

# زمان بندی نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه برای سیستم های سری، موازی، و جایگزینی تک قطعه براساس تحلیل های آماری

محمدصابر فلاح نژاد\* (دانشیار)

الهام نجفیان (دانشجوی کارشناسی ارشد)

حسن حسینی نسب (استاد)

دانشکده ی هندی صنایع، دانشگاه یزد

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۷)  
دوری ۱، شماره ۱/۱، ص. ۲۸-۱۷

در این پژوهش سه سیستم سری، موازی، و جایگزینی تک قطعه برای زمان بندی عملیات نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه بررسی شده اند. برای هر سیستم یک مدل آماری از نوع هزینه در واحد زمان پیشنهاد شده است. یکی از نکات قابل تأمل در مبحث نگه داری و تعمیرات، توازن بین هزینه و زمان شروع عملیات نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه است. با در نظر گرفتن این موضوع، اهداف پژوهش شامل تعیین بهترین زمان شروع عملیات نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه در هر سیستم و همچنین یافتن تعداد قطعات یدکی و تجهیزات مورد نیاز به ترتیب در سیستم های جایگزینی تک قطعه و موازی است، به طوری که هزینه ی کل در واحد زمان کمینه شود. در هر یک از سیستم های مورد بررسی، تعداد خرابی های هر تجهیز از توزیع پواسون و نرخ شکست این توزیع از توزیع گاما پیروی می کند؛ همچنین عملیات تعمیر و نگه داری پیشگیرانه به طور منظم در فواصل زمانی مساوی انجام می گیرد.

واژگان کلیدی: نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه، سیستم های سری، موازی، و جایگزینی تک قطعه، تحلیل آماری، هزینه.

fallahnezhad@yazd.ac.ir  
e.najafian68@gmail.com  
hhn@yazd.ac.ir

## ۱. مقدمه

در عصر حاضر، بدون تردید یکی از بنیان های اساسی در هر صنعتی تجهیزات ماشین آلات، و نیروی انسانی است. یکی از مسائل مهم و ضروری در این صنایع، نحوه ی سرویس دهی و تعمیر و نگه داری ماشین آلات و تجهیزات یا به عبارت دیگر حفاظت فنی از دارایی های فیزیکی است. نگه داری و تعمیرات صحیح، علمی، و برنامه ریزی شده به طور مستقیم بر روی بهره روری، کیفیت، هزینه های تولید، قابلیت اطمینان، و سودآوری اثر می گذارد. عدم توجه به این مسئله، سبب بیشتر شدن هزینه های تعمیر دستگاه ها، استهلاک بیش از حد آن ها، از کارافتادن ناگهانی، عدم توانایی در ارائه ی خدمات، و زیان های عظیم مالی خواهد شد. علاوه بر این تعمیر و نگه داری ماشین آلات و دستگاه ها، با توجه به استهلاک و فرسایش مداوم آن ها، بخش عمده یی از هزینه های تولید را در یک مجموعه ی صنعتی از آن خود می کنند. این هزینه ها بسته به نوع صنعت، ۱۵ تا ۷۰ درصد هزینه های تولید را شامل می شوند.<sup>[۱]</sup>

به طور کلی نگه داری و تعمیرات را می توان در دو دسته طبقه بندی کرد؛ دسته اول، نگه داری و تعمیرات مبتنی بر شکست است که بعد از خرابی تجهیز به کار گرفته می شود. دسته دوم، نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه است که به منظور پیشگیری یا یکی از روش های سنتی در تعیین هزینه های نگه داری و تعمیرات تجهیزات، تخمین هزینه بر اساس تجربه و آگاهی های شخصی است که این دیدگاه به دلیل ماهیت تصادفی وقوع خرابی در تجهیزات یک روش غیر قابل اعتماد است؛ به همین دلیل برای تخمین هزینه های نگه داری و تعمیرات، مدل های آماری مورد توجه قرار گرفتند. اغلب متخصصان صنعتی بر این باورند که مدل سازی آماری هزینه های نگه داری و تعمیرات تجهیزات، یک رویکرد کمی مناسب برای پیش بینی هزینه های نگه داری و تعمیرات در افق برنامه ریزی مورد نظر را فراهم می کند.<sup>[۱۲]</sup> علاوه بر این، مدل های احتمالی برنامه ریزی نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه برای کمینه کردن هزینه های تعمیر، جایگزینی، و تعمیرات پیشگیرانه در تابع هدف به کار می روند.<sup>[۱۳]</sup> مدل های احتمالی از توزیع احتمال برای توصیف و نشان دادن عدم قطعیت در پارامتر

کاهش احتمال خرابی بر روی تجهیزات انجام می شود.<sup>[۲]</sup> در این پژوهش برنامه ریزی نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه مورد نظر است که به طور گسترده یی در دهه های اخیر در مقالات مورد توجه محققان قرار گرفته است که از جمله می توان به پژوهش های دکر،<sup>[۳]</sup> پام و وانگ،<sup>[۴]</sup> میاموتو و همکاران،<sup>[۵]</sup> سای و همکاران،<sup>[۶]</sup> لین و همکاران<sup>[۷]</sup> و وانگ<sup>[۸]</sup> اشاره کرد. در پژوهش های زیادی، محققان به این نتیجه رسیده اند که اجرای نگه داری و تعمیرات پیشگیرانه در واحدهای تولیدی، یک راه مؤثر برای افزایش طول عمر تجهیزات و کاهش هزینه های عملیاتی است.<sup>[۹-۱۱]</sup>

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴/۶/۱۳۹۴، اصلاحیه ۱۲/۱/۱۳۹۴، پذیرش ۲۶/۲/۱۳۹۵.

DOI:10.24200/J65.2018.5544

و مدل استفاده می‌کنند.<sup>[۱۴]</sup> توسعه‌ی مدل‌های خرابی احتمالی و انتخاب بهترین سیاست نگهداری و تعمیرات را می‌توان در مقالات ارائه شده<sup>[۱۹-۱۵]</sup> یافت. در ادامه‌ی این بخش، تمرکز بر روی پژوهش‌هایی است که از روش‌های آماری برای تعیین سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات استفاده کرده‌اند. از جمله‌ی این پژوهش‌ها می‌توان به مقاله‌ی باربرا و همکارانش اشاره کرد که یک مدل نگهداری و تعمیرات به‌منظور کمیته‌کردن هزینه‌های نگهداری و تعمیرات پیشنهاد کردند. در این مدل، تابع چگالی زمان خرابی از توزیع نمایی پیروی می‌کند.<sup>[۱۰]</sup> همچنین متا و همکارش با استفاده از روش‌های آماری و نمایی در نظر گرفتن زمان خرابی توانستند زمان مورد نیاز برای انجام نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه را به‌دست‌آورند.<sup>[۲۱]</sup> چلبی و کادی به‌دنبال اتخاذ سیاست بهینه‌ی برای کمیته‌کردن هزینه در سیستم، مدلی را با استفاده از رویکرد آماری ارائه دادند که هدف آن یافتن زمان بهینه‌ی انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه و موجودی اطمینان در زمان انجام عملیات نت بر روی تجهیزات است.<sup>[۲۲]</sup> همچنین زکورا و همکارانش با در نظر گرفتن تابع چگالی زمان خرابی تجهیزات به‌صورت نمایی به تعیین زمان مناسب برای نت پیشگیرانه و موجودی اضافی که باید در سیستم در زمان انجام عملیات نگهداری برای پاسخگویی به تقاضای مشتریان موجود باشد، پرداختند.<sup>[۲۳]</sup>

سوفیا و جورج یک مدل اقتصادی برای انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه پیشنهاد دادند. زمان نت بهینه با این شرط محدود می‌شود و سیستم ممکن است قبل از آنکه زمان نگهداری و تعمیرات برسد، به حالت خارج از کنترل برود. در این مدل نیز زمان خرابی از توزیع‌های احتمالی پیروی می‌کند.<sup>[۲۴]</sup>

نصوحی و حجازی با نمایی در نظر گرفتن تابع طول عمر تجهیز، یک مدل نگهداری و تعمیرات چندهدفه را به‌منظور تعیین زمان مناسب برای انجام عملیات نگهداری و تعمیرات و همچنین تعداد بهینه‌ی قطعات یدکی مورد نیاز در افق زمانی مورد نظر، ارائه دادند.<sup>[۲۵]</sup>

از جمله مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی نگهداری و تعمیرات و پژوهش‌های آماری می‌توان به پژوهش گائو و همکارانش بر روی سیستم سری اشاره کرد. این پژوهش با هدف کمیته‌کردن هزینه‌های مربوط به نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه و همچنین یافتن فاصله‌ی زمانی بهینه برای انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه انجام گرفت.<sup>[۲۶]</sup>

باروس و همکارانش به‌منظور کمیته‌سازی هزینه و با رویکرد آماری، یک سیستم موازی دو مؤلفه‌ی را در نظر گرفتند. در این سیستم، طول عمر هر یک از مؤلفه‌ها از توزیع نمایی پیروی می‌کند و فرض بر این است که نرخ شکست یک مؤلفه به دلیل شکست مؤلفه‌ی دیگر افزایش می‌یابد.<sup>[۲۷]</sup> گلمکانی و همکاران به‌منظور کمیته‌سازی هزینه‌ها و یافتن روشی برای بهینه‌سازی فواصل بازرسی ثابت و غیر ثابت، یک سیستم چندمؤلفه‌ی با وابستگی خرابی بین مؤلفه‌ها را مطالعه کردند. در این پژوهش، خرابی مؤلفه‌ها شامل دو بخش نرم و سخت است که خرابی نوع نرم طبق فرایند غیرهمگن پواسون با نرخ افزایشی و خرابی نوع سخت طبق فرایند پواسون با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهد.<sup>[۲۸]</sup>

بریچی و همکارانش با احتمالی در نظر گرفتن عمر تجهیزات به ارائه‌ی یک مدل نگهداری و تعمیرات در سیستم موازی پرداختند.

مدل پیشنهادی آن‌ها با دو هدف تخصیص بهینه‌ی کارها به ماشین‌های موازی و هم‌زمان با آن یافتن زمان مناسب انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه ارائه شده است.<sup>[۲۹]</sup>

فلاح‌نژاد و همکاران یک مدل نت پیشگیرانه مبتنی بر احتمال قابلیت اطمینان و تکر بیزی پیشنهاد کردند. هدف این مدل کمیته‌سازی میانگین هزینه‌ی کل در واحد

زمان و همچنین یافتن بهترین زمان برای انجام فعالیت‌های نت پیشگیرانه است.<sup>[۳۰]</sup> اگر چه تاکنون مدل‌های نگهداری و تعمیرات زیادی توسط محققان توسعه داده شده‌است، اما پیچیدگی محیط‌های صنعتی و مشکل بودن جمع‌آوری داده در این حوزه، تعریف و تخمین هزینه‌های نت و انتخاب سیاست بهینه را مشکل ساخته است.<sup>[۳۱]</sup> همچنین برای افزایش قابلیت اطمینان و سطح امنیت و ایمنی با هزینه‌ی معقول، انتخاب راهبرد مناسب نگهداری و تعمیرات حیاتی است.<sup>[۳۲]</sup>

در این پژوهش سه سیستم موازی، سری، و جایگزینی تک‌قطعه برای انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه بررسی خواهد شد. در هر کدام از سیستم‌ها، یک مدل بر اساس تحلیل‌های آماری از نوع هزینه در واحد زمان پیشنهاد شده است. فرض شده است که تعداد خرابی‌ها برای یک تجهیز مشخص از توزیع پواسون پیروی می‌کند. همچنین نرخ شکست توزیع پواسون از توزیع گاما پیروی می‌کند. توزیع گاما برای مدل‌سازی فرایندهایی با خرابی احتمالی مناسب است.<sup>[۳۳-۳۷]</sup>

در این مقاله هدف‌های زیر به‌منظور اتخاذ سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه برای کمیته‌سازی هزینه در واحد زمان دنبال می‌شود:

۱. یافتن زمان بهینه برای انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در سیستم‌های سری، موازی، و جایگزینی تک‌قطعه؛
۲. یافتن تعداد قطعات یدکی و تجهیزات مورد نیاز به‌ترتیب در سیستم‌های جایگزینی تک‌قطعه و موازی.

ادامه‌ی مقاله به شرح زیر سازمان‌دهی شده‌است؛ در بخش دوم مسئله و فرضیات آن بیان می‌شود. بخش سوم به تعریف تابع هزینه برای سیستم‌های سری، موازی، و جایگزینی تک‌قطعه اختصاص یافته است و برای روشن شدن مدل پیشنهادی برای هر سیستم، از مثال عددی استفاده شده‌است و برای تعیین متغیرهای تصمیم در هر سیستم از نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. در بخش چهارم نتیجه‌گیری پژوهش بیان شده است.

## ۲. تعریف مسئله

در این پژوهش فرض شده است که تعداد خرابی‌ها برای یک تجهیز خاص از توزیع پواسون پیروی می‌کند. به‌کارگیری توزیع پواسون برای نشان دادن خرابی اجزای مختلف یک تجهیز منطقی است؛ اما در اغلب موارد نرخ شکست از یک تجهیز به تجهیز دیگر متفاوت است. حال اگر از یک تجهیز خاص اطلاعات جمع‌آوری شود و نتایج در مورد همان تجهیز به کار رود، نتایج توزیع پواسون قابل اطمینان است، اما به‌دلیل متفاوت بودن نرخ شکست تجهیزات با یکدیگر، نمی‌توان این نتایج را به تجهیزات دیگر تعمیم داد.<sup>[۳۸]</sup> برای رفع این مشکل، فرض شده است که نرخ شکست توزیع پواسون از توزیع گاما پیروی می‌کند.

بنابراین، تعداد شکست‌ها برای یک تجهیز خاص از توزیع پواسون با پارامترهای زیر پیروی می‌کند.

$$f_{x|\nu}(x) = \frac{e^{-\nu} \nu^x}{x!} \quad x = 0, 1, \dots, \quad 0 < \nu < \infty \quad (1)$$

همچنین نرخ شکست توزیع پواسون از توزیع گاما پیروی می‌کند. GAM  $\left(k, \frac{1}{\gamma}\right)$

$$f_{\nu}(\nu) = \frac{\nu^{k-1} e^{-\frac{\nu}{\gamma}}}{\Gamma(k)\gamma^k} \quad 0 < \nu < \infty, \quad 0 < k < \infty, \quad 0 < \gamma < \infty \quad (2)$$

تک قطعه و موازی؛

$C_P$ : هزینه انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه؛

$C_F$ : هزینه تحمیل شده از خرابی غیر برنامه ریزی شده یک تجهیز؛

$C_B$ : هزینه خرید یک قطعه یدکی در سیستم جایگزینی تک قطعه و همچنین

هزینه اضافه کردن یک تجهیز در سیستم موازی؛

$T$ : زمان بهینه برای انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه؛

$TC$ : هزینه کل نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در واحد زمان؛

$f(t)$ : تابع چگالی احتمال زمان خرابی.

در این پژوهش فرض بر این است که تعداد تجهیزات در سیستم سری مشخص است، در نتیجه هزینه خرید تجهیزات در این سیستم برابر صفر است ( $C_B = 0$ ).

همچنین در سیستم های مورد مطالعه، خرابی تجهیزات زودتر از زمان برنامه ریزی شده، باعث تحمیل هزینه زیادی به سیستم می شود که برای نشان دادن این محدودیت

فرض شده است رابطه خطی بین  $C_F$  و زمان وجود دارد ( $C_F = C_f \times t$ ). در ادامه تابع هزینه برای هر کدام از سیستم ها محاسبه می شود.

### ۱.۳. تابع هزینه سیستم سری

در اغلب واحدهای تولیدی، تولید یا به صورت سری یا موازی یا ترکیبی از این دو حالت است؛ در سیستم های تولیدی که تولید به صورت سری انجام می گیرد، خرابی یک تجهیز باعث توقف خط تولید می شود. در سیستم های تولیدی سری، به خصوص در بیشتر مجتمع های تولیدی، پالایشگاهی، گازی، پتروشیمی، و شرکت های مشابه خرابی یک تجهیز هزینه های سرسام آوری را به سیستم تحمیل می کند؛ در نتیجه توجه به مقوله نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در این سیستم ها کاملاً ضروری به نظر می رسد.

یکی از چالش های اصلی در سیستم های سری، تعیین بازه زمانی مناسب برای انجام نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه است به نحوی که ضمن دستیابی به دسترس پذیری و قابلیت اطمینان قابل قبول، در مجموع برآیند هزینه های ناشی از تعمیرات اضطراری و تعمیرات پیشگیرانه کمینه شود؛ زیرا کوتاهی در انجام تعمیرات پیشگیرانه موجب افزایش هزینه های تعمیرات اضطراری شامل خرابی های پیش بینی نشده ماشین آلات و توقف های خارج از برنامه تولید را در پی دارد. از سوی دیگر زیاده روی در انجام تعمیرات پیشگیرانه، به دلیل توقف های پی در پی تولید سبب هدر رفتن منابع نیروی انسانی، توقف تولید، و افزایش هزینه می شود.

در این بخش سعی بر این است که علاوه بر تعریف تابع هدف سیستم، بهترین زمان انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه تعیین شود. اما برای ارزیابی تابع هزینه، ابتدا باید تابع چگالی احتمال محاسبه شود. تابع چگالی در سیستم سری برابر احتمال زمان اولین خرابی در سیستم است. زمان اولین خرابی در سیستم با  $y_1 = \min(t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(m)})$  نشان داده می شود که  $m$  معرف تعداد تجهیزات سری و  $t_i^{(i)}$  نشان دهنده زمان اولین خرابی تجهیز  $i$ ام است. برای محاسبه تابع چگالی سیستم سری، ابتدا تابع توزیع سیستم مطابق معادله ۱ شش تعریف می شود.

$$F_{y_1}(t) = p \left( \min(t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(m)}) \leq t \right) \\ = 1 - p \left( \min(t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(m)}) \geq t \right) \\ = 1 - p \left( t_1^{(1)} \geq t \right) p \left( t_1^{(2)} \geq t \right) \dots p \left( t_1^{(m)} \geq t \right) \quad (6)$$

با استفاده از تابع چگالی معادله ۱ چهار، مقدار  $p(t_1^{(i)} \geq t)$  به صورت زیر به

توزیع گاما می تواند خانواده وسیعی از توزیع های پیشین را پوشش دهد. مثلاً وقتی پارامترهای آن به صفر میل می کند، این توزیع تبدیل به توزیع بدون اطلاع<sup>۱</sup>  $f_\nu(\nu) = \frac{1}{\nu}$  خواهد شد. همچنین در بیشتر محیط های عملی، از توزیع گاما برای مدل سازی نرخ شکست استفاده می شود.<sup>[۳۰]</sup> خرابی های یک تجهیز خاص مطابق توزیع بواسون با نرخ شکست  $\nu$  اتفاق می افتد؛ بنابراین، زمان بین خرابی ها از توزیع نمایی با تابع چگالی زیر پیروی می کند.

$$f_{t|\nu}(t) = \nu e^{-\nu t} \quad 0 < t < \infty, \quad 0 < \nu < \infty \quad (3)$$

با در نظر گرفتن فرض  $\nu \sim \text{GAM} \left( k, \frac{1}{\gamma} \right)$ ، تابع چگالی زمان رسیدن به اولین خرابی تجهیز که به صورت تصادفی انتخاب شده است، به صورت زیر محاسبه می شود.

$$f_t(t) = \int_0^\infty f_{t|\nu}(t) f_\nu(\nu) d\nu = k\gamma(\gamma t + 1)^{-(k+1)} \\ 0 < k < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad 0 < \nu < \infty \quad (4)$$

در ادامه ی پژوهش، به منظور یافتن تابع هزینه برای هر یک از سیستم های موازی، سری، و جایگزینی تک قطعه به محاسبه ی تابع چگالی احتمال برای هر کدام از سیستم ها نیاز است. با استفاده از رابطه چهار، تابع چگالی احتمال برای هر کدام از سیستم ها محاسبه می شود و سپس با استفاده از آن، توابع هزینه هر سیستم بررسی خواهد شد.

### ۱.۲. فرضیات

فرضیات مسئله به شرح زیر است:

۱. هزینه نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه کم تر از هزینه ناشی از خرابی های تحمیل شده به سیستم است.
۲. در ابتدای افق زمانی، همه ی تجهیزات سالم هستند.
۳. زمان های بازرسی و انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه نادیده گرفته شده اند.
۴. همه ی تجهیزات در سیستم های سری و موازی مشابه یکدیگرند.
۵. عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در فواصل زمانی یکسان انجام می گیرد.
۶. خرابی تجهیزات مستقل از یکدیگر است.

### ۳. مدل هزینه

مدل هزینه پیشنهادی بر اساس مدل مازوچی و سویر<sup>[۳۹]</sup> با هدف کمینه سازی هزینه در واحد زمان است. تابع هزینه برای سه سیستم به صورت زیر تعریف می شود.

$$TC(T) = \frac{mC_B + \int_0^T \frac{C_F f(t)}{1-F(t)} dt + C_P}{T} \quad (5)$$

در تابع هزینه معادله پنج، عملیات تعمیر یا تعویض یک تجهیز در زمان  $T$  یا هنگامی که خرابی زودتر از این زمان رخ دهد، انجام می گیرد. در ادامه به تعریف پارامترهای به کاررفته در مدل اشاره شده است.

$m$ : تعداد قطعات یدکی و تجهیزات مورد نیاز به ترتیب در سیستم های جایگزینی

دست می‌آید.

$$p(t_1^{(i)} \geq t) = \int_t^\infty k\gamma(\gamma t_1^{(i)} + 1)^{-(k+1)} = (\gamma t + 1)^{-k} \quad (7)$$

با توجه به فرض مستقل بودن تجهیزات از یکدیگر، تابع توزیع سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F_{y_1}(t) = 1 - (\gamma t + 1)^{-(mk)} \quad (8)$$

حال با مشتق‌گرفتن از تابع توزیع سیستم، تابع چگالی سیستم سری به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f_{y_1}(t) = mk\gamma(\gamma t + 1)^{-(mk+1)} \quad 0 < t < \infty, \quad 0 < k < \infty, \quad 0 < \gamma < \infty \quad (9)$$

پس از به دست آوردن تابع چگالی زمان خرابی سیستم، می‌توان تابع هزینه را بررسی کرد. تابع هزینه در سیستم سری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$TC(T) = \frac{\int_0^T \frac{C_F f(t)}{1-F(t)} dt + C_P}{T} \quad (10)$$

اما با توجه به محدودیت  $(C_F = C_f \times t)$ ، رابطه‌ی ۱۰ به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$TC(T) = \frac{C_f \int_0^T \frac{t f(t)}{1-F(t)} dt + C_P}{T} \quad (11)$$

برای ارزیابی تابع هدف، ابتدا باید مقدار  $\int_0^T \frac{t f(t)}{1-F(t)} dt$  محاسبه شود. با استفاده از تابع چگالی رابطه‌ی ۹، مقدار انتگرال مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\int_0^T \frac{t f(t)}{1-F(t)} dt = -\frac{km(\log(\gamma T + 1) - \gamma T)}{\gamma} \quad (12)$$

پس از محاسبه‌ی انتگرال  $\int_0^T \frac{t f(t)}{1-F(t)} dt$  مطابق رابطه‌ی ۱۲، تابع هدف به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$TC(T) = \frac{C_f \times (-km \times \log(\gamma T + 1))}{T \times \gamma} + km \times C_f + \frac{C_P}{T} \quad (13)$$

در سیستم سری هدف یافتن زمان بهینه برای انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه با در نظر گرفتن کمیته‌سازی هزینه است. در بخش بعد از یک مثال عددی برای روشن شدن مدل پیشنهادی استفاده شده است.

### ۱.۱.۳. مثال عددی و تحلیل حساسیت

در جدول ۱ مقادیر پارامترهای توزیع گاما، هزینه‌ها و تعداد تجهیزات مشخص شده‌اند. زمان بهینه‌ی انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه با توجه به پارامترهای مشخص شده برابر ۰٫۲۱ است. مقدار تابع هدف در این زمان برابر ۱۹۳٫۴۲۲ است که برابر کم‌ترین مقدار خود در چرخه‌ی زمانی مورد بررسی است.

در جدول ۲ مقادیر بهینه‌ی تابع هدف و زمان بهینه‌ی انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ازای پارامترهای مختلف هزینه و توزیع گاما نشان داده شده است. در هر تکرار مقادیر  $k$  و  $\gamma$  ثابت در نظر گرفته می‌شود و تأثیر هزینه‌ها و تعداد تجهیزات بر روی مقادیر تابع هزینه و زمان انجام نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتیجه‌ی تحلیل حساسیت پارامترها بر روی متغیرهای تصمیم در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۱. مقادیر بهینه‌ی تابع هدف و زمان عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ازای مقادیر ثابت  $k$  و  $\gamma$  در سیستم سری.

تابع هزینه	زمان $PM$	تعداد تجهیزات	گاما و هزینه	$C_f$	$C_P$	$\gamma$	$k$
$TC^*(T)$	$T^*$	$m$					
۱۹۳٫۴۲۲۲	۰٫۲۱	۴		۵۰	۲۰	۰٫۵	۱۰

### ۲.۳. تابع هزینه‌ی سیستم جایگزینی تک قطعه

در بسیاری از موارد به علت خرابی دستگاه‌ها و ماشین‌آلات و برای رفع نقص و راه‌اندازی خط تولید، نیاز به تعویض قطعه یا قطعاتی از تجهیزات است. در این شرایط وجود قطعه‌ی یدکی مورد نیاز در انبار فنی شرکت بسیار مطلوب است و بدون از دست‌دادن وقت برای خرید و تأمین آن قطعه می‌توان با جایگزینی قطعه‌ی سالم، دستگاه را راه‌اندازی کرد و تحویل خط تولید داد. توقف دستگاه‌ها و خطوط تولید هزینه‌های بسیاری مانند بی‌کاری کارورها، تولید اذیت‌رسانه، عدم تحویل به موقع سفارش به مشتری و نارضایتی مشتری و بسیاری از هزینه‌های دیگر را تحمیل می‌کند که با در اختیار داشتن میزان مناسب و به‌صرفه‌ی موجودی قطعات یدکی می‌توان زمان‌های تعمیر و تعویض قطعات یدکی و در کل زمان توقفات و تولیدات معوق را کاهش داد.

در بیشتر محیط‌های صنعتی معمولاً با وجود وابستگی و تأثیرگذار بودن موجودی قطعات یدکی و نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه، این عوامل را به صورت جدا بررسی و بهینه‌ی می‌کنند. در صورتی‌که تعیین موجودی قطعات یدکی می‌تواند بر اساس پیش‌بینی و برآورد میزان فعالیت‌های نگهداری و تعمیرات صورت بگیرد؛ با افزایش زمان، کارکرد ماشین‌آلات افزایش می‌یابد و تجهیزات بیش‌تر مستهلک می‌شود و در نتیجه تجهیزات به قطعات یدکی بیش‌تری برای تعویض نیاز دارند. این بررسی هم‌زمان و یکپارچه سبب صرفه‌جویی در هزینه‌ی کل می‌شود. اما داشتن موجودی از تمام قطعات یدکی یک تجهیز، بنا به دلایلی از جمله فضای انبارش بزرگ، حجم زیاد سرمایه‌ی مورد نیاز، و احتمال عدم نیاز به برخی قطعات یدکی حتی در طولانی مدت به سادگی میسر نمی‌شود.

در این پژوهش منظور از بررسی سیستم جایگزینی تک قطعه، تعیین تعداد بهینه‌ی قطعات یدکی برای قطعه‌ی مشخص از یک تجهیز در افق زمانی مورد نظر است. اهداف مورد نظر در این سیستم علاوه بر تعیین تعداد قطعات یدکی مورد نیاز، تعیین زمان انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه نیز هست. برای به‌دست‌آوردن مقادیر مورد نظر در تابع هدف، ابتدا نیاز به محاسبه‌ی تابع چگالی زمان خرابی سیستم است. تابع چگالی احتمال در این سیستم برابر است با احتمال مجموع زمان عملیات تا هنگامی که  $m$  امین خرابی یا شکست در تجهیز رخ دهد. تابع چگالی احتمال جایگزینی تک قطعه با  $(y_m = \sum_{i=1}^m t_i)$  نشان داده می‌شود که بین و رایب<sup>[۳۸]</sup> تابع چگالی احتمال  $y_m$  را به صورت زیر محاسبه کردند.

$$f(t) = \frac{\Gamma(k+m)(\gamma t)^{m-1}\gamma}{\Gamma(k)(m-1)!(\gamma t + 1)^{k+m}} \quad (14)$$

تابع هزینه در این سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$TC(T) = \frac{mC_B + \int_0^T \frac{C_F f(t)}{1-F(t)} dt + C_P}{T} \quad (15)$$

جدول ۲. مقادیر بهینه‌ی تابع هزینه و زمان عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ازای مقادیر متفاوت  $k$  و  $\gamma$  در سیستم سری.

شماره‌ی تکرار	پارامترهای توزیع گاما و هزینه				تعداد تجهیزات	زمان $PM$	تابع هزینه
	$C_f$	$C_P$	$\gamma$	$k$			
۱	۵۰	۲۰	۰٫۵	۱۰	۴	۰٫۲۱	۱۹۳٫۴۲۲۲
$C_P$	۵۰	۱۰	۰٫۵	۱۰	۴	۰٫۱۵	۱۳۸٫۱۱۵۷
	۵۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۴	۰٫۳۱	۲۶۹٫۶۷۳۰
$C_f$	۲۵	۲۰	۰٫۵	۱۰	۴	۰٫۳۱	۱۳۴٫۸۳۶۵
	۱۰۰	۲۰	۰٫۵	۱۰	۴	۰٫۱۵	۲۷۶٫۲۳۱۴
$m$	۵۰	۲۰	۰٫۵	۱۰	۲	۰٫۳۱	۱۳۴٫۸۳۶۵
	۵۰	۲۰	۰٫۵	۱۰	۸	۰٫۱۵	۲۷۶٫۲۳۱۴
۲	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۱۰	۴	۲٫۰۱	۱۹٫۹۳۳۴
$C_P$	۵۰	۱۰	۰٫۰۰۰۵	۱۰	۴	۱٫۴۲	۱۴٫۱۰۸۸
	۵۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۱۰	۴	۲٫۸۶	۲۸٫۱۵۱۱
$C_f$	۲۵	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۱۰	۴	۲٫۸۶	۱۴٫۰۷۵۶
	۱۰۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۱۰	۴	۱٫۴۲	۲۸٫۲۱۷۶
$m$	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۱۰	۲	۲٫۸۶	۱۴٫۰۷۵۶
	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۱۰	۸	۱٫۴۲	۲۸٫۲۱۷۶
۳	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۵	۴	۲٫۸۶	۱۴٫۰۷۵۶
$C_P$	۵۰	۱۰	۰٫۰۰۰۵	۵	۴	۲٫۰۱	۹٫۹۶۶۷
	۵۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۵	۴	۴٫۰۵	۱۹٫۸۶۶۹
$C_f$	۲۵	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۵	۴	۴٫۰۵	۹٫۹۳۳۴
	۱۰۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۵	۴	۲٫۰۱	۱۹٫۹۳۳۴
$m$	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۵	۲	۴٫۰۵	۹٫۹۳۳۴
	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۵	۸	۲٫۰۱	۱۹٫۹۳۳۴
۴	۵۰	۲۰	۰٫۵	۳۰	۴	۰٫۱۲	۳۳۹٫۷۷۵۹
$C_P$	۵۰	۱۰	۰٫۵	۳۰	۴	۰٫۰۸	۲۴۱٫۸۹۳۰
	۵۰	۴۰	۰٫۵	۳۰	۴	۰٫۱۷	۴۷۶٫۷۰۶۸
$C_f$	۲۵	۲۰	۰٫۵	۳۰	۴	۰٫۱۷	۲۳۸٫۳۵۳۴
	۱۰۰	۲۰	۰٫۵	۳۰	۴	۰٫۰۸	۴۸۳٫۷۸۶۱
$m$	۵۰	۲۰	۰٫۵	۳۰	۲	۰٫۱۷	۲۳۸٫۳۵۳۴
	۵۰	۲۰	۰٫۵	۳۰	۸	۰٫۰۸	۴۸۳٫۷۸۶۱
۵	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۳۰	۴	۱٫۱۶	۳۴٫۵۷۴۴
$C_P$	۵۰	۱۰	۰٫۰۰۰۵	۳۰	۴	۰٫۸۲	۲۴٫۴۶۱۶
	۵۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۳۰	۴	۱٫۶۴	۴۸٫۸۵۶۶
$C_f$	۲۵	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۳۰	۴	۱٫۶۴	۲۴٫۴۲۸۳
	۱۰۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۳۰	۴	۰٫۸۲	۴۸٫۹۲۳۲
$m$	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۳۰	۲	۱٫۶۴	۲۴٫۴۲۸۳
	۵۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۳۰	۸	۰٫۸۲	۴۸٫۹۲۳۲

ادامه‌ی جدول ۲.

شماره تکرار	پارامترهای توزیع گاما و هزینه				تعداد تجهیزات	زمان $PM$	تابع هزینه
	$k$	$\gamma$	$C_P$	$C_f$			
۶	۱۰	۵	۲۰	۵۰	۴	۰٫۰۸	$TC^*(T)$ ۵۶۷٫۶۳۸۸
$C_P$	۱۰	۵	۱۰	۵۰	۴	۰٫۰۵	۴۱۴٫۸۵۱۶
	۱۰	۵	۴۰	۵۰	۴	۰٫۱۲	۷۶۶٫۶۵۴۶
$C_f$	۱۰	۵	۲۰	۲۵	۴	۰٫۱۲	۳۸۳٫۳۲۷۳
	۱۰	۵	۲۰	۱۰۰	۴	۰٫۰۵	۸۲۹٫۷۰۳۲
$m$	۱۰	۵	۲۰	۵۰	۲	۰٫۱۲	۳۸۳٫۳۲۷۳
	۱۰	۵	۲۰	۵۰	۸	۰٫۰۵	۸۲۹٫۷۰۳۲

جدول ۳. نتیجه‌ی تحلیل حساسیت پارامترها بر روی مقادیر  $TC^*(T)$  و  $T^*$  در سیستم سری.

پارامترها	نوع تغییر	$T^*$	$TC^*(T)$	علت
$C_P$	افزایش	+	+	با افزایش $C_P$ ، منطقی است که زمان انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به تأخیر بیفتد و $TC^*(T)$ افزایش یابد و برعکس.
	کاهش	-	-	
$C_f$	افزایش	-	+	طبق فرض $C_F$ تابعی از زمان است، پس با خرابی یک تجهیز زودتر از زمان تعیین شده، هزینه‌ی زیادی به سیستم اعمال می‌شود. بنابراین، برای جلوگیری و کاهش خرابی‌های برنامه‌ریزی نشده، با افزایش $C_f$ زمان بهینه‌ی انجام عملیات نگهداری و تعمیرات کاهش می‌یابد و در نتیجه هزینه افزایش می‌یابد و برعکس.
	کاهش	+	-	
$m$	افزایش	-	+	با افزایش تعداد تجهیزات، احتمال خرابی سیستم افزایش می‌یابد؛ بنابراین، زمان بهینه‌ی انجام عملیات نگهداری و تعمیرات کاهش می‌یابد که باعث افزایش هزینه‌های سیستم می‌شود و برعکس.
	کاهش	+	-	

جدول ۴. مقادیر بهینه تابع هدف و زمان عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ازای مقادیر ثابت  $k$  و  $\gamma$  در سیستم جایگزینی تک‌قطعه.

تابع هزینه	پارامترهای توزیع گاما و هزینه				قطعاعات یدکی	زمان $PM$	تابع هزینه
	$C_B$	$C_P$	$C_f$	$m^*$			
$TC^*(T)$	۴۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۶۸	۲٫۱	۱۳۸۹٫۸	
$k$	۰٫۵	۱۵	۰٫۵	۱۵	۲٫۱	۱۳۸۹٫۸	

مقادیر  $k$  و  $\gamma$  است و نمی‌توان تأثیر هر کدام از هزینه‌ها را به‌طور مستقل بر روی تعداد قطعاعات یدکی بیان کرد. همچنین تأثیر  $C_P$  بر روی زمان بهینه‌ی عملیات نگهداری و تعمیرات نیز وابسته به پارامترهای توزیع گاما است، به‌طوری‌که نمی‌توان روند کاهشی یا افزایشی مشخصی برای آن در نظر گرفت. اما به‌دلیل وابستگی  $C_F$  به زمان، منطقی است که با افزایش آن، زمان بهینه‌ی انجام عملیات نگهداری و تعمیرات کاهش یابد و برعکس.

### ۳.۳. تابع هزینه‌ی سیستم موازی

توقف خط تولید در سیستم موازی هنگامی اتفاق می‌افتد که همه‌ی تجهیزات

اما با توجه به محدودیت  $(C_F = C_f \times t)$ ، تابع هزینه به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$TC(T) = \frac{mC_B + C_f \int_0^T \frac{tf(t)}{1-F(t)} dt + C_P}{T} \quad (۱۶)$$

محاسبه‌ی انتگرال  $F(t)$  و  $\int_0^T \frac{tf(t)}{1-F(t)} dt$  پیچیده است و از روش‌های عددی برای محاسبه‌ی آن استفاده شده است.

### ۱.۲.۳. مثال عددی و تحلیل حساسیت

برای روشن شدن مدل پیشنهادی، از یک مثال عددی استفاده شده است که اطلاعات آن در جدول ۴ نمایش داده شده است. مقدار تابع هدف به‌ازای مقادیر هزینه و پارامترهای توزیع گاما ۱۳۸۹٫۸ به‌دست آمده است؛ همچنین مقادیر بهینه‌ی تعداد قطعاعات یدکی و زمان شروع عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ترتیب برابر ۶۸ و ۲٫۱ است.

جدول ۵ نشان‌دهنده‌ی تأثیر پارامترهای هزینه و توزیع گاما بر روی مقادیر تابع هزینه، تعداد قطعاعات یدکی، و زمان انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه است. مقادیر متغیرهای تصمیم در این سیستم به شدت تحت تأثیر مقادیر متغیرهای توزیع گاما هستند؛ مثلاً تأثیر هزینه‌ها بر روی مقدار قطعاعات یدکی وابسته به میزان

جدول ۵. مقادیر بهینه‌ی تابع هزینه و زمان عملیات نگه‌داری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ازای مقادیر متفاوت  $k$  و  $\gamma$  در سیستم جایگزینی تک‌قطعه.

شماره‌ی تکرار	پارامترهای توزیع گاما و هزینه							زمان $PM$	تابع هزینه $TC^*(T)$
	$C_f$	$C_P$	$C_B$	$\gamma$	$k$	قطعات یدکی $m^*$			
۱	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۱	۴۲	۱۱۱	۱۸٫۶۶۴	
$C_B$	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۰٫۰۰۰۵	۱	۵۰	۱۱۸	۱۰٫۶۶۸۸	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۰٫۰۰۰۵	۱	۳۴	۱۰۲	۳۲٫۷۷۴۵	
$C_P$	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۱	۳۷	۹۸	۱۸٫۱۹۵۱	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۱	۵۰	۱۳۰	۱۹٫۴۸۱۱	
$C_f$	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۱	۳۸	۱۱۴	۱۶٫۸۴۷۹	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۰۰۰۵	۱	۴۷	۱۱۱	۲۰٫۴۷۸۷	
۲	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱	۷۴	۳۵	۱۰٫۴۸۲۱	
$C_B$	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۰٫۵	۱	۷۴	۳۰	۶۴٫۳۷۸۲	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۰٫۵	۱	۷۴	۴۳	۱۸۴٫۹۹۸۵	
$C_P$	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۰٫۵	۱	۷۴	۳۵	۱۰۸٫۰۵۳۵	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۰٫۵	۱	۷۴	۳۶	۱۱۲٫۲۹۷۷	
$C_f$	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱	۷۴	۴۳	۹۳٫۶۶۲۰	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱	۷۴	۳۰	۱۲۵٫۴۲۳۰	
۳	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۷۰	۴٫۱	۷۴۸٫۶۴۱۴	
$C_B$	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۰٫۵	۱۰	۷۰	۳٫۹	۴۰۱٫۸۹۶۵	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۰٫۵	۱۰	۷۰	۴٫۳	۱۴۱۶٫۸	
$C_P$	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۷۰	۴٫۱	۷۳۶٫۴۴۶۳	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۷۰	۴٫۱	۷۷۳٫۰۳۱۶	
$C_f$	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۷۰	۴٫۳	۷۲۰٫۰۱۵۲	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۷۰	۳٫۹	۷۷۸٫۱۵۲۰	
۴	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۵	۶۸	۲٫۱	۱۳۸۹٫۸	
$C_B$	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۰٫۵	۱۵	۶۸	۲٫۱	۷۴۲٫۱۸۹۶	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۰٫۵	۱۵	۶۸	۲٫۲	۲۶۷۲٫۲	
$C_P$	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۰٫۵	۱۵	۶۸	۲٫۱	۱۳۶۶	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۵	۶۸	۲٫۱	۱۴۳۷٫۴	
$C_f$	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۵	۶۸	۲٫۲	۱۳۵۸٫۸	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۵	۶۸	۲٫۱	۱۴۳۶٫۸	
۵	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۱	۱	۶۹	۱۹	۱۹۳٫۳۱۴۱	
$C_B$	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۱	۱	۶۹	۱۶	۱۱۵٫۶۹۸۵	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۱	۱	۶۳	۲۱	۳۲۳٫۰۹۹۸	
$C_P$	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۱	۱	۶۹	۱۹	۱۹۰٫۶۸۲۵	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۱	۱	۶۹	۲۰	۱۹۸٫۴۱۲۴	
$C_f$	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۱	۱	۶۹	۲۵	۱۶۱٫۵۳۵۳	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۱	۱	۶۹	۱۶	۲۲۵٫۱۴۷۱	

ادامه‌ی جدول ۵.

شماره‌ی تکرار	پارامترهای توزیع گاما و هزینه					زمان $PM$	تابع هزینه $TC^*(T)$
	$C_f$	$C_p$	$C_B$	$\gamma$	$k$		
۶	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۱	۵	۴٫۱	۷۶۲٫۸۵۱۶
$C_B$	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۱	۵	۳٫۸	۴۱۷٫۹۸۶۸
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۱	۵	۴٫۴	۱۴۰٫۸۷۱
$C_P$	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۱	۵	۴٫۱	۷۵۰٫۶۵۶۵
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۱	۵	۴٫۱	۷۸۷٫۲۴۱۹
$C_f$	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۱	۵	۴٫۴	۷۱۵٫۴۳۴۱
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۱	۵	۳٫۸	۸۰۹٫۶۵۷۹

جدول ۶. مقادیر بهینه‌ی تابع هزینه و زمان عملیات نگه‌داری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ازای مقادیر ثابت  $k$  و  $\gamma$  در سیستم موازی.

تابع هزینه $TC^*(T)$	زمان $PM$	تعداد تجهیزات $m^*$	پارامترهای توزیع گاما و هزینه				
			$C_f$	$C_p$	$C_B$	$\gamma$	$k$
۹۷۰٫۶۰۴۲	۰٫۳۷	۳	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۸

اما با توجه به محدودیت  $(C_F = C_f \times t)$ ، رابطه‌ی ۲۰ به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$TC(T) = \frac{mC_B + C_f \int_0^T \frac{tf(t)}{1-F(t)} dt + C_p}{T} \quad (21)$$

هدف در این سیستم یافتن زمان و تعداد تجهیزات بهینه است به‌گونه‌ی که هزینه کل در واحد زمان کمینه شود. اما برای ارزیابی و محاسبه‌ی تابع هدف، باید مقدار  $\int_0^T \frac{tf(t)}{1-F(t)} dt$  محاسبه شود که محاسبه‌ی این انتگرال پیچیده است و از روش‌های عددی برای محاسبه‌ی آن استفاده شده است.

#### ۱.۳.۳. مثال عددی و تحلیل حساسیت

جدول ۶ به ارائه‌ی مثالی برای سیستم موازی اختصاص یافته است. با توجه به پارامترهای هزینه و توزیع گاما، حداقل مقدار تابع هدف در  $۹۷۰٫۶۰۴۲$  رخ می‌دهد که مقادیر بهینه‌ی تعداد تجهیزات و زمان انجام عملیات نگه‌داری و تعمیرات پیشگیرانه در این مقدار تابع هدف به‌ترتیب برابر ۳ و ۰٫۳۷ است. در جدول ۷ تحلیل حساسیت سیستم موازی با شش مرحله تکرار نشان داده شده است. نتیجه‌ی تحلیل حساسیت پارامترها بر روی متغیرهای تصمیم در جدول ۸ بیان شده است.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این پژوهش سعی شده است تا مدلی کاربردی برای اتخاذ سیاست بهینه‌ی نگه‌داری و تعمیرات پیشگیرانه در سیستم‌های سری، موازی، و جایگزینی تک‌قطعه بر اساس تحلیل‌های آماری ارائه شود که مهم‌ترین نوآوری‌های مدل به شرح زیر است:

- در این پژوهش فرض شده است که خرابی تجهیزات در سه سیستم سری، موازی، و جایگزینی تک‌قطعه از توزیع بواسون پیروی می‌کند. همچنین نرخ شکست توزیع بواسون از توزیع گاما پیروی می‌کند.

خراب شوند. بنابراین، برای به‌دست‌آوردن تابع چگالی احتمال سیستم، باید احتمال زمان آخرین خرابی سیستم محاسبه شود. زمان آخرین خرابی سیستم با  $y_r = \max(t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(m)})$  نشان داده شده است که  $m$  نشان‌دهنده‌ی تعداد تجهیزاتی است که به‌صورت موازی قرار می‌گیرند و  $t_1^{(i)}$ ، نشان‌دهنده‌ی زمان اولین خرابی تجهیز نام است. در این سیستم نیز برای به‌دست‌آوردن تابع چگالی احتمال خرابی از تابع توزیع استفاده شده است که تابع توزیع سیستم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F_{y_r}(t) = p(\max(t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(m)}) \leq t) = p(t_1^{(1)} \leq t) p(t_1^{(2)} \leq t) \dots p(t_1^{(m)} \leq t) \quad (17)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۴، مقدار  $p(t_1^{(i)} \leq t)$  به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$p(t_1^{(i)} \leq t) = \int_0^t k\gamma(\gamma t_1^{(i)} + 1)^{-(k+1)} dt = 1 - (\gamma t + 1)^{-k} \quad (18)$$

فرض مستقل بودن تجهیزات در این سیستم نیز در نظر گرفته شده است. بنابراین، تابع توزیع مطابق رابطه‌ی ۱۹ به‌دست می‌آید.

$$f_{y_r}(t) = mk\gamma(\gamma t + 1)^{-(k+1)} \times (1 - (\gamma t + 1)^{-k})^{m-1} \quad (19)$$

تابع هزینه در سیستم موازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$TC(T) = \frac{mC_B + \int_0^T \frac{C_F f(t)}{1-F(t)} dt + C_p}{T} \quad (20)$$



جدول ۷. مقادیر بهینه‌ی تابع هزینه و زمان عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به‌ازای مقادیر متفاوت  $k$  و  $\gamma$  در سیستم موازی.

شماره‌ی تکرار	پارامترهای توزیع گاما و هزینه						زمان $PM$ $T^*$	تعداد تجهیزات $m^*$	تابع هزینه $TC^*(T)$
	$C_f$	$C_P$	$C_B$	$\gamma$	$k$				
۱	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۰۵	۵	۵٫۰۹	۱۰	۱۱۹٫۲۶۰۵	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۰٫۰۵	۵	۵٫۸	۱۴	۷۶٫۵۲۹۴	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۰٫۰۵	۵	۴٫۵	۷	۱۸۷٫۴۶۱۵	
	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۰٫۰۵	۵	۴٫۲۳	۸	۱۰۸٫۲۰۲۰	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۰٫۰۵	۵	۵٫۹۴	۱۲	۱۳۷٫۴۶۵۲	
۲	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۰۵	۵	۵٫۱	۸	۱۰۴٫۲۳۹۵	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۰۵	۵	۴٫۷	۱۱	۱۳۳٫۹۸۱۵	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۸	۰٫۳۷	۳	۹۷۰٫۶۰۴۲	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۰٫۵	۸	۰٫۴۴	۷	۷۴۲٫۲۴۲۴	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۰٫۵	۸	۰٫۳۲	۱	۱۱۷۸٫۲	
۳	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۰٫۵	۸	۰٫۲۸	۲	۸۲۰٫۶۹۳۵	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۰٫۵	۸	۰٫۵۱	۵	۱۰۱۹٫۷	
	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۸	۰٫۴۷	۲	۷۲۲٫۰۹۱۳	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۸	۰٫۳۵	۵	۱۲۲۵٫۹	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۰٫۳۲	۳	۱۱۲۷٫۴	
۴	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۰٫۵	۱۰	۰٫۳۵	۶	۸۸۴٫۵۳۵۴	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۰٫۵	۱۰	۰٫۲۸	۱	۱۳۲۴٫۵	
	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۰٫۲۴	۲	۹۴۱٫۴۳۸۵	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۰٫۴۱	۴	۱۴۰۴٫۱	
	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۰٫۳۶	۱	۸۱۶٫۵۹۵۴	
۵	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۰٫۵	۱۰	۰٫۲۷	۴	۱۴۴۷٫۵	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۱۰	۰٫۱۴	۱	۲۲۵۶٫۱	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۲	۱۰	۰٫۱۳	۲	۲۰۸۴٫۹	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۲	۱۰	۰٫۱۶	۱	۲۵۲۹٫۳	
	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۲	۱۰	۰٫۱۰	۱	۱۸۳۹٫۳	
۶	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۲	۱۰	۰٫۱۹	۱	۲۸۷۸٫۴	
	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۱۰	۰٫۲۱	۱	۱۵۴۱٫۱	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۱۰	۰٫۰۹	۱	۳۲۶۶٫۴	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۸	۰٫۱۵۴	۱	۱۹۹۷٫۵	
	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۲	۸	۰٫۱۵۸	۳	۱۸۱۶٫۶	
۷	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۲	۸	۰٫۱۸۰	۱	۲۲۳۷٫۱	
	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۲	۸	۰٫۱۱۹	۱	۱۶۳۰٫۹	
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۲	۸	۰٫۲۱۵	۱	۲۵۴۱٫۴	
	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۸	۰٫۲۳۷	۱	۱۳۵۹٫۱	
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۸	۰٫۱۱۶	۲	۲۸۸۸٫۲	

ادامه‌ی جدول ۷.

شماره‌ی تکرار	پارامترهای توزیع گاما و هزینه					تعداد تجهیزات	زمان $PM$	تابع هزینه $TC^*(T)$
	$C_f$	$C_P$	$C_B$	$\gamma$	$k$			
۶	۱۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۵	۱	۰٫۲۰۶	۱۵۴۰٫۹
$C_B$	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۰	۲	۵	۵	۰٫۲۴۷	۱۳۰۵٫۳
	۱۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۲	۵	۱	۰٫۲۴۲	۱۷۱۹٫۸
$C_P$	۱۰۰۰	۵۰	۴۰	۲	۵	۱	۰٫۱۵۷	۱۲۶۴٫۳
	۱۰۰۰	۲۰۰	۴۰	۲	۵	۲	۰٫۳۰۸	۱۹۱۸٫۵
$C_f$	۵۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۵	۱	۰٫۳۲۵۰	۱۰۳۷٫۲
	۲۰۰۰	۱۰۰	۴۰	۲	۵	۳	۰٫۱۷۶۰	۲۱۳۱٫۶

جدول ۸. نتیجه‌ی تحلیل حساسیت پارامترها بر روی مقادیر  $TC^*(T)$ ،  $m^*$  و  $T^*$  در سیستم موازی.

پارامترها	نوع تغییر	$T^*$	$m^*$	$TC^*(T)$	علت
$C_P$	افزایش	+	+	+	با افزایش $C_P$ ، منطقی است که زمان انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به تأخیر بیفتد و $TC^*(T)$ افزایش یابد و برعکس.
	کاهش	-	-	-	با افزایش $C_P$ ، برای جلوگیری و کاهش خرابه‌های برنامه‌ریزی نشده، زمان بهینه‌ی انجام عملیات نگهداری و تعمیرات کاهش و تعداد تجهیزات افزایش می‌یابد و در نتیجه هزینه‌ی کل نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه افزایش می‌یابد و برعکس.
$C_f$	افزایش	-	+	+	افزایش یا کاهش $C_B$ تأثیر معکوس بر $m^*$ دارد، به طوری که با افزایش $C_B$ ، تعداد تجهیزات کاهش می‌یابد و برعکس. همچنین با افزایش $C_B$ و در نتیجه کاهش تعداد تجهیزات، زمان انجام عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه برای مقابله با خرابی‌های زودتر از زمان تعیین شده کاهش می‌یابد.
	کاهش	+	-	-	

وجود دارد ( $C_F = C_f \times t$ )؛ زیرا با افزایش زمان، میزان خرابی و استهلاک تجهیزات افزایش می‌یابد.

اهداف پژوهش شامل یافتن بهترین زمان شروع عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در هر سیستم و همچنین یافتن تعداد قطعات یدکی و تجهیزات مورد نیاز به ترتیب در سیستم‌های جایگزینی تک‌قطعه و موازی است به طوری که هزینه‌ی کل در واحد زمان کمینه شود. نتایج تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی برای هر سه سیستم کارا و قابل اجراست.

تابع هزینه‌ی مدل مازوچی و سویرا<sup>[۳۹]</sup> برای سیستم جایگزینی تک‌قطعه با در نظر گرفتن هزینه‌ی خرید یک قطعه‌ی یدکی توسعه یافته است.

هزینه‌ی اضافه‌کردن یک تجهیز به سیستم موازی در تابع هزینه<sup>[۳۹]</sup> لحاظ شده و واضح است که با اضافه‌کردن یک تجهیز به سیستم، هزینه و قابلیت اطمینان افزایش می‌یابد. تعیین متغیرهای تصمیم با توجه به توازن بین هزینه و قابلیت اطمینان یکی از نوآوری‌های پژوهش است.

در سیستم‌های مورد مطالعه، فرض شده است که رابطه‌ی خطی بین  $C_F$  و زمان

## پانویس

1. non-informative

## منابع (References)

- Bevilacqua, M. and Braglia, M. "The analytic hierarchy process applied to maintenance strategy selection", *Reliability Engineering and System Safety*, **70**, pp. 71-83 (2000).
- Chareonsuk, C., Nagarur, N. and Tabucanon, M. "A multicriteria approach to the selection of preventive maintenance intervals", *International Journal of Production Economics*, **49**(1), pp. 55-64 (1997).
- Dekker, R. "Applications of maintenance optimization models: A review and analysis", *Reliability Engineering and System Safety*, **51**, pp. 229-240 (1996).
- Pham, H. and Wang, H. "Imperfect maintenance", *European Journal of Operational Research*, **94**, pp. 425-438 (1996).
- Miyamoto, A., Kawamura, K. and Nakamura, H. "Bridge

- management system and maintenance optimization for existing bridges”, *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering*, **15**(1), pp. 45-55 (2000).
6. Tsai, Y.T., Wang, K.S. and Teng, H.Y. “Optimizing preventive maintenance for mechanical components using genetic algorithms”, *Reliability Engineering and System Safety*, **74**, pp. 89-97 (2001).
  7. Lin, D., Zuo, M. and Yam, R.C.M. “Sequential imperfect preventive maintenance models with two categories of failure modes”, *Naval Research Logistics*, **48**(2), pp. 172-183 (2001).
  8. Wang, H. “A survey of maintenance policies of deteriorating systems”, *European Journal of Operational Research*, **139**(3), pp. 4690-489 (2002).
  9. Barlow, R.E. and Proschan, F., *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley and Sons, New York, pp. 108-117 (1965).
  10. Nakagawa, T. “A summary of periodic replacement with minimal repair at failure”, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **24**(3), pp. 213-227 (1981).
  11. Nakagawa, T. and Yasui, K. “Periodic replacement models with threshold levels”, *IEEE Transactions of Reliability*, **40**(3), pp. 395-397 (1991).
  12. Yip, H.L., Fan, H. and Chiang, Y.H. “Predicting the maintenance cost of construction equipment: Comparison between general regression neural network and Box-Jenkins time series models”, *Automation in Construction*, **38**, pp. 30-38 (2014).
  13. Zuo, M., Christianson, B. and Bartholomew-Biggs, M. “Optimizing preventive maintenance models”, *Journal of Computational Optimization and Applications*, **35**, pp. 261-279 (2006).
  14. Bedford, T. and Cook, R., *Probabilistic Risk Analysis: Foundations & Methods*, Cambridge University Press (2001).
  15. Abdel-Hameed, M. “A gamma wear process”, *IEEE Transactions on Reliability*, **24**(2), pp. 152-153 (1975).
  16. Bogdanoff, J.L. and Kozin, F., *Probabilistic Models of Cumulative Damage*, New York: John Wiley & Sons (1985).
  17. Frangopol, D.M., Kallen, M.J. and van Noortwijk, J.M. “Probabilistic models for life-cycle performance of deteriorating structures: Review and future directions”, *Progress in Structural Engineering and Materials*, **6**(4), pp. 197-212 (2004).
  18. Hong, H.P. “Inspection and maintenance planning of pipeline under external corrosion considering generation of new defects”, *Structural Safety*, **21**(3), pp. 203-222 (1999).
  19. van Noortwijk, J.M. “A survey of the application of gamma processes in maintenance”, *Reliability Engineering and System Safety*, **94**, pp. 2-21 (2009).
  20. Barbera, F., Schneider, H. and Kelle, P. “A condition based maintenance model with exponential failures and fixed inspection intervals”, *Journal of the Operational Research Society*, **47**, pp. 1037-1045 (1996).
  21. Metta, S.B. and Colosimo, E.A. “Determination of preventive maintenance periodicities of stand by devices”, *Reliability Engineering and System Safety*, **76**, pp. 149-154 (2002).
  22. Chelbi, A. and Kadi, D.A. “Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance”, *European Journal of Operational Research*, **156**, pp. 712-718 (2004).
  23. Zequeira, R.I., Valdes, J.E. and Berenguer, C.H. “Optimal buffer inventory and opportunistic preventive maintenance under random production capacity availability”, *Journal Production Economics*, **111**, pp. 686-696 (2008).
  24. Sofia, P. and George, T. “Optimal preventive maintenance for equipment with two quality states and general failure time distribution”, *European Journal of Operational Research*, **180**, pp. 329-353 (2007).
  25. Nosoohi, I. and Hejazi, S.R. “A multi-objective approach to simultaneous determination of spare part numbers and preventive replacement times”, *Mathematical Modelling*, **35**, pp. 1157-1166 (2011).
  26. Gao, Y., Feng, Y., Zhang, Z. and Tan, J. “An optimal dynamic interval preventive maintenance scheduling for series systems”, *Reliability Engineering and System Safety*, **142**, pp. 19-30 (2015).
  27. Barros, A., Berenguer, C. and Grall, A. “A maintenance policy for two-unit parallel systems based on imperfect monitoring information”, *Reliability Engineering & System Safety*, **91**(2), pp. 131-136 (2006).
  28. Golmakani, H.R. and Moakedi, H., “Optimization of periodic and non periodic inspection intervals of a multi component rn repairable system with failure interaction”, *Sharif Industrial Engineering and management*, **25**(1), pp. 41-51, (In Persian) (2013).
  29. Berrichi, A., Amodeo, L., Yalaoui, F. and Chatelet, E. “Bi-objective optimization algorithm for joint production and maintenance scheduling: Application to the parallel machine problem”, *Journal of Intelligent Manufacturing*, **20**(4), pp. 389-400 (2009).
  30. Fallah Nezhad, M.S., Mostafaiepour, A. and Sajadieh, M.S. “Implementation of traditional (S-R)-based PM method with bayesian inference”, *International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, **25**(1), pp. 27-32 (2014).
  31. Faccio, M., Persona, A., Sgarbossa, F. and Zanin, A. “Industrial maintenance policy development: A quantitative framework”, *International Journal of Production Economics*, Part A, **147**, pp. 85-93 (2014).
  32. Sadeghi, A. and Alborzi Manesh, R. “The application of fuzzy group analytic network process to selection of best maintenance strategy-A case study in mobarake steel compony”, *Procardia-Social and Behavioral Sciences*, **62**, pp. 1378-1383 (2012).
  33. Cheng, T. and Pandey, M.D. “An accurate analysis of maintenance cost of structures experiencing stochastic degradation”, *Structure and Infrastructure Engineering*, **8**(4), pp. 329-339 (2012).
  34. Cheng, T., Pandey, M.D. and van der Weide, J.A.M. “The probability distribution of maintenance cost of systems affected by the gamma process of degradation: finite time solution”, *Reliability Engineering and System Safety*, **108**, pp. 65-76 (2012).

35. Kallen, M.J. and van Noortwijk, J.M. "Optimal maintenance decisions under imperfect inspection", *Reliability Engineering and System Safety*, **90**, pp. 177-185 (2005).
36. Pandey, M.D., Cheng, T. and van der Weide, J.A.M. "Finite time maintenance cost by stochastic degradation", *Journal of Risk and Reliability*, **225**, pp. 241-250 (2011).
37. Park, K.S. "Optimal continuous-wear limit replacement under periodic inspections", *IEEE Transactions on Reliability*, **37**(1), pp. 97-102 (1988).
38. Bain, L.J. and Wright, F.T. "The negative binomial process with application to reliability", *Quality Technology*, **14**, pp. 60-65 (1982).
39. Mazzuchi, A. and Soyer, R. "A Bayesian perspective on some replacement strategies", *Reliability Engineering and System Safety*, **51**, pp. 295-303 (1996).