مهندسی صنایع و مدیریت شریف (زمستان ۱۳۹۵)
دوره‌ی ۱-۳۲، شماره‌ی ۲/۲، ص. ۸۹-۹۸

Original Article

برآورد فاصله‌یی شاخص‌های C_{pm} و C_{pmk} فرایندهای خودبرگشت به‌کمک روش بوت‌استرپ بلوکی حلقوی

صدیق رئیسی* (دانشیار)

سمراد جعفریان نمین (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

امیرحسین امیری (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

شاخص‌های قابلیت فرایند، به‌عنوان معیارهای کمی عملکرد فرایند در راستای نیل به بهبود کیفیت، در صنعت کاربرد گسترده‌یی دارند. استقلال مشاهدات از متداول‌ترین مفروضات اغلب شاخص‌های قابلیت فرایند است اما در عمل، الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه‌یی قابل کشف است که منجر به نقض فرض استقلال مشاهدات می‌شود. عدم تشخیص صحیح یک فرایند خودهمبسته ممکن است باعث اشتباه در تصمیم‌گیری و به بار آمدن خسارت‌های کیفی شود. به‌دلیل توزیع نامعلوم شاخص‌های مذکور در حضور خودهمبستگی میان داده‌ها، در این نوشتار الگوریتمی برای برآوردهای فاصله‌یی C_{pm} و C_{pmk} در فرایندهای AR(۱) با بهره‌گیری از روش ناپارامتری بوت‌استرپ بلوکی حلقوی ارائه شده است. به‌علاوه ارزیابی این راهکار و مقایسه‌ی آن با سایر روش‌های موجود در ادبیات، به‌کمک مطالعات شبیه‌سازی مختلف نشان می‌دهد که عملکرد الگوریتم پیشنهادی با فواصلی به روش بوت‌استرپ استاندارد، نسبت به فواصل صدکی، بهتر است. همچنین روش والگرن برای برآورد فاصله‌یی شاخص C_{pm} و روش بوت‌استرپ بلوکی حلقوی برای شاخص C_{pmk} در حضور داده‌های خودهمبسته‌ی AR(۱) برتری دارد. البته، در شرایط عدم اطلاع از سطح خودهمبستگی، همواره روش بوت‌استرپ بلوکی حلقوی برتری دارد.

واژگان کلیدی: شاخص‌های‌قابلیت فرایند، فرایند خودهمبسته AR(۱)، فاصله‌ی اطمینان بوت‌استرپ، بوت‌استرپ بلوکی حلقوی.

raissi@azad.ac.ir
st_s_jafarian@azad.ac.ir
amiri@shahed.ac.ir

۱. مقدمه

تحلیل قابلیت فرایند رویکردی بسیار مؤثر برای پایش و ارزیابی عملکرد فرایند در کنترل فرایند آماری است. امروزه ثبات کیفیت محصولات به‌ویژه در کمیت‌های بالا برای صنایع تولیدی از جایگاه بالایی برخوردار است. از این رو تمایل به مقایسه‌ی مستمر کیفیت محصولات با انتظارات مشتریان برای اطمینان از دست‌یابی به سطح مطلوبی از انتظارات و استانداردهای کیفی در هر مرحله از تولید به چالشی اساسی برای مهندسین کیفیت تبدیل شده است. برای هر فرایند تولیدی که در حالت کنترل آماری است شاخص‌های قابلیت فرایند به‌منظور اندازه‌گیری توانایی آن فرایند در تولید محصولات درون تولرانس‌های تعیین‌شده توسط مهندسین یا مشتریان کاربرد گسترده‌یی دارد. در همین راستا، برخی از پرکاربردترین شاخص‌های نسل جدید توسعه‌یافته عبارت‌اند از:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{۶\sqrt{\sigma^{۲} + (\mu - T)^{۲}}}, \qquad (۱)$$

$$C_{pmk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{۳\sqrt{\sigma^{۲} + (\mu - T)^{۲}}}\ ,\ \frac{\mu - LSL}{۳\sqrt{\sigma^{۲} + (\mu - T)^{۲}}}\right), \qquad (۲)$$

که در آنها USL و LSL به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی حدود بالا و پایین تولرانس فنی، σ بیانگر انحراف استاندارد فرایند، μ میانگین مشخصه‌ی کیفی تولیدات و T مقدار هدف است.[۱و۲] اخیراً، طراحی شاخص‌های قابلیت فرایند جدید و نیز اصلاح آنها مورد توجه محققین قرارگرفته است.[۳-۵] با این حال، در بیشتر موارد فقط بر ارائه‌ی تخمین نقطه‌یی از این شاخص‌ها متمرکز شده‌اند که می‌تواند ارزیابی نادرستی از عملکرد فرایند در پی داشته باشد.

ژانگ و همکاران[۶] با بررسی رفتار توزیع آماری برآوردکننده‌های نمونه و تخمین

---

* *نویسنده مسئول*

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۹/۱، اصلاحیه ۱۳۹۴/۲/۱۹، پذیرش ۱۳۹۴/۴/۷.

فاصله‌یی C_{pk} تحت فرض توزیع نرمال و استقلال مشاهدات نشان دادند که تغییرپذیری نمونه برای برآورد این شاخص‌ها را نمی‌توان نادیده گرفت و باید برآورد فاصله‌یی لحاظ شود. در همین راستا، مطالعات مختلفی برای ساختن حدود اطمینان از انواع شاخص‌های قابلیت فرایند و با فرض داده‌های مستقل انجام شده است.[۷-۱۱]

با پیشرفت فن‌آوری‌های نوین به‌ویژه در بهره‌گیری از حس‌گرها و همچنین تمایل روزافزون به برخط‌سازی روش‌های پایش فرایند باعث افزایش شدید حجم نمونه‌های در اختیار در بازه‌های زمانی کوتاه شده و شناسائی الگوهای مخفی را که در نمونه‌های کوچک میسر نبود ممکن ساخته است. صنایع شیمیایی، دارویی و الکترونیک ازجمله مواردی هستند که در آنها مشخصه‌های کیفی چنین فرایندهایی اغلب سطوحی از خودهمبستگی را بروز می‌دهند. با استخراج الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه‌یی، فرض استقلال نقض می‌شود و به‌نظر می‌رسد نمودارهای کنترل استاندارد اثربخشی لازم را ندارند.[۱۲،۱۳] این امر ضرورت توسعه‌ی روش‌های جدید در پایش و کنترل را بیش از پیش آشکار می‌کند.

در خصوص استخراج الگوهای همبستگی میان داده‌ها، باکس و جنکینز استراتژی سه‌مرحله‌یی را برای یافتن مدل مناسب و منطبق بر سری زمانی گسسته پیشنهاد کردند.[۱۴] یکی از مدل‌های سری زمانی خطی و تک‌متغیره که در الگوسازی وضعیت‌های دنیای واقعی اهمیت زیادی دارد فرایند خودبرگشتی مرتبه اول AR(۱) براساس رابطه‌ی ۳ است:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + a_t, \qquad (۳)$$

که در آن ϕ_1 ضریب خودهمبستگی است و فرض می‌شود که a_t مستقل از X_{t-1} است. واریانس مشاهدات نیز عبارت است از:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}. \qquad (۴)$$

در این مطالعه لازم است با توجه به نمونه‌ی در دسترس برای شاخص‌های قابلیت فرایند، برآورد نقطه‌یی محاسبه شود. با محاسبه‌ی میانگین و انحراف معیار نمونه مطابق رابطه‌های ۵ و ۶:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (۵)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \qquad (۶)$$

و سپس با جایگذاری $\bar{x} = \mu$ و $S = \sigma$ در روابط ۱ و ۲ مقادیر تخمین نقطه‌یی از این شاخص‌ها به دست می‌آید (در حضور خودهمبستگی از نوع AR(۱)، برای محاسبه‌ی مقدار واقعی C_{pm} و C_{pmk} باید واریانس مشاهدات طبق رابطه‌ی ۴ محاسبه شود).

با توجه به اهمیت انجام مطالعات در شرایط نقض فرض استقلال، شور[۱۵] اثرات مختلف نادیده گرفتن خودهمبستگی در برآورد میانگین و انحراف استاندارد فرایند را مورد بررسی قرار داد. اما نخستین روابط برای برآورد فاصله‌یی شاخص‌های قابلیت فرایند، با فرض حصول داده‌هایی از فرایندهای ایستای گوسی توسعه داده شد.[۱۶] برآوردکننده‌های نقطه‌یی و فاصله‌یی شاخص‌های C_{pk} و C_{pm} برای مشاهدات حاصل از فرایندهای AR(۱)، MA(۱) و ARMA(p,q) در ۵ گزارش مختلف پیشنهاد شد؛[۱۷] در اولین گزارش با وارد کردن خودهمبستگی، روابط بویلز[۱۱] برای شاخص C_{pm} از حالت مشاهدات مستقل به حالت حضور مشاهداتی از فرایند AR(۱) توسعه یافت. سپس با مطالعه‌ی شبیه‌سازی نشان داده شد که وابستگی بین مشاهدات به‌شدت بر میزان پوشش تأثیر دارد. با انجام مطالعه‌ی مشابه،[۱۶] تأثیر داده‌های خودهمبسته‌ی نوع AR(۱)، این‌بار برای شاخص‌های C_{pm} و C_{pmk} توسعه داده شد[۱۸] و با ارائه‌ی رویکردی استنباطی از فواصل اطمینان تقریبی، احتمال پوشش محاسبه شد. لاولیس و همکاران[۱۹] حدود پایین اطمینان شاخص‌های C_p و C_{pk} را برای فرایند خودهمبسته‌ی AR(۱) براساس شبیه‌سازی توزیع نمونه‌گیری تجربی توسعه دادند، و جداول کاربردی برای تنظیم کم‌ترین مقادیر مورد نیاز برآوردکننده‌های شاخص براساس سطح اطمینان مشخص را تشکیل دادند. برای مطالعه‌ی بیشتر درمورد تحقیقات مرتبط با شاخص‌های قابلیت فرایند برخی منابع[۲۰] در دسترس است.

متأسفانه، در تمامی مطالعات صورت‌گرفته توزیع احتمالی شاخص‌های قابلیت فرایند به‌عنوان اساس محاسبه‌ی فاصله‌ی اطمینان، ناشناخته مانده است. بوت‌استرپ روشی مبتنی بر استفاده از رایانه در استنباط آماری است که بدون نیاز به فرض‌های غیرواقعی و روابط خاص غیرقابل اثبات می‌تواند با استفاده از داده‌های واقعی و الگوریتم‌های رایانه‌یی فهم مستقیمی از واریانس و فاصله‌ی اطمینان در اختیار کاربر قرار دهد. قابلیت استفاده از بوت‌استرپ هم به‌صورت پارامتری (با توزیع نمونه مشخص) و هم به‌صورت ناپارامتری (با توزیع نمونه نامشخص) از نقاط قوت این روش به‌شمار می‌رود. دو مزیت اصلی روش بوت‌استرپ بر روش‌های سنتی آماری عبارت است از:

۱. سادگی و امکان استنباط بدون مفروضات قوی برای توزیع؛
۲. استوار بودن نسبت به روش‌های کلاسیک آماری.

تاکنون این تکنیک برای گستره‌یی وسیعی، ازجمله در مسائل ایجاد فواصل اطمینان، توسعه یافته و در همین زمینه روش‌های مختلفی ارائه شده است.[۲۱،۲۲] فرانکلین و واسرمن[۲۳] اولین مطالعه در زمینه‌ی بررسی خواص فاصله‌ی اطمینان روش‌های بوت‌استرپ برای C_{pk} را در حالت مشاهدات مستقل انجام دادند. مطالعات مشابهی نیز انجام شده[۲۴-۲۶] و مراجعه به آنها امکان‌پذیر است.

مطالعه‌ی حاضر معطوف به ایجاد برآوردهای فاصله‌یی از شاخص‌های C_{pm} و C_{pmk}، با توزیع نامعلوم، در حضور خودهمبستگی میان داده‌هاست. در این راستا با استفاده از روش‌های ناپارامتری بوت‌استرپ به‌عنوان راه حلی نوین می‌توان به هدف مذکور دست یافت. اخیراً به‌منظور برآوردهای فاصله‌یی برای شاخص‌های C_p، C_{pk} و C_{pm}، داده‌های حاصل از فرایند خودهمبسته‌ی AR(۱) با روش بوت‌استرپ معمولی ارائه شده است.[۲۷] نتایج حاصله نشان داد که بوت‌استرپ استاندارد عملکرد بهتری دارد. بوت‌استرپ معمولی، با وجود کاربرد گسترده، ممکن است در مواجهه با داده‌های خودهمبسته عملکرد مناسبی نداشته باشد. در نوشتار حاضر با انجام مطالعات شبیه‌سازی مشابه،[۲۷] استفاده از روش بوت‌استرپ بلوکی به‌عنوان راهکار پیشنهادی جدید توسعه داده شده است.

در نوشتار حاضر، در بخش دوم روش بوت‌استرپ بلوکی توضیح داده شده است. چگونگی برآورد فواصل اطمینان به‌روش بوت‌استرپ بلوکی برای شاخص‌های قابلیت فرایند در بخش سوم ارائه شده است. با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی، برآورد توزیع نمونه‌گیری شاخص‌های قابلیت فرایند در بخش چهارم، و عملکرد فواصل اطمینان پیشنهادی در بخش پنجم مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ششم نیز نتایج حاصل از روش‌های مختلف مقایسه‌شده است. بخش انتهایی به نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای مطالعات آتی اختصاص یافته است.

۲. روش بوت‌استرپ بلوکی

در به کارگیری روش بوت‌استرپ برای مشاهدات ایستا، ضروری است ترتیب زمانی مشاهدات تا حدی حفظ شود. این راهکار اساس روش‌های بوت‌استرپ بلوکی را تشکیل می‌دهد. فرایند بلوک‌بندی با تقسیم مجموعه داده‌های اولیه به بلوک‌هایی با طول(های) مشخص شروع، و با نمونه‌گیری بلوکی به‌جای نمونه‌گیری مشاهدات انفرادی ادامه می‌یابد. ایده‌ی اصلی بلوک‌بندی نیز بر این فرض استوار است که بلوک‌ها مستقل و هم‌توزیع‌اند.

لاهیری[۲۸] رفتار مجانبی روش‌های بوت‌استرپ بلوکی متداول را برمبنای طول بلوک تصادفی و غیر تصادفی مورد مقایسه قرار داد و در نهایت چنین نتیجه گرفت که استفاده از بلوک‌های هم‌پوش بر بلوک‌های ناهم‌پوش برتری دارد و طول بلوک غیرتصادفی معمولاً میانگین مربعات خطای کم‌تری نسبت به بلوک تصادفی دارد. بنابراین، از بین روش‌های مورد بررسی، روش‌های بوت‌استرپ بلوکی متحرک (MBB)[۱] و بوت‌استرپ بلوکی حلقوی (CBB)[۲] از لحاظ میانگین مربعات خطا تقریباً معادل‌اند.

بلوک‌هایی به‌طول l ($l = 1, ..., n$) درنظر می‌گیریم. با ایجاد تعداد $(n-l+1)$ بلوک هم‌پوش طبق روش MBB، برای بلوک iام با فرض $1 \leq i \leq n-l+1$ داریم:

$$B_i = (x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+l-1}) \,. \tag{7}$$

از داده‌های مورد مطالعه برای تشکیل k بلوک با طول l به‌صورت $B = (B_1, ..., B_k)$ استفاده می‌شود که در روش هم‌پوش $k = n-l+1$ است. به‌طور کلی، نمونه‌ی بوت‌استرپ بلوکی به‌صورت $(B_1^*, ..., B_k^*)$ با انجام بازنمونه‌گیری تصادفی و با جایگذاری از بلوک‌ها به دست می‌آید. اگر $B_i^* = (x_{1i}^*, x_{2i}^*, ..., x_{li}^*)$ نشان‌دهنده‌ی نمونه‌ی بوت‌استرپ بلوکی iام باشد با کنار هم قرار دادن کل بلوک‌های بوت‌استرپی داریم:

$$X^* = (x_{1_1}^*, ..., x_{l_1}^*, x_{1_2}^*, ..., x_{l_2}^*, ..., x_{1_k}^*, ..., x_{l_k}^*) \,, \tag{8}$$

که یک سری زمانی بوت‌استرپ به‌طول n است. براساس کل این نمونه جدید متشکل از k بلوک مستقل، آماره‌ی مورد نظر محاسبه می‌شود. اما در روش MBB، چند مشاهده‌ی اولی $(x_1, ..., x_{l-1})$ و آخری $(x_{n-l+2}, ..., x_n)$ شانس کم‌تری نسبت به سایر مشاهدات برای ظاهر شدن در بلوک‌ها و نمونه‌ی بوت‌استرپ دارند. بنابراین در انجام برآورد، اریب تصادفی معناداری وجود خواهد داشت.

یک روش ساده برای داشتن توزیع بوت‌استرپی نااریب، قرار دادن مقادیر x_iها پیرامون یک دایره است (یعنی $x_i \equiv x_{i_n}$ (به‌ازای $i > n$)، $i_n = i(\mathrm{mod}\, n)$، و $x_0 \equiv x_n$ یا $x_i \equiv x_{i-n}$ با فرض $n+1 \leq i \leq n+l+1$). در این روش، بلوک‌هایی به‌طول l (در قالب هر عدد صحیح) از تمامی کمان‌های مشاهدات اطراف دایره به‌صورت B_i و به‌ازای $1 \leq i \leq n$ مفروض است. از این مجموعه بلوک‌ها به تعداد k بلوک ($k = n/l$ عدد صحیح و مثبت) تصادفی انتخاب می‌شود. سپس از به هم پیوستن k بلوک $(B_1^*, ..., B_k^*)$، نمونه‌ی بوت‌استرپ $(x_1^*, ..., x_n^*)$ به‌روش CBB شکل می‌گیرد.[۲۹] با در نظرگرفتن C به‌عنوان نماد عمومی شاخص قابلیت واقعی فرایند، الگوریتم پیشنهادی ایجاد فواصل اطمینان برای C_{pm} و C_{pmk} به‌روش CBB درگام‌های زیر خلاصه می‌شود:

۱. جمع‌آوری داده‌های اولیه $x_1, x_2, ..., x_n$.

۲. تقسیم داده‌های اولیه به n بلوک هم‌پوش با طول l؛ طوری که اولین بلوک $(x_1, ..., x_l)$، دومین بلوک $(x_2, ..., x_{l+1})$،... و آخرین بلوک $(x_n, ..., x_{l-1})$ است.

۳. انتخاب تصادفی و با جایگذاری k بلوک (با احتمال $1/n$)، و قرار دادن آنها به دنبال هم برای تشکیل $(x_1^*, ..., x_n^*)$.

۴. محاسبه‌ی $\hat{C}^* = \hat{C}\,(x_1^*, ..., x_n^*)$.

۵. تکرار مراحل ۳ و ۴ به تعداد B بار برای به دست آوردن $\hat{C}_1^*, ..., \hat{C}_B^*$.

۶. ارائه‌ی برآوردها و محاسبه‌ی فاصله‌ی اطمینان مورد نظر.

براساس نمونه‌ی بوت‌استرپی $(x_1^*, ..., x_n^*)$ می‌توان آماره‌ی بوت‌استرپی $\hat{C}^*$ را محاسبه کرد. با انجام این فرایند به دفعات مشخص B، می‌توان B مقدار $\hat{C}^*$ را محاسبه کرد که هرکدام برآوردی برای $\hat{C}$ محسوب می‌شود و کل مجموعه، توزیع بوت‌استرپ برای $\hat{C}$ را تشکیل می‌دهد. پس، می‌توان تقریبی از تابع توزیع تجمعی نامعلوم $F_{\hat{C}}$ را به‌وسیله‌ی تابع توزیع تجمعی تجربی $\hat{F}_{\hat{C}^*}$ ارائه کرد.

توزیع‌های بوت‌استرپی فقط براساس نمونه‌های تصادفی از توزیع کامل بوت‌استرپ محاسبه می‌شوند. بنابراین، ممکن است به‌علت خطاهای نمونه‌گیری، یک توزیع اریب برای شاخص حاصل شود. خطای تکنیک بوت‌استرپ که همان اختلاف بین توزیع واقعی و تخمینی است، از دو نوع خطای مستقل تشکیل شده است:

۱. خطای آماری که به تعداد و صحت داده‌های اولیه بستگی دارد،

۲. خطای شبیه‌سازی که با افزایش زیرگروه‌های بوت‌استرپ (B) کاهش می‌یابد.[۲۱]

به‌طور کلی، n^n حالت ممکن برای بازنمونه‌گیری (B) وجود دارد. اما به‌علت حجم بالای محاسبات حتی برای نمونه‌های کوچک در عمل، فقط نمونه‌های تصادفی از کل حالات ممکن گرفته می‌شود. با این حال، در برخی موارد افزایش B تغییر اندکی در افزایش دقت به‌دنبال دارد و صرف زمان بیشتر به‌صرفه نیست به‌طوری که ۲۰۰ بار نمونه‌گیری مجدد غالباً کفایت می‌کند. البته با توجه به اهمیت نتایج، قابلیت محاسباتی رایانه و محدودیت زمان می‌توان بر این تعداد افزود. براساس پژوهش‌های انجام شده برای ارائه‌ی برآوردی دقیق از فاصله‌ی اطمینان کم‌ترین تعداد بازنمونه‌گیری مناسب بوت‌استرپ ۱۰۰۰ است.[۲۵و۲۶]

۳. برآورد فاصله‌یی شاخص قابلیت فرایند خودهمبسته به‌روش بوت‌استرپ

با توجه به الگوریتم ارائه شده در بخش قبل می‌توان با مطالعه‌ی بیشتر درمورد روش‌های مختلف ایجاد فاصله‌ی اطمینان[۳۰] یک نوع فاصله‌ی اطمینان مشخص برای شاخص‌های C_{pm} و C_{pmk} انتخاب کرد و برآورد فاصله‌یی از آن ارائه داد در این بخش، نحوه‌ی ساخت فاصله‌ی اطمینان بوت‌استرپی دوطرفه $(1-2\alpha)$ و ۱۰۰ درصد برای شاخص‌قابلیت فرایند، به دو روش مختلف و به‌صورت گام به گام توضیح داده می‌شود.

۱.۳. بوت استرپ استاندارد (SB)[۳]

در این روش فرض بر این است که $\hat{C}$ از توزیع نرمال پیروی می‌کند. در تمامی مراحل فرض می‌کنیم $\hat{C}^*(i)$ نشان‌دهنده‌ی iامین برآورد مرتب شده براساس B نمونه بوت‌استرپ محاسبه شده باشد، که برآوردی برای $C^*(i)$ محسوب می‌شود.[۳۰]

الگوریتم ایجاد فاصله‌ی اطمینان دوطرفه $(1-2\alpha)$ و ۱۰۰ درصد به‌روش SB درگام‌های زیر خلاصه می‌شود:

۱. محاسبه‌ی میانگین و انحراف استاندارد برآوردهای بوت‌استرپی از روابط ۹ و ۱۰ پس از به دست آوردن $\hat{C}_1^*, ..., \hat{C}_B^*$:

$$\hat{C}^* = \frac{\sum_{i=1}^{B} \hat{C}^*(i)}{B}, \tag{۹}$$

$$\hat{S}_C^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{C}^*(i) - \hat{C}^*\right)^2}{B-1}}. \tag{۱۰}$$

۲. با برآورد $\hat{C}$ از داده‌های اولیه، فاصله‌ی اطمینان SB مطابق رابطه‌ی ۱۱ محاسبه می‌شود (Z_α چارک α بالایی توزیع نرمال استاندارد است؛ $\hat{C}$ نیز از داده‌های اولیه برآورد شده و بوت‌استرپ تنها برای برآورد انحراف استاندارد آن به کار رفته است):

$$\hat{C} \pm Z_\alpha \hat{S}_C^*. \tag{۱۱}$$

۲.۳. بوت استرپ صدکی با اریب اصلاح و تسریع‌شده (BCa)[۴]

برای بهبود سرعت همگرایی بوت‌استرپ صدکی روشی توسعه یافت که فاصله‌ی صدکی را با تصحیح اریب و واریانس غیر ثابت تعدیل می‌کند. ساختن این نوع فاصله بستگی به برآورد دو عامل اصلاح اریب $Z_\circ$ و تسریع a دارد.[۳۰] گام‌های الگوریتم ایجاد فاصله‌ی اطمینان $(1-2\alpha)$ ۱۰۰ درصد به‌روش BCa به‌صورت زیر بیان می‌شود:

۱. پس از به دست آوردن $\hat{C}_1^*, ..., \hat{C}_B^*$، مجموعه‌ی مرتب‌شده‌ی $\hat{C}^*(i)$ تشکیل می‌شود.

۲. براساس مقادیر مرتب‌شده توزیع C^* و برآورد $\hat{C}$ از داده‌های اولیه، احتمال $P_\circ = P_r(\hat{C}^* \leq \hat{C})$ و میانه اریب $\hat{C}^*$ به‌صورت $Z_\circ = \Phi^{-1}(P_\circ)$ محاسبه می‌شود.

۳. محاسبه‌ی عامل تسریع $\hat{C}_{(i)}$ برآورد معمولی C است که از نمونه‌ی اولیه پس از حذف نقطه‌ی iام محاسبه می‌شود):

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{C}_{(\circ)} - \hat{C}_{(i)}\right)^3}{6\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{C}_{(\circ)} - \hat{C}_{(i)}\right)^2\right)^{3/2}}, \tag{۱۲}$$

$$\hat{C}_{(\circ)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{C}_{(i)}}{n}. \tag{۱۳}$$

۴. تعیین ضریب اطمینان صدک‌های بالا و پایین:

$$P_{AU} = \Phi\left(Z_\circ + \frac{Z_\circ + Z_\alpha}{1 - \hat{a}\left(Z_\circ + Z_\alpha\right)}\right), \tag{۱۴}$$

$$P_{AL} = \Phi\left(Z_\circ + \frac{Z_\circ - Z_\alpha}{1 - \hat{a}\left(Z_\circ - Z_\alpha\right)}\right). \tag{۱۵}$$

۵. محاسبه‌ی فاصله‌ی اطمینان BCa:

$$\left[\hat{C}^*\left(P_{AL}B\right), \hat{C}^*\left(P_{AU}B\right)\right]. \tag{۱۶}$$

۴. مطالعات شبیه‌سازی برآورد توزیع نمونه‌گیری

به‌منظور برآورد توزیع نمونه‌گیری نامعلوم شاخص‌های قابلیت فرایند، با روش بوت‌استرپ تعداد زیادی از مجموعه داده‌های AR(۱) تحت شرایط مختلف خودهمبستگی تولید شد. سپس برآوردهای ارائه‌شده براساس معیارهای توصیفی مورد ارزیابی قرار گرفت.

مقادیر واقعی شاخص‌های قابلیت C_{pm} و C_{pmk} با توجه به حدود مشخصات قابل قبول $USL = 61$ و $LSL = 40$، مقادیر $T = 49$، $\mu = 50$ و $\sigma = 2$ در جدول ۱ محاسبه شدند. مشاهده می‌شود که سطح بالاتر خودهمبستگی، کاهش مقدار شاخص قابلیت را به‌همراه دارد.

ابتدا مطالعه‌ی شبیه‌سازی برای بررسی اثرات خودهمبستگی بر مقادیر مورد انتظار و خطای استاندارد میانگین و انحراف استاندارد نمونه‌یی به روش بوت‌استرپ انجام گرفت. برای اندازه نمونه‌های مختلف (n) از فرایند AR(۱) با سطوح متفاوت همبستگی (ϕ) به تعداد $B = 200$ نمونه‌ی بوت‌استرپی از نمونه‌ی اولیه برداشته شد. سپس، این شبیه‌سازی به تعداد $N = 5000$ بار دیگر تکرار شد. خلاصه‌ی این نتایج (جدول ۲) نشان می‌دهد که خودهمبستگی تأثیری بر مقدار مورد انتظار میانگین نمونه ندارد و با افزایش اندازه نمونه به‌تدریج از پراکندگی این مقادیر نیز کاسته می‌شود و دقت برآورد انجام‌شده بالاتر می‌رود. اما وضعیت متفاوتی در رابطه با مقدار مورد انتظار انحراف استاندارد نمونه به‌ویژه برای اندازه نمونه‌ی کوچک رخ می‌دهد. برای مثال، در حالت $n = 40$، برآورد مقدار مورد انتظار انحراف استاندارد نمونه به‌ازای $|\phi| = 0.00$، $|\phi| = 0.25$ و $|\phi| = 0.75$ به‌ترتیب برابر ۱٫۹۵، ۲٫۰۰ و ۲٫۶۳ است که به‌وضوح از مقادیر واقعی آن در جدول ۱ کم‌تر است. البته با افزایش n، به‌ازای مقادیر مختلف ϕ برآورد مقدار مورد انتظار انحراف استاندارد نمونه بزرگ‌تر و به مقادیر واقعی آن نزدیک‌تر می‌شود. به‌علاوه، کاهش پراکندگی تخمین انحراف استاندارد نمونه‌یی با افزایش اندازه نمونه نشان‌دهنده‌ی دقت مضاعف برآوردهای انجام شده است.

با انجام مطالعه‌ی شبیه‌سازی دیگری تحت همان شرایط قبلی، و برداشتن ۲۰۰ نمونه‌ی بوت‌استرپی از نمونه‌ی اولیه و تکرار این شبیه‌سازی به‌تعداد ۵۰۰۰ بار، معیارهای توصیفی برآورد توزیع نمونه‌گیری مشخص شد (جدول ۳).

در مقایسه‌ی مقادیر مورد انتظار نمونه‌یی شاخص‌های قابلیت فرایند که در جدول ۳ نمایش داده شده است با مقادیر نظری آنها در جدول ۱، مقداری اریب به‌ازای سطوح مختلف پارامتر خودهمبستگی مشاهده می‌شود، به‌طوری که با افزایش اندازه‌ی نمونه از میزان اریب کاسته می‌شود. برای مثال در حالت $\phi = 0.75$ و به‌ازای $n = 40$ و $n = 400$ مقادیر مورد انتظار C_{pm} به‌ترتیب برابر ۱٫۴۰ و ۱٫۱۱ است، در حالی که مقدار واقعی برابر ۱٫۱۰ است. براساس همین اندازه نمونه‌ها، مقادیر مورد انتظار C_{pmk} به‌ترتیب برابر ۱٫۰۷ و ۱٫۰۵ در مقایسه با مقدار واقعی ۱٫۰۵ است.

جدول ۱. مقادیر نظری میانگین، انحراف استاندارد و شاخص‌های قابلیت فرایند در شرایط مختلف خودهمبستگی.

C_{pmk}	C_{pm}	σ_x	μ	$\lvert\phi\rvert$
۱٫۴۹	۱٫۵۷	۲٫۰۰	۵۰	۰٫۰۰
۱٫۴۵	۱٫۵۳	۲٫۰۷	۵۰	۰٫۲۵
۱٫۰۵	۱٫۱۰	۳٫۰۲	۵۰	۰٫۷۵

جدول ۲. اثر خودهمبستگی بر مقادیر مورد انتظار و خطای استاندارد میانگین و انحراف استاندارد نمونه‌یی فرایند $\mathbf{AR(1)}$.

n	ϕ	μ					σ_x				
		−۰٫۷۵	−۰٫۲۵	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۷۵	−۰٫۷۵	−۰٫۲۵	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۷۵
۲۰	میانگین	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۲٫۹۳	۲٫۰۱	۱٫۹۱	۱٫۹۳	۲٫۳۶
	انحراف استاندارد	۰٫۳۰	۰٫۳۳	۰٫۳۸	۰٫۴۴	۰٫۷۸	۰٫۴۷	۰٫۲۸	۰٫۲۷	۰٫۲۸	۰٫۴۰
۴۰	میانگین	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۲٫۹۵	۲٫۰۳	۱٫۹۵	۲٫۰۰	۲٫۶۳
	انحراف استاندارد	۰٫۱۹	۰٫۲۵	۰٫۲۹	۰٫۳۵	۰٫۷۲	۰٫۳۹	۰٫۲۱	۰٫۲۱	۰٫۲۲	۰٫۳۷
۷۰	میانگین	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۲٫۹۹	۲٫۰۴	۱٫۹۷	۲٫۰۲	۲٫۷۶
	انحراف استاندارد	۰٫۱۴	۰٫۱۹	۰٫۲۳	۰٫۲۸	۰٫۶۴	۰٫۳۳	۰٫۱۷	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۳۲
۲۰۰	میانگین	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۳٫۰۱	۲٫۰۶	۱٫۹۹	۲٫۰۵	۲٫۹۲
	انحراف استاندارد	۰٫۰۸	۰٫۱۲	۰٫۱۴	۰٫۱۷	۰٫۴۶	۰٫۲۳	۰٫۱۱	۰٫۱۰	۰٫۱۰	۰٫۲۳
۴۰۰	میانگین	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۳٫۰۱	۲٫۰۶	۲٫۰۰	۲٫۰۶	۲٫۹۷
	انحراف استاندارد	۰٫۰۶	۰٫۰۸	۰٫۱۰	۰٫۱۳	۰٫۳۵	۰٫۱۸	۰٫۰۸	۰٫۰۷	۰٫۰۸	۰٫۱۸
۶۰۰	میانگین	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۵۰٫۰	۳٫۰۲	۲٫۰۶	۲٫۰۰	۲٫۰۶	۲٫۹۹
	انحراف استاندارد	۰٫۰۵	۰٫۰۷	۰٫۰۸	۰٫۱۰	۰٫۲۹	۰٫۱۵	۰٫۰۶	۰٫۰۶	۰٫۰۶	۰٫۱۵

نتایج حاصل از برآورد انحراف استاندارد نمونه‌یی شاخص‌های قابلیت فرایند تأثیر ناچیزی از حالت خودهمبستگی منفی شدید تا خودهمبستگی مثبت شدید را نشان می‌دهد. نکته‌ی قابل توجه دیگر در افزایش اندازه نمونه نهفته است جایی که کاهش مقادیر انحراف استاندارد نمونه‌یی را در پی دارد.

می‌دانیم که «چولگی» معیاری مناسب برای بررسی قرینه‌بودن توزیع است (اگر قدرمطلق مقدار چولگی بزرگ‌تر از ۰٫۵ باشد نمودار توزیع انحرافی قابل ملاحظه از توزیع نرمال دارد).

براساس جدول ۳ واضح است که در حالت کوچک بودن اندازه نمونه، مقادیر چولگی این توزیع‌های نمونه‌گیری تفاوت معناداری با توزیع نرمال دارد. این واقعیت با مطالعات انجام شده[۱۶] نیز همخوانی دارد جایی که با اثبات چولگی بسیار کم برای توزیع نمونه‌یی شاخص‌ها، برآورد فاصله‌یی متقارن معقول تشخیص داده شد. درمورد کشیدگی نیز اختلاف با توزیع نرمال غیر قابل انکار است (اگر مقدار معیار کشیدگی بزرگ‌تر از ۳ باشد شکل توزیع تیزتر، و اگر کوچک‌تر از ۳ باشد شکل توزیع هموارتر از حالت نرمال خواهد بود). با این حال، در همه‌ی موارد مشاهده می‌شود که افزایش اندازه نمونه با کاهش قابل ملاحظه‌ی معیارهای چولگی و کشیدگی همراه است. بنابراین، بیان این حقیقت که توزیع‌های نمونه‌گیری شاخص‌های قابلیت فرایند شکل نرمال‌تری به خود می‌گیرد کاملاً منطقی به نظر می‌رسد.

می‌توان چنین نتیجه گرفت که، علی‌رغم تأثیر سطوح مختلفی از پارامتر خودهمبستگی بر داده‌ها، برآورد توزیع نمونه‌گیری شاخص‌های قابلیت فرایند با افزایش اندازه نمونه به‌طور تقریبی به توزیع نرمال شباهت بیشتری پیدا می‌کند. بنابراین، مادامی که توزیع بوت‌استرپ اریب نباشد و شکل متقارنی داشته باشد درصد فاصله‌ی اطمینان روش مناسبی برای تخمین آماره‌ی مورد نظر است. زیرا اریب در توزیع بوت‌استرپ منجر به اریب در تخمین فاصله‌ی اطمینان می‌شود.

با توجه به مطالب فوق، نتایج حاصل از مطالعات شبیه‌سازی این بخش عبارت است از:

- خودهمبستگی تأثیری بر مقدار مورد انتظار میانگین نمونه ندارد، اما، برآورد انحراف استاندارد نمونه‌یی با افزایش سطح خودهمبستگی تخمین کم‌تری از مقدار واقعی ارائه می‌کند.
- با افزایش اندازه نمونه‌برآورد مقدار مورد انتظار انحراف استاندارد نمونه به مقادیر واقعی نزدیک‌تر می‌شود. به‌علاوه، به‌تدریج از پراکندگی مقدار مورد انتظار میانگین نمونه و پراکندگی تخمین انحراف استاندارد نمونه‌یی کاسته می‌شود و دقت برآورد انجام شده بالاتر می‌رود.
- در مقایسه‌ی مقادیر مورد انتظار نمونه‌ی شاخص‌های قابلیت فرایند با مقادیر نظری آنها مقداری اریبی به‌صورت برآوردهای بزرگ‌تر از واقع به‌ازای سطوح مختلف پارامتر خودهمبستگی مشهود است.
- با افزایش اندازه نمونه از میزان اریبی برآورد شاخص‌های قابلیت فرایند کاسته می‌شود. همچنین، برآورد انحراف استاندارد نمونه‌یی این شاخص‌ها کاهش یافته و ثبات بیشتری در برابر تغییرات پارامتر خودهمبستگی از خود نشان می‌دهد.
- در تمامی موارد، میزان چولگی و کشیدگی شاخص‌های قابلیت فرایند با افزایش اندازه نمونه کاهش قابل ملاحظه‌یی دارد، و توزیع نمونه‌گیری این شاخص‌ها شکل نرمال‌تری از خود نشان می‌دهد.

۵. مطالعات شبیه‌سازی برآورد فاصله‌یی

تعیین احتمال برآورده شدن نیازهای قابلیت فرایند براساس برآورد فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ برای شاخص C_{pm} و C_{pmk} فرایند خودهمبسته‌ی $\mathrm{AR(1)}$ به‌روش بوت‌استرپ

جدول ۳. معیارهای توصیفی برآورد توزیع نمونه‌گیری شاخص‌های قابلیت فرایند برای مجموعه‌یی از پارامترهای مختلف.

n	ϕ	C_{pm}					C_{pmk}				
		−۰٫۷۵	−۰٫۲۵	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۷۵	−۰٫۷۵	−۰٫۲۵	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۷۵
۲۰	میانگین	۱٫۲۲	۱٫۵۹	۱٫۶۴	۱٫۶۲	۱٫۲۸	۱٫۱۵	۱٫۱۵	۱٫۵۴	۱٫۵۰	۱٫۰۹
	انحراف استاندارد	۰٫۱۹	۰٫۲۲	۰٫۲۳	۰٫۲۴	۰٫۲۳	۰٫۱۷	۰٫۱۹	۰٫۲۱	۰٫۲۲	۰٫۲۲
	چولگی	۰٫۶۰	۰٫۹۵	۰٫۹۱	۰٫۷۸	۰٫۸۵	۰٫۵۷	۰٫۷۲	۰٫۷۵	۰٫۷۷	۰٫۵۰
	کشیدگی	۳٫۶۱	۵٫۲۴	۵٫۰۳	۳٫۹۹	۴٫۱۷	۳٫۴۷	۴٫۰۷	۴٫۱۱	۴٫۷۹	۳٫۲۹
۴۰	میانگین	۱٫۷	۱٫۵۶	۱٫۶۱	۱٫۵۸	۱٫۲۰	۱٫۱۱	۱٫۴۸	۱٫۵۲	۱٫۴۷	۱٫۰۷
	انحراف استاندارد	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۷	۰٫۱۷	۰٫۱۴	۰٫۱۴	۰٫۱۵	۰٫۱۵	۰٫۱۷
	چولگی	۰٫۵۴	۰٫۵۰	۰٫۶۰	۰٫۵۳	۰٫۶۱	۰٫۴۲	۰٫۴۹	۰٫۴۶	۰٫۴۵	۰٫۳۵
	کشیدگی	۳٫۵۹	۳٫۳۵	۳٫۵۷	۳٫۶۵	۳٫۴۹	۳٫۲۹	۳٫۴۰	۳٫۴۱	۳٫۵۵	۳٫۱۹
۷۰	میانگین	۱٫۱۴	۱٫۵۵	۱٫۵۹	۱٫۵۶	۱٫۱۶	۱٫۰۹	۱٫۴۷	۱٫۵۰	۱٫۴۷	۱٫۰۶
	انحراف استاندارد	۰٫۱۲	۰٫۱۲	۰٫۱۳	۰٫۱۳	۰٫۱۴	۰٫۱۱	۰٫۱۰	۰٫۱۱	۰٫۱۱	۰٫۱۴
	چولگی	۰٫۳۸	۰٫۳۷	۰٫۴۶	۰٫۵۲	۰٫۵۱	۰٫۳۱	۰٫۴۰	۰٫۳۹	۰٫۳۳	۰٫۲۱
	کشیدگی	۳٫۱۶	۳٫۱۹	۳٫۳۷	۳٫۶۸	۳٫۳۵	۳٫۰۹	۳٫۵۲	۳٫۳۸	۳٫۳۱	۳٫۰۱
۲۰۰	میانگین	۱٫۱۱	۱٫۵۳	۱٫۵۷	۱٫۵۴	۱٫۱۳	۱٫۰۶	۱٫۴۶	۱٫۵۰	۱٫۴۶	۱٫۰۵
	انحراف استاندارد	۰٫۰۸	۰٫۰۷	۰٫۰۸	۰٫۰۸	۰٫۰۹	۰٫۰۷	۰٫۰۶	۰٫۰۶	۰٫۰۷	۰٫۰۹
	چولگی	۰٫۲۰	۰٫۲۱	۰٫۲۴	۰٫۲۲	۰٫۳۵	۰٫۲۲	۰٫۱۸	۰٫۲۴	۰٫۱۸	۰٫۱۲
	کشیدگی	۳٫۰۱	۳٫۰۷	۳٫۱۱	۲٫۹۸	۳٫۱۹	۲٫۹۹	۳٫۰۹	۳٫۱۳	۳٫۰۲	۳٫۱۱
۴۰۰	میانگین	۱٫۱۱	۱٫۵۳	۱٫۵۷	۱٫۵۳	۱٫۱۱	۱٫۰۶	۱٫۴۶	۱٫۴۹	۱٫۴۶	۱٫۰۵
	انحراف استاندارد	۰٫۰۶	۰٫۰۵	۰٫۰۵	۰٫۰۶	۰٫۰۷	۰٫۰۶	۰٫۰۴	۰٫۰۴	۰٫۰۵	۰٫۰۶
	چولگی	۰٫۱۷	۰٫۱۳	۰٫۱۶	۰٫۲۲	۰٫۲۴	۰٫۱۱	۰٫۰۷	۰٫۲۲	۰٫۲۳	−۰٫۰۲
	کشیدگی	۲٫۸۹	۳٫۰۰	۳٫۰۳	۳٫۲۵	۳٫۰۸	۲٫۹۴	۳٫۰۳	۳٫۰۷	۳٫۱۷	۳٫۰۸
۶۰۰	میانگین	۱٫۱۱	۱٫۵۳	۱٫۵۷	۱٫۵۳	۱٫۱۱	۱٫۰۵	۱٫۴۵	۱٫۴۹	۱٫۴۵	۱٫۰۵
	انحراف استاندارد	۰٫۰۵	۰٫۰۴	۰٫۰۴	۰٫۰۵	۰٫۰۶	۰٫۰۵	۰٫۰۴	۰٫۰۴	۰٫۰۴	۰٫۰۵
	چولگی	۰٫۱۴	۰٫۱۶	۰٫۱۶	۰٫۱۳	۰٫۲۱	۰٫۱۲	۰٫۱۷	۰٫۱۷	۰٫۱۶	۰٫۰۱
	کشیدگی	۳٫۱۳	۳٫۱۱	۳٫۰۶	۳٫۱۹	۳٫۰۳	۲٫۹۷	۳٫۱۴	۳٫۰۴	۳٫۰۱	۳٫۲۱

از طریق مطالعه‌ی شبیه‌سازی مونت‌کارلو انجام گرفت. در این مطالعه، فواصل اطمینان براساس دو معیار مورد ارزیابی قرار گرفت:

- متوسط درصد پوشش (ACP)[5] و آن عبارت است از نسبت دفعاتی که فاصله‌ی اطمینان حاصل از هر بار شبیه‌سازی مقدار واقعی را شامل می‌شود.
- متوسط طول فاصله (AIL)[6]، اندازه‌گیری میانگین پهنای (تفاضل حد پایین از حد بالا) فواصل اطمینان.

با فرض این که فرایند تحت کنترل آماری است مقادیر شاخص‌های قابلیت (در محدوده‌ی خوب تا ضعیف) برای استفاده در این مطالعه با توجه به حدود مشخصات قابل قبول $USL = ۶۱$ و $LSL = ۴۰$، مقدار هدف $T = ۴۹$ و همچنین ترکیبات مختلف μ و σ در جداول ۴ و ۵ محاسبه شد. برای هر اندازه نمونه کوچک $n = ۲۰, ۴۰, ۷۰$ و بزرگ $n = ۲۰۰, ۴۰۰, ۶۰۰$ از فرایند ایستای AR(۱) با سطوح مختلف همبستگی و ترکیبات مختلف μ و σ به تعداد $B = ۱۰۰۰$ نمونه بوت‌استرپی از نمونه اولیه برداشته شد تا امکان برآورد فواصل اطمینان ۹۵٪ برای

جدول ۴. مقادیر نظری C_{pm} به کار رفته در مطالعه‌ی شبیه‌سازی.

(μ, σ)	ϕ		
	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۷۵
(۵۰, ۲)	۱٫۵۷	۱٫۵۳	۱٫۱۰
(۵۲, ۲)	۰٫۹۷	۰٫۹۶	۰٫۸۲
(۵۰, ۳)	۱٫۱۱	۱٫۰۸	۰٫۷۵
(۵۲, ۳)	۰٫۸۳	۰٫۸۱	۰٫۶۴

جدول ۵. مقادیر نظری C_{pmk} به کار رفته در مطالعه‌ی شبیه‌سازی.

(μ, σ)	ϕ		
	۰٫۰۰	۰٫۲۵	۰٫۷۵
(۵۰, ۲)	۱٫۴۹	۱٫۴۵	۱٫۰۵
(۵۲, ۲)	۰٫۸۳	۰٫۸۲	۰٫۷۰
(۵۰, ۳)	۱٫۰۵	۱٫۰۲	۰٫۷۲
(۵۲, ۳)	۰٫۷۱	۰٫۷۰	۰٫۵۵

شاخص قابلیت مذکور از روش‌های SB و BCa میسر شود. سپس، این شبیه‌سازی به تعداد $N = 1000$ بار دیگر تکرار شد تا ACP و AIL مشخص شود.

با توجه به مقدار مورد انتظار ۹۵٪، دفعات پوشش فواصل اطمینان حاصل از کل شبیه‌سازی انجام شده برای هر حالت، یک متغیر تصادفی دوجمله‌یی با پارامترهای $P = 0{,}95$ و $N = 1000$ است. بنابراین، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹٪ برای دفعات پوشش عبارت است از:

$$0{,}95 \pm Z_{0{,}005}\sqrt{\frac{(0{,}95)\,(0{,}05)}{1000}} = [0{,}932, 0{,}968], \qquad (17)$$

یعنی، برای حصول اطمینان ۹۹٪، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ واقعی باید درصد پوششی کمینه بین بازه فوق داشته باشد. پس از محاسبه‌ی ACP در هر حالت و مقایسه با محدوده‌ی قابل قبول، می‌توان تعداد دفعاتی از کل حالت‌ها را که در آن مقدار ACP مناسب به دست می‌آید و این نتایج را با معیار FTA نشان داد[7]. با توجه به مطالب فوق، نتایج حاصل از روش‌های مختلف در بخش‌های زیرین بررسی شده است (میانگین ACP و AIL و تعداد FTA از جداول کلی به‌ازای تمامی ۱۲ نتیجه‌ی ممکن برای هر ϕ یکسان و ترکیبات مختلف μ، σ و n محاسبه، و به‌دلیل تأثیر کم μ و σ در نتایج جداول کامل، تنها خلاصه‌ی این موارد ارائه شده است).

خلاصه نتایج مربوط به شبیه‌سازی فواصل اطمینان ۹۵٪ برای شاخص C_{pm} در جدول ۶ ارائه شده است. چنان که ملاحظه می‌شود مقادیر ACP ارائه شده توسط روش‌های مختلف در حالت $\phi = 0$ با اندازه نمونه کم، از کل ۱۲ مورد به‌ترتیب در ۷ و ۳ مورد کمترین درصد پوشش مناسبی در محدوده قابل قبول داشتند، اما در حالت‌های $|\phi| = 0{,}25$ و $|\phi| = 0{,}75$، حتی یک مورد FTA مناسب برای روش‌های مختلف به دست نیامد. این نتایج نشان‌دهنده‌ی برتری نسبی روش SB تنها در حالت مستقل است. در همین شرایط و فقط با افزایش قابل توجه اندازه نمونه، نتایج در حالت $\phi = 0$ با روش‌های مختلف به‌ترتیب ۱۱ و ۱۲ مورد و در حالت $|\phi| = 0{,}25$، به‌ترتیب ۲۰ و ۲۱ مورد درصد پوشش مناسبی در محدوده قابل قبول داشتند، اما در حالت $|\phi| = 0{,}75$، نتیجه‌ی مناسبی حاصل نشد. در تفسیر دلایل این امر می‌توان گفت که چون در روش بوت‌استرپ نمونه‌گیری به‌صورت تصادفی انجام می‌شود پس در اندازه نمونه‌ی کم با توجه به ارائه‌ی فواصل صدکی به روش BCa امکان اریب در برآورد وجود دارد در حالی که در روش SB فواصل همواره متقارن است. با افزایش قابل ملاحظه‌ی اندازه نمونه چون خطای آماری در انجام برآورد کاهش می‌یابد نتایج هر دو روش SB و BCa ضمن بهبود، به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شود.

خلاصه نتایج حاصل از شبیه‌سازی برای C_{pmk} به روش CBB در جدول ۷ گردآوری شد. نتایج در اندازه نمونه‌ی کم و $\phi = 0$ نشان داد که مقادیر ACP به‌ترتیب در ۴ و ۴ مورد از کل ۱۲ مورد درصد پوششی قابل قبول داشتند. در حالت $|\phi| = 0{,}25$ از کل ۲۴ موردی که درصد پوشش برای آنها محاسبه شد نتایج به‌ترتیب به‌صورت ۴ و صفر به دست آمد. این نتایج حاکی از عملکرد نسبتاً مناسب SB است. همچنین با افزایش پارامتر خودهمبستگی به $|\phi| = 0{,}75$، پوششی حاصل نشد. در همین شرایط و تنها با افزایش اندازه نمونه، بهبود قابل ملاحظه‌یی در معیارهای اندازه‌گیری شده مشاهده شد، به‌طوری که در حالت $\phi = 0$، از کل ۱۲ مورد ACP ارائه‌شده روش‌های مختلف به‌ترتیب در ۱۲ و ۱۲ مورد، در حالت $|\phi| = 0{,}25$ از کل ۲۴ مورد به‌ترتیب در ۲۱ و ۱۷ مورد و در حالت $|\phi| = 0{,}75$ به‌ترتیب در ۵ و ۱ مورد درصد پوششی مناسبی داشتند که نشان‌گر عملکرد نسبتاً مناسب SB است.

از طرفی مطابق جداول ۶ و ۷، برای معیار AIL با اندازه نمونه‌ی بزرگ در هر دو روش‌نتایج تقریباً مشابهی به‌صورت کاهش در این مقادیر به دست آمد که نسبت به حالت اندازه نمونه‌ی کم، افزایش دقت فواصل اطمینان را نشان می‌داد. البته از لحاظ معیار AIL بین روش‌های مختلف تفاوت معنی‌داری وجود ندارد. همچنین، با افزایش مقدار پارامتر خودهمبستگی بر میزان معیار AIL افزوده و درنتیجه، از دقت فاصله‌ی اطمینان کاسته می‌شود.

جدول ۶. مقایسه‌ی عملکرد برآوردکننده‌های فاصله‌یی شاخص C_{pm} به روش CBB (فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪).

n	ϕ	−۰٫۷۵			−۰٫۲۵			۰٫۰۰			۰٫۲۵			۰٫۷۵		
	روش	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL
کوچک	SB	۰٫۷۹	۰	۰٫۳۹	۰٫۹۱	۰	۰٫۴۲	۰٫۹۲	۷	۰٫۴۶	۰٫۸۹	۰	۰٫۴۹	۰٫۷۸	۰	۰٫۵۴
	BCa	۰٫۷۶	۰	۰٫۳۶	۰٫۸۹	۰	۰٫۳۹	۰٫۹۰	۳	۰٫۴۳	۰٫۸۷	۰	۰٫۴۵	۰٫۷۲	۰	۰٫۴۹
بزرگ	SB	۰٫۹۰	۰	۰٫۱۶	۰٫۹۴	۱۱	۰٫۱۴	۰٫۹۵	۱۱	۰٫۱۵	۰٫۹۳	۹	۰٫۱۷	۰٫۹۰	۰	۰٫۲۲
	BCa	۰٫۸۹	۰	۰٫۱۶	۰٫۹۵	۱۲	۰٫۱۴	۰٫۹۴	۱۲	۰٫۱۵	۰٫۹۴	۹	۰٫۱۶	۰٫۹۰	۰	۰٫۲۲

جدول ۷. مقایسه‌ی عملکرد برآوردکننده‌های فاصله‌یی شاخص C_{pmk} به روش CBB (فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪).

n	ϕ	−۰٫۷۵			−۰٫۲۵			۰٫۰۰			۰٫۲۵			۰٫۷۵		
	روش	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL
کوچک	SB	۰٫۸۱	۰	۰٫۳۷	۰٫۹۰	۲	۰٫۴۱	۰٫۹۲	۴	۰٫۴۶	۰٫۹۰	۲	۰٫۵۰	۰٫۷۷	۰	۰٫۵۹
	BCa	۰٫۷۹	۰	۰٫۳۵	۰٫۸۹	۰	۰٫۴۰	۰٫۹۱	۴	۰٫۴۴	۰٫۸۸	۰	۰٫۴۸	۰٫۷۶	۰	۰٫۵۷
بزرگ	SB	۰٫۹۱	۲	۰٫۱۵	۰٫۹۵	۱۲	۰٫۱۴	۰٫۹۵	۱۲	۰٫۱۵	۰٫۹۴	۹	۰٫۱۶	۰٫۹۱	۳	۰٫۲۶
	BCa	۰٫۹۰	۰	۰٫۱۵	۰٫۹۴	۱۰	۰٫۱۴	۰٫۹۵	۱۲	۰٫۱۵	۰٫۹۳	۷	۰٫۱۶	۰٫۹۰	۱	۰٫۲۶

در مقایسه با عوامل مهم‌تری که قبلاً ذکر شد دو عامل دیگر، یعنی μ و σ، تأثیر چندانی بر نتایج ACP نداشتند. آنچه که از افزایش اندازه نمونه، چه در دامنه تغییرات کوچک و چه در دامنه تغییرات بزرگ، آشکار شد این بود که چنین تغییراتی افزایش مقادیر ACP را به دنبال داشت، اما کندی روند افزایشی ACP نیز کاملاً مشهود بود. با توجه به مطالب این بخش، می‌توان نتایج مطالعات شبیه‌سازی را چنین خلاصه کرد:

- به‌طور کلی در حالت مستقل و تا حدودی برای حالت با همبستگی کم روش SB از عملکرد مناسب‌تری برای ارائه‌ی فواصل اطمینان C_{pm} و C_{pmk} نسبت به روش BCa برخوردار است.
- با افزایش اندازه پارامتر خودهمبستگی، به‌تدریج از میزان متوسط درصد پوشش کاسته می‌شود.
- تغییرات اندازه نمونه به‌صورت افزایشی غالباً افزایش ACP را به‌همراه دارد که دلیلی بر کاهش خطای آماری است. البته به‌تدریج، با افزایش اندازه نمونه، از روند افزایشی ACP کاسته می‌شود.
- تغییرات مقادیر میانگین و انحراف استاندارد نشان‌دهنده‌ی تأثیر ناچیز بر نتایج ACP است.
- افزایش مقادیر میانگین، انحراف استاندارد و اندازه نمونه، و کاهش ϕ نشان‌گر روند کاهشی AIL است.

۶. مقایسه با روش‌های موجود در ادبیات

در بخش مقدمه اشاره شد که روش‌های دیگری نیز برای ساختن فواصل اطمینان روی شاخص‌های قابلیت فرایند در حضور خودهمبستگی میان مشاهدات وجود دارد. در این قسمت، روش‌های مذکور با جزئیات معرفی و سپس با انجام شبیه‌سازی، نتایج حاصل با روش پیشنهادی مقایسه می‌شود.

۱.۶. روش‌های مختلف ارائه‌ی فاصله‌ی اطمینان

۱.۱.۶. روش تقریبی گوئوارا و وارگاس

گوئوارا و وارگاس[۱۸] با توسعه‌ی مطالعه‌ی ژانگ[۱۶] ابتدا روابطی برای برآورد انحراف استاندارد شاخص C_{pm} و C_{pmk} در حضور داده‌های خودهمبسته AR(۱) ارائه دادند:

$$\hat{\sigma}_{C_{pm}} \approx C_p^2 \left[\frac{\frac{2F(n,\rho_i)}{(n-1)^2} + \frac{4g(n,\rho_i)+\xi^2}{n}}{4\left[f\left(n,\rho_i\right)+\xi^2\right]^3} \right], \qquad (18)$$

$$\hat{\sigma}_{C_{pmk}} \approx C_{pk}^2 \left[\frac{1}{f\left(n,\rho_i\right)+\xi^2} \right] \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{F(n,\rho_i)}{2(n-1)^2\left[f(n,\rho_i)+\xi^2\right]^2} + \\ \frac{g(n,\rho_i)}{9n} \left[\frac{1}{C_{pk}} + \frac{6\xi}{2\left[f(n,\rho_i)+\xi^2\right]} \right]^2 \end{array} \right\}, \qquad (19)$$

که در آنها C_p و C_{pk} شاخص‌های قابلیت فرایند متداول، ρ_i تابع خودهمبستگی مشاهدات در فواصل زمانی مختلف، f، F و g توابعی از اندازه نمونه و تابع خودهمبستگی، و $\xi = (\mu - T)/\sigma$ است. سپس با انجام برآورد نقطه‌یی شاخص‌های C_{pm} و C_{pmk} و برآورد انحراف استاندارد آنها، برآورد فاصله‌یی مطابق رابطه‌ی ۲۰ را پیشنهاد دادند:

$$\hat{C} \pm k\hat{\sigma}_C \ . \qquad (20)$$

که برای مقادیر مختلف k می‌توان به سطوحی از اطمینان دست یافت.

۲.۱.۶. روش تقریبی والگرن

والگرن[۱۷] به‌دنبال فاصله‌ی اطمینان ارائه شده در حالت مستقل توسط بویلز،[۱۱] تقریبی از فاصله‌ی اطمینان C_{pm}، هنگامی که می‌توان داده‌ها را طبق فرایند AR(۱) با تابع خودهمبستگی نامعلوم مدل‌سازی کرد، به‌صورت رابطه‌ی ۲۱ به دست آورد:

$$\hat{C}_{pm}\left(1 \pm \frac{z_\alpha}{\sqrt{2\hat{\nu}}}\right), \qquad (21)$$

که در آن $\hat{\nu}$ به‌عنوان برآورد درجه آزادی توزیع χ^2 مرکزی برای فرایند AR(۱) از رابطه‌ی ۲۲ برآورد می‌شود (باید توجه داشت که برای مقادیر بزرگ $\hat{\nu}$، توزیع χ^2 مرکزی را می‌توان با توزیع نرمال تقریب زد):

$$\hat{\nu} = \frac{n\left(1+\hat{\delta}^2\right)^2}{\frac{1+\hat{\phi}^2}{1-\hat{\phi}^2} + 2\hat{\delta}^2\frac{1+\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}}}, \qquad (22)$$

که در آن $\hat{\delta}^2 = \left(\bar{x} - T\right)^2 / S^2$ و $\hat{\phi}$ ضریب خودهمبستگی برآوردشده مرتبه اول است.

۳.۱.۶. روش ناپارامتری بوت‌استرپ معمولی

جعفریان و همکاران[۲۷] از روش بوت‌استرپ معمولی در گام‌های الگوریتم پیشنهادی چنین استفاده کردند:

۱. جمع‌آوری داده‌های اولیه $x_1, x_2, ..., x_n$.

۲. نمونه‌گیری بوت‌استرپی $\left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$ به‌صورت تصادفی و با جایگذاری داده‌های اولیه.

۳. محاسبه‌ی $\hat{C}^* = \hat{C}\left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$.

۴. تکرار مراحل ۲ و ۳ به تعداد B بار برای به دست آوردن $\hat{C}_1^*, ..., \hat{C}_B^*$.

۵. ارائه‌ی برآوردها و محاسبه‌ی فاصله‌ی اطمینان مورد نظر.

لازم به ذکر است که با توجه به مطالعات صورت‌گرفته فقط نتایج روش OB-SB به‌علت عملکرد بهتر مقایسه می‌شود.

۲.۶. مقایسه‌ی نتایج شبیه‌سازی

چنان که پیش‌تر ذکر شد، پس از معرفی سایر روش‌های مرتبط در ادبیات موضوع، به مقایسه‌ی آنها با روش پیشنهادی پرداخته می‌شود. گوئوارا و وارگاس[۱۸] مطالعات شبیه‌سازی در این زمینه انجام دادند و نتایج ACP را با $USL = 3$ و $LSL = -3$، مقدار هدف $T = 5$، میانگین صفر، انحراف استاندارد ۱٫۵، اندازه نمونه‌ی ۵۰، ضریب خودهمبستگی ۰٫۵ و ترکیبات مختلف k در $N = 5000$ تکرار به دست آوردند. با در نظر گرفتن خلاصه نتایج گوئوارا و وارگاس (یعنی G & V) مطابق جدول ۸ نتایج روش والگرن، روش OB-SB، و روش CBB-SB نیز محاسبه شد.

برای شاخص C_{pm} مشاهده می‌شود که روش والگرن عملکرد بهتری دارد و روش CBB-SB با اختلاف اندکی در مرتبه‌ی بعدی قرار دارد. در مورد شاخص C_{pmk} روش CBB-SB بیشترین درصد پوشش را نشان می‌دهد. باید یادآور شویم

جدول ۸. مقایسه‌ی نتایج **ACP** روش‌های مختلف تقریبی و ناپارامتری با سطوح متفاوت $k = z_\alpha$.

شاخص قابلیت فرایند	روش	k: ۲	۲٫۵	۳	۳٫۵
C_{pm}	G & V	۰٫۷۴	۰٫۸۰	۰٫۸۵	۰٫۸۹
	Wallgren	۰٫۹۱	۰٫۹۶	۰٫۹۸	۰٫۹۹
	OB-SB	۰٫۷۴	۰٫۸۴	۰٫۹۱	۰٫۹۶
	CBB-SB	۰٫۸۶	۰٫۹۲	۰٫۹۶	۰٫۹۷
C_{pmk}	G & V	۰٫۳۳	۰٫۴۰	۰٫۴۸	۰٫۵۳
	OB-SB	۰٫۷۵	۰٫۸۵	۰٫۹۳	۰٫۹۶
	CBB-SB	۰٫۸۶	۰٫۹۳	۰٫۹۶	۰٫۹۸

که گرچه روش OB-SB در سطوح پایین k عملکرد نسبتاً مناسبی ندارد، اما با افزایش سطح k به مقادیر مطلوب نزدیک‌تر می‌شود. در همین رابطه، روش G & V ضعیف‌ترین نتایج را در پی دارد.

۷. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

هدف تحقیق حاضر بر ایجاد برآورد فاصله‌یی از شاخص‌های C_{pm} و C_{pmk} برای داده‌های خودهمبسته AR(۱) معطوف بود که به‌دلیل توزیع نامعلوم شاخص‌ها در چنین شرایطی، استفاده از روش رایانه‌محور بوت‌استرپ بلوکی حلقوی با سازوکار خاص بازنمونه‌گیری از مشاهدات پیشنهاد شد. مهم‌ترین مزیت این روش نسبت به روش‌های تقریبی موجود در ادبیات در عدم نیاز به تشخیص الگوی خودهمبستگی میان مشاهدات نهفته است.

به‌منظور ارزیابی الگوریتم پیشنهادی و مقایسه با سایر روش‌های موجود در ادبیات، مطالعات شبیه‌سازی مختلفی انجام و نتایج آنها بررسی شد. در بررسی نتایج شبیه‌سازی برآورد توزیع نمونه‌گیری شاخص‌های قابلیت فرایند، اثر خودهمبستگی در برآورد اریب انحراف استاندارد نمونه‌یی و نیز وجود اریب در برآوردکننده‌های شاخص‌های قابلیت فرایند مورد تأیید قرار گرفت. بنابراین، بررسی شاخص‌های قابلیت فرایند استوار در چنین شرایطی می‌تواند مورد توجه قرارگیرد. البته با افزایش اندازه نمونه، از میزان اریب‌ها کاسته شد و برآوردهای دقیق‌تری به دست آمد. ارزیابی مطالعات شبیه‌سازی براساس معیارهای مختلف نشان داد که، بدون توجه به سطح همبستگی و روش بوت‌استرپ مفروض، حدود ۹۵٪ روش SB، با فواصل متقارنی بر مبنای توزیع نرمال، غالباً عملکرد بهتری دارد و با وجود این که در ارائه‌ی روش BCa برای اصلاح اریب برآورد مورد نظر تلاش می‌شود، در این مطالعه از عملکرد ضعیف‌تری برخوردار است. با توجه به نتایج حاصل از انجام مقایسه با روش‌های موجود در ادبیات، روش والگرن برای برآورد فاصله‌یی شاخص C_{pm} و روش بوت‌استرپ بلوکی حلقوی برای شاخص C_{pmk} با داده‌های خودهمبسته AR(۱) توصیه می‌شود. البته در شرایط عدم اطلاع از سطح خودهمبستگی، همواره روش بوت‌استرپ بلوکی حلقوی برتری دارد. با این حال، توسعه‌ی روش‌های کاربردی بوت‌استرپ برای دیگر الگوهای سری‌های زمانی ایستا، فصلی و ناایستا و همچنین روش‌های جایگزین برای تحلیل خودهمبسته‌ی غیرنرمال زمینه‌ی تحقیقات بیشتر نوشتار حاضر محسوب می‌شود.

پانوشت‌ها

1. moving block bootstrap
2. circular block bootstrap
3. standard bootstrap (SB)
4. biased-corrected and accelerated (BCa) percentile bootstrap
5. average coverage percentage
6. average interval length
7. frequency of total appropriate estimated ACP

منابع (References)

1. Hsiang, T.C. and Taguchi, G. "A tutorial on quality control and assurance - the Taguchi methods", ASA Annual Meeting, Las Vegas, Nevada, USA (1985).
2. Pearn, W.L., Kotz, S. and Johnson, N.L. "Distributional and inferential properties of process capability indices", *Journal of Quality Technology,* **24**(4), pp. 216-231 (1992).
3. Nabatchian, M.R. and Shahriari, H. "Modification of the process apability index, C_{pm}, based on Taguchi studies", *Proceedings of the 9th International Conference in Industrial Engineering Conference,* Tehran, Iran (2013).
4. Ali, S. and Riaz, M. "On the generalized process capability under simple and mixture models", *Journal of Applied Statistics*, **41**(4), pp. 832-852 (2014).
5. Besseris, G. "Robust process capability performance", *The TQM Journal*, **26**(5), pp. 445-462 (2014).
6. Zhang, N.F., Stenback, G.A. and Wardrop, D.M. "Interval estimation of process capability index C_{pk}", *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **19**(12), pp. 4455-4470 (1990).
7. Chou, Y.M., Owen, D.B. and Borrego, A.S.A. "Lower confidence limits on process capability indices", *Journal of Quality Technology,* **22**(3), pp. 223-229 (1990).
8. Bissel, A.F. "How reliable is your capability index?", *Applied Statistics*, **39**(3), pp. 331-340 (1990).
9. Frankllin, L.A. and Wasserman, G.S. "A note on the coservative nature of the tables of lower confidence limits for C_{pk} with a suggested correction", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **21**(4), pp. 926-932 (1992).
10. Kushler, R.H. and Hurley, P. "Confidence bounds for capability indices", *Journal of Quality Technology,* **24**(4), pp. 188-195 (1992).
11. Boyles, R.A. "The taguchi capability index", *Journal of Quality Technology*, **23**(1), pp. 17-26 (1991).

12. Alwan, L.C. and Roberts, H.V. "The problem of misplaced control limits", *Journal of the Royal Statistical Society,* **44**(3), pp. 269-306 (1995).

13. Montgomery, D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th ed., Wiley, New York (2008).

14. Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 4th ed., Holden-Day, San Francisco (2008).

15. Shore, H. "Process capability analysis when data are autocorrelated", *Quality Engineering*, **9**(4), pp. 615-626 (1997).

16. Zhang, N.F. "Estimating process capability indexes for autocorrelated data", *Journal of Applied Statistics,* **25**(4), pp. 559-574 (1998).

17. Wallgren, E., *Essays on Capability Indices for Autocorrelated Data*, Acta Universitatis Upsaliensis, Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Social Science 25, pp. 1-36 (2007).

18. Guevara, R.D. and Vargas, J.A. "Comparison of process capability indices under autocorrelated data", *Revista Colombiana de Estadstica,* **30**(2), pp. 301-316 (2007).

19. Lovelace, C.R., Swain, J.J., Zeinelabdin, H. and Gupta, J.N.D. "Lower confidence limits for process capability indices C_p and C_{pk} when data are autocorrelated", *Quality and Reliability Eng. Int.,* **25**(6), pp. 663-700 (2009).

20. Chien-Wei, W., Pearn, W.L. and Kotz, S. "An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance", *International Journal of Production Economics,* **117**(2), pp. 338-359 (2009).

21. Efron, B. and Tibshirani, R.J., *An Introduction to the Bootstrap,* Chapman & Hall, London (1993).

22. Davison, A. and Hinkley, D.V., *Bootstrap Methods and Their Applications*, Cambridge University Press, U.K (1997).

23. Frankllin, L.A. and Wasserman, G.S. "Bootstrap confidence interval estimation of C_{pk}: An introduction", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **20**(1), pp. 231-242 (1991).

24. Frankllin, L.A. and Wasserman, G.S. "Bootstrap lower confidence limits for process capability indices", *Journal of Quality Technology,* **24**(4), pp. 196-210 (1992).

25. Balamurali, S. and Kalyanasundaram, M. "Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices C_p, C_{pk} and C_{pm}", *International Journal of Quality and Reliability Management*, **19**(8), pp. 1088-1097 (2002).

26. Balamurali, S. "Bootstrap confidence limits for the process capability index C_{pmk}", *International Journal of Quality Engineering and Technology,* **3**(1), pp. 79-90 (2012).

27. Jafarian, N.S., Raissi, S. and Amiri, A. "Bootstrap confidence intervals for AR(1) autocorrelated process capability indices", *Journal of Quality Engineering and Management,* **2**(4), pp. 237-249 (In Persian) (2013).

28. Lahiri, S.N. "Theoretical comparisons of block bootstrap methods", *The Annals of Statistics*, **27**(1), pp. 386-404 (1999).

29. Politis, D.N. and Romano, J.P., *A Circular Block Resampling Procedure for Stationary Data*, In Exploring the Limits of Bootstrap, Edited by R. LePage, and L. Billard, Wiley, New York (1992).

30. DiCiccio, T. and Efron, B. "Bootstrap confidence intervals", *Statistiacal Science,* **11**(3), pp. 189-228 (1996).