مهندسی صنایع و مدیریت شریف (زمستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۱-۳۳، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۱۱-۱۹

Original Article

بهینه‌سازی استوار در مسئله‌ی چندهدفه انتخاب سبد مالی با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه

سودابه نامدار زنگنه (استادیار)
عاطفه حسن‌پور* (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی فنی ـ مهندسی، دانشگاه الزهرا

s_zangeneh@yahoo.com
a.hasanpour@student.alzahra.ac.ir

در این مقاله یک مدل استوار جدید براساس رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه برای مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه چندهدفه ارائه شده است. برای این منظور به دو هدف مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری میانگین ـ واریانس مارکویتز، بازدهی و ریسک انتظاری، دو هدف جدید، سود تقسیم شده سالیانه و قیمت سهام در آخرین روز معامله، اضافه شده است. ابتدا با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه مدل قطعی مسئله ارائه شده است، سپس برای درنظرگرفتن عدم قطعیت در بازدهی و ریسک انتظاری، با استفاده از رویکرد برتسیمس و سیم مدل مسئله به مدل استوار چندهدفه تبدیل شده و از آن برای بهینه‌سازی یک نمونه‌ی ۲۰ سهمی پذیرفته شده در بورس تهران در سال ۱۳۹۲، استفاده شده است. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که مدل‌سازی صورت گرفته به‌خوبی می‌تواند برای مقابله با عدم قطعیت در مسئله‌ی تعیین سبد مالی چندهدفه در نظر گرفته شود.

واژگان کلیدی: انتخاب سبد مالی، برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه، مدل استوار چندهدفه، روش برتسیمس و سیم.

۱. مقدمه

در دنیای سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذاران می‌خواهند بالاترین بازده مورد انتظار را از سبد سرمایه‌گذاری به دست آورند. نرخ بازده مورد انتظار به سطح دامنه تغییرات ریسک بستگی دارد. بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری ترکیبی از سود و بازده‌های قیمت است.[1]

انتخاب سبد سرمایه‌گذاری و تجزیه و تحلیل اوراق بهادار همیشه یک بخش حیاتی در تصمیم‌گیری بوده است. با توجه به این که عدم قطعیت در دنیای واقعی و شرایط اقتصادی همواره تصمیم‌گیرندگان را در فرایند تصمیم‌گیری دچار مشکل می‌کند، در این پژوهش سعی شده که با درنظرگرفتن عدم قطعیت در مدل انتخاب سهام این مشکل به‌صورت کارا برطرف شود. برای این منظور در این مسئله عدم قطعیت در پارامترهای بازده و ریسک انتظاری به علت ماهیت‌شان ــ که مبتنی بر پیش‌بینی است ــ لحاظ شده است. از این رو ابتدا مدل قطعی مسئله‌ی انتخاب سبد سهام با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه[1] ارائه شده است، سپس مدل غیر قطعی آن با استفاده از رویکرد برتسیمس و سیم[2] (۲۰۰۴) به مدل استوار تبدیل می‌شود. مدل استوار ارائه شده در مقاله به‌صورت خطی بوده و از آن برای بهینه‌سازی یک نمونه‌ی ۲۰ سهمی تحت شرایط عدم قطعیت استفاده می‌شود. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که مدل‌سازی صورت گرفته به‌خوبی می‌تواند برای مقابله با عدم قطعیت در مسئله‌ی تعیین سبد مالی چندهدفه در نظر گرفته شود.

۲. پیشینه‌ی پژوهش

مدل‌سازی مسئله‌ی انتخاب سبد مالی با استفاده از اهداف چندگانه اولین بار توسط مارکویتز[3] (۱۹۵۲) ارائه شد. در این مدل که میانگین ـ واریانس نام دارد، تصمیم‌گیرنده براساس اهداف مختلف و متضاد، سعی در انتخاب و تخصیص سبدی بهینه دارد. به‌دلیل وجود مشکلاتی مانند عدم کارایی مدل میانگین ـ واریانس در برابر مدل‌های حقیقی (بل و همکاران، ۱۹۸۸) و کوادراتیک بودن مدل و در نتیجه غیر خطی بودن مدل و همچنین افزایش حجم محاسبات با افزایش تعداد دارایی، زمینه‌ی لازم برای استفاده از الگوریتم‌هایی که برطرف کننده‌ی این مسائل در مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز بودند، فراهم شد.[2] شارپ (۱۹۶۳)، التون و همکارانش (۱۹۷۶)، کانو (۱۹۹۰)، کانو و یامازاکی (۱۹۹۱) و یونگ (۱۹۹۸) هر یک به‌منظور خطی‌سازی و بهبود کارایی مدل میانگین ـ واریانس، الگوریتم‌هایی را پیشنهاد کرده‌اند.[3]

شارپ (۱۹۶۳) مدیریت علمی سبدهای مالی را بنا نهاد. او ضریب حساسیت

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۵/۲۷، اصلاحیه ۱۳۹۴/۷/۷، پذیرش ۱۳۹۴/۱۰/۶.

بتا را در حالی معرفی کرد که ضریب بتا نوسانات نرخ بازده هر سهام را در مقایسه با نوسانات نرخ بازده بازار نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن تحقیقات شارپ و دیگران، استفاده از ضریب بتا به‌عنوان معیار سنجش ریسک در چند سال اخیر رایج بوده است. براساس یک طبقه‌بندی کلی ریسک به دو جزء قابل کنترل (غیر سیستماتیک) و غیرقابل کنترل (سیستماتیک) تقسیم‌بندی می‌شود. ضریب بتا معیاری برای سنجش ریسک سازمان‌یافته است و می‌تواند به‌عنوان ضریب ریسک هر دارایی استفاده شود. از مزایای استفاده از ضریب بتا در مدل، خطی‌سازی تابع هدف ریسک و استفاده از آن در بهینه‌سازی مسائل چندهدفه‌ی مالی، کاهش حجم قابل توجه محاسبات با افزایش تعداد دارایی‌ها به نسبت مدل میانگین ـ واریانس و در نظر گرفتن نوسانات بازار با استفاده از ضریب بتا به‌عنوان ضریب ریسک هر دارایی را می‌توان برشمرد.[۴]

مدل‌های تک‌هدفه بدون در نظر گرفتن نظر تصمیم‌گیرنده به دنبال بیشینه یا کمینه کردن تابع هدف هستند. برای رفع این مشکل مدل‌های چندهدفه و برنامه‌ریزی آرمانی توسعه یافتند. در برنامه‌ریزی تک‌هدفه تابع هدف بیشینه یا کمینه می‌شود اما در برنامه‌ریزی آرمانی انحرافات بین اهداف مورد نظر و نتایج واقعی را کمینه می‌کند. از روش‌های بهینه‌سازی مسائل چندهدفه می‌توان مدل برنامه‌ریزی کمینه ـ بیشینه را نام برد که اولین بار توسط یونگ (۱۹۹۸) معرفی شد. مدل برنامه‌ریزی آرمانی در ادبیات مالی توسط رومر و رهمن (۱۹۸۴) و رومر و همکارانش (۱۹۸۷) معرفی شد. همچنین در مورد ادبیات به کارگیری مدل برنامه‌ریزی آرمانی در زمینه‌ی بهینه‌سازی سبدهای مالی، می‌توان تحقیقات بالستر و رومرو (۱۹۹۶) و بالسترو (۱۹۹۸) را نام برد. بالسترو و همکاران (۲۰۰۳) و پرز ـ گلادیش و همکاران (۲۰۰۷) نیز از این مدل برای بهینه‌سازی برخی مسائل اقتصادی استفاده کردند.[۴]

بهینه‌سازی استوار[۴] ازجمله رویکردهایی است که در شرایط عدم قطعیت بسیار کارا عمل می‌کند. بهینه‌سازی استوار در سال ۱۹۷۳ توسط سویستر معرفی شد.[۵] مدل ارائه شده توسط سویستر به‌شدت محافظه کارانه عمل می‌کند و بدبینانه‌ترین رویکرد است. در دو دهه‌ی گذشته تلاش‌های زیادی برای ارائه‌ی مدل‌های استوار مهارپذیر مناسب برای حل انواع مسائل بهینه‌سازی با داده‌های غیرقطعی به عمل آمده است. بن ـ تال و نمیروفسکی مدل‌هایی ارائه کرده‌اند که همتای استوار برنامه‌ریزی خطی، یک مدل برنامه‌ریزی مخروطی درجه ۲ شده است. این مدل‌ها از محافظه‌کاری کم‌تری برخوردارند و جواب‌های بهتری ارائه می‌کنند.[۶] ال قاوی و همکاران نیز کارهای مشابهی انجام داده‌اند ولی در این بین برتسیماس و سیم با ارائه‌ی مدلی که میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است و همتای استوار یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی، خود یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی است، تحولی در بهینه‌سازی استوار به وجود آوردند. این مدل قابلیت اعمال روی مسائل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته را نیز دارد.[۷]

فلیگ و ورنر در زمینه‌ی انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از مدل‌های چندهدفه، بهینه‌سازی استوار چندهدفه و کاربرد آن را در مسئله‌ی بهینه‌سازی سبد سهام ارائه کردند. آنها در مقاله‌ی خود مدل کلی بهینه‌سازی چندهدفه‌ی محدب را در فضای عدم قطعیت مورد مطالعه قرار دادند و کاربرد آن را در بهینه‌سازی سبد سهام بررسی کردند.[۸] اسلامی بیدگلی و تلنگی مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی را در انتخاب پرتفولیوی بهینه ارائه کردند. آنها در مقاله‌ی خود به سیر تکاملی مدل‌های پیشنهادی انتخاب پرتفولیوی بهینه پرداختند و نقاط قوت و ضعف هریک را بررسی کردند.[۹] امیری برنامه‌ریزی ضد ایده‌آل سازشی را با استفاده از سه هدف بازدهی، ریسک و قیمت سهام در آخرین روز معامله ارائه کرد.[۱۰] کریمیان و عابدزاده برنامه‌ریزی کمینه ـ بیشینه در مسئله‌ی چندهدفه‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در شرایط تصادفی را مطرح کردند و در نوشتار خود سه تابع هدف ریسک و بازدهی و نسبت سود تقسیمی را در فضای عدم قطعیت در نظر گرفتند.[۱] قهطرانی و نجفی مدل استوار برنامه‌ریزی آرمانی چندهدفه را ارائه کردند؛ آنها در مقاله‌ی خود مدل چندهدفه‌ی لی و چسر را در فضای عدم قطعیت در نظر گرفتند.[۳]

۳. برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه مسئله‌ی انتخاب سبد سهام

به‌منظور حل مدل‌های چندهدفه، تکنیک‌های متعددی از قبیل روش‌های وزن‌دهی، روش‌های با محدودیت ε، سنجش LP، برنامه‌ریزی آرمانی و برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه مورد استفاده قرار می‌گیرد. ایده‌ی اصلی برنامه‌ریزی آرمانی، یافتن جواب‌هایی است که آرمان‌های از پیش تعیین شده‌ی یک یا چند هدف را برآورده می‌کنند. در صورتی که هیچ جوابی با این شرایط وجود نداشته باشد باید جواب‌هایی بیابیم که انحراف از اهداف را کمینه کنند. در سال ۲۰۰۴ برتری این روش در مقابل روش‌های پیشین بهینه‌سازی آرمانی نشان داده شد.[۱۱]

برنامه‌ریزی آرمانی یکی از مهم‌ترین مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه است که برای اولین‌بار در کاربردی از مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه توسط چارنز و کوپر (۱۹۶۱) ارائه شد. در این نوع مدل‌سازی به‌جای یک هدف چند هدف مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. این اهداف ممکن است حتی با هم متضاد باشند ولی برنامه‌ریزی آرمانی این امکان را فراهم می‌سازد که به‌طور همزمان به سمت چند هدف متضاد حرکت شود.[۳] برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه، یک رویکرد ویژه و کارا در برنامه‌ریزی آرمانی است که بیشترین انحرافات از آرمان‌ها و بیشترین انحراف هر هدف از آرمان را کمینه می‌کند. یانگ (۱۹۹۸) نشان داد که این رویکرد می‌تواند سطح مطلوبی از رضایت‌مندی را برای تمامی اهداف ایجاد کند. جواب حاصل از این رویکرد کم‌ترین انحراف از مقادیر آرمانی را دارد.[۹] فرم کلی مدل برنامه‌ریزی آرمانی مطابق مدل ۱ است:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad A \\
&\text{s.t}: \\
&A > \sum_{k=1}^{K} w_k (d_k^- + d_k^+) \\
&f_k + d_k^- - d_k^+ = f_k^* \\
&g_i(x) < b_i \\
&d_k^-, d_k^+ \geq 0, \qquad x \in S
\end{aligned}
\qquad \text{(مدل ۱)}
$$

f_k سطح دست‌یابی هدف kام است به‌طوری که: $f_k = \sum_{j=1}^{n} C_{kj} x_j$. همچنین f_k^* مقدار آرمانی هدف kام است و w_k اهمیت هر هدف نسبت به سایر اهداف با توجه به نظر تصمیم‌گیرنده است به‌طوری که $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$ و متغیرهای d_k^+ و d_k^- به ترتیب متغیرهای مازاد و کمبود از مقدار آرمانی هستند و متغیر A بیشترین انحراف از آرمان است.[۱]

۴. الگوریتم برتسیمس و سیم برای بهینه‌سازی استوار

مدل بهینه‌سازی خطی زیر (مدل ۲) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad C'x \\ &\text{s.t}: \quad Ax \le b \\ &l \le x \le u \end{aligned} \qquad \text{(مدل ۲)}$$

در فرمول‌بندی مدل ۲، فرض می‌شود که عدم قطعیت داده‌ها فقط بر عناصر ماتریس A اثر می‌گذارد. این فرض بدون از دست دادن عمومیت این که بردار c تابع هدف قطعی باشد گرفته شده و در حالتی که بردار c تابع هدف غیرقطعی باشد می‌توان تابع هدف Z را بیشینه کرد به‌طوری که $Z - cx \le 0$ و این محدودیت را به $AX \le b$ اضافه کرد. یک سطر خاص i از ماتریس A را در نظر بگیرید و J_i را مجموعه ضرایب متغیرهای غیر قطعی در سطر i فرض کنید. هرکدام از a_{ij} را که در آن $j \in J_i$ باشد می‌توان به شکل یک متغیر تصادفی مستقل و متقارن $\tilde{a}_{ij}$ مدل کرد که در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ مقدار می‌گیرد. برای هر $\hat{a}_{ij}$ یک متغیر تصادفی به شکل $\eta_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{\hat{a}_{ij}}$ تعریف می‌شود که از یک توزیع نامعلوم اما متقارن در بازه $[-1, 1]$ پیروی می‌کند. برای هر محدودیت iام مقدار Γ_i که الزاماً عددی صحیح نیست معرفی می‌شود که در بازه $[0, |J_i|]$ مقدار می‌گیرد. نقش پارامتر Γ_i تنظیم مقدار استواری مدل پیشنهاد شده در مقابل سطح محافظه‌کاری جواب است. به نظر می‌رسد کم‌تر احتمال دارد که تمامی $\tilde{a}_{ij}$ها به‌طور همزمان تغییر کنند. بنابراین در تمامی حالاتی که حداکثر $[\Gamma_i]$ تا از این ضرایب مجاز به تغییرند، و یک ضریب (a_{it}) حداکثر به‌اندازه‌ی $(\Gamma_i - [\Gamma_i])a_{it}$ تغییر می‌کند، جواب می‌بایست موجه باقی بماند. بنابراین Γ_i سطح حفاظت برای محدودیت iام نامیده می‌شود و مدل ارائه شده توسط برتسیمس و سیم به‌صورت مدل ۳ ارائه می‌شود.[7]

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad C'x \\ &\text{Subject to} \\ &\sum\nolimits_j a_{ij}x_j + \max\nolimits_{\{S_i | S_i \subset J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \{\sum\nolimits_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j \\ &\qquad + (\Gamma_i - [\Gamma_i])\hat{a}_{it} y_t\} \le b_i \qquad \forall i \\ &-y_j \le x_j \le y_j \qquad \forall j \\ &l \le x \le u \\ &y_j \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(مدل ۳)}$$

برتسیمس و سیم ثابت کردند مدل ۳ یک فرمول‌بندی خطی به‌صورت مدل ۴ دارد.

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad C'x \\ &\text{Subject to} \\ &\sum\nolimits_j a_{ij}x_j + z_i\Gamma_i + \sum\nolimits_{j \in J_i} p_{ij} \le b_i \qquad \forall i \\ &z_i + p_{ij} > \hat{a}_{ij} y_i \qquad \forall i, j \in J_j \\ &-y_j \le x_j \le y_j \qquad \forall j \\ &l_j \le x_j \le u_j \qquad \forall j \\ &p_{ij}, y_j, z_j \ge 0 \qquad \forall i, j \in J_i \end{aligned} \qquad \text{(مدل ۴)}$$

لازم به ذکر است که متغیرهای اضافه شده در مدل استوار (z_i, y_i, p_{ij}, z_0) برای تنظیم استوار بودن جواب و اعمال سطوح حفاظت در مدل آورده شده‌اند و به‌عنوان رابط بین محدودیت‌ها مقدار می‌گیرند.[7]

۱.۴. کاربرد مدل برتسیمس و سیم در برنامه‌ریزی عدد صحیح

اگر Γ_i عدد صحیح انتخاب شود، محدودیت iام با مقدار $\beta_i(x, \Gamma_i) = \max_{\{S_i | S_i \subset J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \{\sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j|\}$ در برابر نقض شدن حفاظت می‌شود. نکته‌ی قابل توجه این است که اگر $\Gamma_i = 0$ باشد آنگاه $\beta_i(x, \Gamma_i) = 0$ می‌شود و محدودیت iام با محدودیت iام مسئله‌ی اسمی برابر می‌شود، و اگر $\Gamma_i = |J_i|$ باشد آنگاه مدل پیشنهاد شده به مدل سویستر تبدیل می‌شود. بنابراین با تغییر مقدار $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$ میزان استواری در مقابل با سطح محافظه‌کاری جواب به‌صورت انعطاف‌پذیر تنظیم می‌شود.[7]

۵. مسئله‌ی پیشنهادی انتخاب سبد مالی

در این مقاله مدلی براساس مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز برای مدل‌سازی مسئله‌ی انتخاب سبد سهام بهینه چندهدفه ارائه شده است. با توجه به معایب مسئله‌ی انتخاب سبد مالی و مزایای استفاده از ضریب بتا به‌عنوان ضریب ریسک، از ضریب بتا در تابع هدف ریسک استفاده شده است، همچنین به‌منظور در نظرگرفتن فضای بیشتری از نظرات و درخواست‌های تصمیم‌گیرنده مسئله‌ی میانگین ـ واریانس ماکویتز به مسئله‌یی با ۴ تابع هدف گسترش داده شده است. مسئله‌ی پیشنهادی چندهدفه‌ی انتخاب سبد مالی به‌صورت مدل ۵ ارائه شده است.

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad f_1 = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j \\ &\text{Opt} \quad f_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \\ &\text{Max} \quad f_3 = \sum_{j=1}^{n} D_j x_j \\ &\text{Min} \quad f_4 = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ &\text{s.t}: \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \end{aligned} \qquad \text{(مدل ۵)}$$

در مدل ارائه شده تابع هدف اول مربوط به نرخ بازده سرمایه‌گذاری است؛ هدف از این تابع هدف بیشینه کردن نرخ بازده انتظاری دارایی‌هاست، به‌طوری که با استفاده از رابطه‌ی ۱ نرخ بازده سرمایه‌گذاری برای هر دارایی محاسبه می‌شود.

$$R_j = (p_{jt} - p_{jt-1} + D_{jt}) / p_{jt-1} \qquad (1)$$

تابع هدف خطی دوم مربوط به ریسک سرمایه‌گذاری است. به‌طوری که با استفاده از رابطه‌ی ۲ ضرایب ریسک هر دارایی به دست می‌آید.

$$\beta_j = \text{cov}(R_j, R_m) / \text{var}(R_m) \qquad (2)$$

تابع هدف سوم مربوط به بیشینه‌سازی مجموع سود تقسیم شده‌ی سهام سبد سرمایه‌گذاری است.[1] تابع هدف چهارم نیز مربوط به هزینه‌ی سرمایه‌گذاری است.

در این تابع هدف p_j قیمت دارایی jام در آخرین روز دوره‌ی مطالعه است. در دنیای واقعی بسیاری از افراد به‌دلیل عدم داشتن پول کافی نمی‌توانند در سرمایه‌گذاری‌های مطمئن شرکت کنند. بنابراین هدف ما این است که آنها علاوه بر هزینه کردن پول کم‌تر بتوانند نتایج دلخواه را از سایر اهداف سرمایه‌گذاری نیز به دست آورند.[۴]

j: دارایی jام موجود در سبد مالی؛

x_j: متغیر تصمیم سهم دارایی jام در یک سبد مالی؛

R_j: متغیر تصادفی بازده روزانه‌ی دارایی jام با توزیع نرمال؛

β_j: ریسک سیستماتیک دارایی jام؛

D_j: مقدار سود تقسیمی دارایی jام؛

p_j: قیمت دارایی jام در آخرین روز دوره‌ی مطالعه؛

p_{jt}: قیمت دارایی jام در روز tام؛

D_{jt}: مقدار سود تقسیم شده دارایی jام در بازه زمانی $[t-1, t]$؛

R_m: متغیر تصادفی بازده روزانه‌ی بازار؛

$\mathrm{cov}(R_j, R_m)$: کواریانس بازده دارایی jام و بازده بازار؛

$\mathrm{var}(R_m)$: واریانس بازده بازار یا ریسک بازار.

البته در تصمیم‌گیری در ارتباط با انتخاب سبد مالی معیارهای متعددی همچون بازده، بازده سرمایه، حاشیه‌ی سود خالص، سود هر سهم، نسبت سود تقسیمی، ارزش بازار به دفتری، نسبت قیمت به درآمد، ریسک تجاری، ریسک مالی، ریسک سازمان‌یافته، نسبت بدهی و... تأثیرگذارند. در اینجا به‌منظور تأمین نظرات سرمایه‌گذاران و با توجه به بررسی ادبیات موضوع، معیارهای نسبت سود تقسیمی و قیمت سهام در آخرین روز دوره به‌منظور توسعه‌ی مدل مارکویتز انتخاب شده است.

۱.۵. برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه مسئله‌ی پیشنهادی انتخاب سبد سهام

مدل‌های چندهدفه نقش زیادی در توسعه‌ی مدل انتخاب سبد سهام دارند. در این بخش مدل برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه ارائه می‌شود. از این رو در ابتدا باید مقادیر آرمانی برای هریک از اهداف اول، دوم و چهارم را از حل انفرادی توابع مورد نظر به دست آورد. از آنجا که تابع هدف دوم نشان‌گر اطمینان به بازده دارایی روی بازار است، همبستگی پایین با بازار نشان‌گر عملکرد دارایی روی خودش خواهد بود، به‌جای آن که توسط تغییرات بازار نمایش داده شود. به‌منظور انتخاب سبد دارایی به‌همان اندازه پرخطر، در چنین بازاری مقدار آرمانی این تابع هدف برابر ۱ در نظر گرفته شده است.[۱۲] بنابراین مقدار ایده‌آل توابع هدف اول، سوم و چهارم از حل انفرادی توابع هدف برابر مقدار بهینه‌شان و مقدار ایده‌آل تابع هدف دوم برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود.[۴]

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad A\\
&\text{Subject to}\\
&A > w_1(d_1^-)\\
&A > w_2(d_2^+ + d_2^-)\\
&A > w_3(d_3^-)\\
&A > w_4(d_4^+)\\
&f_1 + d_1^- = f_1^{\max}\\
&f_2 - d_2^+ + d_2^- = f_2^{opt}\\
&f_3 + d_3^- = f_3^{\max}\\
&f_4 - d_4^+ = f_4^{\min}\\
&A, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad \forall i
\end{aligned}
$$
(مدل ۶)

۲.۵. همتای استوار مسئله‌ی انتخاب سبد سهام با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه

در این بخش یک مدل استوار چندهدفه با رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه ارائه می‌شود. در بررسی مدل‌های واقعی به‌ندرت می‌توان با مدلی مواجه شد که در آن متغیری با ماهیت غیرقطعی وجود نداشته باشد. مدل مورد بررسی در این مقاله نیز از این قاعده مستثنی نیست و دو پارامتر مدل غیرقطعی هستند. در صورتی که برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی مطرح شده، از داده‌های غیرقطعی استفاده شود ممکن است منجر به غیر موجه شدن جواب به دست آمده از مدل برنامه‌ریزی خطی شود. در مدل ارائه شده در این مقاله، دو پارامتر نرخ بازده مورد انتظار و ریسک سازمان‌یافته (بتا) در مدل ۶ دارای عدم قطعیت هستند.

برای در نظرگرفتن این عدم قطعیت‌ها و برای موجه ماندن جواب، از برنامه‌ریزی خطی استوارکه توسط برتسمیس و سیم ارائه شده، استفاده شده است. مقادیر بازده مورد انتظار و ضریب بتا به‌طور مستقل از هم در یک بازه به‌صورت احتمالی با توزیع نامشخص ولی متقارن با میانگینی برابر مقادیر اسمی‌شان مانند $[R_j - \hat{R}_j, R_j + \hat{R}_j]$ و $[\beta_j - \hat{\beta}_j, \beta_j + \hat{\beta}_j]$ مقدار می‌گیرند. با توجه به مباحث گفته شده، همتای استوار مدل ۶ به‌صورت مدل ۷ خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad A\\
&\text{Subject to}\\
&A > w_1(d_1^-)\\
&A > w_2(d_2^+ + d_2^-)\\
&A > w_3(d_3^-)\\
&A > w_4(d_4^+)\\
&-\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - d_1^- + \sum_j P_{1j} + \Gamma_1 Z_1 = -f_1^{\max}\\
&-\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + d_2^+ - d_2^- + \sum_j P_{2j} + \Gamma_2 Z_2 = -f_2^{opt}\\
&\sum_{j=1}^{n} D_j x_j + d_3^- = f_3^{\max}\\
&\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - d_4^+ = f_4^{\min}\\
&Z_1 + P_{1j} \geq \hat{R}_j y_j \qquad \forall j \in J_1\\
&Z_2 + P_{2j} \geq \hat{\beta}_j y_j \qquad \forall j \in J_2\\
&\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\\
&-y_j \leq x_j \leq y_j \qquad \forall j\\
&A, y_j, P_{ij}, Z_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad \forall i, j \in J_i
\end{aligned}
$$
(مدل ۷)

جدول ۱. مقادیر ضرایب موجود در محدودیت‌ها.

سهام‌ها (j)	نرخ بازده انتظاری (R_j)	ریسک سیستماتیک انتظاری (β_j)	قیمت هر سهم در آخرین روز معامله (p_j)	سود تقسیمی (D_j)
پتروشیمی پردیس	−۰٫۳۷۴۴۵۵۳۰۳	۰٫۸۲	۱۶۸۲۲	۱۲۷۵۰
سیمان قائن	۱٫۰۰۶۵۵۱۱۳۴	۱٫۰۴	۵۴۱۷۷	۸۰۰۰
رنگین	۰٫۳۲۹۲۰۷۹۲۱	−۰٫۰۸	۱۶۱۱	۰
ساپپا آذین	۵٫۶۶۱۷۶۴۷۰۶	۱٫۱۶	۲۷۱۸	۰
صنایع شیمیایی ایران	−۰٫۴۳۶۶۴۳۹۷۳	۰٫۵۲	۲۸۱۳۴	۰
مواد اولیه الیاف مصنوعی	۰٫۸۶۹۴۷۰۲۳۵	۰٫۹۸	۳۴۰۳	۲۰
دارو رازک	۰٫۹۵۵۳۰۲۳۶۶	۰٫۱۸	۲۲۳۴۱	۲۲۰۰
فولاد خوزستان	−۰٫۴۷۰۳۶۸۵۱۶	۰٫۶۳	۸۷۵۴	۵۰۰۰
سبحان دارو	۲٫۲۶۷۷۷۹۲۰۴	۰٫۸۲	۳۵۷۸۴	۲۴۰۰
سیمان آرتا اردبیل	۲٫۳۰۲۳۲۹۸۸۲	۰٫۱۴	۱۵۰۵۱	۲۸۰۰
نفت بهران	۲٫۳۰۷۷۵۹۸۱۹	۰٫۶۸	۴۲۵۴۷	۲۶۸۰
سیمان هرمزگان	۱٫۰۱۹۴۸۳۱۵۵	۰٫۳	۱۲۴۲۶	۲۵۰۰
سینا دارو	۰٫۶۱۶۱۲۹۲۹	۰٫۱۳	۱۸۲۰۰	۲۰۰۰
ساپپا دیزل	۰٫۶۰۲۳۱۶۶۰۲	۱٫۰۹	۸۳۰	۰
ملی صنایع مس ایران	−۰٫۲۴۳۰۴۸۴۰۴	۱٫۲۲	۳۳۹۰	۱۰۲۰
ایران خودرو دیزل	۱٫۷۱۵۴۷۴۲۱	۱٫۲۷	۱۶۳۲	۰
گلتاش	۰٫۱۰۷۶۹۵۶۱۵	۰٫۷۷	۹۰۱۵	۶۴۴۴
دارو اسوه	۱٫۸۷۸۷۹۳۴۰۲	۰٫۷۶	۳۰۱۸۹	۱۴۰۰
سیمان فارس	−۰٫۵۸۸۹۲۵۶۹۱	۰٫۱۳	۳۷۰۹	۲۰۰۰
نیروکلر	۰٫۲۰۲۲۶۰۰۰۴	۱٫۳۵	۷۵۹۷	۴۰۰۰

۶. مطالعه‌ی موردی

به‌منظور پیاده‌سازی و تشریح مدل ارائه‌شده، در این بخش یک نمونه‌ی عددی پیرامون انتخاب سبد سهام ایران ارائه می‌شود. در این نمونه از داده‌های روزانه مربوط به ۲۰ شاخص سهام از میان صنایع گچ و سیمان، شیمیایی و فرآورده‌های نفتی، فلزات اساسی، دارو و خودرو که براساس اطلاعات چند سال گذشته از میان صنایع فعال در بورس اوراق بهادار، همواره بیشترین حجم معاملات و بیشترین ارزش بازار و میزان سرمایه کل بازار بورس را در اختیار داشته‌اند، استفاده شده است. این داده‌ها متعلق به بازه زمانی فروردین ۹۲ تا فروردین ۹۳ هستند و همچنین از صورت‌های مالی شرکت‌های موجود در بورس اوراق بهادار تهران و نرم‌افزار ره‌آورد نوین به‌منظور جمع‌آوری اطلاعات مورد نیاز استفاده شده است. در جدول ۱، مقادیر ضرایب پارامترهای موجود در محدودیت‌های مدل، براساس داده‌های روزانه سهام در سال ۹۲ نشان داده شده است.

با نگاهی به داده‌های جدول ۱ می‌توان دریافت حدود تغییرات پارامترهای متفاوت مدل بسیار متفاوت است از این رو برای استفاده از داده‌های جدول ۱ به‌عنوان ورودی، باید داده‌ها را با استفاده از رابطه‌ی ۴ به‌صورت نرمال درآوریم. در جدول ۲ داده‌های نرمال شده جدول ۱ ارائه شده است.[۱۳]

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}} \quad (۳)$$

لازم به ذکر است در مدل‌های بهینه‌سازی چندهدفه، اگر اهداف در یک راستا و هم‌جهت باشند مسئله دارای جواب بهینه‌ی انفرادی خواهد بود؛ اما چنانچه اهداف در تضاد با یکدیگر باشند باید به دنبال یافتن جواب مصالحه‌یی باشیم. لذا در اینجا پیش از بررسی مدل غیرقطعی بهینه‌سازی سبد سهام، تأثیر اضافه کردن دو تابع هدف جدید مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور مسئله‌ی بهینه‌سازی سبد سهام درصورت درنظرگرفتن و عدم درنظرگیری توابع مذکور مورد بررسی قرارگرفته است. نتایج این بررسی‌ها در جدول ۳ ارائه شده است.

چنان که ملاحظه می‌شود، در صورت درنظرگرفتن دو تابع هدف نسبت سود تقسیمی و قیمت سهام در آخرین روز معامله علاوه بر دو هدف بازده و ریسک، تصمیم سرمایه‌گذار تغییر خواهد کرد و سرمایه‌گذار می‌تواند با درنظرگرفتن نسبت سود تقسیمی بیشتر و هزینه‌ی سرمایه‌گذاری اولیه‌ی کم‌تر به سبد مطلوب‌تری دست یابد.

برای استفاده از مدل ۷، ابتدا باید مقادیر آرمانی برای هر یک از اهداف تعیین شود. از این رو مقدار ایده‌آل توابع اول، سوم و چهارم با حل انفرادی توابع هدف، برابر مقدار بهینه‌شان و مقدار ایده‌آل تابع هدف دوم چنان که پیش‌تر ذکر شد برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۴ مقادیر ایده‌آل هریک از اهداف آورده شده است.

با درنظرگرفتن مقادیر ایده‌آل و مفروضات در مثال عددی، مدل مسئله به‌صورت مدل ۸ خواهد بود. لازم به ذکر است که به‌منظور تنوع بخشیدن به سبد سهام انتخابی، سهم هر سهام در سبد بهینه را بین صفر و ۰٫۲ قرار می‌دهیم و پیشنهاد می‌شود ۲۰٪ سرمایه‌گذاری کل سبد سهام بهینه متعلق به هریک از بخش‌های سرمایه‌گذاری باشد و با فرض یکسان بودن اهمیت اهداف ($w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = \frac{1}{4}$) با

جدول ۲. مقادیر نرمال ضرایب موجود در محدودیت‌ها.

سهام‌ها (j)	نرخ بازده انتظاری (R_j)	ریسک سیستماتیک انتظاری (β_j)	قیمت هر سهم در آخرین روز معامله (p_j)	سود تقسیمی (D_j)
پتروشیمی پردیس	۰٫۰۳۴۳۱۱	۰٫۶۲۹۳۷۰۶۲۹	۰٫۲۹۹۷۷۳	۱
سیمان قائن	۰٫۲۵۵۲۴۸	۰٫۷۸۳۲۱۶۷۸۳	۱	۰٫۶۲۷۴۵۰۹۸
رنگین	۰٫۱۴۶۸۸۵	۰	۰٫۰۱۴۶۴	۰
ساپیا آذین	۱	۰٫۸۶۷۱۳۲۸۶۷	۰٫۰۳۵۳۹۱	۰
صنایع شیمیایی ایران	۰٫۰۲۴۳۶۲	۰٫۴۱۹۵۸۰۴۲	۰٫۵۱۱۸۱۹	۰
مواد اولیه الیاف مصنوعی	۰٫۲۳۳۳۱۸	۰٫۷۲۷۲۷۲۷۲۷	۰٫۰۴۸۲۳۱	۰٫۰۰۱۵۶۸۶۲۷
دارو رازک	۰٫۲۴۷۰۴۹	۰٫۱۸۱۸۱۸۱۸۲	۰٫۴۰۳۲۲۸	۰٫۱۷۲۵۴۹۰۲
فولاد خوزستان	۰٫۰۱۸۹۶۷	۰٫۴۹۶۵۰۳۴۹۷	۰٫۱۴۸۵۳۷	۰٫۳۹۲۱۵۶۸۶۳
سبحان دارو	۰٫۴۵۷۰۲۲	۰٫۶۲۹۳۷۰۶۳	۰٫۶۵۵۲۲	۰٫۱۸۸۲۳۵۲۹
سیمان آرتا اردبیل	۰٫۴۶۲۵۵	۰٫۱۵۳۸۴۶۱۵۴	۰٫۲۶۶۷۲۵	۰٫۲۱۹۶۰۷۸
نفت بهران	۰٫۴۶۳۴۱۸	۰٫۵۳۱۴۶۸۵۳	۰٫۷۸۱۹۹۳	۰٫۲۱۰۱۹۶۰۸
سیمان هرمزگان	۰٫۲۵۷۳۱۷	۰٫۲۶۵۷۳۴۲۶	۰٫۲۱۷۳۶۹	۰٫۱۹۶۰۷۸۴۳
سینا دارو	۰٫۱۹۲۷۸۸	۰٫۱۴۶۸۵۳۱۵	۰٫۳۲۵۶۰۴	۰٫۱۵۶۸۶۲۷۵
ساپیا دیزل	۰٫۱۹۰۵۷۸	۰٫۸۱۸۱۸۱۸	۰	۰
ملی صنایع مس ایران	۰٫۰۵۵۳۳۴	۰٫۹۰۹۰۹۰۹	۰٫۰۴۷۹۸۸	۰٫۰۸
ایران خودرو دیزل	۰٫۳۶۸۶۶۴	۰٫۹۴۴۰۵۵۹۴	۰٫۰۱۵۰۳۴	۰
گلتاش	۰٫۱۱۱۴۴۷	۰٫۵۹۴۴۰۵۵۹	۰٫۱۵۳۴۲۹	۰٫۵۰۵۴۱۱۷۶۵
دارو اسوه	۰٫۳۹۴۷۹۱	۰٫۵۸۷۴۱۲۵۸	۰٫۵۵۰۳۴	۰٫۱۰۹۸۰۳۹۲۲
سیمان فارس	۰	۰٫۱۴۶۸۵۳۱۴۷	۰٫۰۵۳۹۶۷	۰٫۱۵۶۸۶۲۷۴۵
نیروکلر	۰٫۱۲۶۵۷۶	۱	۰٫۱۲۶۸۴۹	۰٫۳۱۳۷۲۵۵

جدول ۳. بررسی حساسیت مدل پیشنهادی به توابع هدف جدید.

شماره توابع هدف	f_1	f_2	f_3	f_4
۱ و ۲	۰٫۲۸۳۲	۰٫۷۹۰۲	۰٫۲۴۱۶	۰٫۲۳۸۱
۱، ۲ و ۳	۰٫۲۲۵۰	۰٫۶۸۹۹	۰٫۳۸۹۷	۰٫۳۱۳
۱، ۲ و ۴	۰٫۲۲۷۳	۰٫۷۲۸۲	۰٫۱۰۹۷	۰٫۲۱۳۳
۱، ۲، ۳ و ۴	۰٫۲۳۴۳	۰٫۷۰۲۷	۰٫۲۳۱۴	۰٫۲۲۶۴

جدول ۴. مقادیر ایده‌آل اهداف.

توابع هدف	f_1	f_2	f_3	f_4
مقدار ایده‌آل	۰٫۳۷۱۱۳۸	۱	۰٫۳۱۸۵۴	۰٫۱۰۹۸۴

استفاده از بسته‌ی نرم‌افزاری Lingo۱۱٫۰ مدل را حل می‌کنیم.

$$\text{Min} \quad A$$

Subject to

$$A > 0.25(d_1^-)$$

$$A > 0.25(d_2^+ + d_2^-)$$

$$A > 0.25(d_3^-)$$

$$A > 0.25(d_4^+)$$

$$-\sum_{j=1}^{20} R_j x_j - d_1^- + \sum_j P_{1j} + \Gamma_1 Z_1 = -0.371138$$

$$-\sum_{j=1}^{20} \beta_j x_j + d_2^+ - d_2^- + \sum_j P_{2j} + \Gamma_2 Z_2 = -1$$

$$\sum_{j=1}^{20} D_j x_j + d_3^- = 0.31854$$

$$\sum_{j=1}^{20} p_j x_j - d_4^+ = 0.10984$$

$$Z_1 + P_{1j} \geq \hat{R}_j y_j \qquad \forall j \in J_1$$

$$Z_2 + P_{2j} \geq \hat{\beta}_j y_j \qquad \forall j \in J_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j \qquad \forall j$$

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_6 + x_{11} + x_{17} + x_{20} = 0.2$$

$$x_4 + x_{16} + x_{14} = 0.2$$

$$x_2 + x_{10} + x_{12} + x_{19} = 0.2$$

$$x_7 + x_9 + x_{13} + x_{18} = 0.2$$

$$x_8 + x_{15} = 0.2$$

$$0 \leq x_j \leq 0.1$$

$$A, y_j, P_{ij}, Z_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad \forall i, j \in J_i$$ (مدل ۸)

به‌منظور به‌دست آوردن جواب بهینه، عدم قطعیت مسئله را در بازه $[R_j -$

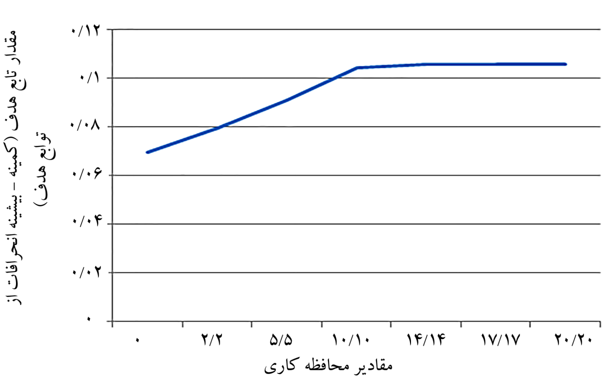
جدول ۵. نتایج محاسبات مثال عددی.

Γ_1, Γ_2	۰, ۰	۲, ۲	۵, ۵	۱۰, ۱۰	۱۴, ۱۴	۱۷, ۱۷	۲۰, ۲۰
A	۰٫۰۶۹۷۵۵	۰٫۰۷۹۴۱۷	۰٫۰۹۱۲۲۴۵	۰٫۱۰۴۲۲۴۷	۰٫۱۰۵۸۰۴	۰٫۱۰۵۸۰۴	۰٫۱۰۵۸۰۴
f_1	۱٫۳۹۰۸۱۵۹	۱٫۳۸۶۶۹۳۱	۱٫۱۹۸۲۳۹۱	۱٫۱۲۶۸۴۷۱۷	۱٫۰۵۸۳۳۵	۱٫۰۵۸۳۳۵	۰٫۰۵۸۳۳۵
f_2	۰٫۹۵۱	۰٫۹۵۰۳۳	۰٫۹۴۱۱۹۶۱	۰٫۹۳۴۰۹۹	۰٫۹۳۳۷۱	۰٫۹۳۳۷۱	۰٫۹۳۳۷۱
f_3	۲۴۳۴	۲۴۳۴	۲۴۰۵٫۳۶۱	۲۳۸۱٫۴۶۴	۲۳۷۰٫۶۷۸	۲۳۷۰٫۶۷۸	۲۳۷۰٫۶۷۸
f_4	۱۶۰۰۷	۱۶۰۰۸٫۰۳	۱۶۱۰۹٫۱۳۴	۱۶۴۷۴٫۸۳۶	۱۶۶۵۸٫۳۲	۱۶۶۵۸٫۳۲	۱۶۶۵۸٫۳۲
X_1	۰	۰	۰٫۰۱۳۴۶	۰٫۰۴۲۲۲	۰٫۰۵۶۶۶	۰٫۰۵۶۶۶	۰٫۰۵۶۶۶
X_2	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
X_3	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_4	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۰۷۲۵۸۱	۰٫۰۶۷۵۲۱	۰٫۰۵۴۵۷	۰٫۰۵۴۵۷	۰٫۰۵۴۵۷
X_5	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_6	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۰۸۶۵۳۸	۰٫۰۵۶۵۳۸۶	۰٫۰۴۳۲۶	۰٫۰۴۳۲۶	۰٫۰۴۳۲۶
X_7	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_8	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
X_9	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
X_{10}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{11}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{12}	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
X_{13}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{14}	۰	۰٫۰۰۳۷۰۳۷	۰٫۰۶۰۷۵۳	۰٫۰۷۳۷۱۸	۰٫۰۷۴۳۶	۰٫۰۷۴۳۶	۰٫۰۷۴۳۶
X_{15}	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
X_{16}	۰٫۱	۰٫۰۹۶۲۹۶	۰٫۰۶۶۶۶۷	۰٫۰۵۸۶۷۹	۰٫۰۷۱۱۵	۰٫۰۷۱۱۵	۰٫۰۷۱۱۵
X_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{18}	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
X_{19}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{20}	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱

$[\beta_j - \hat{\beta}_j, \beta_j + \hat{\beta}_j]$ و $[\hat{R}_j, R_j + \hat{R}_j]$ با مقدار نوسان ۲۰ درصد از مقادیر اسمی در نظر گرفته‌ایم و به‌ازای مقادیر مختلف و با استفاده از نرم‌افزار Lingo۱۱٫۰ حل کرده‌ایم. نتایج محاسباتی به شرح جدول ۵ است.

در مدل حل شده و در محدودیت‌های دارای عدم قطعیت، ۲۰ ضریب غیرقطعی برای بازده و ۲۰ ضریب غیرقطعی برای ریسک وجود دارد. بنابراین سطح محافظه‌کاری (هزینه‌ی استواری) برای هریک از پارامترهای بازده و ریسک تا ۲۰ مورد بررسی شده‌اند. ثابت شده که اگر سطح محافظه‌کاری تا سقف تعداد پارامترهای غیرقطعی تغییر کند، شدنی بودن جواب استوار تضمین می‌شود. نتایج جدول ۵ نشان‌دهنده‌ی حساسیت مدل پیشنهادی در مقابل نوسان داده‌هاست. ستون اول این جدول با در نظر گرفتن سطح محافظه‌کاری صفر نمایان‌گر مدل قطعی بوده و بیان‌گر عدم نوسان داده‌هاست و ستون آخر نشان‌گر حداکثر نوسان داده‌هاست که محافظه‌کارانه‌ترین جواب ممکن است.

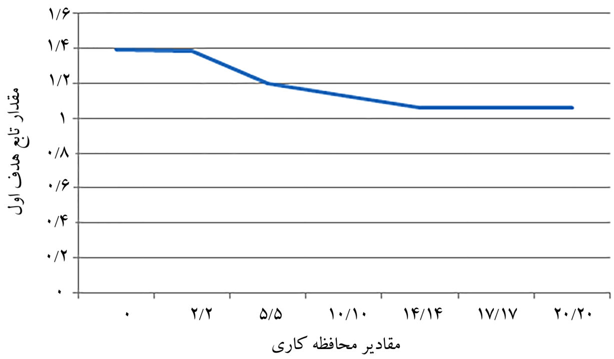
مدل‌های استوار به نحوی عمل می‌کنند که سطح ریسک تصمیم در ازای افزایش سطح محافظه‌کاری کاهش می‌یابد. نتایج فوق نشان‌گر توانایی مدل پیشنهادی در ارتباط با عدم قطعیت داده‌های مسئله است. چنان که مشاهده می‌شود با افزایش سطوح محافظه‌کاری Γ_1 و Γ_2، مقدارکل تابع هدف (کمینه‌ـ بیشینه انحرافات) مطابق



شکل ۱. حساسیت تابع هدف مدل استوار (کمینه‌ـ بیشینه انحرافات) با تغییرات سطوح حفاظت.

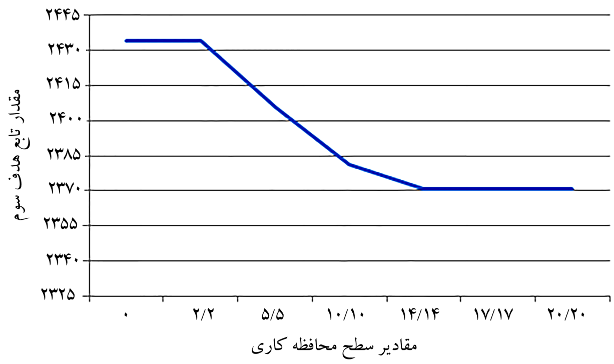
نمودار شکل ۱ بهتر نشده و افزایش می‌یابد. و در واقع نشان می‌دهد که با افزایش Γ_1 و Γ_2، جواب‌ها محافظه‌کارانه‌تر شده است. در $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (۰, ۰)$ هیچ نوسانی مجاز نبوده و مسئله همان مسئله‌ی قطعی است.

همچنین با توجه به نتایج جدول ۵، مشاهده می‌شود که با افزایش سطوح



شکل ۲. رابطه‌ی سطوح حفاظت و تابع هدف اول (بازده انتظاری).

شکل ۳. رابطه سطوح حفاظت و تابع هدف دوم (ریسک).



شکل ۴. رابطه سطوح محافظه‌کاری و تابع هدف سوم (نسبت سود تقسیمی).

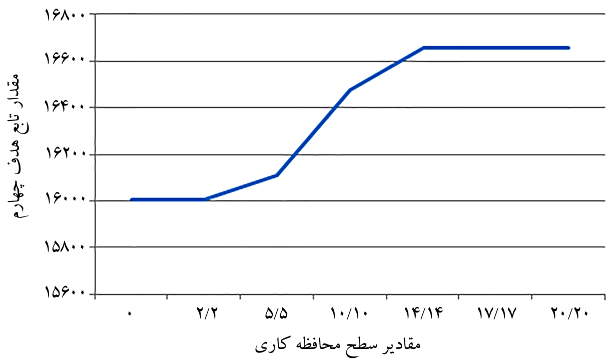
محافظه‌کاری، مقادیر تابع هدف اول (بازده انتظاری) مطابق شکل ۲ کاهش می‌یابد و این نمایانگر مقابله‌ی مدل پیشنهادی در مقابل نوسان داده‌ها است.

به‌علاوه با افزایش سطوح محافظه‌کاری مطابق شکل ۳ دیده می‌شود که مقدار تابع هدف دوم از مقدار آرمانی ۱ دورتر می‌شود.

با بررسی مقادیر تابع هدف سوم (نسبت سود تقسیمی) به‌ازای افزایش سطوح محافظه‌کاری پارامترهای غیرقطعی، مطابق شکل ۴، تابع هدف سوم نیز همانند تابع هدف اول کاهش می‌یابد.

همچنین بررسی مقادیر تابع هدف چهارم (قیمت هر سهم در آخرین روز معامله) ملاحظه می‌شود که با افزایش سطوح محافظه‌کاری پارامترهای غیرقطعی، مقدار این تابع هدف افزایش می‌یابد. روند تغییرات تابع هدف چهارم در شکل ۵ ارائه شده است.

چنان‌که ملاحظه می‌شود، با افزایش سطح محافظه‌کاری مقدار انحراف از آرمان‌ها و همچنین مقدار تابع هدف بدتر می‌شود؛ این امر با منطق ریاضی استوارسازی مدل سازگار است. به‌نحوی که هرچه تصمیم‌گیرنده بخواهد عدم اطمینان بیشتری



شکل ۵. رابطه سطوح محافظه‌کاری و تابع هدف چهارم (قیمت هر سهم در آخرین روز معامله).

جدول ۶. تحلیل تقابل ریسک تصمیم‌گیری و هزینه استواری.

Γ_1, Γ_2	تابع هدف	هزینه‌ی استواری	انحراف از مقدار قطعی	ریسک تصمیم‌گیری
(۰, ۰)	۰٫۰۶۹۷۵۵	۰	۰	۰٫۳۸
(۲, ۲)	۰٫۰۷۹۴۱۷	۰٫۰۰۹۶۶۲	۰٫۱۴	۰٫۳۲
(۵, ۵)	۰٫۰۹۱۲۲۴۵	۰٫۰۲۱۴۶۹۵	۰٫۳۰	۰٫۲۸
(۱۰, ۱۰)	۰٫۱۰۴۲۲۴۷	۰٫۰۳۴۴۶۹۷	۰٫۴۹	۰٫۲۱
(۱۲, ۱۲)	۰٫۱۰۵۸۰۴	۰٫۰۳۶۰۴۹	۰٫۵۲	۰٫۰۹
(۱۷, ۱۷)	۰٫۱۰۵۸۰۴	۰٫۰۳۶۰۴۹	۰٫۵۲	۰٫۰۹
(۲۰, ۲۰)	۰٫۱۰۵۸۰۴	۰٫۰۳۶۰۴۹	۰٫۵۲	۰٫۰۹

را برای مدل درنظرگیرد و یا به عبارتی با ریسک کم‌تری تصمیم‌گیری نماید، جواب محافظه‌کارتری دریافت می‌نماید.

درواقع هدف اصلی ارائه‌ی مدل استوار پیشنهادی، ارائه‌ی یک مدل بهینه‌سازی سبد سهام است که بتواند بهینگی و موجه بودن تخصیص انجام شده را در شرایط عدم اطمینان حفظ کند. مدل‌های استوار به‌نحوی عمل می‌کنند که سطح ریسک تصمیم در ازای افزایش سطح محافظه‌کاری کاهش می‌یابد و هرچه سطح محافظه‌کاری افزایش یابد احتمال نقض محدودیت مربوط به آن کاهش می‌یابد.

همچنین بدیهی است انتخاب بدبینانه‌ترین وضعیت ممکن یعنی $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (۲۰, ۲۰)$ منجر به از دست دادن مقدار زیادی از آرمان‌های مدل می‌شود. بنابراین تصمیم‌گیرندگان می‌توانند با بررسی شرایط تصمیم‌گیری بین سطوح محافظه‌کاری و سطح ریسک تصمیم‌گیری (احتمال نقض مدل و یا انحراف از مقدار بهینه) توازن برقرار کنند. طبیعتاً تصمیم‌گیرندگان ریسک‌پذیر تمایل بیشتری به سطوح محافظه‌کاری پایین و تصمیم‌گیرندگان ریسک‌گریز تمایل بیشتری به سطوح محافظه‌کاری بالا دارند و تصمیمات خود را در حالات نزدیک به بدترین شرایط ممکن اخذ می‌کنند تا با ریسک کم‌تری مواجه شوند. به‌منظور نمایش ضرورت استوارسازی مدل اسمی طراحی شده از تکنیک شبیه‌سازی مونت‌کارلو به‌ترتیب برای مدل‌های قطعی و استوار استفاده شده است. جدول ۶ بیانگر ۱۰۰۰ بار شبیه‌سازی مدل با پارامترهای غیرقطعی است. در اینجا با توجه به درنظرگرفتن پارامترهای غیرقطعی در ضرایب تکنولوژیکی مدل پیشنهادی، از شاخص انحراف از مقدار بهینه به‌عنوان ریسک تصمیم‌گیری استفاده شده است که از میانگین نتایج شبیه‌سازی حاصل شده است.

چنان که ملاحظه می‌شود با افزایش سطوح محافظه‌کاری هزینه‌ی استواری و

انحراف از تابع هدف قطعی افزایش یافته، اما در مقابل ریسک تصمیم‌گیری کاهش می‌یابد.

۷. نتیجه‌گیری

با توجه به این که در مدل‌های واقعی به‌ندرت می‌توان با مدلی مواجه شد که در آن متغیری با ماهیت غیرقطعی وجود نداشته باشد، در این مقاله یک مدل جدید براساس رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه و با استفاده از بهینه‌سازی استوار برای مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه چندهدفه ارائه شد. با افزودن دو هدف سود تقسیم شده‌ی سالیانه و قیمت سهام در آخرین روز معامله، به اهداف بازدهی و ریسک انتظاری، مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری میانگین ـ واریانس مارکویتز به یک مسئله‌ی چهارهدفه در فضای عدم قطعیت توسعه داده شد، که برای درنظر گرفتن عدم قطعیت در بازدهی و ریسک انتظاری، مدل را با استفاده از رویکرد برتسیمس و سیم به مدل استوار چندهدفه تبدیل کردیم. لازم به ذکر است این مدل نسبت به مدل‌های مشابه خود با توجه به استفاده از رویکرد برتسیمس و سیم خطی بوده و دارای برتری محاسباتی است. به‌منظور بررسی کارایی مدل پیشنهادی، از آن برای بهینه‌سازی یک نمونه ۲۰ سهمی تحت شرایط عدم قطعیت استفاده شد. نتایج حاصل از حل مدل پیشنهادی نشان دهنده حساسیت مدل در مقابل نوسان داده‌ها است. تجزیه و تحلیل عددی نشان می‌دهد که با افزایش سطوح محافظه‌کاری مقدار تابع هدف برنامه‌ریزی آرمانی کمینه ـ بیشینه پیشنهادی افزایش می‌یابد و همچنین مقادیر توابع هدف مسائل بیشینه‌سازی یعنی توابع اول و سوم کاهش و همچنین مقدار تابع هدف مسائل کمینه‌سازی یعنی هدف چهارم افزایش می‌یابد و مقدار تابع هدف دوم از مقدار آرمانی ۱ دورتر می‌شود. از این رو مطالعه‌ی صورت گرفته نشان می‌دهد که مدل استوار ارائه‌شده را به‌خوبی می‌توان برای مقابله با عدم قطعیت در مسئله‌ی تعیین سبد مالی در نظر گرفت.

پانوشت‌ها

1. min-max goal programming
2. Bertsimas and Sim
3. Markowits
4. robust optimization

منابع (References)

1. Karimian, N. and Abedzade, M. “Minimax programming in multi-objective portfolio selection in accidental situation”, *Financial Engineering and Stock Exchange Management*, **12**, pp.22-34 (2012).
2. Bell, D.E., Raiffa, H., and Tversky, A. “ Risky choice revisited”, *Decision Making: Descriptine*, normatine and prescriptike interacrions, **34**, pp,99-112 (1988).
3. Ghahtarani, A. and Najafi, A. “Robust goal programming for multi-objective portfolio problem”, *Journal of Economic Modeling*, **33**, pp. 588-592 (2013).
4. Amiri, M. “Portfolio optimization with using compromise nadir value programming”, *Journal of industrial Management Studies,* **6**, pp. 143-165 (2009).
5. Soyster, A.L. “Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming”, *Journal of Operation Research*, **21**, pp. 1154-1157 (1973).
6. Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. “Robust solutions to uncertain linear program”, *Journal of Operations Research*, **25**, pp. 1-13 (1999).
7. Bertsimas, D. and Sim, M. “The price of robustness”, *Journal of Operations Research*, **52**, pp. 35-53 (2004).
8. Fliege, J. and Werner, R. “Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization”, *Journal of Operations Research*, **234**, pp. 422-433 (2014).
9. Eslamibidgoli, Gh. and Talangi, A. “Goal programming models in portfolio selection”, *Financial Research*, **4**, pp. 50-71 (1999).
10. Umarusman, N. “Min-max goal programming approach for solving multi-objective De Noro programming problems”, *Journal of Operations Research,* **10**, pp. 92-99 (2013).
11. Yang, S. and Yang, J.B. “Minimax goal programming for managerial decision making”, Working Paper Series, Manchester School of Management, pp. 1-19 (2004).
12. Lee, S. and Chesser, D. “goal programming for portfolio selection”, *The Journal of Portfolio Management,* **6**, pp. 22-26 (1980).
13. Malakooti, B., Kim, H. and Sheikh, Sh. “Bat intelligence search with application to multi-objective multiprocessor scheduling optimization”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,* **60**, pp. 1071-1086 (2012).