عبارت دیگر قسمتی از کالاهای بازگشتی دفع و قسمتی از آن‌ها بازتولید می‌شود.

برای مطالعات آینده پیشنهاد می‌شود که مدل فوق با در نظرگرفتن وابستگی نرخ بازگشت به کیفیت و قیمت کالاهای بازگشتی، کیفیت احتمالی اقلام بازگشتی یا پارامترهای دیگر، فسادپذیری کالاها یا چندسطحی بودن مدل مطالعه شود.

منابع (References)

1. Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J.M., Dekker, R., Van der Laan, E., Van Nunen, J.A. and Van Wassenhove, L.N. "Quantitative models for reverse logistics: A review", *European Journal of Operational Research,* **103**, pp. 1-17 (1997).
2. Stock, J.R. and Broadus, C.J. "Doctoral research in supply chain management and/or logistics-related areas: 1999–2004", *Journal of Business Logistics*, **27**, pp. 139-496 (2006).
3. Akçalı, E. and Cetinkaya, S. "Quantitative models for inventory and production planning in closed-loop supply chains", *International Journal of Production Research*, **49**, pp. 2373-2407 (2011).
4. Govindan, K., Soleimani, H. and Kannan, D. "Reverse logistics and closed-loop supply chain: A comprehensive review to explore the future", *European Journal of Operational Research*, **240**, pp. 603-626 (2015).
5. Schrady, D.A. "A deterministic inventory model for reparable items", *Naval Research Logistics Quarterly*, **14**, pp. 391-398 (1967).
6. Richter, K. "The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers", *European Journal of Operational Research*, **95**, pp. 313-324 (1996).
7. Richter, K. "The extended EOQ repair and waste disposal model", *International Journal of Production Economics*, **45**, pp. 443-447 (1996).
8. Richter, K. "Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem", *Operations-Research-Spektrum,* **19**, pp. 123-129 (1997).
9. Teunter, R. "Economic ordering quantities for repairable/manufacturable item inventory systems", Preprint No. 31, Faculty of Economics and Management, Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Germany (1998).
10. Teunter, R.H. "Economic ordering quantities for recoverable item inventory systems", *Naval Research Logistics (NRL)*, **48**, pp. 484-495 (2001).
11. Teunter, R.H. "Economic order quantities for stochastic discounted cost inventory systems with remanufacturing", *International Journal of Logistics*, **5**, pp. 161-175 (2002).
12. Teunter, R. "Lot-sizing for inventory systems with product recovery", *Computers & Industrial Engineering,* **46**, pp. 431-441 (2004).
13. Dobos, I. and Richter, K. "A production/recycling model with stationary demand and return rates", Paper Offered to the 25th Hungarian Conference on Operations Research , Debrecen (2003).
14. Dobos, I. and Richter, K. "An extended production/recycling model with stationary demand and return rates", *International Journal of Production Economics*, **90**, pp. 311-323 (2004).
15. Dobos I. and Richter, K. "A production/recycling model with quality consideration", *International Journal of Production Economics*, **104**, pp. 571-579 (2006).
16. El Saadany, A. and Jaber, M.Y. "The EOQ repair and waste disposal model with switching costs", *Computers & Industrial Engineering,* **55**, pp. 219-233 (2008).
17. Konstantaras, I. and Papachristos, S. "Lot-sizing for a single-product recovery system with backordering", *International Journal of Production Research*, **44**, pp. 2031-2045 (2006).
18. Konstantaras, I., Skouri, K. and Jaber, M. "Lot sizing for a recoverable product with inspection and sorting", *Computers & Industrial Engineering,* **58**, pp. 452-462 (2010).
19. Grubbström, R.W. and Tang, O. "Optimal production opportunities in a remanufacturing system", *International Journal of Production Research,* **44**, pp. 3953-396 (2006).
20. Reimer, B., Sodhi, M.S. and Knight, W.A. "Optimizing electronics end-of-life disposal costs", *in Electronics and the Environment, 2000. ISEE 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on,* pp. 342-347 (2000).
21. El Saadany, A. and Jaber, M.Y. "A production/ remanufacturing inventory model with price and quality dependant return rate", *Computers & Industrial Engineering*, **58**, pp. 352-362 (2010).
22. Taheri Moghadam, A. and Sahraeian, R. "Production planning model for closed-loop supply chain with uncertainty and inventory analysis", *Sharif Scientific Journal*, **30-1**, pp. 41-50 (2014).
23. Sahraeian, R., Maleki, E. and Aghimipoor, S. "Inventory management in a three-echelon closed-loop supply chain

with correla-ted demands and returns", *Sharif Scientific Journal*, **30-1**, pp. 27-37 (2014).

24. Jaber, M.Y. and El Saadany, A. "The production, remanufacture and waste disposal model with lost sales", *International Journal of Production Economics*, **120**, pp. 115-124 (2009).

25. Hasanov, P., Jaber, M.Y. and Zolfaghari, S. "Production, remanufacturing and waste disposal models for the cases of pure and partial backordering", *Applied Mathematical Modelling*, **36**, pp. 5249-5261 (2012).

26. Jamal, A., Sarker, B.R. and Mondal, S. "Optimal manufacturing batch size with rework process at a single-stage production system", *Computers & Industrial Engineering*, **47**, pp. 77-89 (2004).

27. Inderfurth, K., Lindner, G. and Rachaniotis, N. "Lot sizing in a production system with rework and product deterioration", *International Journal of Production Research*, **43**, pp. 1355-1374 (2005).

28. Giri, B. and Sharma, S. "Optimizing a closed-loop supply chain with manufacturing defects and quality dependent return rate", *Journal of Manufacturing Systems*, **35**, pp. 92-111 (2015).

پیوست

محاسبه‌ی مساحت زیر نمودارکالاهای بازگشتی

برای محاسبه‌ی هزینه‌ی نگه‌داری کالاهای بازگشتی (مصرف شده) با توجه به شکل ۳ داریم:

$$
\begin{aligned}
S_A &= \frac{t_{r1}^2}{2}\left(\frac{D_r}{\gamma} - R_r q_r\right) = \frac{D_r T^2}{2}\left(\frac{\gamma\lambda^2}{m^2}(1-\gamma\alpha_r q_r)\right) \\
&= \frac{D_r T^2}{2}\left(\frac{\lambda}{m^2}(1-x-\gamma)\right) \\
S_B &= \frac{(t_{r2}+t_{r3})^2}{2}(R_r q_r) = \frac{D_r T^2}{2}\left(\frac{(1-\gamma)^2\lambda^2}{m^2}(\alpha_r q_r)\right) \\
S_c &= \frac{1}{2}\left(2(t_{r2}+t_{r3})(R_r q_r) + (T_p)(R_p q_p)\right)T_p \\
&= \frac{D_r T^2}{2}\left(2\alpha_r q_r\left(\frac{(1-\gamma)\lambda(1-\lambda)}{m}\right)\right) + \frac{D_p T^2}{2}\left(\alpha_p q_p (1-\lambda)^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{D_i} &= \left[\left(\frac{D_r}{\gamma} - R_r q_r\right)t_{r1} - R_r q_r (t_{r2}+t_{r3})\right]\frac{\lambda T}{m} i \\
&= \frac{D_r}{T^2}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}(1-\alpha_r q_r)\right) i \\
\overline{I_u} &= m S_A + m S_B + S_c + \sum_{i=1}^{m-1} S_{D_i} \\
\overline{I_u} &= \frac{1}{2} D_r T^2 \Big[\frac{\gamma\lambda^2}{m}(1-\gamma\alpha_r q_r) + \frac{(1-\gamma)^2\lambda^2\alpha_r q_r}{m} \\
&\quad + \frac{(m-1)\lambda^2}{m}(1-\alpha_r q_r) + 2\alpha_r q_r \frac{(1-\gamma)\lambda(1-\lambda)}{m}\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2} D_p T^2 \left[\alpha_p q_p (1-\lambda)^2\right]
\end{aligned}
$$