

# توسعه‌ی مدل استوار چندبازه‌ی برای مواجهه با عدم قطعیت هیستوگرامی (مطالعه‌ی موردی: مکان‌یابی تسهیلات)

مریم خداوردی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

عبدالله آقایی\* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۵ (۱۳۹۵)  
دردی (۱۳۹۵)، شماره ۱/۲، ص. ۱۱۷-۱۱۱، (پاداشت فنی)

یکی از فرض‌های بهینه‌سازی کلاسیک، قطعی بودن داده‌هاست در حالی که وجود پارامتر غیرقطعی در مسائل واقعی غیر قابل اجتناب است. بهینه‌سازی استوار از جمله تکنیک‌های توسعه‌یافته برای مواجهه با شرایط غیرقطعی است. در رویکردهای استواری ارائه‌شده تاکنون فرض بر آن بوده که پارامتر غیرقطعی عضو مجموعه‌ی محدب است، در حالی که در بسیاری از مسائل واقعی با جمع‌آوری داده‌ها و سوابق گذشته‌ی پارامترها، فضای غیرقطعی به صورت هیستوگرامی تعیین می‌شود و باید به صورت فضای غیرمحدب تعریف شود. در این مقاله ضمن توسعه‌ی الگوریتم پیشنهادی در زمان مواجهه با فضای غیرقطعی هیستوگرامی، رویکرد پیشنهادی ارائه شده برای یافتن جواب استوار مسئله‌ی مکان‌یابی که دارای پارامترهای تقاضای غیرقطعی هیستوگرامی است، با توجه به کاربردهای فراوان تعریف غیرتصادفی پارامترهای غیرقطعی در مسئله‌ی مکان‌یابی استفاده شده است.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی استوار، عدم قطعیت هیستوگرامی، مکان‌یابی تسهیلات.

## ۱. مقدمه

با توجه به این که غالباً حذف پارامترهای غیرقطعی در مدل‌ها ممکن نیست، لحاظ کردن پارامترها به صورت غیرقطعی در مدل امری اجتناب‌ناپذیر است.<sup>[۱]</sup> در بسیاری از مطالعات نظری انجام‌شده، برای رعایت سادگی مدل، داده‌ها و پارامترهای مسئله به صورت قطعی فرض می‌شود و مقدار آنها با پیش‌بینی‌های انجام شده به صورت تخمینی برآورد می‌شود. در صورتی که باید پارامترهای غیرقطعی را در مدل در نظر گرفت تا امکان تصمیم‌گیری با اطمینان بیشتر فراهم شود.

برای مواجهه با عدم قطعیت، روش‌هایی چون برنامه‌ریزی تصادفی احتمالی، فازی و برنامه‌ریزی پویا و بهینه‌سازی استوار توصیه شده است.<sup>[۱]</sup> روش‌های پیشنهادی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: ۱. روش‌هایی با تخمین توزیع پارامتر غیرقطعی؛ ۲. روش‌هایی بدون تخمین توزیع پارامتر غیرقطعی. با توجه به این که تخمین تابع‌های توزیع پارامتر نیازمند حجم انبوهی از داده‌هاست و معمولاً در مسائل واقعی امکان دسترسی به این مقدار از داده‌ها وجود ندارد. پیاده‌سازی روش‌های بدون نیاز به توزیع پارامتر مانند بهینه‌سازی استوار کاربردی‌تر است.

در بسیاری از رویکردهای استواری ارائه شده، پارامتر غیرقطعی عضو مجموعه‌ی محدب فرض شده،<sup>[۲]</sup> حال آن که در بسیاری از مسائل واقعی با جمع‌آوری داده‌ها و

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۴/۳۱، اصلاحیه ۱۳۹۳/۱/۲۸، پذیرش ۱۳۹۳/۱۲/۴.

mkhodaverdi@mail.kntu.ac.ir  
aaghaie@kntu.ac.ir

سوابق گذشته‌ی پارامتر غیرقطعی، فضای غیرقطعی تعیین می‌شود. در نتیجه به طور دقیق پارامتر غیرقطعی به صورت هیستوگرامی خواهد بود و باید به صورت فضای غیرمحدب تعریف شود.

در این مقاله ضمن توسعه‌ی الگوریتم پیشنهادی به‌هنگام مواجهه با فضای غیرقطعی هیستوگرامی، رویکرد پیشنهادی ارائه شده برای یافتن جواب استوار مسئله‌ی مکان‌یابی را که دارای پارامترهای تقاضای غیرقطعی است، به کار برده‌ایم.

مسئله‌ی مکان‌یابی مسئله‌ی است که در آن مجموعه‌ی از متقاضیان دریافت کالا یا سرویس در منطقه‌ی خاص به صورت پراکنده پخش شده‌اند و تقاضای آنان باید به‌وسیله‌ی یک یا چند تسهیل به صورت رقابتی یا مشارکتی بسته به نوع کالا و سرویس درخواستی تأمین شود.<sup>[۳]</sup> از آنجا که مسئله‌ی مکان‌یابی تسهیلات از جمله مسائل استراتژیک است، به‌منظور دست‌یابی به یک برنامه‌ریزی درازمدت مطرح می‌شود و از طرفی، در دنیای واقعی تمامی پارامترها دستخوش تغییرات خواهد بود، دست‌یابی به برنامه‌ی برای سیستم که بتواند با تغییرات سیستم قابلیت سرویس‌دهی خود را همچنان حفظ کند دارای اهمیت است که این هدف با پیاده‌سازی روش‌های استواری امکان‌پذیر خواهد بود. این درحالی است که در دنیای واقعی پارامترهای غیرقطعی مسئله‌ی مکان‌یابی مانند تقاضا معمولاً به صورت تصادفی مقدار نمی‌پذیرند. پس فرض انتخاب تصادفی پارامتر غیرقطعی از بازه‌ی غیرقطعی، موجود در بسیاری از رویکردهای استواری محتمل نیست و نیاز به ارائه‌ی رویکردی واقعی‌تر دارد.

## ۲. مروری بر ادبیات رویکردهای استوار

مفهوم بهینه‌سازی استوار برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ توسط سویستر ارائه شد.<sup>[۴]</sup> سویستر مسئله را در حالت عدم قطعیت پارامترهای مدل در نظر گرفت و هدف از بهینه‌سازی آن را یافتن متغیرهای تصمیم اعلام کرد، به گونه‌ای که جواب به‌ازای تمامی مقادیر پارامتر غیرقطعی، صددرصد شدنی باشد. یکی از اصلی‌ترین انتقادهای وارده به این روش، در نظر گرفتن بدترین سناریو است که منجر به جوابی بسیار محافظه‌کارانه با بیشترین انحراف از مقدار بهینه شده است. این در حالی است که احتمال قرار گرفتن تمامی پارامترهای غیرقطعی در بدترین وضعیت بسیار کم است. براین اساس بسیاری از مقالات با هدف توسعه و بهبود روش سویستر و به منظور ایجاد تعادل بین استواری و بهینگی جواب نهایی توسعه یافتند.<sup>[۶]</sup> در حالت کلی در مسئله‌ی بهینه‌سازی خطی مدل ۱:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \end{aligned} \quad (1)$$

که  $x_j$  می‌تواند به صورت متغیر پیوسته یا عدد صحیح باشد، با انتقال تمامی پارامترهای غیر قطعی به سمت چپ، به مدل ۲ هم‌ارز با مدل ۱ خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} z - \sum_j c_j x_j &\leq 0 \\ b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j &\leq 0 \quad \forall i \\ x_0 &= -1 \end{aligned} \quad (2)$$

بنابراین بدون از دست رفتن جامعیت مسئله، تنها محدودیت عمومی و خطی شامل عدم قطعیت در پارامترهای سمت چپ، مورد تمرکز است.

$$\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \leq b_i \quad (3)$$

پارامتر  $\tilde{a}_{ij}$  به عنوان پارامتر غیرقطعی مد نظر قرار می‌گیرد، به طوری که:

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + V_{ij} \hat{a}_{ij} \quad (4)$$

$a_{ij}$  مقدار اسمی پارامتر و  $\hat{a}_{ij}$  مقدار انحراف از مقدار اسمی و  $V_{ij}$  متغیر تصادفی است. با تعریف‌های فوق می‌توان محدودیت ۳ را چنین بازنویسی کرد:

$$\sum_j a_{ij} x_j + \sum_j V_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \leq b_i \quad (5)$$

پس هدف بهینه‌سازی استوار تضمین عملی بودن جواب با تغییر پارامترها یا عبارت ۶ است:

$$\sum_j a_{ij} x_j + \max_{\hat{a} \in u} \left\{ \sum_j V_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \leq b_i \quad (6)$$

چگونگی فرمول‌بندی مدل همتای استوار یک محدودیت، به نحوه‌ی تعریف و انتخاب فضای غیرقطعی پارامتر بستگی دارد. در جدول ۱ انواع فضاهای غیر قطعی توسعه‌یافته و محدودیت معادل در مدل‌های همتای استوار ارائه شده است.<sup>[۵]</sup> همچنین مشاهده شده که در تمامی حالات فضاهای غیرقطعی به صورت محدب فرض شده است.

روش برتسیماس و سیم یکی از روش‌های استواری ارائه شده برای یافتن جواب استوار مسئله‌ی خطی است.<sup>[۶]</sup> در این روش فرض بر آن است که فضای عدم

قطعیت تمامی پارامترها به صورت بازه‌ی در نظر گرفته می‌شود. با این روش می‌توان بین بهینگی و استواری تعادل ایجاد کرد. اگر فرض کنیم که محدودیت  $i$ ام مسئله‌ی اسمی به صورت  $a_{ij} x_j \leq b_i, j \in J_i$  و به عنوان مجموعه ضرایب باشد و پارامترهای  $a_{ij}$  دارای عدم قطعیت باشند، مقدار واقعی پارامتر  $a_{ij}$  را با  $\tilde{a}_{ij}$  نشان می‌دهیم.

برتسیماس و سیم پارامتر  $\Gamma_i$  را که تعیین‌کننده‌ی سطح استواری جواب است به مدل همتای استوار اضافه کردند و انتخاب تعدادی از پارامترهای غیرقطعی در هر محدودیت و نه در تمامی آنها (همانند روش سویستر)، و نیز نسبت دادن مقدار حدی به آنها را در هر مدل ممکن ساختند. در این صورت  $\Gamma_i$  نشان‌دهنده‌ی همان تعداد مشخص از پارامترهاست. با این تعریف زمانی که  $\Gamma_i = 0$  باشد به مدل قطعی و زمانی که  $\Gamma_i = |J_i|$  باشد به مدل همتای محافظه‌کارانه‌ی سویستر خواهیم رسید؛ با تغییر متغیر  $\Gamma_i$  بین بازه‌ی  $[0, |J_i|]$  نیز می‌توان سطح حفاظت را تنظیم کرد. البته انتخاب یک مقدار صحیح برای پارامتر  $\Gamma_i$  الزامی نبوده و طراح امکان انتخاب هر عددی در بازه‌ی  $[0, |J_i|]$  را دارد. مدل خطی همتای ارائه شده توسط برتسیماس و سیم عبارت است از:

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x \\ \text{s.t.} \quad & a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} p_{ij} + \Gamma_i q_i \leq b_i \quad \forall i \\ & p_{ij} + q_i \geq \hat{a}_{ij} Y_j \quad \forall i, j \in J_i \\ & -Y_j \leq x_j \leq Y_j \quad \forall j \\ & p_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J_i \\ & q_i \geq 0 \quad \forall i \\ & Y_j \geq 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (7)$$

رویکرد بهینه‌سازی استوار در مدل‌های متفاوتی از مکان‌یابی تسهیلات مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از روش‌های معمول استفاده از تابع کمیته - بیشینه است که با هدف کمیته‌کردن بیشترین هزینه به دنبال مکان‌یابی تسهیلات است. این تکنیک برای مسئله‌ی  $1$ -center<sup>[۸]</sup>، مسئله‌ی  $1$ -median<sup>[۹]</sup> و مسئله‌ی  $p$ -median<sup>[۱۰]</sup> توسعه یافته که در نهایت به جوابی با سطح محافظت بالا منجر خواهد شد. همچنین مدل همتای استوار مسئله‌ی مکان‌یابی انبارها با هدف کمیته‌سازی هزینه‌ها، زمانی که فضای تعریف‌شده‌ی تغییرات تقاضا به صورت بازه‌ی باشد،<sup>[۴]</sup> و نیز زمانی که فضای غیرقطعی به صورت بیضوی باشد<sup>[۷]</sup> توسط برون و همکاران<sup>[۱۱]</sup> محاسبه شده است. به دلیل کاهش سطح محافظت روش بن‌تال و نیروسکی<sup>[۱۰]</sup> نسبت به روش سویستر،<sup>[۴]</sup> فرض تغییر پارامترهای غیرقطعی در فضای بیضوی در مطالعات برخی از پژوهش‌گران<sup>[۱۲، ۱۳]</sup> پیاده‌سازی شده است.

علاوه بر روش‌های عمومی مطرح شده، روش‌های استواری دیگری نیز با توجه به ویژگی‌های خاص تعریف شده برای مدل مکان‌یابی -- مثلاً در مواردی که مسئله‌ی مورد بررسی به یک مدل دومرحله‌ی تبدیل شود -- توسعه یافته است. یو و همکاران برای زمانی که احتمال خرابی هر یک از تسهیلات در نظر گرفته شود، یک مدل دومرحله‌ی را توسعه دادند و رویکرد بهینه‌سازی استوار دومرحله‌ی<sup>[۱۴]</sup> را برای یافتن جواب استوار مسئله تطبیق دادند.<sup>[۱۵]</sup> همچنین در مواردی که تمامی متغیرهای مسئله به صورت صفر و ۱ باشد و فضای شبکه‌ی برای مدل مکان‌یابی تعریف شده باشد، مدل‌های رویکرد ابتکاری<sup>[۱۶]</sup> برای حل این نوع پیاده‌سازی شده است.<sup>[۱۷]</sup>

جدول ۱. انواع فضاهای غیرقطعی توسعه یافته و محدودیت معادل در مدل همتا.

مرجع	بازه‌ی شدنی برای پارامترها	محدودیت معادل در مدل همتای استوار	محدودیت مرتبط در مدل اولیه	شکل فضای غیرقطعی
[۲]	--	$\sum_j a_{ij}x_j + \theta \sum_j \hat{a}_{ij} x_j  \leq b_i$	$ v_j  \leq \theta (\forall j)$	بازه‌ی
[۷]	--	$\sum_j a_{ij}x_j + (\theta \sqrt{\sum_j \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}) \leq b_i$	$\sqrt{\sum_j v_j^2} \leq \theta$	بیضوی
[۶]	--	$\begin{cases} \sum_j a_{ij}x_j + \theta p_i \leq b_i \\ p_i \geq \hat{a}_{ij} x_j  (\forall j) \end{cases}$	$\sum_j  v_j  \leq \theta$	چندضلعی
[۲]	$\Psi \leq \Omega \leq \Psi \sqrt{ J_i }$	$\sum_j \hat{a}_{ij}x_j + [\Psi \hat{a}_{ij}u_{ij} + \Omega \sqrt{\sum_j \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2}] \leq b_i$ $-u_{ij} \leq x_j - z_{ij} \leq u_{ij}$	$\sqrt{\sum_j v_j^2} \leq \Omega,$ $ v_j  \leq \Psi (\forall j)$	بازه‌ی بیضوی + بیضوی
[۲]	$\Psi \leq \Gamma \leq \Psi  J_i $	$\begin{cases} \sum_j a_{ij}x_j + [\Psi u_{ij} + \Gamma z_i] \leq b_i \\ z_i + u_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j  \end{cases}$	$\sum_j  v_j  \leq \Gamma,$ $ v_j  \leq \Psi (\forall j)$	بازه‌ی چندضلعی
[۲]	$\Psi \leq \Omega \leq \Psi  J_i $ $\Omega \leq \Gamma \leq \Omega  J_i $	$\begin{cases} \sum_j a_{ij}x_j + [\sum_j  u_{ij}  + \Omega \sqrt{\sum_j w_{ij}^2} + \Gamma z_i] \leq b_i \\ z_i \geq \hat{a}_{ij} x_j  - u_{ij} - w_{ij} (\forall j) \end{cases}$	$\sum_j  v_j  \leq \Gamma,$ $\sqrt{\sum_j v_j^2} \leq \Omega,$ $ v_j  \leq \Psi (\forall j)$	بازه‌ی بیضوی + چندضلعی

این تفاوت که  $s_m \subseteq J$  و برای هر بازه پارامتر  $\Gamma_i^k$  به جای پارامتر  $\Gamma_i$  تعریف شده است. بدین ترتیب مقدار  $\beta(x, s_m)$  معادل با بیشینه انحراف سمت چپ محدودیت‌ها خواهد بود:

$$\begin{aligned} \max_{s_m \subseteq J_i} & \sum_{k \in K} \sum_{j \in s_m} |x_{ij}| \times \delta_{ij}^k \times Y_{ij}^k \\ s.t. : & \sum_{j \in s_m} Y_{ij}^k \leq \Gamma_i^k \quad \forall k \\ & \sum_{k \in K} Y_{ij}^k \leq 1 \quad \forall j \\ & Y_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall j, \forall k \end{aligned} \quad (۸)$$

محدودیت اول در مدل ۸ تضمین می‌کند که همانند روش برتسیماس و سیم، کم‌تر  $\Gamma_i^k$  از پارامتر غیرقطعی در هر بازه تغییر کند؛ محدودیت دوم نیز تضمین می‌کند که حتماً یکی از بازه‌ها برای هر پارامتر انتخاب شود.

با توجه به این که مسئله‌ی اولیه در مدل ۸ شدنی و محدود است، براساس قضیه‌ی قوی دوگان جواب بهینه‌ی مسئله‌ی دوگان برابر با جواب بهینه‌ی مسئله‌ی اولیه خواهد بود و به همین دلیل می‌توان مسئله‌ی دوگان معادل را جایگزین مقدار  $\beta(x, s_m)$  کرد. پس با فرض این که  $u_i^k$  و  $v_{ij}$  متغیرهای دوگان مرتبط با محدودیت اول و دوم مدل اولیه‌ی ۸ باشند، مسئله‌ی دوگان چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k \in K} \Gamma_i^k \times u_i^k + \sum_{j \in s_m} v_{ij} \\ s.t. : & u_i^k + v_{ij} \geq |x_{ij}| \times \delta_{ij}^k \quad \forall j, \forall k \\ & u_i^k \geq 0 \quad \forall k \\ & v_{ij} \geq 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (۹)$$

در نتیجه، با جایگذاری عبارات ۹ به جای مقدار  $\beta(x, s_m)$ ، مدل همتای استوار

### ۳. ارائه‌ی رویکرد پیشنهادی

در بسیاری از رویکردهای استواری ارائه شده، و نیز در روش برتسیماس و سیم تنها فرض شده است که پارامتر غیرقطعی عضو مجموعه‌ی محدب باشد. حال آن که در بسیاری از مسائل واقعی با جمع‌آوری داده‌ها و سوابق گذشته‌ی پارامتر غیرقطعی، نسبت به تعیین فضای غیرقطعی اقدام می‌شود. در این حالت پارامتر غیرقطعی با احتمال مشخص و نه به صورت تصادفی، مقداری از بازه‌ی تعریف شده را می‌پذیرد. در نتیجه به طور دقیق پارامتر غیرقطعی به صورت هیستوگرامی خواهد بود که باید به صورت فضای غیرمحدب تعریف شود. در ادامه، الگوریتم پیشنهادی بر مبنای روش برتسیماس و سیم در زمان مواجهه با فضای غیرقطعی هیستوگرامی توسعه یافته است.

از آنجا که در روش برتسیماس و سیم مقدار تخصیص داده شده به پارامتر یا پارامترهای غیرقطعی به صورت تصادفی از بازه‌ی غیرقطعی تعریف شده انتخاب می‌شود، از تعریف چندین بازه همزمان به جای تنها یک بازه برای توسعه‌ی رویکرد برتسیماس و سیم استفاده شده است. به عبارتی عدم قطعیت هیستوگرامی تبدیل به مسئله‌ی با چند بازه‌ی غیرقطعی شده و در مرحله‌ی بعدی با افزودن تأثیر احتمال وقوع هر یک از بازه‌ها، حل مسئله با وجود فضای غیرقطعی هیستوگرامی امکان‌پذیر می‌شود.

در سال ۲۰۱۲ مسئله‌ی که دارای پارامتری غیرقطعی با چندین بازه شدنی بود، در زمان وجود وابستگی بین بازه‌ها توصیف و مدل‌سازی شد.<sup>[۱۸]</sup> در ادامه، مراحل محاسبه‌ی مدل همتای استوار با فرض تعریف چند بازه همزمان در رویکرد برتسیماس و سیم تشریح شده است. با این فرض که هر یک از پارامترها در بازه‌های معین و تعیین شده‌ی تغییرکننده، تغییرات پارامترها به صورت  $k$  بازه‌ی مجزا  $[\bar{a}_{ij} - \delta_{ij}^k, \bar{a}_{ij} + \delta_{ij}^k]$  نشان داده می‌شود که در آن  $\bar{a}_{ij}$  مقدار اسمی پارامتر و  $\delta_{ij}^k$  بیشینه انحراف بازه‌ی  $k$ ام است.

مدل همتای رویکرد چندبازه‌ی همانند روش برتسیماس و سیم خواهد بود با

مسئله را می‌توان چنین باز نویسی کرد:

$$(R.C.P.) \min C^T x$$

$$\bar{a}_{ij} x_j + \sum_{k \in K} \Gamma_i^k \times u_i^k + \sum_{j \in s_m} v_{ij} \leq b_i \quad \forall i$$

$$u_i^k + v_{ij} \geq z_{ij} \times \delta_{ij}^k \quad \forall i, \forall j, \forall k$$

$$u_i^k \geq 0 \quad \forall i, \forall k$$

$$v_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j$$

$$-z_{ij} \leq x_j \leq z_{ij} \quad \forall j$$

$$x_{ij} \in Z \quad \forall i, \forall j \quad (10)$$

در حالی که احتمال شدنی بودن جواب با این روش برابر خواهد بود با:

$$p(\sum_j \bar{a}_{ij} x_j^* \geq b_i) = p(\sum_j \bar{a}_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \eta_{ij} \hat{a}_{ij}^k x_j^* \geq b_i)$$

$$\leq p(\sum_{j \in J_i} \eta_{ij} \hat{a}_{ij}^k |x_j^*| > \sum_i \sum_k \hat{a}_{ij}^k |x_j^*|)$$

$$= p(\sum_j \eta_{ij} > \sum_j \sum_k \gamma_{ij}^k)$$

$$\leq p(\sum_j \eta_{ij} > \sum_h \gamma_{ij}^k \Gamma_{ij}^k)$$

$$= p(\sum_j \eta_{ij} > \lambda_i) \quad (11)$$

زمانی که داریم: [15]

$$\gamma_{ij} = \hat{a}_{ij}^k / \hat{a}_{ij}^{\max} \leq 1$$

$$\lambda_i = \sum_k \Gamma_i^k \times u_i^k \quad (12)$$

همچنین می‌توان گفت:

$$p(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \geq \lambda_i) \leq B(n, \lambda_i) \quad (13)$$

اگر داشته باشیم:

$$B(n, \Gamma_i) = \frac{1}{\Gamma^n} \left\{ (1-\mu) \sum_{L=[v]} \binom{n}{L} + \mu \sum_{L=[v]+1} \binom{n}{L} \right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma^n} \left\{ (1-\mu) \binom{n}{[v]} + \sum_{L=[v]+1}^n \binom{n}{L} \right\} \quad (14)$$

زمانی که:

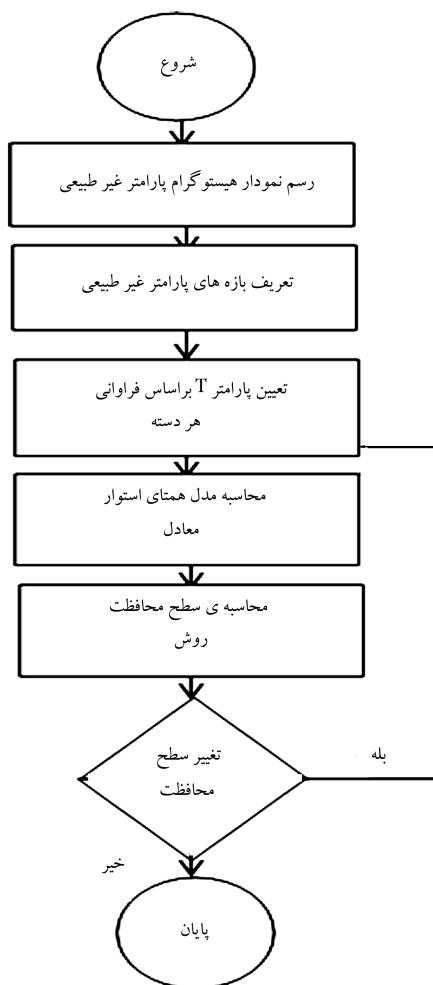
$$n = |J_i|, \quad v = (\lambda_i + n)/2, \quad \mu = v - [v]$$

همچنین، برای زمانی که  $\lambda_i = \theta \sqrt{n}$  باشد، احتمال شدنی ماندن جواب برابر خواهد بود با عبارت 15:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, \Gamma_i) = 1 - \varphi(\theta) \quad (15)$$

چنانچه  $\varphi(\theta)$  تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد باشد. البته تقریب رابطه‌ی فوق حتی زمانی که معادله‌ی  $\lambda_i = \theta \sqrt{n}$  برقرار نباشد عبارت است از: [5]

$$B(n, \Gamma_i) \approx 1 - \varphi\left(\frac{\lambda_i - 1}{\sqrt{n}}\right) \quad (16)$$



شکل ۱. مراحل حل الگوریتم پیشنهادی.

در روش پیشنهادی به جای تعریف یک بازه همانند روش برتسیماس و سیم، چندین بازه براساس نمودار هیستوگرام پارامتر غیرقطعی تعریف می‌شود و احتمال وقوع هر یک از بازه‌های انتخابی به مدل اضافه می‌شود به گونه‌ی که یافتن جواب استوار در صورتی که پارامتر غیرقطعی به صورت هیستوگرامی باشد، میسر شود.

مراحل حل الگوریتم در شکل ۱ نشان داده شده است. در این روش مقدار پارامترهای  $\Gamma^k$  با توجه به میزان فراوانی موجود در هر بازه‌ی غیرقطعی مشخص شده در نمودار هیستوگرام تعیین می‌شود. در واقع مقدار پارامترهای  $\Gamma^k$  به نسبت میزان فراوانی هر بازه تعریف خواهد شد به گونه‌ی که در پایان روش به سطح محافظت دلخواه تصمیم‌گیرنده برسد. مدل همتای استوار معادل با مسئله، مطابق عبارت ۱۰ محاسبه می‌شود. بدین ترتیب امکان در نظر گرفتن عدم قطعیت هیستوگرامی یا مجموعه‌ی غیرمحدب، به عنوان فضای غیر قطعی پارامترها، را خواهیم داشت.

#### ۴. پیاده‌سازی رویکرد پیشنهادی در مدل مکان‌یابی و تخصیص

در ادامه روش پیشنهادی را برای حل مسئله‌ی مکان‌یابی و تخصیص توسعه می‌دهیم به گونه‌ی که محاسبه‌ی مدل همتای استوار به شرط عدم قطعیت هیستوگرامی تقاضا

و نیز با فرض برابری  $\Gamma_{it}^k = \Gamma^k$  برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} \max_{s_m \subseteq J_i} & \sum_{k \in K} \sum_{j \in s_m} |x_{ijt}| \times \hat{D}_{jt}^k \times \lambda_{jt}^k \\ \text{s.t. :} & \sum_{j \in s_m} \lambda_{jt}^k \leq \Gamma_b^k \quad \forall k \\ & \sum_{k \in K} \lambda_{jt}^k \leq 1 \quad \forall j \\ & \lambda_{jt}^k \in \{0, 1\} \quad \forall j, \forall k \end{aligned} \quad (19)$$

با فرض این که  $ub_{it}^k$  و  $vb_{itj}$  متغیرهای دوگان مرتبط با محدودیت اول و دوم مدل اولیه ۱۹ باشند، مسئله‌ی دوگان به‌ازای هر یک از محدودیت‌ها چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \min & \sum_k \Gamma_b^k \times ub_{it}^k + \sum_{j \in s_m} vb_{itj} \\ \text{s.t. :} & ub_{it}^k + vb_{itj} \geq |x_{ijt}| \times \hat{D}_{jt}^k \quad \forall j, \forall k \\ & ub_{it}^k \geq 0 \quad \forall k \\ & vb_{itj} \geq 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (20)$$

بنابراین با توجه به مثبت بودن  $x_{ijt}$  محدودیت دوم، مدل ۱۸ معادل است با:

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{D}_{jt} x_{ijt} - cap_i Y_i + \sum_k \Gamma_b^k \times ub_{it}^k + \sum_{j \in s_m} vb_{itj} & \leq 0 \\ ub_{it}^k + vb_{itj} & \geq |x_{ijt}| \times \hat{D}_{jt}^k \quad \forall i, \forall t, \forall j, \forall k \\ ub_{it}^k & \geq 0 \quad \forall i, \forall t, \forall k \\ vb_{itj} & \geq 0 \quad \forall i, \forall t, \forall j \end{aligned} \quad (21)$$

به‌طور مشابه، مقدار  $\beta(x, s_m)$  برای محدودیت اول مدل ۱۸ برابر است با:

$$\begin{aligned} \max_{s_m \subseteq J_i} & \sum_{k \in K} \sum_{i, j, t} c_{ijt} |x_{ijt}| \times \hat{D}_{jt}^k \times \lambda_{jt}^k \\ \text{s.t. :} & \sum_j \sum_t \lambda_{jt}^k \leq \Gamma_a^k \quad \forall k \\ & \sum_{k \in K} \lambda_{jt}^k \leq 1 \quad \forall j, \forall t \\ & \lambda_{jt}^k \in \{0, 1\} \quad \forall j, \forall t, \forall k \end{aligned} \quad (22)$$

همچنین با فرض این که  $ua^k$  و  $va_{tj}$  متغیرهای دوگان مرتبط با محدودیت اول و دوم مدل اولیه ۲۲ باشند، مسئله‌ی دوگان چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \min & \sum_k \Gamma_a^k \times ua^k + \sum_{j \in s_m} \sum_t va_{tj} \\ \text{s.t. :} & ua^k + va_{tj} \geq c_{ijt} |x_{ijt}| \times \hat{D}_{jt}^k \quad \forall t, \forall j, \forall k \\ & ua^k \geq 0 \quad \forall k \\ & va_{tj} \geq 0 \quad \forall j, \forall t \end{aligned} \quad (23)$$

بنابراین با توجه به مثبت بودن  $x_{ijt}$ ، محدودیت اول برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_t \sum_i \sum_j c_{ijt} D_{jt} x_{ijt} + \sum_i f_i Y_i + \sum_k \Gamma_a^k \times ua^k \\ + \sum_{j \in s_m} \sum_t va_{tj} & \leq \tau \\ ua^k + va_{tj} & \geq c_{ijt} |x_{ijt}| \times \hat{D}_{jt}^k \quad \forall t, \forall j, \forall k \\ ua^k & \geq 0 \quad \forall k \\ va_{tj} & \geq 0 \quad \forall t, \forall j \end{aligned} \quad (24)$$

ممکن باشد. با این هدف، مسئله‌ی مکان‌یابی و تخصیص چنددوره‌ی - ظرفیت‌دار با هدف کاهش هزینه‌های ثابت احداث و متغیر انتقال محصولات همراه با محدودیت تأمین تمام تقاضای مشتریان به صورت مدل ۱۷ تعریف شده است.

$$\begin{aligned} \min & \sum_t \sum_i \sum_j c_{ijt} \bar{D}_{jt} x_{ijt} + \sum_i f_i Y_i \\ & \sum_j \bar{D}_{jt} x_{ijt} \leq cap_i Y_i \quad \forall i \\ & \sum_i x_{ijt} \geq 1 \quad \forall j, \forall t \\ & x_{ijt}, Y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i, \forall j, \forall t \end{aligned} \quad (17)$$

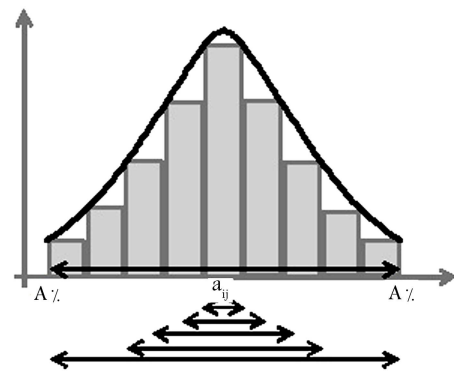
مادامی که با احداث تسهیلات  $Y_i$  مقدار برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر باشد و نیز، با تأمین تقاضای  $Z_{am}$  از تسهیلات  $Z_{am}$  در دوره  $t$ ، متغیر  $x_{ijt}$  مقدار ۱ را بپذیرد.  $\bar{D}_{jt}$  مقدار تقاضای گره  $Z_{am}$  در دوره  $t$  و  $cap_i$  ظرفیت تسهیلات  $Z_{am}$  و  $f_i$  هزینه احداث تسهیلات  $Z_{am}$  باشد.

با فرض این که پارامتر تقاضا امکان تغییر از میزان عددی را داشته و به صورت غیر قطعی باشد. همچنین نمودار هیستوگرام مقدار تقاضا با جمع‌آوری داده‌های گذشته مشخص باشد، به محاسبه‌ی مدل همتای استوار معادل پرداخته شده است.

با اطلاعات موجود در نمودار هیستوگرام تقاضا می‌دانیم، امکان تغییر پارامتر تقاضا حداکثر برابر با  $A$  درصد بوده و فراوانی کل مشاهدات برابر با  $N$  است. با فرض این که تصمیم‌گیرنده بخواهد تغییرات پارامتر تقاضا را به صورت  $k$  بازه‌ی مجزا تعریف کند،  $k$  بازه که فراوانی هر یک برابر با  $N/k$  است انتخاب و به صورت  $[\bar{a}_{ij} - \delta_{ij}^k, \bar{a}_{ij} + \delta_{ij}^k]$  نشان داده می‌شود؛  $\bar{a}_{ij}$  مقدار اسمی پارامتر  $\delta_{ij}^k$  بیشینه انحراف است (شکل ۲). پیش‌تر نیز اشاره شد که در روش پیشنهادی به جای تعریف یک بازه، تمامی بازه‌های تعریف شده را با هم در نظر می‌گیریم. با توجه به این که میزان تقاضا ( $D_{jt}$ ) هم در تابع هدف و هم در محدودیت مدل مکان‌یابی شماره ۱۷ وجود دارد، میزان تقاضا باید به سمت چپ محدودیت‌ها منتقل شود:

$$\begin{aligned} \min \tau & \sum_t \sum_i \sum_j c_{ijt} \bar{D}_{jt} x_{ijt} + \sum_i f_i Y_i \leq \tau \\ & \sum_j \bar{D}_{jt} x_{ijt} - cap_i Y_i \leq 0 \quad \forall i, \forall t \\ & \sum_i x_{ijt} \geq 1 \quad \forall j, \forall t \\ & x_{ijt}, Y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i, \forall j, \forall t \end{aligned} \quad (18)$$

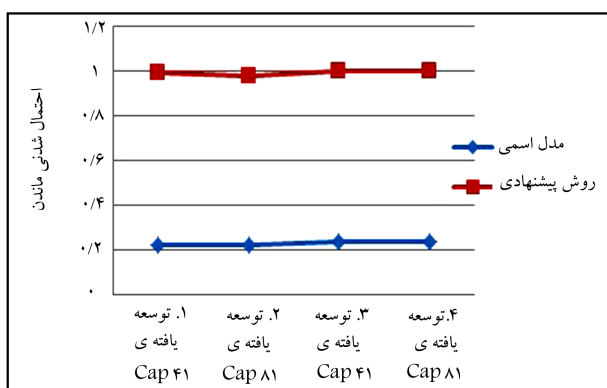
مقدار  $\beta(x, s_m)$  برای هر یک از محدودیت دوم مدل ۱۸ با مشخص بودن  $i$  و  $t$ ,



شکل ۲. تعیین بازه‌های پیشنهادی.

فرض بر آن است که تصمیم‌گیرنده مقدار  $k$  را برابر ۲ قرار دهد؛ به عبارتی دو بازه -- یک بازه برابر با بیشینه مقدار انحراف ممکن  $10\%$  مقدار اسمی و یک بازه برابر با  $8\%$  مقدار اسمی -- با فراوانی برابر انتخاب شود. مقدار پارامترهای روش و مقدار سطح محافظت با به‌کارگیری عبارت ۱۳ محاسبه و در جدول ۳ ارائه شده است. در جدول ۴ نیز مقادیر تابع هدف به دست آمده به‌ازای روش‌های پیشنهادی و مدل اسمی و تعداد تسهیلات احداث شده در هر رویکرد ارائه شده است.

در شکل ۳ در سطح محافظت جواب‌های به دست آمده از حل مدل اسمی و روش پیشنهادی نشان داده شده است. سطح محافظت احتمال شدنی ماندن جواب بهینه‌ی به دست آمده از پیاده‌سازی رویکرد مورد نظر را در سناریوهای تصادفی حاصل از تغییر پارامتر غیرقطعی بیان می‌کند. ملاحظه می‌شود که با پیاده‌سازی روش پیشنهادی دسترسی به سطح محافظت بالا امکان‌پذیر شده است. به عبارتی روش پیشنهادی احتمال شدنی ماندن جواب بهینه را به‌صورت چشم‌گیری افزایش داده است.



شکل ۳. احتمال شدنی ماندن مسئله با تغییر مقدار تقاضا.

با توجه به فرض برابری مقدار فراوانی هر یک از بازه‌ها، طبق روش پیشنهادی پارامترهای  $\Gamma^k$  با هم برابر فرض می‌شود و مقدار دقیق آن بسته به میزان سطح محافظت انتخابی تصمیم‌گیرنده تعیین خواهد شد. بنابراین برخلاف رویکردهای توسعه‌یافته که در آن مقدار تقاضای غیرقطعی به صورت تصادفی از یک بازه‌ی تعریف شده انتخاب می‌شود، رویکرد پیشنهادی به محاسبه‌ی جواب استوار -- چنانچه سوابق مقدار تقاضا در دوره‌های گذشته جمع‌آوری شده باشد و با احتمال مشخص نه به صورت تصادفی مقدار بپذیرد -- می‌پردازد.

## ۵. نمونه مسئله

مشخصه‌های مسائل نمونه برگرفته از OR-LIBRARY (جدول ۲) که برای پیاده‌سازی در مدل چنددوره‌ی ارائه شده<sup>[۱۹]</sup> تطبیق و برای دوره‌های متفاوت توسعه یافته است.

جدول ۲. مشخصه‌های نمونه مسائل تولید شده.

مسئله نمونه	نام مسئله	تعداد مراکز بالقوه برای احداث تسهیلات	تعداد مراکز تقاضا	تعداد دوره‌ها
۱	توسعه یافته‌ی Cap41	۱۶	۵۰	۱۰
۲	توسعه یافته‌ی Cap81	۲۵	۵۰	۱۰
۳	توسعه یافته‌ی Cap41	۴۸	۱۵۰	۳۰
۴	توسعه یافته‌ی Cap81	۷۵	۱۵۰	۳۰

جدول ۳. اطلاعات نمونه مسائل آزمایش شده.

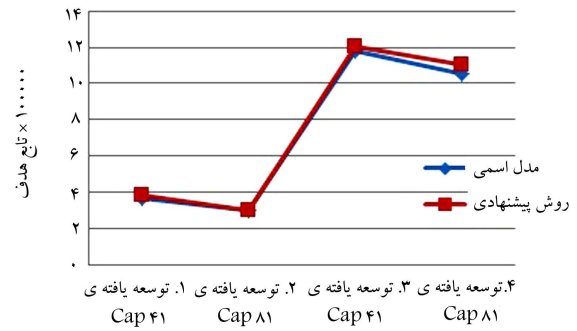
شماره مسئله	$\sum_k \Gamma_1^k$	$\sum_k \Gamma_2^k$	تعداد پارامتر غیرقطعی		احتمال شدنی ماندن
			محدودیت اول	محدودیت دوم	
۱	۲۵۰	۲۵	۸۰۰۰	۵۰	۰٫۹۹۲۶
۲	۲۵۰	۲۵	۱۲۵۰۰	۵۰	۰٫۹۷۶۲
۳	۲۲۵۰	۷۵	۲۱۶۰۰۰	۱۵۰	۰٫۹۹۹۹
۴	۲۲۵۰	۷۵	۳۳۷۵۰۰	۱۵۰	۰٫۹۹۹۷

جدول ۴. نتایج حاصل از روش پیشنهادی در مقابل نتایج مدل اسمی.

شماره مسئله	مقدار تابع هدف مدل اسمی	تعداد تسهیلات احداث شده در مدل اسمی	تابع هدف روش پیشنهادی	تعداد تسهیلات روش پیشنهادی	درصد افزایش هزینه
۱	۳۶۸۵۵۱٫۶	۱۰	۳۸۵۹۶۶٫۹	۱۳	۱٫۰۴
۲	۳۰۱۷۵۴٫۴	۱۶	۳۰۴۱۳۶٫۷	۱۶	۱٫۰۱
۳	۱۱۸۲۹۰۰٫۴	۴۲	۱۲۰۳۵۰۱٫۸	۴۴	۱٫۰۲
۴	۱۰۵۵۷۱۴٫۲	۵۷	۱۱۰۱۴۱۸٫۱	۵۴	۱٫۰۴

## ۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار الگوریتم پیشنهادی برای مواجهه با فضای غیرقطعی هیستوگرامی توسعه داده شد. رویکرد ارائه شده برای مدل مکان‌یابی تسهیلات زمانی که پارامترهای تقاضا غیرقطعی باشد، تطبیق یافته و جواب استوار چندین نمونه مسئله‌ی موجود در ادبیات مکان‌یابی با رویکرد پیشنهادی محاسبه شد. در واقع رویکرد ارائه شده، همانند دیگر رویکردها به مکان‌یابی استوار تسهیلات می‌پردازد با این تفاوت که در رویکرد پیشنهادی تصمیم‌گیرنده اطلاعات بیشتری از بازه غیرقطعی تقاضا یا هزینه‌ها داشته و تصمیم‌گیری دقیق‌تر با وجود احتمال وقوع مقادیر غیرقطعی نسبت به رویکردهای معمول را (که فقط حد بالا و پایین بازه‌ی غیرقطعی مشخص بوده) تعقیب می‌کند. پس پیاده‌سازی الگوریتم فوق در تمامی زنجیره‌های تأمین که غیرقطعی‌اند، و مقادیر پارامتر غیرقطعی آنها براساس داده‌های واقعی (برای مثال با جمع‌آوری مقادیر دوره‌های قبلی) تخمین زده می‌شود، توصیه شده و قابلیت اجرا دارد. بررسی امکان توسعه‌ی دیگر رویکردهای استواری در زمان مواجهه با عدم قطعیت هیستوگرامی و تطبیق آنها برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود.



شکل ۴. مقدار تابع هدف در نمونه مسئله‌ها.

مقدار هزینه‌ی کل به دست آمده به‌عنوان تابع هدف، از پیاده‌سازی دو رویکرد به‌صورت جداگانه در شکل ۴ نشان داده شده است. نتایج حاصل از مقایسه‌ی مقادیر تابع هدف دو رویکرد نشان‌گر افزایش جزئی هزینه‌ها با اجرای روش پیشنهادی است که منجر به افزایش چشم‌گیر سطح محافظت شده است.

## منابع (References)

- Sahinidis, N.V. "Optimization under uncertainty: State-of-the-art and opportunities", *Computers & Chemical Engineering*, **28**(6), pp. 971-983 (2004).
- Li, Z., Ding, R. and Floudas, C.A. "A comparative theoretical and computational study on robust counterpart optimization: I. Robust linear optimization and robust mixed integer linear optimization", *Industrial & Engineering Chemistry Research*, **50**(18), pp. 10567-10603 (2011).
- Klose, A. and Drexl, A. "Facility location models for distribution system design", *European Journal of Operational Research*, **162**(1), pp. 4-29 (2005).
- Soyster, A.L. "Technical note—convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming", *Operation Research*, **21**(5), pp. 1154-1157 (1973).
- Bertsimas, D. and Sim, M. "The Price of Robustness", *Operations Research*, **52**, pp. 35-53 (2004).
- Bertsimas, D. and Sim, M. "Robust discrete optimization and network flows", *Mathematical Programming*, **98**(1), pp. 49-71 (2003).
- Averbakh, I. and Berman, O. "Algorithms for the robust 1-center problem on a tree", *European Journal of Operational Research*, **123**, pp. 292-302 (2000).
- Averbakh, I. "Complexity of robust single facility location problems on networks with uncertain edge lengths", *Discrete Applied Mathematics*, **127**(3), pp. 505-522 (2003).
- Nikoofal, M.E. and Sadjadi, S.J. "A robust optimization model for p-median problem with uncertain edge lengths", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **50**(1-4), pp. 391-397 (2010).
- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. "Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data", *Math. Program*, **88**, pp. 411-424 (2000).
- Baron, O., Milner, J. and Naseraldin, H. "Facility location: A robust optimization approach", *Production and Operations Management*, **20**(5), pp. 772-785 (2011).
- Zhang, L. and Wu, S. "Robust solutions to euclidean facility location problems with uncertain data", *Journal of Industrial and Management Optimization*, **6**(4), pp. 751-760 (2010).
- Zhang, Z.H. and Jiang, H. "A robust counterpart approach to the bi-objective emergency medical service design problem", *Applied Mathematical Modelling*, **38**(3), pp. 1033-1040 (2013).
- Ben-Tal, A., Goryashko, A., Guslitzer, E. and Nemirovski, A. "Adjustable robust solutions of uncertain linear programs", *Mathematical Programming*, **99**(1), pp. 351-376 (2004).
- Yu, A., Zeng, B., Zhang, Y. and Zhao, L. "Reliable p-median facility location problem: Two-stage robust models and algorithms", *Transportation Research*, **64**, pp. 54-72 (2014).
- Bertsimas, D. and Sim, M. "Robust discrete optimization and network flows", *Mathematical Programming*, **98**(1), p. 49-71 (2003).
- Bardossy, M.G. and Raghavan, S. "Robust optimization for the connected facility location problem", *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **44**(1), pp. 149-154 (2013).
- Duzgun, R. "Robust optimization with multiple ranges and chance constraints", Ph.D. Thesis. Lehigh University. Bethlehem, PA, USA (2012).
- Beasley, J.E. "An algorithm for solving large capacitated warehouse location problems", *European Journal of Operational Research*, **33**, pp. 314-325 (1988).