

استفاده از برآوردکننده‌های استوار به منظور پایش پروفایل خطی ساده چندمتغیره

مسلم کردستانی* (دانشجوی کارشناسی ارشد)

یا سر صمیمی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۵ (۱۳-۳)
دوری ۱-۳۲، شماره ۲/۲، ص ۱۳-۳

در برخی کاربردهای کنترل فرایند آماری، کیفیت یک محصول یا فرایند را می‌توان به صورت رابطه‌ی بین یک یا چند متغیر وابسته/مستقل بیان کرد که آن را «پروفایل» می‌نامند. در این نوشتار به بررسی پروفایل‌های خطی ساده‌ی چندمتغیره می‌پردازیم که در آن چندین مشخصه‌ی کیفی مرتبط به صورت مجموعه‌یی از توابع خطی برحسب یک متغیر مستقل مدل‌بندی می‌شود. در حالی که حضور داده‌های دورافتاده ممکن است در برآورد پارامترهای مدل با استفاده از برآوردکننده‌های کلاسیک اختلال ایجاد کند. به منظور برآورد پارامترهای پروفایل دو رویکرد استوار مبتنی بر برآوردکننده‌ی M پیشنهاد می‌شود که در دو وضعیت تک مرحله‌یی و دومرحله‌یی کاربرد داشته است. عملکرد برآوردکننده‌های پیشنهادی از دو نقطه نظر استواری و کارایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد در فاز ۱ کنترل فرایند آماری، برای مقادیر متوسط و بزرگ از آلودگی، عملکرد برآوردکننده‌های استوار بسیار بهتر از رویکرد کلاسیک است.

واژگان کلیدی: کنترل فرایند آماری، پروفایل خطی ساده چندمتغیره، برآوردکننده‌ی M، تابع بای اسکوتر.

۱. مقدمه

در اکثر کاربردهای کنترل فرایند آماری (SPC)، فرض می‌شود کیفیت یک فرایند یا محصول را می‌توان توسط یک متغیر یا یک بردار چندمتغیره نمایش داد. با این حال، در برخی کاربردها کیفیت یک فرایند یا محصول توسط رابطه‌ی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل به شکلی مناسب تر قابل توصیف است. این رابطه در ادبیات موضوع تحت عنوان «پروفایل^۱» شناخته می‌شود. تحقیقات صورت گرفته در زمینه‌ی پایش پروفایل‌ها با بررسی مدل رگرسیون خطی ساده آغاز شد.^[۶-۷] در ادامه، مدل‌های پیچیده تر همچون پروفایل خطی چندگانه،^[۸،۷] پروفایل‌های چندجمله‌یی،^[۹،۱۰] و پروفایل‌های غیرخطی^[۱۱-۱۳] نیز مورد بررسی قرار گرفت.

در نوشتار حاضر نوع خاصی از پروفایل‌ها تحت عنوان پروفایل خطی ساده‌ی چندمتغیره بررسی می‌شود که در آن چند مشخصه‌ی کیفی مرتبط به صورت مجموعه‌یی از توابع خطی برحسب یک یا چند متغیر مستقل مدل‌بندی می‌شود. بررسی ادبیات موضوع نشان می‌دهد تحقیقات صورت گرفته در زمینه‌ی پایش این نوع از پروفایل معدود است که از برخی از این تحقیقات^[۱۴-۱۶] در نوشتار حاضر استفاده شده است. برآورد پارامترهای مدل در فاز یک کنترل فرایند آماری، گام نخست در ایجاد نمودار کنترل مناسب به منظور پایش فرایند محسوب می‌شود. در فاز یک، مجموعه داده‌هایی از قبل در دسترس است و هدف به دست آوردن اطلاعات و برآورد پارامترهای

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۴/۱، اصلاحیه ۱۲/۱۱/۱۳۹۳، پذیرش ۲۵/۲/۱۳۹۴.

mkordestani@mail.kntu.ac.ir
y_samimi@kntu.ac.ir

فرایند تحت کنترل است. در ادبیات مرتبط با موضوع، عمدتاً از روش برآورد حداقل مربعات به منظور برآورد پارامترهای پروفایل استفاده می‌شود. یکی از نقاط ضعف برآوردکننده‌های کلاسیک حساسیت بالا نسبت به حضور مشاهدات دورافتاده است که این امر موجب اختلال در عملکرد برآوردکننده‌ها و در نتیجه ناکارآمدی در نتایج پایش پروفایل می‌شود. استفاده از روش‌های برآورد استوار یکی از روش‌های مقابله با مشاهدات دورافتاده است. به طور کلی، برآوردکننده‌های استوار در شرایط تخلف از مفروضات مدل نسبت به برآوردکننده‌های کلاسیک از عملکرد بهتری برخوردارند. با توجه به زمینه‌ی مطالعه‌ی حاضر، در ادامه تحقیقات مرتبط با کاربرد برآوردکننده‌های استوار در تهیه‌ی مدل‌های رگرسیونی مختصراً توضیح داده می‌شود.

در معرفی انواع برآوردکننده‌های استوار در برازش مدل رگرسیون خطی ساده،^[۱۷، ۱۸] ایده‌ی اصلی در توسعه‌ی روش‌های استوار استفاده از یک تابع وزن برای تخفیف یا حذف اثر داده‌های دورافتاده نسبت به مشاهدات نزدیک به مرکز در کمینه سازی تابع هدف برازش است. برآورد‌های M براساس تابع وزنی هابر^۲ و بای اسکوتر^۳ از جمله روش‌های برآورد پرکاربرد محسوب می‌شود. اخیراً، استفاده از روش‌های استوار در نمودارهای کنترل مبتنی بر مدل مورد توجه محققین واقع شده است. از برآوردکننده‌ی M به عنوان یک رویکرد استوار به منظور پایش فرایندهای چندمرحله‌یی استفاده شده است.^[۱۹] در همین زمینه از یک برآوردکننده‌ی استوار ترکیبی بر مبنای نمودار کنترل تشخیص علت برای پایش فرایندهای چندمرحله‌یی استفاده شده است.^[۲۰] برخی از محققین طرح برازش استوار را برای مدل‌های خطی تعمیم یافته در فرایندهای چندمرحله‌یی پیشنهاد

کرده‌اند [21] در تنها مطالعه‌ی صورت گرفته درخصوص استفاده از روش‌های استوار به منظور پایش پروفایل، [22] از برآورد کننده‌ی M به منظور برآورد و پایش پروفایل‌های خطی ساده استفاده شده است. همچنین یک روش استوار دومارحله‌یی به منظور پایش میانگین و پراکندگی فرایند با استفاده از برآوردکننده M کاربرد داشته است. [23, 24] در این مطالعه از برآوردکننده‌های استوار به منظور پایش پروفایل ساده‌ی چندمتغیره استفاده شده است. در این خصوص، از برآوردکننده‌ی M به منظور برآورد پارامترهای مدل در فاز I استفاده می‌شود. سپس عملکرد روش‌های پیشنهادی با روش حداقل مربعات در حضور و عدم حضور آلودگی بررسی و مقایسه می‌شود.

برای ارائه‌ی بهتر مطالب مورد نظر در نوشتار حاضر، در بخش ۲ به تشریح مدل و مفروضات آن پرداخته‌ایم؛ در بخش ۳، روش پیشنهادی و دو رویکرد استوار مورد نظر ارائه شده است؛ در بخش ۴ و ۵ روش‌ها از دو نقطه‌نظر استواری و کارایی بررسی و مقایسه شده است؛ و نهایتاً در بخش ۶ نیز نتیجه‌گیری و زمینه‌های آتی تحقیق در این حوزه مطرح شده است.

۲. مدل و مفروضات

طبق تعریف کنگ و آلباین، [1] هر پروفایل شامل مجموعه‌یی از اندازه‌گیری‌ها با یک متغیر پاسخ (y) و یک یا چند متغیر مستقل (x) است که به منظور ارزیابی کیفیت یک فرایند یا محصول تولیدشده استفاده می‌شود. با این حال، در بعضی از کاربردها کیفیت یک فرایند یا یک محصول را می‌توان توسط یک پروفایل خطی ساده‌ی چندمتغیره مشخص کرد، که در آن عبارت «ساده» اشاره به وجود یک متغیر مستقل و عبارت «چندمتغیره» اشاره به وجود چندین متغیر وابسته (پاسخ) دارد.

فرض کنید m نمونه از داده‌های گذشته در دسترس است. در هر نمونه، n مقدار برای متغیر مستقل و برای هر مقدار از متغیر مستقل، p متغیر پاسخ مرتبط وجود دارد. از این رو، برای نمونه‌ی تصادفی k ام، m مشاهده به صورت $(x_{ik}, y_{i1k}, y_{i2k}, \dots, y_{ipk})$ که $k = 1, 2, \dots, m$ و $i = 1, 2, \dots, n$ از متغیر مستقل و $y_{i1k}, y_{i2k}, \dots, y_{ipk}$ متغیرهای پاسخ مرتبط در نمونه تصادفی k ام را نشان می‌دهند. در هر نمونه، رابطه‌ی بین متغیر مستقل x و متغیرهای پاسخ y چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{B}_k + \mathbf{E}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

که در آن $\mathbf{Y}_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk})^T$ یک ماتریس $n \times p$ از متغیرهای پاسخ در نمونه‌ی k ام است. ماتریس $\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} 1 & x_k \end{bmatrix}$ نیز یک ماتریس $n \times 2$ از متغیرهای مستقل است. فرض می‌شود که ماتریس \mathbf{X}_k از یک نمونه به نمونه دیگر ثابت است. ماتریس $\mathbf{B}_k = (\beta_{0k}, \beta_{1k})^T$ یک ماتریس $2 \times p$ از پارامترهای مدل رگرسیونی است. ماتریس $\mathbf{E}_k = (\varepsilon_{1k}, \varepsilon_{2k}, \dots, \varepsilon_{nk})^T$ نیز یک ماتریس $n \times p$ از عبارات خطا برای نمونه‌ی k ام است. در ادبیات رگرسیون خطی چندمتغیره، بردار عبارات خطا برای هر مشاهده (ε_{ik}) دارای یک توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین p متغیره $\underline{\mu}$ و ماتریس کوواریانس $p \times p$ Σ_k است. برای نمونه‌ی تصادفی k ام، برآورد حداقل مربعات برای $\mathbf{B}_k = (\beta_{0k}, \beta_{1k})^T$ که مقدار $\left| \left(\mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_k \hat{\mathbf{B}}_k \right)^T \left(\mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_k \hat{\mathbf{B}}_k \right) \right|$ را کمینه کند، چنین تعریف می‌شود: [25]

$$\hat{\mathbf{B}}_k = \left(\hat{\beta}_{0k}, \hat{\beta}_{1k} \right)^T = \left(\mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k \right)^{-1} \mathbf{X}_k^T \mathbf{Y}_k \quad (2)$$

۳. روش پیشنهادی

برآوردکننده‌ی استواری که در این تحقیق از آن استفاده شده است، برآوردکننده‌ی M است که برای اولین بار توسط هاب [26] تعریف شد. این برآوردکننده که شکل عام برآورد بیشینه درست‌نمایی (MLE) [27] است، تابعی از باقی‌مانده‌ها را که به صورت عبارت ۳ تعریف می‌شود کمینه می‌کند:

$$\min \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{e_i}{s} \right) \quad (3)$$

به طوری که s یک برآورد استوار از مقیاس است. یکی از انتخاب‌های معمول برای s میانگین انحراف مطلق نرمال شده (MADN) است که برآوردی استوار و نارباب است و مطابق رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود:

$$s = \frac{\text{median} |e_i - \text{median}(e_i)|}{0.6745} \quad (4)$$

همچنین $\rho(\cdot)$ تابعی با ویژگی‌های خاص و مشتق پذیر است که مشتق آن را با $\psi(\cdot)$ نشان می‌دهند. شرایط تابع $\rho(\cdot)$ عبارت است از: [18]

- $\rho(x)$ باید تابعی غیر نزولی از $|x|$ باشد.
- $\rho(0) = 0$ است.
- $\rho(x)$ برای $x > 0$ اکیداً صعودی است.
- چنانچه $\rho(x)$ متناهی باشد، باید $\rho(\infty) = 1$ باشد.

یکی از توابع معروف که اکثراً در مطالعات مورد استفاده قرار گرفته تابع بای اسکوتر است. در نوشتار حاضر نیز از تابع بای اسکوتر استفاده شده است. این تابع چنین تعریف می‌شود:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - \left[1 - (x/k)^2 \right]^2 & \text{if } |x| \leq k \\ 1 & \text{if } |x| > k \end{cases} \quad (5)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x - \left[1 - (x/k)^2 \right]^2 & \text{if } |x| \leq k \\ 0 & \text{if } |x| > k \end{cases} \quad (6)$$

پارامتر k به نحوی انتخاب می‌شود که برآوردکننده‌ی حاصل تحت توزیع نرمال دارای واریانس مجانبی مناسب و در نتیجه کارایی مجانبی مطلوب باشد. در جدول ۱ مقادیر k به ازای مقادیر مختلفی از کارایی و تعداد متغیرهای پاسخ y ارائه شده است [27]

رابطه‌ی ۳ برای حالت تک‌متغیره صادق است، اما در حالت چندمتغیره که ما چند متغیر پاسخ و در نتیجه چند باقی‌مانده برای هر پروفایل داریم، باید از نرم ماحالانویس باقی‌مانده‌ها به جای باقی‌مانده‌ی انفرادی استفاده کنیم. برای ماتریس‌های داده شده

جدول ۱. مقدار k برای تابع بای اسکوتر به ازای مقادیر مختلف کارایی و تعداد متغیرهای پاسخ (در صورتی که خطاها از توزیع نرمال پیروی کنند).

کارایی	P (تعداد متغیر پاسخ)			
	۱	۲	۳	۵
۰٫۸	۳٫۱۴	۳٫۵۱	۳٫۸۲	۴٫۳۴
۰٫۹	۳٫۸۸	۴٫۲۸	۴٫۶۲	۵٫۱۸
۰٫۹۵	۴٫۶۸	۵٫۲۱	۵٫۴۸	۶٫۱۰

ارائه شده اریب است، محققین پیشنهاد می کنند [۲۲] با استفاده از یک ضریب ثابت، برآورد استوار پیشنهادی را در غیاب دورافتاده ها ناریب کنیم. این ضریب ثابت که با I_n نشان داده می شود، وابسته به اندازه نمونه n است. به عبارت دیگر، برآورد ناریب برای ماتریس کوواریانس عبارات خطا یعنی $\hat{\Sigma}$ ، از ضرب $\hat{\Sigma}$ در ضریب I_n به دست می آید. بنابراین می توان نوشت: $E \left[I_n \hat{\Sigma}_b \right] = E \left[\hat{\Sigma} \right] = \Sigma$. در عمل، با تولید k بار شبیه سازی از m پروفایل به اندازه n نمونه، ضریب I_n مطابق رابطه ۱۱ قابل محاسبه است:

$$I_n = \frac{\Sigma}{\frac{\sum_{i=1}^k \hat{\Sigma}_{bi}}{k}} \quad (11)$$

که در آن $\hat{\Sigma}_{bi}$ ماتریس کوواریانس عبارات خطا در i امین مرتبه ی شبیه سازی است و مطابق رابطه ۱۰ به دست آمده است. تعداد تکرار شبیه سازی به منظور به دست آوردن یک ضریب مناسب I_n باید تا حد ممکن بزرگ باشد.

در ادامه دو رویکرد برآورد استوار پیشنهادی در مقایسه با برآوردکننده ی کلاسیک حداقل مربعات مورد بررسی و ارزیابی قرار خواهد گرفت. به منظور ارزیابی استواری و کارایی هر یک از برآوردکننده ها، از دو معیار نقطه ی شکست (BP) ^۶ و تابع تأثیر (IF) ^۷ به عنوان شاخص های استواری، و از دو معیار میانگین ماتریس اریبی (MBM) ^۸ و میانگین ماتریس مربعات خطا (MSEM) ^۹ به عنوان شاخص های کارایی استفاده شده است.

۴. استواری برآوردکننده ها

۴.۱. تابع تأثیر

طبق تعریف مارونا و همکاران، [۱۸] تابع تأثیر (IF) یک برآوردکننده نشانگر عملکرد منحنی حساسیت ^{۱۰} آن در حالت مجانبی است. منحنی حساسیت استاندارد برای برآوردکننده ی $\hat{\theta}$ با استفاده از نمونه ی تصادفی (X_1, \dots, X_n) ، به صورت تابعی از موقعیت داده ی دورافتاده x_0 تعریف می شود:

$$SC_n(x_0) = \frac{\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n, x_0) - \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{(n+1)}} \quad (12)$$

بنابراین، تابع تأثیر نشانگر رفتار $\hat{\theta}_\infty$ است، زمانی که نمونه شامل یک درصد کوچک (ε) از نقاط دورافتاده باشد:

$$IF_{\hat{\theta}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\hat{\theta}_\infty((1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_{x_0}) - \hat{\theta}_\infty(F)}{\varepsilon} \quad (13)$$

δ_{x_0} جرم نقطه یی داده دورافتاده x_0 است. عبارت $(1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_{x_0}$ یک مقدار مجانبی از برآوردکننده ی $\hat{\theta}$ است هنگامی که توزیع مفروض با F نشان داده می شود، و ε درصدی از دورافتاده هاست که برابر x_0 باشند. در اینجا به منظور به دست آوردن منحنی حساسیت برآوردکننده ها به صورت تقریبی، از مدل ارائه شده توسط نورالسنا و همکاران [۱۵] استفاده می کنیم. بدین منظور ابتدا 20° پروفایل با اندازه نمونه 10° از یک پروفایل خطی ساده ی دومتغیره به صورت $y_1 = 3 + 2x + \varepsilon_1$ و $y_2 = 2 + x + \varepsilon_2$ که در آن ε_1 و ε_2 از توزیع نرمال دومتغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ پیروی می کنند تولید کرده، سپس یک مشاهده از هر پروفایل را با یک داده ی دورافتاده x_0 تعویض می کنیم. پس از آن، مقدار x_0 از 10° تا 10° به صورت افزایشی، و با گام 0.25° تغییر می یابد و مقدار

$\mathbf{B} \in R^{p \times q}$ و $\Sigma \in R^{q \times q}$ نرم ماهالانویس باقی مانده ها به صورت $d_i(\mathbf{B}, \Sigma)$ که $(i = 1, \dots, n)$ نشان داده می شود، و چنین تعریف می شود:

$$d_i(\mathbf{B}, \Sigma) = \left(\hat{u}_i(\mathbf{B})^T \Sigma^{-1} \hat{u}_i(\mathbf{B}) \right)^{1/2} \quad (7)$$

که در آن، $\hat{u}_i(\mathbf{B}) = \mathbf{y}_i - \mathbf{B}^T \mathbf{x}_i$. بنابراین رابطه ی ۳ به رابطه ی ۸ تغییر شکل می یابد.

$$\min \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{d_i(\hat{\beta})}{s} \right) = \min \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{\left[(\mathbf{y}_i - \mathbf{B}^T \mathbf{x}_i)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{B}^T \mathbf{x}_i) \right]^{1/2}}{s} \right) \quad (8)$$

بدین ترتیب، با مشتق گیری از رابطه ی ۸ نسبت به ماتریس ضرایب و ماتریس کوواریانس، و مساوی صفر قرار دادن رابطه ها، برآوردکننده های مناسب برای \mathbf{B} و Σ به دست می آید. برای حل دستگاه معادلات مذکور، به علت پیچیده بودن عملیات محاسباتی از یک الگوریتم تکرارشونده به نام «حداقل مربعات موزون تکرارشونده (IRLS)»^۵ استفاده می شود.

برای برآورد ماتریس ضرایب پروفایل خطی ساده چندمتغیره، فرض می شود m پروفایل با اندازه نمونه n در دسترس است. ابتدا براساس مشاهدات هر پروفایل می توان ماتریس ضرایب پروفایل را با استفاده از برآوردکننده ی M تعیین کرد که آن را با β_i ($i = 1, \dots, m$) نمایش می دهیم. بنابراین بردار ضرایب برای تمامی m پروفایل به صورت $\mathbf{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ قابل حصول است. حال برای تعیین ماتریس ضرایب نهایی حاصل از m پروفایل دوگزینه پیش رو خواهد بود: ۱. استفاده از عملگر میانگین روی بردار ضرایب \mathbf{B} ؛ مطابق این روش، درایه های متناظر هر ماتریس ضرایب برای کلیه ی m پروفایل جمع و بر تعداد کل پروفایل ها یعنی m تقسیم می شود. این روش را «برآوردکننده ی M تک مرحله یی» نامیده و در شبیه سازی های آن را با « M » نمایش می دهیم (الگوریتم این روش نیز در پیوست الف ارائه شده است). ۲. استفاده از یک برآوردکننده ی M دیگر روی بردار ضرایب \mathbf{B} . براین اساس هر یک از درایه های متناظر از ماتریس ضرایب m پروفایل را یک متغیر در نظر گرفته و با استفاده از برآوردکننده ی M چندمتغیره، ماتریس ضرایب نهایی برای کلیه ی m پروفایل حاصل می شود (الگوریتم این روش نیز در پیوست ب ارائه شده است). این روش را «برآوردکننده ی M دومرحله یی» نامیده و در شبیه سازی ها آن را با « $M2$ » نمایش می دهیم.

برای برآورد ماتریس کوواریانس عبارات خطا در رابطه ی ۱، که به ویژه به منظور تجزیه و تحلیل آماری، طراحی نمودار کنترل و اندازه گیری قابلیت فرایند حائز اهمیت است از روش استوار ارائه شده در مطالعات پیشین [۲۲] استفاده می شود. این روش را به منظور استفاده در فضای چندمتغیره چنین اصلاح کرده ایم:

$$MSE_j = \frac{\sum_{i=1}^n (w_i \varepsilon_i)^T (w_i \varepsilon_i)}{n-p} \quad (9)$$

$$\hat{\Sigma}_b = MSE = \frac{\sum_{j=1}^m MSE_j}{m} \quad (10)$$

که در آن $\hat{\Sigma}_b$ یک برآورد اریب از Σ است، و مقادیر w_i و ε_i به ترتیب وزن و مقدار خطا برای اندازه نمونه i ام پروفایل است که از آخرین مرحله از الگوریتم IRLS به دست می آید. m نیز تعداد پروفایل ها را نشان می دهد. از آنجا که برآورد استوار

کوچک تر باشد از دقت بالای روش برآورد حکایت دارد. این دو معیار را چنین تعریف می‌کنند: [29]

$$MBM(\hat{B}) = E(\hat{B} - B) \quad (14)$$

$$MSEM(\hat{B}) = E \left\{ \text{vec}(\hat{B} - B)^T \times \left(\text{vec}(\hat{B} - B)^T \right)^T \right\} \quad (15)$$

به طوری که عملگر $\text{vec}(\cdot)$ برای ماتریس $A_{p \times q} = (a_1, \dots, a_q)$ که $i = a_i$ (به طوری که $1, \dots, q$ ستون‌های آن را نشان می‌دهد به صورت a_1^T, \dots, a_q^T) تعریف می‌شود و حاصل یک بردار ستونی با ابعاد $p \times 1$ است.

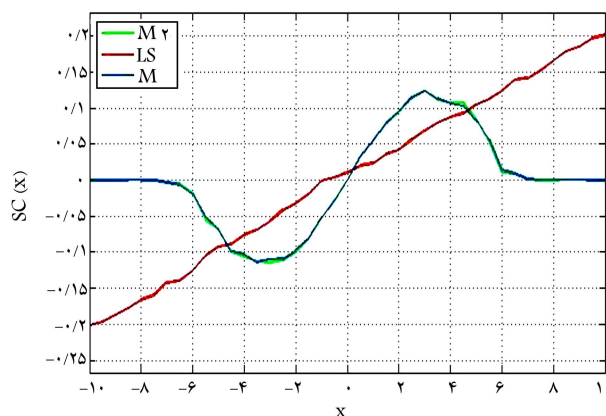
به منظور مقایسه‌ی MBM برآوردکننده‌ها، از نرم فروبنیوس به صورت $\|MBM\|_F = \sqrt{\text{tr}\{MBM^T \times MBM\}}$ استفاده می‌شود که تحت عنوان میانگین مطلق اریبی (MAB) نیز شناخته می‌شود. به طور مشابه برای مقایسه‌ی معیار MSEM برآوردکننده‌ها از اثر ماتریس یا به عبارت دیگر $\text{trace}(MSEM)$ استفاده می‌شود. برای مقایسه‌ی برآوردکننده‌ها در این مقاله از مدل مورد نظر دیگر محققین [15] به منظور شبیه‌سازی داده‌ها استفاده می‌شود. مدل پروفایل خطی ساده‌ی چندمتغیره را به صورت رابطه‌ی 16 در نظر بگیرید:

$$Y_1 = 3 + 2x + \varepsilon_1, \quad Y_2 = 2 + x + \varepsilon_2 \quad (16)$$

که مقادیر x_i به صورت مجموعه‌ی $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ تعریف شده است. بردار خطا $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ نیز از یک توزیع نرمال دومتغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ تولید می‌شود. در مرحله‌ی اول، نتایج

برآورد ماتریس کوواریانس عبارات خطا با مقدار اولیه‌ی آن برای سه روش مورد بررسی مقایسه می‌شود. برای این منظور تنها از معیار $\text{trace}(MSEM)$ استفاده می‌کنیم (جدول 2). هر پارامتر با استفاده از 500 بار شبیه‌سازی از 20 پروفایل برآورد شده است. به منظور برآورد این پارامترها فرض شده است که q درصد از عبارات خطا از توزیع نرمال دومتغیره $N(0, \Sigma)$ تولید شده، و مقادیر q به صورت $\{0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0\}$ در نظر گرفته شد. چنان‌که در جدول 2 مشاهده می‌شود در صورت عدم وجود آلودگی دو روش استوار پیشنهادی همانند روش کلاسیک عمل می‌کنند و در صورت وجود آلودگی عملکرد آنها به خصوص برای مقادیر بزرگ Σ بسیار بهتر از روش کلاسیک است. همچنین مشاهده می‌شود که مقادیر $\text{trace}(MSEM)$ برای روش M2 در مقایسه با روش M کوچک‌تر است، و این خود نشان می‌دهد روش استوار دومرحله‌ی در مقایسه با روش استوار تک‌مرحله‌ی در مواجهه با داده‌ی دورافتاده از توان بالاتری برخوردار است.

در ادامه، به منظور مقایسه‌ی عملکرد برآوردکننده‌ها از نقطه‌نظر ماتریس ضرایب برآورد شده، از دو معیار MAB و $\text{trace}(MSEM)$ استفاده شده است. همچنین برای انجام این مقایسه دو نوع آلودگی در نظر گرفته شده است. در آلودگی نوع اول ما به تولید داده‌های دورافتاده براساس تغییر در بردار میانگین و ماتریس کوواریانس توزیع عبارات خطا می‌پردازیم. در جداول 3 و 4 نتایج برای درصدهای آلودگی $[0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0]$ نشان داده شده است. در جدول 3 نتایج آلودگی با ایجاد تغییر در ماتریس کوواریانس توزیع عبارات خطا داده شده، مشاهده می‌شود که با افزایش q و Σ تغییر چندانی در نتایج حاصل نشده، و این خود نشان‌گر تأثیرپذیرفتن ماتریس ضرایب برآورد شده نسبت به تغییر در ماتریس کوواریانس عبارات خطاست.



شکل 1. منحنی حساسیت برای روش‌های برآورد.

انحراف برای هر روش برآورد و به‌ازای هر مقدار از x_0 محاسبه می‌شود. این فرایند 1000 بار تکرار، و مقدار متوسط $SC(x_0)$ برای هر رویکرد برآورد حاصل می‌شود (شکل 1).

چنان‌که در شکل 1 مشاهده می‌شود، روش حداقل مربعات LS نسبت به داده دورافتاده بسیار حساس است و منحنی حساسیت برای این برآوردکننده بیکران است. در مقابل دو روش پیشنهادی M و M2 نسبت به داده دورافتاده از حساسیت کم‌تری برخوردارند و منحنی حساسیت آنها کران‌دار است. برای دورافتادگی‌های کوچک، حساسیت روش LS در مقایسه با دو روش پیشنهادی کم‌تر است، درحالی‌که برای آلودگی‌های متوسط و بزرگ برآوردکننده‌های استوار در مقایسه با برآوردکننده‌ی کلاسیک حساسیت کم‌تری دارند و برای آلودگی‌های بسیار بزرگ نیز اصلاً تحت تأثیر دورافتادگی قرار نمی‌گیرند.

2.4. نقطه‌ی شکست

در یک تعریف کلی، نقطه‌ی شکست (BP) برای برآوردکننده‌ی $\hat{\theta}$ برابر است با بزرگ‌ترین میزان آلودگی یا نسبتی از نقاط غیر معمول در داده‌ها، به طوری که $\hat{\theta}$ در حضور آنها همچنان قادر به ارائه‌ی اطلاعات مفید در مورد θ یعنی توزیع نقاط معمول باشد [18]. از این رو، هرچه مقدار نقطه‌ی شکست بزرگ‌تر باشد بیان‌گر نیرومندی برآوردکننده در برابر آلودگی است؛ به عبارت دیگر، تعداد مشاهدات آلوده‌ی بیشتری برای تأثیرگذاری بر برآوردکننده‌ی استوار لازم است. مارونا [28] نشان می‌دهد نقطه‌ی شکست برآوردکننده‌ی حداقل مربعات برابر با صفر است، یعنی وجود حتی یک مشاهده‌ی دورافتاده می‌تواند عملکرد این برآوردکننده را تحت تأثیر قرار دهد و موجب تولید اطلاعات نادرست در مورد توزیع فرایند شود. در مقابل، نقطه‌ی شکست برآوردکننده‌ی M در حالت چندمتغیره کوچک‌تر یا مساوی $\frac{1}{p+1}$ است، که در آن p تعدادمتغیرهای پاسخ وابسته را نشان می‌دهد. بنابراین، با افزایش p نقطه‌ی شکست برآوردکننده‌ی M کاهش می‌یابد.

5. کارایی برآوردکننده‌ها

در این قسمت، کارایی روش‌های پیشنهادی با روش حداقل مربعات خطا مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرد. برای این منظور از دو معیار ماتریس میانگین اریبی (MBM) و ماتریس میانگین مربعات خطا (MSEM) برای بررسی میزان نزدیکی برآورد حاصل با مقدار اصلی پارامتر استفاده شده است. هرچه مقدار این دو معیار

جدول ۲. مقایسه ماتریس کوواریانس برآورد شده برای عبارات خطا براساس معیار $\text{trace}(\text{MSEM})$ در حضور $q \times 100\%$ آلودگی در توزیع عبارات خطا حاصل از توزیع $N(0, \Sigma)$.

q	Σ	LS	M	M2
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$	0.383	0.447	0.458
	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	0.559	0.569	0.581
0.05	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0.1347	0.930	0.908
	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	0.4668	0.1725	0.1462
0.1	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	2.104	0.3762	0.2267
	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	0.766	0.707	0.730
0.15	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0.3553	0.2177	0.1967
	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	1.5395	0.5466	0.4245
0.2	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	6.9133	1.2115	0.7650
	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	0.1241	0.1085	0.1099
0.25	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0.6705	0.3978	0.3682
	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	3.2239	1.2326	0.9902
0.3	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	14.3572	3.0794	1.9177
	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	0.3576	0.1407	0.1443
0.4	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	1.0904	0.6749	0.6244
	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	5.3441	2.1848	1.8069
0.5	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	24.378	6.1784	4.1216

در جدول ۴ نتایج حاصل از آلودگی با ایجاد تغییر در بردار میانگین توزیع عبارات خطا درج شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقادیر در بردار میانگین، مقادیر دو معیار مقایسه نیز افزایش می‌یابد. این افزایش برای روش LS بسیار قابل ملاحظه است در حالی که برای روش استوار M و M2 و به‌خصوص برای M2 نسبت به روش LS بسیار کم‌تر است. این نتیجه حاکی از برتری برآوردکننده‌های استوار نسبت به برآوردکننده‌ی کلاسیک در مواجهه با داده‌ی دورافتاده است. نکته‌ی قابل توجه آن است که در این جدول نیز عملکرد روش استوار دومرحله‌ی نسبت به روش استوار تک‌مرحله‌ی بهتر است. چنان‌که ذکر شد در نوشتار حاضر از دو نوع آلودگی برای مقایسه‌ی عملکرد برآوردکننده‌ها از نقطه‌نظر ماتریس ضرایب برآورد شده استفاده شده است.

آلودگی نوع دوم از طریق ایجاد شیفت در عرض از مبدا و شیب پروفایل‌ها رخ می‌دهد. برای این منظور، فرض شده است درصدی از مشاهدات از مدلی با ماتریس ضرایب $\begin{bmatrix} 3 + \lambda & 2 + \lambda \\ 2 + \lambda & 1 + \lambda \end{bmatrix}$ تولید شده‌اند. در جدول ۵ نتایج به‌ازای شیفت در عرض از مبدا و شیب پروفایل اول نشان داده شده است. فرض بر آن است که $q \times 100\%$ از مشاهدات مدل در نظر گرفته شده و $(1 - q) \times 100\%$ از مشاهدات مدل تغییر یافته‌ی زیر تولید شده‌اند:

$$Y_1 = (3 + \lambda) + (2 + \lambda)x + \varepsilon_1, \quad Y_2 = 2 + 1x + \varepsilon_2 \quad (17)$$

این برآوردها به‌ازای 50° بار شبیه‌سازی و برای $\lambda = [2, 4, 6, 8, 10]$ و $q = [0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0]$ به دست آمده‌اند. چنان‌که در جدول ۵ مشاهده می‌شود نتایج به‌ازای افزایش در q و λ برای دو روش LS و M افزایش می‌یابد که البته این افزایش در روش LS قابل ملاحظه‌تر است. همچنین قابل مشاهده است که روش M2 از تأثیرپذیری بسیار ناچیزی به‌ازای افزایش در q و λ برخوردار است که این خود حاکی از برتری روش M2 نسبت به روش M و به‌خصوص روش LS است. نکته‌ی دیگری که اشاره به آن الزامی است، مطابق نتایج جدول ۵ در روش M2 نتایج به‌ازای افزایش در λ ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. به‌عبارت دیگر، نتایج برای مقادیر بزرگ λ کم‌تر از نتایج مربوط به مقادیر کوچک λ است. این رفتار برآوردکننده‌ی M2 را می‌توان با توجه به منحنی حساسیت ترسیم شده در بخش ۱.۴. توجه کرد، چرا که برآوردکننده‌ی استوار برای آلودگی‌های کوچک‌تر وزن‌های بالاتری نسبت به آلودگی‌های بزرگ‌تر اختصاص می‌دهد و این امر علت بروز رفتار مذکور است.

در جدول ۶ نتایج به‌ازای شیفت در عرض از مبدا‌های دو پروفایل نشان داده شده است. برای این منظور، فرض شده است که $q \times 100\%$ از مشاهدات مدل در نظر گرفته شده و $(1 - q) \times 100\%$ از مشاهدات مدل تغییر یافته تولید شده است:

$$Y_1 = (3 + \lambda) + 2x + \varepsilon_1, \quad Y_2 = (2 + \lambda) + 1x + \varepsilon_2 \quad (18)$$

در این جدول نیز نتایج حاکی از برتری روش M2 نسبت به دو روش LS و M است. به‌علاوه، روش M نیز نسبت به روش LS از عملکرد بهتری برخوردار است. در جدول ۷ نتایج به‌ازای شیفت در شیب‌های دو پروفایل نشان داده شده است، بدین صورت که فرض شده است $q \times 100\%$ از مشاهدات مدل در نظر گرفته شده، و $(1 - q) \times 100\%$ از مشاهدات مدل تغییر یافته مطابق رابطه‌ی ۱۹ تولید شده‌اند:

$$Y_1 = 3 + (2 + \lambda)x + \varepsilon_1, \quad Y_2 = 2 + (1 + \lambda)x + \varepsilon_2 \quad (19)$$

جدول ۳. مقایسه‌ی ماتریس ضرایب برآورد شده برای برآوردکننده‌های استوار و کلاسیک توسط دو معیار $\text{trace}(\text{MSEM})$ و MAB در حضور $10\% \times q$ آلودگی در توزیع عبارات خطا حاصل از توزیع $N(0, \Sigma)$.

M2		M		LS		Σ	q
tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB		
(0,0538)	0,242	(0,0493)	0,0019	(0,0469)	0,0025	$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	0
(0,0577)	0,249	(0,0551)	0,001	(0,0517)	0,0094	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	
(0,0596)	0,169	(0,0585)	0,0088	(0,0585)	0,0098	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0,05
(0,0642)	0,248	(0,0554)	0,0039	(0,0675)	0,0036	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	
(0,0666)	0,303	(0,0778)	0,0170	(0,0816)	0,259	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	
(0,0507)	0,0044	(0,0465)	0,0054	(0,0431)	0,0061	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	
(0,0647)	0,183	(0,0654)	0,0114	(0,0656)	0,137	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0,1
(0,0715)	0,306	(0,0671)	0,0073	(0,0760)	0,109	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	
(0,0975)	0,145	(0,1078)	0,0021	(0,1448)	0,142	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	
(0,0674)	0,197	(0,0616)	0,0073	(0,0608)	0,0077	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	
(0,0807)	0,252	(0,0787)	0,0055	(0,0768)	0,0046	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0,15
(0,0973)	0,295	(0,0969)	0,0078	(0,0951)	0,128	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	
(0,0956)	0,0061	(0,1084)	0,0157	(0,1082)	0,208	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	
(0,0720)	0,215	(0,0720)	0,0167	(0,0702)	0,171	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	
(0,0874)	0,344	(0,0883)	0,0084	(0,0819)	0,0077	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	0,2
(0,0938)	0,144	(0,0911)	0,0039	(0,1027)	0,0053	$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	
(0,0965)	0,394	(0,1296)	0,0177	(0,1668)	0,225	$\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$	

جدول ۴. مقایسه‌ی ماتریس ضرایب برآورد شده برای برآوردکننده‌های استوار و کلاسیک توسط دو معیار $trace(MSEM)$ و MAB در حضور $100\% \times q$ آلودگی در توزیع عبارات خطای حاصل از توزیع $N(\mu, \Sigma)$.

M2		M		LS		μ	q
tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB		
(۰٫۲۴۲۱)	۰٫۱۱۰۱	(۰٫۰۸۱۴)	۰٫۱۳۳۵	(۰٫۰۸۱۰)	۰٫۱۴۱۷	[۲ ۲]	
(۰٫۳۷۵۳)	۰٫۱۹۷۳	(۰٫۱۲۰۶)	۰٫۲۳۱۴	(۰٫۱۵۱۷)	۰٫۳۰۵۶	[۴ ۴]	۰٫۰۵
(۰٫۳۶۳۵)	۰٫۰۵۵۳	(۰٫۱۸۹۸)	۰٫۲۱۰۱	(۰٫۵۱۹۸)	۰٫۵۳۷۳	[۸ ۸]	
(۰٫۳۵۴۵)	۰٫۰۱۱۸	(۰٫۳۱۴۵)	۰٫۳۴۲۵	(۱٫۸۰۸۴)	۱٫۱۷۵۷	[۱۶ ۱۶]	
(۰٫۳۷۳۵)	۰٫۲۳۳۵	(۰٫۱۳۳۷)	۰٫۲۸	(۰٫۱۴۲۲)	۰٫۲۹۲۷	[۲ ۲]	
(۰٫۵۱۴۷)	۰٫۲۹۷۵	(۰٫۳۱۷۰)	۰٫۴۵۹۳	(۰٫۴۳۱۹)	۰٫۵۶۲۴	[۴ ۴]	۰٫۱
(۰٫۴۹۹۴)	۰٫۰۷۸۳	(۰٫۶۰۹۰)	۰٫۶۱۰۲	(۱٫۵۲۵۰)	۱٫۱۲۱۶	[۸ ۸]	
(۰٫۳۸۸۳)	۰٫۰۲۶۷	(۱٫۵۳۲۶)	۱٫۰۱۳۷	(۶٫۰۳۲۲)	۲٫۳۳۶۵	[۱۶ ۱۶]	
(۰٫۵۰۲۰)	۰٫۳۴۱۱	(۰٫۲۵۷۳)	۰٫۳۹۹۹	(۰٫۲۷۰۲)	۰٫۴۲۲۴	[۲ ۲]	
(۱٫۰۶۱۸)	۰٫۵۵۶۷	(۰٫۶۷۴۸)	۰٫۷۴۴۱	(۰٫۸۴۵۶)	۰٫۸۵۶۹	[۴ ۴]	۰٫۱۵
(۰٫۹۱۱۱)	۰٫۲۴۶۶	(۱٫۶۰۹۰)	۱٫۰۹۷۷	(۳٫۲۹۴۳)	۱٫۶۶۲۵	[۸ ۸]	
(۰٫۴۵۹۸)	۰٫۰۴	(۵٫۰۲۶۷)	۱٫۹۰۵۲	(۱۳٫۳۱۹۸)	۳٫۳۹۲۵	[۱۶ ۱۶]	
(۰٫۶۴۶۸)	۰٫۵۱۴۶	(۰٫۳۷۴۶)	۰٫۵۴۲۲	(۰٫۴۰۰۳)	۰٫۵۶۲۰	[۲ ۲]	
(۱٫۶۳۷۷)	۰٫۸۳۸۸	(۱٫۲۲۱۸)	۱٫۰۳۲۳	(۱٫۴۰۷۸)	۱٫۱۴	[۴ ۴]	۰٫۲
(۲٫۰۸۴۰)	۰٫۶۳۵۴	(۳٫۴۷۳۹)	۱٫۷۶۷۱	(۵٫۶۱۳۰)	۲٫۳۰۲۵	[۸ ۸]	
(۱٫۰۷۶۰)	۰٫۱۵۸۹	(۱۱٫۲۱۲۷)	۳٫۰۳۴۳	(۲۲٫۴۵۷۳)	۴٫۴۷۱۴	[۱۶ ۱۶]	

جدول ۵. مقایسه‌ی ماتریس ضرایب برآورد شده برای برآوردکننده‌های استوار و کلاسیک توسط دو معیار $trace(MSEM)$ و MAB در حضور $100\% \times q$ آلودگی در عرض از مبدا و شیب پروفایل اول.

M2		M		LS		λ	q
tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB		
(۰٫۲۲۰۳)	۰٫۰۱۶۲	(۰٫۰۴۲۸)	۰٫۰۰۶۸	(۰٫۰۴۱۴)	۰٫۰۰۷۷	۰	۰
(۰٫۳۵۰۷)	۰٫۰۶۵۹	(۰٫۱)	۰٫۱۰۴۶	(۰٫۱۷۷۰)	۰٫۱۲۹۰	۲	
(۰٫۳۷۱۹)	۰٫۰۵۱۲	(۰٫۱۸۱۹)	۰٫۰۹۲۵	(۰٫۶۴۵۶)	۰٫۲۹۸۷	۴	
(۰٫۳۰۶۲)	۰٫۰۵۳۱	(۰٫۳۵۰۹)	۰٫۱۱۸۲	(۱٫۳۲۵۶)	۰٫۴۶۲۳	۶	۰٫۰۵
(۰٫۳۲۳۷)	۰٫۰۵۰۸	(۰٫۵۱۴۱)	۰٫۱۲۹۶	(۲٫۲۲۶۰)	۰٫۵۷۹۲	۸	
(۰٫۳۲۹۰)	۰٫۰۲۶۴	(۰٫۷۷۰۲)	۰٫۱۵۱۹	(۳٫۷۲۲۳)	۰٫۷۳۹۶	۱۰	
(۰٫۴۴۸۵)	۰٫۱۰۴۶	(۰٫۲۳۷۴)	۰٫۲۴۶۹	(۰٫۳۵۳۹)	۰٫۲۷۷۰	۲	
(۰٫۴۲۷۳)	۰٫۰۱۴۷	(۰٫۵۱۷۵)	۰٫۲۸۳۱	(۱٫۲۲۹۴)	۰٫۵۹۵۴	۴	
(۰٫۳۷۵۱)	۰٫۰۰۶۹	(۰٫۹۲۹۱)	۰٫۳۴۵۴	(۲٫۸۱۲۳)	۰٫۷۹۸۸	۶	۰٫۱
(۰٫۴۰۲۵)	۰٫۰۲۱۵	(۱٫۶۶۵۸)	۰٫۴۹۷۴	(۴٫۹۶۰۲)	۱٫۱۷۰۳	۸	
(۰٫۴۱۱۰)	۰٫۰۳۴۳	(۲٫۶۸۷۰)	۰٫۵۴۴۱	(۶٫۹۱۳۴)	۱٫۳۹۷۶	۱۰	
(۰٫۶۴۸۶)	۰٫۱۸۱۷	(۰٫۴۰۹۵)	۰٫۳۸۶۳	(۰٫۵۳۱۶)	۰٫۴۱۴۲	۲	
(۰٫۴۷۷۶)	۰٫۰۲۴۴	(۱٫۰۹۴۱)	۰٫۵۲۷۴	(۱٫۹۵۵۷)	۰٫۸۶۸۹	۴	
(۰٫۴۷۲۳)	۰٫۰۵۹۰	(۲٫۲۳۱۵)	۰٫۸۵۶۸	(۴٫۳۴۵۵)	۱٫۳۶۴۹	۶	۰٫۱۵
(۰٫۴۶۰۴)	۰٫۰۱۵۳	(۴٫۲۲۱۹)	۰٫۹۷۲۰	(۸٫۳۲۴۵)	۱٫۶۸۵۸	۸	
(۰٫۴۲۲۴)	۰٫۰۲۲۷	(۶٫۰۰۳۱)	۱٫۲۳۹۴	(۱۲٫۷۰۴۵)	۲٫۱۵۹۳	۱۰	
(۱٫۲۹۳۹)	۰٫۳۹۶۱	(۰٫۶۵۶۴)	۰٫۵۵۶۰	(۰٫۷۸۵۲)	۰٫۵۷۷۱	۲	
(۱٫۲۴۸۱)	۰٫۱۰۲۳	(۱٫۹۳۲۶)	۰٫۸۳۰۰	(۲٫۷۹۰۱)	۱٫۰۸۷۰	۴	
(۰٫۸۸۸۳)	۰٫۰۸۷۶	(۴٫۰۶۱۳)	۱٫۲۱۰۶	(۶٫۵۲۰۹)	۱٫۶۴۷۲	۶	۰٫۲
(۰٫۷۱۴۲)	۰٫۰۴۵۵	(۶٫۷۸۵۴)	۱٫۶۷۵۷	(۱۱٫۴۵۲۴)	۲٫۳۸۷۸	۸	
(۰٫۹۰۵۵)	۰٫۰۲۱۹	(۱۰٫۰۷۴۵)	۱٫۹۵۴۶	(۱۶٫۹۹۰۹)	۲٫۷۴۴۱	۱۰	

جدول ۶. مقایسه ماتریس ضرایب برآورد شده برای برآوردکننده‌های استوار و کلاسیک توسط دو معیار $\text{trace}(\text{MSEM})$ و MAB در حضور $100\% \times q$ آلودگی در عرض از مبدا و دو پروفایل.

M2		M		LS		λ	q
tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB		
(۰٫۳۰۶۱)	۰٫۱۳۱۴	(۰٫۰۷۴۲)	۰٫۱۲۷۵	(۰٫۰۷۳۹)	۰٫۱۳۹۲	۲	۰٫۵
(۰٫۳۶۹۸)	۰٫۱۲۶۱	(۰٫۱۲۲۲)	۰٫۲۱۹۴	(۰٫۱۶۱۱)	۰٫۲۹۲۰	۴	
(۰٫۳۹۵۱)	۰٫۱۰۸۹	(۰٫۱۶۲۱)	۰٫۲۳۰۳	(۰٫۳۱۱۶)	۰٫۴۱۷۵	۶	
(۰٫۳۸۱۴)	۰٫۰۰۶۱	(۰٫۱۶۸۱)	۰٫۲۱۰۱	(۰٫۴۹۲۸)	۰٫۵۳۷۳	۸	
(۰٫۳۳۹۲)	۰٫۰۰۶۴	(۰٫۲۰۹۱)	۰٫۲۴۷۸	(۰٫۸۲۹۳)	۰٫۷۳۵۷	۱۰	
(۰٫۳۶۸۶)	۰٫۲۲	(۰٫۱۳۳۷)	۰٫۲۵۱۷	(۰٫۱۴۲۲)	۰٫۲۷۲۰	۲	۰٫۱
(۰٫۵۸۷۱)	۰٫۲۹۶۳	(۰٫۳۰۹۲)	۰٫۴۷۱۴	(۰٫۴۲۷۱)	۰٫۵۷۳۵	۴	
(۰٫۵۶۶۸)	۰٫۲۲۶۶	(۰٫۴۷۴۵)	۰٫۵۶۹۱	(۰٫۹۰۹۳)	۰٫۸۵۲۰	۶	
(۰٫۵۱۱۰)	۰٫۰۱۰۱	(۰٫۶۰۹۰)	۰٫۶۱۳۸	(۱٫۵۲۵۰)	۱٫۱۰۱۶	۸	
(۰٫۳۷۸۲)	۰٫۰۲۶۷	(۰٫۷۹۲۹)	۰٫۷۰۵۴	(۲٫۴۷۰۶)	۱٫۴۱۴۱	۱۰	
(۰٫۴۸۶۲)	۰٫۳۹۲۰	(۰٫۲۴۱۷)	۰٫۴۱۳۷	(۰٫۲۵۷۱)	۰٫۴۳۵۵	۲	۰٫۱۵
(۰٫۸۷۵۸)	۰٫۵۵۶۱	(۰٫۶۷۸۹)	۰٫۷۲۱۹	(۰٫۸۷۱۱)	۰٫۸۳۷۱	۴	
(۱٫۲۳۵۶)	۰٫۴۰۵۱	(۱٫۱۳۶۸)	۰٫۹۲۸۳	(۱٫۸۴۰۸)	۱٫۲۳۰۹	۶	
(۰٫۹۰۵۱)	۰٫۰۸۴۷	(۱٫۶۰۹۰)	۱٫۱۰۶۱	(۳٫۲۹۴۳)	۱٫۶۶۶۵	۸	
(۰٫۵۴۰۱)	۰٫۰۵	(۲٫۱۹۵۰)	۱٫۲۷۷۲	(۵٫۲۴۵۹)	۲٫۱۰۴۵	۱۰	
(۰٫۶۷۱۳)	۰٫۴۳۲۳	(۰٫۳۷۱۷)	۰٫۵۳۲۸	(۰٫۳۹۱۲)	۰٫۵۵۴۸	۲	۰٫۲
(۱٫۵۷۶۳)	۰٫۸۱۸۰	(۱٫۲۱۰۲)	۱٫۰۰۳۶	(۱٫۴۴۹۳)	۱٫۱۱۹۹	۴	
(۲٫۴۶۷۴)	۰٫۹۴۲۹	(۲٫۳۲۴۶)	۱٫۴۳۴۱	(۳٫۱۲۶۶)	۱٫۷۳۵۸	۶	
(۲٫۱۰۱۴)	۰٫۵۸۳۹	(۳٫۴۷۳۹)	۱٫۶۶۴۵	(۵٫۶۱۳۰)	۲٫۲۱۰۲	۸	
(۱٫۷۰۹۲)	۰٫۳۹۱۴	(۴٫۸۱۱۵)	۲٫۰۰۰۱	(۸٫۸۲۳۱)	۲٫۸۶۷۵	۱۰	

جدول ۷. مقایسه ماتریس ضرایب برآورد شده برای برآوردکننده‌های استوار و کلاسیک توسط دو معیار $\text{trace}(\text{MSEM})$ و MAB در حضور $100\% \times q$ آلودگی در شیب دو پروفایل.

M2		M		LS		λ	q
tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB	tr(MSEM)	MAB		
(۰٫۳۷۴۴)	۰٫۰۸۵۲	(۰٫۱۳۰۹)	۰٫۱۱۳۳	(۰٫۲۵۹۴)	۰٫۱۴۷۸	۲	۰٫۵
(۰٫۳۲۵۲)	۰٫۰۲۸۲	(۰٫۲۴۸۴)	۰٫۰۹۲۴	(۰٫۸۰۳۹)	۰٫۲۸۳۰	۴	
(۰٫۳۲۶۵)	۰٫۰۰۶۷	(۰٫۴۳۳۶)	۰٫۰۹۸۶	(۱٫۵۳۰۵)	۰٫۴۱۶۱	۶	
(۰٫۳۲۲۱)	۰٫۰۱۳۱	(۰٫۷۸۵۶)	۰٫۱۲۴۷	(۳٫۴۰۲۹)	۰٫۵۹۳۱	۸	
(۰٫۳۳۰۵)	۰٫۰۱۰۲	(۱٫۲۵۳۷)	۰٫۱۶۱۳	(۴٫۶۸۴۵)	۰٫۷۰۶۳	۱۰	
(۰٫۵۴۷۰)	۰٫۲۲۴۴	(۰٫۲۷۷۹)	۰٫۲۲۵۹	(۰٫۴۶۲۴)	۰٫۲۹۲۶	۲	۰٫۱
(۰٫۵۰۹۲)	۰٫۰۴۷۱	(۰٫۶۲۶۷)	۰٫۲۶۴۸	(۱٫۴۸۷۰)	۰٫۵۵۸۷	۴	
(۰٫۵۰۷۴)	۰٫۰۱۶۴	(۱٫۲۷۹۳)	۰٫۳۱۷۵	(۳٫۳۶۴۵)	۰٫۸۵۴۸	۶	
(۰٫۳۹۳۳)	۰٫۰۶۵۵	(۲٫۰۸۰۲)	۰٫۳۸۸۷	(۶٫۰۴۰۷)	۱٫۱۵۲۷	۸	
(۰٫۴۰۶۱)	۰٫۰۱۹۷	(۳٫۳۲۱۷)	۰٫۴۸۵۴	(۹٫۹۲۱۴)	۱٫۴۰۹۶	۱۰	
(۰٫۹۲۵۲)	۰٫۳۹۹۲	(۰٫۴۸۶۳)	۰٫۳۳۵۷	(۰٫۷۱۹۸)	۰٫۴۳۹۱	۲	۰٫۱۵
(۰٫۷۱۴۵)	۰٫۱۵۶۶	(۱٫۲۶۹۸)	۰٫۴۶۳۳	(۲٫۶۳۳۹)	۰٫۸۷۰۷	۴	
(۰٫۵۲۰۷)	۰٫۰۸۰۸	(۲٫۸۱۵۷)	۰٫۶۴۸۷	(۵٫۹۸۷۴)	۰٫۲۶۴۹	۶	
(۰٫۵۵۲۵)	۰٫۰۳۰۷	(۴٫۳۰۹۸)	۰٫۸۴۴۴	(۹٫۷۵۹۴)	۱٫۷۳۷۵	۸	
(۰٫۵۶۵۵)	۰٫۰۳۷۷	(۶٫۶۸۹۴)	۱٫۰۰۵۱	(۱۷٫۵۴۵۰)	۲٫۱۲۸۴	۱۰	
(۱٫۳۴۹۶)	۰٫۶۲۴۳	(۰٫۶۵۵۳)	۰٫۵۱۱۱	(۰٫۹۲۶۵)	۰٫۵۵۸۴	۲	۰٫۲
(۱٫۱۴۲۳)	۰٫۳۷۵۸	(۲٫۰۴۶۵)	۰٫۷۲۱۳	(۳٫۶۶۷۳)	۱٫۱۴۳۳	۴	
(۱٫۰۵۷۱)	۰٫۲۴۰۳	(۴٫۳۳۱۹)	۱٫۰۱۲۶	(۸٫۰۳۵۴)	۱٫۷۱۱۹	۶	
(۱٫۱۸۸۵)	۰٫۱۹۳۶	(۷٫۲۶۷۵)	۱٫۲۹۷۸	(۱۳٫۳۲۵۰)	۲٫۲۵۷۹	۸	
(۰٫۸۸۷۱)	۰٫۱۱۷۲	(۱۲٫۳۹۵۴)	۱٫۶۲۹۹	(۲۲٫۸۶۶۴)	۲٫۷۷۸۱	۱۰	

نیز از دو معیار میانگین مطلق اریبی (MAB) و اثر ماتریس میانگین مربعات خطا یا $trace(MSEM)$ استفاده شده است.

نتایج شبیه‌سازی نشان داد که برای آلودگی‌های کوچک عملکرد برآوردکننده‌ها تقریباً یکسان است؛ اما برای آلودگی‌های متوسط و بزرگ برآوردکننده‌های استوار از عملکرد بسیار بهتری نسبت به برآوردکننده کلاسیک برخوردارند. همچنین قابل ذکر است که برآورد M دمرحله‌ی نسبت به برآورد M تک‌مرحله‌ی برای آلودگی‌های متوسط و بزرگ از عملکرد مطلوب‌تری برخوردار است؛ در حالی که برای آلودگی‌های کوچک برآورد M تک‌مرحله‌ی نتایج قابل قبول‌تری حاصل می‌سازد. در حالت کلی، حساسیت برآوردکننده‌های پیشنهادی به خصوص برآورد M دمرحله‌ی نسبت به تغییرات در توزیع عبارات خطا و پارامترهای مدل در مقایسه با برآوردکننده‌ی کلاسیک بسیار کم‌تر است. از این رو برآوردکننده‌های پیشنهادی به خصوص برآوردکننده‌ی M دمرحله‌ی به منظور برآورد ضرایب پروفایل‌ها در فاز ۱ با هدف دستیابی به مدل تحت کنترل برای انجام عملیات پایش در فاز ۲ پیشنهاد می‌شود. در ادامه تحقیق حاضر، بررسی عملکرد برآوردکننده‌های پیشنهادی در حضور مشاهدات خودهمبسته مورد نظر نویسندگان مقاله است.

چنان که از جدول ۷ مشاهده می‌شود، روش MY و M نسبت به روش LS - به‌ازای افزایش در p و λ - از حساسیت کم‌تری برخوردارند. همچنین مانند قبل، روش استوار دمرحله‌ی از عملکرد بهتری نسبت به روش استوار تک‌مرحله‌ی برخوردار است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، دو روش استوار شامل «برآورد M تک‌مرحله‌ی» و «برآورد M دمرحله‌ی» برای برآورد پارامترهای پروفایل خطی ساده چندمتغیره ارائه شده است. برای این منظور در هر دو برآوردکننده‌ی پیشنهادی از تابع بای‌اسکوئر استفاده شده است. برآوردکننده‌های پیشنهادی با برآوردکننده‌ی حداقل مربعات به‌عنوان یک برآوردکننده‌ی کلاسیک مورد مقایسه قرار گرفت. مطالعات شبیه‌سازی به منظور ارزیابی استواری و کارایی برآوردکننده‌ها انجام شد و به منظور اندازه‌گیری استواری از دو معیار نقطه‌ی شکست (BP) و تابع تأثیر (IF) استفاده شده است که نتایج حاصله نشان دهنده برتری روش‌های استوار نسبت به روش کلاسیک است. به منظور اندازه‌گیری کارایی

پانویس‌ها

1. profile
2. Huber
3. Bisquare
4. maximum-likelihood estimation (MLE)
5. iteratively reweighted least squares (IRLS)
6. breakdownpoint (BP)
7. influence function (IF)
8. mean bias matrix (MBM)
9. mean square error matrix (MSEM)
10. sensitivity curve
11. mean absolute bias (MAB)

منابع (References)

1. Kang, L. and Albin, S.L. "On-line monitoring when the process yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, **32**(4), pp. 418-426 (2000).
2. Kim, K., Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "On the monitoring of linear profiles", *Journal of Quality Technology*, **35**(3), pp. 317-328 (2003).
3. Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications", *Technometrics*, **46**(4), pp. 377-391 (2004).
4. Noorossana, R., Amiri, A. and Soleimani, P. "Monitoring process performance using linear profiles", *Proceedings of the 3rd International Industrial Engineering Conference*, Tehran, Iran (2004).
5. Gupta, S., Montgomery, D.C. and Woodall, W.H. "Performance evaluation of two methods for online monitoring of linear calibration profiles", *International Journal of Production Research*, **44**(10), pp. 1927-1942 (2006).
6. Mahmoud, M.A., Parker, P.A., Woodall, W.H. and Hawkins, D.M. "A change point method for linear profile data", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**(2), pp. 247-268 (2007).
7. Mahmoud, M.A. "Phase I analysis of multiple linear regression profiles", *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, **37**(10), pp. 2106-2130 (2008).
8. Amiri, A., Eyvazian, M., Zou, Ch. and Noorossana, R. "A parameters reduction method for monitoring multiple linear regression profiles", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **58**(5-8), pp. 621-629 (2012).
9. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Phase I monitoring of polynomial profiles", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **37**(10), pp. 1671-1686 (2008).
10. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Phase II monitoring of autocorrelated polynomial pro-

- files in AR(1) processes”, *Scientia Iranica*, **17**(1), pp. 12-24 (2010).
11. Ding, Y., Zeng, L. and Zhou, S. “Phase I analysis for monitoring nonlinear profiles in manufacturing processes”, *Journal of Quality Technology*, **38**(3), pp. 199-216 (2006).
 12. Williams, J.D., Woodall, W.H. and Birch, J.B. “Statistical monitoring of nonlinear product and process quality profiles”, *Quality and Reliability Engineering International*, **23**(8), pp. 925-941 (2007).
 13. Vaghefi, A., Tajbakhsh, S.D. and Noorossana, R. “Phase II monitoring of nonlinear profiles”, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **38**(11), pp. 1834-1851 (2009).
 14. Saghaei, A., Noorossana, R., Eyvazian, M. and Vaghefi, A. “Statistical monitoring of multivariate linear profiles”, *Proceedings of the 2008 IEEE IEEM*, pp. 2037-2040 (2008).
 15. Noorossana, R., Eyvazian, M. and Vaghefi, A. “Phase II monitoring of multivariate simple linear profiles”, *Computers & Industrial Engineering*, **58**(4), pp. 563-570 (2010).
 16. Noorossana, R., Eyvazian, M., Amiri, A. and Mahmoud, M. “Statistical monitoring of multivariate multiple linear regression profiles in phase I with calibration application”, *Quality and Reliability Engineering International*, **26**(3), pp. 291-303 (2010).
 17. Montgomery, D.C., Peck, E.A. and Vining, G.G., *Introduction to Linear Regression Analysis*, John Wiley and Sons, New York (2012).
 18. Maronna, R.A., Martin, R.D. and Yohai, V.J., *Robust Statistics: Theory and Methods*, John Wiley and Sons, New York (2006).
 19. Asadzadeh, S., Aghaie, A. and Shahriari, H. “Monitoring dependent process steps using robust cause-selecting control charts”, *Quality and Reliability Engineering International*, **25**(7), pp. 851-874 (2009).
 20. Asadzadeh, S., Zerehsaz, Y., Saghaei, A. and Aghaie, A. “Compound-estimator based cause-selecting control chart for monitoring multistage processes”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **40**(3), pp. 322-344 (2013).
 21. Jearkpaporn, D., Montgomery, D.C., Runger, G.C. and Borror, C.M. “Model-based process monitoring using robust generalized linear models”, *International Journal of Production Research*, **43**(7), pp. 1337-1354 (2005).
 22. Ebadi, M. and Shahriari, H. “Robust estimation of parameters in simple linear profiles using M-estimators”, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **43**(10), pp. 4308-4323 (2013).
 23. Shahriari, H., Ahmadi, O. and Shokouhi, A.H. “A two-step robust estimation of the process mean using M-estimator”, *Journal of Applied Statistics*, **38**(6), pp. 1289-1301 (2011).
 24. Shahriari, H., Ahmadi, O. and Shokouhi, A.H. “A two-phase robust estimation of process dispersion using M-estimator”, *Journal of Industrial and Systems Engineering*, **4**(1), pp. 47-58 (2010).
 25. Noorossana, R., Saghaei, A. and Amiri, A., *Statistical Analysis of Profile Monitoring*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey (2011).
 26. Huber, P.J., *Robust Statistics*, John Wiley, New York (1981).
 27. Kudraszow, N.L. and Maronna, R.A. “Estimates of MM type for the multivariate linear model”, *Journal of Multivariate Analysis*, **102**(9), pp. 1280-1292 (2011).
 28. Maronna, R.A. “Robust M-estimators of multivariate location and scatter”, *Ann. Statist.*, **4**(1), pp. 51-67 (1976).
 29. Jain, K., Singh, S. and Sharma, S. “Restricted estimation in multivariate measurement error regression model”, *Journal of Multivariate Analysis*, **102**(2), pp. 264-280 (2011).

پیوست

الف) الگوریتم برآوردکننده‌ی M تک مرحله‌یی

در این بخش الگوریتم مورد استفاده برای برآورد ضرایب پروفایل خطی ساده چندمتغیره با استفاده از برآوردکننده‌ی M تشریح می‌شود. لازم به ذکر است که این الگوریتم شکل تصحیح شده‌ی الگوریتم ارائه شده توسط کودراسوو و مارونا^[۲۷] به منظور استفاده برای برآوردکننده‌ی M است.

۱. با استفاده از روش زیر نمونه‌گیری تعریف شده توسط مارونا و همکاران^[۱۸] یک برآورد اولیه برای ماتریس ضرایب و ماتریس کوواریانس حاصل می‌شود که به ترتیب با $\hat{\beta}^{(0)}$ و $\hat{\Sigma}^{(0)}$ نمایش داده می‌شوند.

۲. وزن‌های $w_i = W(d_i(\hat{\beta}^{(0)}, \hat{\Sigma}^{(0)})/\hat{\sigma}(d_i))$ برای $1 \leq i \leq n$ محاسبه می‌شود که در آن $\hat{\sigma}(d_i)$ با استفاده از آماره‌ی MAD به دست می‌آید. سپس از این وزن‌ها به منظور محاسبه‌ی $\hat{\beta}^{(1)}$ به وسیله‌ی روش حداقل مربعات موزون استفاده می‌شود.

۳. ماتریس $\hat{C}^{(1)} = \sum_{i=1}^n w_i \hat{u}_i(\hat{\beta}^{(1)}) \hat{u}_i^T(\hat{\beta}^{(1)})$ را محاسبه و با استفاده از آن $\hat{\Sigma}^{(1)} = \hat{C}^{(1)}/|\hat{C}^{(1)}|^{1/p}$ محاسبه کنید.

۴. با این فرض که یک برآورد قبلی از $\hat{\beta}^{(k-1)}$ و $\hat{\Sigma}^{(k-1)}$ در دسترس باشد، $\hat{\beta}^{(k)}$ و $\hat{\Sigma}^{(k)}$ را مطابق گام‌های ۲ و ۳ و با جایگذاری $\hat{\beta}^{(k-1)}$ و $\hat{\Sigma}^{(k-1)}$ به جای $\hat{\beta}^{(0)}$ و $\hat{\Sigma}^{(0)}$ به دست آورید.

۵. اگر قدرمطلق تفاوت‌های نسبی برای تمام اجزای ماتریس‌های $\hat{\beta}^{(k)}$ و $\hat{\beta}^{(k-1)}$ و قدرمطلق تفاوت‌های نسبی برای تمامی نرم‌های ماهالانوبیس باقی‌مانده‌های $\hat{u}_i(\hat{\beta}^{(k)})$ و $\hat{u}_i(\hat{\beta}^{(k-1)})$ کوچک‌تر از مقدار مفروض δ باشد، فرایند در تکرار k ام متوقف می‌شود.

ب) الگوریتم برآوردکننده‌ی M دومرحله‌یی

در مرحله‌ی اول با استفاده از الگوریتم بخش قبل یک ماتریس ضرایب نهایی را با استفاده از برآوردکننده‌ی M برای هر پروفایل به دست می‌آوریم. حال با فرض در

۲. سپس ماتریس ضرایب m پروفایل را به صورت:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{\circ 11} & \beta_{\circ 21} & \dots & \beta_{\circ p1} & \beta_{111} & \beta_{121} & \dots & \beta_{1p1} \\ \beta_{\circ 12} & \beta_{\circ 22} & \dots & \beta_{\circ p2} & \beta_{112} & \beta_{122} & \dots & \beta_{1p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{\circ 1m} & \beta_{\circ 2m} & \dots & \beta_{\circ pm} & \beta_{11m} & \beta_{12m} & \dots & \beta_{1pm} \end{bmatrix}$$

بازنویسی کنید. هریک از ستون‌های ماتریس \mathbf{B} را یک متغیر در نظر گرفته و با استفاده از روش ارائه شده توسط مارونا و همکاران^[۱۸] برای تعیین برآوردکننده‌ی M در حالت چندمتغیره، ماتریس ضرایب نهایی حاصل از m پروفایل را به دست آورید.

۱. برای هر m پروفایل با استفاده از برآوردکننده‌ی M یک ماتریس ضرایب به صورت:

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{\circ 1i} & \beta_{\circ 2i} & \dots & \beta_{\circ pi} \\ \beta_{11i} & \beta_{12i} & \dots & \beta_{1pi} \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

حاصل می‌شود.

