

# انتخاب سبب سهام چندهدفه با ترکیب مدل‌های مارکویتز و تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی

هاشم عمرانی\* (استادیار)

زهره مشایخی (دانشجوی کارشناسی ارشد)  
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی ارومیه

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۶  
دوری (۳۳-۱)، شماره ۱/۱، ص. ۸۷-۹۴

در این مقاله مدل ترکیبی چندهدفه‌ی بر پایه‌ی مدل میانگین - واریانس مارکویتز برای انتخاب سبب سهام ارائه شده که علاوه بر ریسک و بازده، کارایی سبب سهام را نیز به طور هم‌زمان در نظر می‌گیرد. مدل پیشنهادی، یک مدل چندهدفه است که میانگین بازدهی سهام و کارایی آنها را بیشینه و ریسک سبب سهام را کمینه می‌کند. برای سنجش کارایی از مدل تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی استفاده شده است. همچنین الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) برای حل مدل ارائه شده است. برای نشان دادن عملکرد مدل پیشنهادی، این مدل برای ۵۲ شرکت از بورس اوراق بهادار تهران به کار گرفته شده و نتایج با مدل میانگین - واریانس مارکویتز مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی نسبت به مدل مارکویتز کارایی را به نحو چشمگیری افزایش می‌دهد در حالی که بازده سبب سهام کاهش ناچیزی می‌یابد.

واژگان کلیدی: انتخاب سبب سهام، مدل میانگین - واریانس مارکویتز، مدل تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی، الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب.

## ۱. مقدمه

بازار سهام یکی از شیوه‌های رایج سرمایه‌گذاری، و انتخاب سبب سهام مناسب یکی از مشکلات سرمایه‌گذاران است. مارکویتز اولین کسی بود که مفهوم انتخاب سبب سهام را به عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح کرد.<sup>[۱]</sup> در این نظریه فرض می‌شود سرمایه‌گذار سعی در تنوع بخشیدن به سبب سرمایه‌گذاری‌اش دارد و با توجه به ترجیحات ریسک و بازدهی خود، جایی را روی مرز کارا انتخاب می‌کند. مارکویتز مفهوم متنوع‌سازی را با کمک کوارانس بین اوراق بهادار و انحراف معیار کلی سبب سهام اندازه‌گیری کرد. در این مدل ترکیبی از دارایی‌ها انتخاب می‌شود به طوری که واریانس سبب سهام برای هر سطحی از بازدهی مورد انتظار کمینه شود و به طور هم‌زمان بازدهی مورد انتظار برای هر سطح مشخصی از واریانس سبب سرمایه‌گذاری بیشینه شود. بعد از مارکویتز، بسیاری از محققین مدل پایه‌ی خود را مدل میانگین - واریانس مارکویتز قرار دادند. در ادامه به مروری بر ادبیات موضوع می‌پردازیم.

## ۲. مرور ادبیات

بعضی از محققین مدل مارکویتز را توسعه داده و با اضافه کردن محدودیت‌ها و تابع هدف‌های گوناگون سعی در واقعی و کاربردی‌تر کردن مدل مارکویتز کردند. همچنین با

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۱۰/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۴/۵/۲۵، پذیرش ۱۳۹۴/۶/۱.

اضافه شدن این محدودیت‌ها و تابع هدف‌های مختلف، مسئله‌ی انتخاب سبب سهام پیچیده‌تر شده و حل آن به روش‌های معمول برای تعداد سهام بالا ممکن نیست.<sup>[۲]</sup> مانسینی و اسپرانزا نشان دادند که مسئله‌ی انتخاب سبب سهام با محدودیت کاردینالیتهی دارای پیچیدگی محاسباتی (NP-hard) است.<sup>[۳]</sup> به این دلیل، روش‌های ابتکاری و فراابتکاری مختلفی نیز برای این مسائل استفاده و توسعه داده شده‌اند. کونو، انحراف از میانگین مطلق را به عنوان ریسک در نظر گرفت.<sup>[۴]</sup> اسپرانزا بر پایه‌ی مدل کونو، مدلی ارائه داد که حداقل حجم معامله و حداکثر تعداد سهام منتخب در سبب را در نظر بگیرد.<sup>[۵]</sup> یوشیموتو، هزینه معامله را به مدل مارکویتز اضافه کرد و مدل را چند دوره‌ی در نظر گرفت.<sup>[۶]</sup> چانگ و همکارانش محدودیت کاردینالیتهی را به مدل میانگین - واریانس اضافه کردند که تعداد سهام سبب را محدود می‌کند. آنها سه الگوریتم ابتکاری بر پایه‌ی الگوریتم ژنتیک برای حل مدل خود ارائه کردند.<sup>[۷]</sup> کارر و مرینگر یک الگوریتم جست‌وجوی محلی که اصول شبیه‌سازی تیرید و استراتژی تکاملی را ترکیب می‌کند برای حل مدل مارکویتز با محدودیت کاردینالیتهی ارائه دادند.<sup>[۸]</sup> اسکرف، مدل مارکویتز را با محدودیت کاردینالیتهی و محدودیتی برای مقدار هر یک از سهام به طور مجزا در نظر گرفت. او روش‌های جست‌وجوی محلی خصوصاً جست‌وجوی ممنوع را برای مسئله‌ی انتخاب سبب سهام بررسی کرد و الگوریتم جدیدی پیشنهاد کرد که روابط همسایگی مختلفی را ترکیب می‌کند.<sup>[۹]</sup> فرناندز و گمز مدل توسعه‌یافته‌ی مارکویتز، شامل محدودیت‌های کاردینالیتهی و کران، را با به‌کارگیری شبکه‌ی عصبی حل کردند.<sup>[۱۰]</sup> چانگ و همکارانش مدل مارکویتز را با در نظر گرفتن معیارهای

است. با به‌کارگیری مدل تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی در مدل مارکویتز سعی شده از مزیت‌های هر دو مدل استفاده شود. برای حل مدل پیشنهادی، الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) نیز ارائه شده است. در ادامه، ابتدا مدل پیشنهادی بر پایه مدل مارکویتز و تحلیل پوششی داده‌ها ارائه خواهد شد. سپس به شرح مختصری از الگوریتم NSGA-II و چگونگی به‌کارگیری آن در انتخاب سبد سهام خواهیم پرداخت. سپس مدل پیشنهادی برای داده‌های واقعی ۵۲ شرکت از بورس اوراق بهادار تهران به کار گرفته شده و در بخش ۵ نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

### ۳. بدنه مدل

این مطالعه مبتنی است بر مدل مارکویتز و تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی؛ و در ادامه این مدل‌ها و مدل پیشنهادی ارائه شده است.

#### ۱.۳. مدل مارکویتز

مدل استاندارد میانگین - واریانس مارکویتز عبارت است از: [۱]

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \bar{R}_p = E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i \geq R \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (3)$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i \quad (4)$$

که در آن،  $\bar{R}_i$  متوسط بازده سهم  $i$ ام،  $\text{cov}(R_i, R_j)$  کوواریانس بازده سهام  $i$  و  $j$ ،  $N$  تعداد سهام در دسترس و  $R$  نرخ بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار است. متغیر تصمیم  $w_i$ ، وزن سهم  $i$  در سبد سهام است. هدف مدل کمینه‌سازی ریسک سبد ( $\sigma_p^2$ ) به‌ازای بازده مورد انتظار داده شده است. محدودیت ۳ را «محدودیت بودجه» می‌نامند؛ بدین معنا که مجموع اوزان سهام در سبد باید برابر ۱ شود. محدودیت ۴ تضمین می‌کند که وزن‌های سهام اعداد نامنفی باشد که به محدودیت منع فروش استقراری معروف است. مدل دوهدفه‌ی معادل این مدل بدین صورت است:

$$\max \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i \quad (5)$$

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (7)$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i \quad (8)$$

#### ۲.۳. مدل تحلیل پوششی داده‌ها

مدل تحلیل پوششی داده‌ها در سال ۱۹۷۸ توسط چارنس و همکارانش ارائه شد. [۲۷]

مختلف برای سنجش ریسک (نیمه‌واریانس، انحراف مطلق از میانگین و واریانس) گسترش دادند و از الگوریتم ژنتیک استفاده کردند. [۱۱] سلیمانی و همکارانش انتخاب سبد سهام را با محدودیت کاردینالیتی و حداقل حجم معامله در نظر گرفتند. آن‌ها محدودیت ارزش‌بخش را پیشنهاد دادند و از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل خود استفاده کردند. [۱۲] آناگنوستوپلس و ممینز مسئله‌ی انتخاب سبد سهام چندهدفه شامل ریسک، بازده و تعداد سهام را ارائه دادند و محدودیت‌های مقدار و کلاس را به مدل خود اضافه کردند. آن‌ها برای حل مدل خود از الگوریتم‌های NSGA-II، PESA و SPEA۲ بهره گرفتند و عملکرد آن‌ها را با هم مقایسه کردند. [۱۳] یو و لی پنج مدل تعادل مجدد سبد سهام با در نظر گرفتن معیارهای ریسک، بازده، فروش استقراری، چولگی و کشیدگی را ارائه دادند. [۱۴] گلمکانی و فاضل، مدل توسعه‌یافته‌ی -- شامل محدودیت‌های کران، کاردینالیتی، حداقل حجم معامله و محدودیت ارزش‌بخش -- را در نظر گرفتند. آن‌ها الگوریتمی ترکیبی بر مبنای بهینه‌سازی گروه ذره‌ها برای حل مدل خود ارائه دادند و عملکرد آن را با الگوریتم ژنتیک مقایسه کردند. [۱۵] سجادی و همکارانش نیز مسئله‌ی انتخاب سبد سهام را با محدودیت کاردینالیتی و داده‌های غیرقطعی در نظر گرفتند و مدل خود را با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل کردند. [۱۶] لی و ژو مدلی چندهدفه با بازده تصادفی فازی و با در نظر گرفتن معیارهای ریسک، بازده و نقدشوندگی ارائه دادند و از رویکرد برنامه‌ریزی توافقی بر پایه الگوریتم ژنتیک برای حل استفاده کردند. [۱۷] برک و همکارانش یک مدل میانگین - واریانس - چولگی فازی با محدودیت کاردینالیتی و با در نظر گرفتن نقدشوندگی ارائه دادند. آن‌ها برای حل مدل خود الگوریتمی مرکب از الگوریتم ژنتیک، شبیه‌سازی فازی و محدودیت کاردینالیتی پیشنهاد کردند. [۱۸] جانا و همکارانش تابع هدف بیشینه‌سازی آنتروپی را به منظور دست‌یابی به سبد سهام متنوع در مدل خود در نظر گرفتند و از تکنیک برنامه‌ریزی فازی برای حل استفاده کردند. [۱۹] هرگات و همکارانش مدل مارکویتز را توسعه دادند و مدلی با پنج هدف بازده دوازده‌ماهه، بازده سه‌ساله، سود تقسیمی سهام سالیانه، رتبه‌بندی ستاره‌دار S&P و انحراف معیار برای سنجش ریسک را ارائه دادند. آن‌ها برای حل مدل خود از چند روش فراابتکاری استفاده کردند. [۲۰]

عده‌ی از محققین از تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) در مسئله‌ی انتخاب سبد سهام استفاده کرده‌اند. ادایارزینگهی و ژانگ از تحلیل پوششی داده‌ها برای تحلیل صورت‌های مالی شرکت‌ها و تعیین سهام مطلوب استفاده کردند و سپس مدل میانگین - واریانس را برای انتخاب سبد سهام از میان این سهام مطلوب کاندید شده به‌کار گرفتند. آنها الگوریتمی دومرحله‌ی مرکب از نمونه‌گیری تصادفی و جست‌وجوی محلی را برای حل مدل‌شان به‌کار گرفتند. [۲۱] برندا، آزمون سنجش کارایی جدیدی بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد کرده و تنوع سبد را نیز در نظر گرفت. او در مدل پیشنهادی خود معیارهای انحراف را به‌عنوان ورودی و معیارهای بازده را به‌عنوان خروجی در نظر گرفت. [۲۲] لمب و تی روشی برای در نظر گرفتن تنوع در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند و معیارهای ریسک و بازده را به‌صورت هم‌تراز در نظر گرفتند. [۲۳] آنها در پژوهشی دیگر مسئله‌ی عدم قطعیت را در امتیاز‌کارایی در نظر گرفتند. [۲۴] جوو و نا، از تحلیل پوششی داده‌ها برای سنجش عملکرد سبد سهام در یک چارچوب میانگین - واریانس-چولگی استفاده کردند. [۲۵] لیم و همکارانش برای مسئله‌ی انتخاب سبد سهام، روشی جدید با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی و براساس چارچوب میانگین - واریانس ارائه دادند. [۲۶]

در نوشتار حاضر مدلی چندهدفه برای انتخاب سبد سهام بر پایه مدل مارکویتز ارائه شده که علاوه بر ریسک و بازده، کارایی سبد سهام را نیز به‌طور هم‌زمان در نظر می‌گیرد. تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی برای سنجش کارایی به کار گرفته شده

فرم مضربی مدل CCR ورودی محور عبارت است از:

$$\max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} \quad (۹)$$

$$\text{s.t.} : \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j \quad (۱۰)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1 \quad (۱۱)$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad \forall i, r \quad (۱۲)$$

است که آن را با نماد  $\bar{e}_i$  نمایش می‌دهیم:

$$\bar{e}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N e_{ki} \quad (۱۴)$$

تحلیل پوششی داده‌ها به هر DMU اجازه می‌دهد که وزن‌های دلخواه خود را انتخاب کند. هر DMU با دادن وزن بهینه‌ی بالا به فاکتورهای مرتبط با نقاط قوت خود، روی نقاط قوت خود تأکید می‌کند و برای نقاط ضعف خود بالعکس، تا امتیاز کارایی‌اش را بیشینه کند. این نقاط قوت و ضعف به صورت داخلی نمود پیدا می‌کنند. در تحلیل پوششی داده‌ها هر DMU نیازی به در نظر گرفتن مجموعه وزن‌های انتخابی سایر DMUها ندارد و تنها از وزن‌های خود استفاده می‌کند. این مکانیسم به خودی خود برای مفهوم ارزشیابی کارایی، معتبر است اما وقتی که تحلیل پوششی داده‌ها برای انتخاب سید سهام تحت مفهوم تصمیم‌گیری چند معیاره به کار می‌رود که در آن وزن‌های معیارهای عملکرد به صورت خارجی تعیین می‌شوند و ممکن است در طول زمان ثابت باقی نمانند و با توجه به محیط اطراف به طور قابل ملاحظه‌ی تغییر کنند، مناسب نیست. با توجه به این موضوع هر DMU در معرض ریسک تغییر وزن‌ها قرار دارد. یکی از راه‌های مقابله با این مشکل استفاده از تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی است. با استفاده از ارزیابی کارایی تقاطعی DMUهایی که عملکردشان به طور متوسط در همه‌ی معیارها خوب باشد امتیاز بالایی می‌گیرند. آن‌ها در برابر تغییر وزن‌ها پایدارند و واریانس کارایی تقاطعی آن‌ها نسبتاً کوچک است. از طرف دیگر DMUهایی که در یک سری از معیارها خوب عمل کرده‌اند امتیاز پایینی می‌گیرند و در برابر تغییر وزن‌ها آسیب‌پذیرند و واریانس کارایی تقاطعی بالایی دارند. به دلایل ذکر شده، ارزیابی کارایی تقاطعی به انتخاب سید سهامی که در آن DMUها در برابر تغییر وزن‌ها پایدار باشند کمک می‌کند. [۲۶]

### ۴.۳. معیارهای ورودی و خروجی مدل

در این مقاله برای ورودی‌ها و خروجی‌های مدل تحلیل پوششی داده‌ها همان فاکتورهایی که لیم و همکارانش [۲۶] در مدل خود به کار بردند در نظر گرفته شده است. این معیارها نماینده‌ی دورنمایی از عملکرد شرکت‌ها هستند که شامل سودآوری، بهره‌وری سهم، نقدشوندگی، نسبت‌های اهرمی و رشد هستند. معیارهای ورودی و خروجی به ترتیب در جداول ۱ و ۲ ذکر شده است. از آن‌جا که ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌توانند مقادیر منفی داشته باشند استفاده از مدل CCR مناسب نیست. برای رفع این مشکل، مانند لیم و همکارانش از مدل

جدول ۱. معیارهای ورودی.

معیار	توضیح	دورنما
گردش دریاقتی‌ها	درآمد دوره تقسیم بر حساب‌های دریاقتی	بهره‌وری
گردش موجودی	درآمد دوره تقسیم بر موجودی	بهره‌وری
گردش دارایی	درآمد دوره تقسیم بر دارایی کل	بهره‌وری
نسبت جاری	دارایی‌های جاری تقسیم بر بدهی‌های جاری	نقدشوندگی
نسبت سریع	دارایی‌های جاری سریع (دارایی‌های جاری منهای موجودی) تقسیم بر بدهی‌های جاری	نقدشوندگی
نسبت بدهی به دارایی شرکا	بدهی‌های بلندمدت تقسیم بر سهم مالکین	نقدشوندگی
نسبت اهرمی	دارایی کل تقسیم بر سهم مالکین	نسبت اهرمی

که در آن  $n$  تعداد واحدهای تصمیم‌گیری (اصطلاحاً DMU)،  $m$  تعداد ورودی‌ها،  $s$  تعداد خروجی‌ها،  $x_{ij}$  مقدار ورودی  $i$ ام برای زامین DMU،  $y_{rj}$  مقدار خروجی  $r$ ام برای زامین DMU است.  $u_r$  وزن تخصیص یافته به خروجی  $r$ ام و  $v_i$  وزن تخصیص یافته به ورودی  $i$ ام است (توجه کنید که این وزن‌ها متغیر تصمیم‌گیری در مدل تحلیل پوششی داده‌ها هستند).  $\varepsilon$  عدد مثبت بی‌نهایت کوچک است. این مدل وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها را طوری تعیین می‌کند که امتیاز کارایی DMU مشخص  $k$  بیشینه شود. وزن‌های بهینه را با \* نشان می‌دهیم.

### ۳.۳. تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی

یکی از کمبودهای شناخته شده‌ی تحلیل پوششی داده‌ها، انعطاف‌پذیری بالای آن در انتخاب وزن‌های بهینه برای فاکتورهای ورودی و خروجی است. یک DMU می‌تواند با تخصیص وزن‌های بسیار زیاد به بعضی فاکتورها و وزن‌های بسیار کم به بعضی دیگر، کارایی بالایی کسب کند. این DMUها اصطلاحاً maverics خوانده می‌شوند. این مسئله می‌تواند باعث مشکلات جدی شود به خصوص وقتی که تحلیل پوششی داده‌ها تحت مفهوم تصمیم‌گیری چند معیاره استفاده می‌شود زیرا ممکن است از انتخاب وزن‌های معقول برای تجمیع معیارهای چندگانه جلوگیری کند. یکی از رویکردهای مقابله با این مشکل استفاده از ارزشیابی کارایی تقاطعی به جای مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های سنتی است. با استفاده از ارزشیابی کارایی تقاطعی، شانس mavericsها برای کسب امتیاز بالا کم می‌شود. به دلیل این خاصیت مطلوب، استفاده از ارزشیابی کارایی تقاطعی در بسیاری از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها متداول است. [۲۶] بنا بر این دلیل، در این مقاله نیز برای سنجش کارایی از تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی استفاده شده است.

فرض کنید فرم مضربی مدل CCR را که در بخش قبل توضیح داده شد، برای DMU مشخص  $k$  اجرا کنیم. امتیاز کارایی سایر DMUها که با استفاده از وزن‌های بهینه‌ی  $DMU_k$  محاسبه می‌شود، کارایی تقاطعی DMUها است (که با  $DMU_k$  ارزشیابی شده). برای مثال کارایی تقاطعی  $DMU_i$  به صورت رابطه ۱۳ محاسبه می‌شود:

$$e_{ki} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ik}} \quad (۱۳)$$

حال یک ماتریس تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی به صورت  $E = (e_{ij})$ ،  $i, j = 1, 2, \dots, n$  به دست می‌آید که در آن درایه‌ی  $e_{ij}$  کارایی تقاطعی  $DMU_j$  است که با  $DMU_i$  سنجیده شده و در نتیجه ستون  $i$ ام ماتریس  $E$  بردار کارایی تقاطعی  $DMU_i$  است. میانگین ستون  $i$ ام ماتریس  $E$  امتیاز کارایی تقاطعی  $DMU_i$

جدول ۲. معیارهای خروجی.

معیار	توضیح	دورنما
نسبت بدهی به دارایی ۱	بدهی کل تقسیم بر دارایی کل	نسبت اهرمی
نسبت بدهی به دارایی ۲	بدهی کل تقسیم بر سهم مالکین	نسبت اهرمی
نسبت برگشت روی سهم مالکین	سود خالص تقسیم بر سهم مالکین	سودآوری
نسبت برگشت روی دارایی حاشیه سود	سود خالص تقسیم بر دارایی کل سود خالص تقسیم بر درآمد دوره	سودآوری سودآوری
سود هر سهم (EPS)	سود خالص منهای سود تقسیم شده بر تعداد سهام در دست مردم	سودآوری
نرخ رشد درآمد	درآمد دوره جاری تقسیم بر درآمد دوره قبل منهای ۱	رشد
نرخ رشد سود خالص	سود خالص دوره جاری تقسیم بر سود خالص دوره قبل منهای ۱	رشد
نرخ رشد سود هر سهم	سود هر سهم دوره جاری تقسیم بر سود هر سهم دوره قبل منهای ۱	رشد

VRS DEA تجمعی با معیار ناکارایی تنظیم شده استفاده شده است. [۲۸] مدل تجمعی با معیار ناکارایی تنظیم شده به صورت زیر است:

$$\min - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{R_r^+} \right) \quad (15)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad \forall i \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad \forall r \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (18)$$

$$\lambda_j, s_{ik}^-, s_{rk}^+ \geq 0 \quad \forall j, i, r \quad (19)$$

$R_r^+$  و  $R_i^-$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$R_i^- = \max_{j=1,2,\dots,n} \{x_{ij}\} - \min_{j=1,2,\dots,n} \{x_{ij}\}, \quad \forall i \quad (20)$$

$$R_r^+ = \max_{j=1,2,\dots,n} \{y_{rj}\} - \min_{j=1,2,\dots,n} \{y_{rj}\}, \quad \forall r \quad (21)$$

مدل دوگان مدل تجمعی با معیار ناکارایی تنظیم شده به صورت زیر است:

$$\max \sum_{r=1}^s p_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m q_i x_{ik} + \varepsilon \quad (22)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^s p_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m q_i x_{ij} + \varepsilon \leq 0 \quad \forall j \quad (23)$$

$$p_r \geq \frac{1}{(m+s) R_r^+} \quad \forall r \quad (24)$$

$$q_i \geq \frac{1}{(m+s) R_i^-} \quad \forall i \quad (25)$$

که در آن  $p$  و  $q$  به ترتیب وزن‌های ورودی و خروجی برای  $DMU_k$  هستند. اگر وزن‌های بهینه را با \* نشان دهیم، کارایی تقاطعی  $l$  امین  $DMU$  سنجیده شده با  $DMU_k$ ، یعنی  $e_{kl}$  به صورت رابطه‌ی ۲۶ محاسبه می‌شود:

$$e_{kl}^* = \sum_{r=1}^s p_r^* y_{rk} - \sum_{i=1}^m q_i^* x_{ik} + \varepsilon \quad (26)$$

برای به دست آوردن وزن‌های بهینه‌ی ورودی‌های و خروجی‌ها باید مدل دوگان را متناوباً برای همه‌ی  $DMU$ ها حل کنیم. مدل دوگان به صورت زیر توسعه داده شده تا بتوان وزن‌های بهینه و کارایی همه‌ی  $DMU$ ها را با اجرای مدل زیر به صورت هم‌زمان به دست آورد. برای این منظور تابع هدف مدل زیر، مجموع کارایی همه‌ی  $DMU$ ها را بیشینه می‌کند.

$$\max \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s p_{rk} y_{rk} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m q_{ik} x_{ik} + \varepsilon_k \quad (27)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^s p_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m q_{ik} x_{ij} + \varepsilon_k \leq 0 \quad \forall j, k \quad (28)$$

$$p_{rk} \geq \frac{1}{(m+s) R_r^+} \quad \forall r, k \quad (29)$$

$$q_{ik} \geq \frac{1}{(m+s) R_i^-} \quad \forall i, k \quad (30)$$

که در آن  $q_{ik}$  وزن ورودی  $i$  برای  $DMU_k$  و  $p_{rk}$  وزن خروجی  $r$  برای  $DMU_k$  است.

### ۵.۳. مدل ترکیبی مارکوویتز و تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی

در این مقاله مدل مارکوویتز و مدل تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی با هم ترکیب شده تا هم‌زمان ریسک، بازده و کارایی در مسئله‌ی انتخاب سبد سهام در نظر گرفته شود. مدل پیشنهادی عبارت است از:

$$\max \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i \quad (31)$$

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (32)$$

$$\max \sum_{i=1}^N w_i \bar{e}_i \quad (33)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n z_i \leq h \quad (34)$$

$$w_i \leq u_i z_i \quad \forall i \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (36)$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i \quad (37)$$

که در آن  $z_i$  یک متغیر صفر و ۱ است که وقتی سهم  $i$  در سبد باشد مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد  $u_i$ . حد بالای کسری از بودجه است که می‌تواند

۴. انتخاب والد و انجام عملیات جهش: با استفاده از رقابت دودویی یک والد برای انجام عملیات جهش انتخاب، و از جهش گوسی استفاده می‌کنیم. به این صورت که  $\mu$  درصد از ژن‌های والد را به تصادف انتخاب و به  $x'_i = x_i + \Delta x$  تغییر می‌دهیم؛ در این عبارت  $(\sigma^2, 0) \sim \Delta x$ . مقدار انحراف معیار نصف اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار است که هر ژن می‌تواند بگیرد، یعنی:  $0.15 = (0.3 - 0) \cdot \frac{1}{2}$ . این فرایند را  $P_m \cdot N_{pop}$  بار انجام می‌دهیم تا جمعیت جهش‌یافتگان ایجاد شود.  $P_m$  پارامتر ورودی الگوریتم و نشان‌دهنده درصدی از جمعیت است که در جهش شرکت می‌کنند.

۵. انتخاب جمعیت جدید: جمعیت اصلی، جمعیت فرزندان و جمعیت جهش‌یافتگان را تلفیق کرده و آن‌ها را مرتب می‌کنیم. اعضای جمعیت در مرحله اول براساس رتبه و در مرحله بعد (یعنی در صورت برابر بودن رتبه) براساس فاصله ازدحامی مرتب می‌شوند.  $N_{pop}$  عضو اول به‌عنوان جمعیت جدید انتخاب می‌شود.

۶. در صورت برآورده شدن شرط خاتمه (که در اینجا بیشترین تعداد تکرار است) به پایان الگوریتم رسیدیم و در غیر این صورت به گام ۳ برمی‌گردیم.

باید توجه داشت که تا این مرحله و با به‌کارگیری الگوریتم توضیح داده شده محدودیت‌های مدل در نظر گرفته نشده‌اند. برای در نظر گرفتن محدودیت‌ها و تضمین موجه بودن جواب، با استفاده از استراتژی‌های تعمیر بعد از گام‌های ۱، ۳، ۴، تمام اعضای جمعیت موجه خواهند بود.

استراتژی تعمیر، موجه بودن هر کروموزوم را می‌آزماییم. اگر در محدودیت‌های مدل صدق کرد پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت با سازوکارهای تعمیر زیر برآورده شدن محدودیت‌ها را تضمین می‌کنیم. (محدودیت‌های ۳۵ و ۳۷ در ساختار الگوریتم و با انتخاب ژن‌ها در بازه  $[0, 0.3]$  برآورده می‌شوند).

۱. برای برقراری محدودیت کاردینالیتی، از استراتژی تعمیری که لی و ژو در مقاله‌ی خود به کار بردند استفاده شده است. بدین صورت که اگر تعداد سهام انتخاب شده بیشتر از  $h$  است، به تعداد  $h$  از بزرگ‌ترین ژن‌ها را نگه می‌داریم و بقیه را معادل صفر قرار می‌دهیم.<sup>[۱۷]</sup>

۲. برای برقراری محدودیت بودجه، برای هر کروموزوم روش نرمالیزه کردن به کار گرفته شده است:

$$x'_i = x_i / \sum_{i=1}^N x_i \quad (40)$$

با نرمالیزه کردن ممکن است مقدار بعضی ژن‌ها کمی از ۰٫۳ تجاوز کنند اما قابل ملاحظه نیست.

#### ۴. مطالعه‌ی موردی

در این بخش مدل پیشنهادی را برای یک مثال واقعی از بورس اوراق بهادار تهران به کار می‌بریم که با استفاده از الگوریتم NSGA-II و نیز به روش دقیق با استفاده از نرم افزار Lingo ۱۵ حل شده است.

شرکت بورس اوراق بهادار تهران فهرست ۵۰ شرکت برتر فعال در تالار اصلی بورس اوراق بهادار را در گزارش‌های ۳ ماهه (فصلی) منتشر می‌کند. با استفاده از ۱۵ دوره داده‌های آماری سال‌های ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲، شرکت‌هایی که بیشترین دفعات حضور (بالای ۵ بار) را در این فهرست داشته‌اند، به همراه شرکت‌هایی که جزء

روی سهم  $i$  سرمایه‌گذاری شود.  $h$  حداکثر تعداد نوع سهامی است که می‌تواند در سبد باشد.  $\bar{e}_i$  امتیاز کارایی تقاطعی  $i$  امین DMU است. تابع هدف ۳۲ کارایی سبد سهام را بیشینه می‌کند. محدودیت ۳۴، محدودیت کاردینالیتی نامیده می‌شود و تعداد سهام موجود در سبد را محدود می‌کند. محدودیت ۳۵ محدودیت کران است و نشان‌گر بیشترین کسر بودجه است که می‌تواند روی هر سهم سرمایه‌گذاری شود و از تخصیص وزن زیاد به تعداد سهام اندک جلوگیری می‌کند. مقادیر  $h$ ،  $w_i$  و توجه به نظر سرمایه‌گذار تعیین می‌شوند. سایر توابع هدف و محدودیت‌ها همانند مدل مارکویتز است که توضیح داده شد.

#### ۶.۳. نسخه‌ی دوم الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II)

الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌ها در زمینه بهینه‌سازی چندهدفه است. پس از ارائه‌ی نسخه اول این الگوریتم در سال ۱۹۹۵، دب و همکارانش نسخه‌ی دوم این الگوریتم را در سال ۲۰۰۲ با نام اختصاری NSGA-II ارائه کردند.<sup>[۲۹]</sup> در این نوشتار، گام‌های الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نامغلوب مورد استفاده عبارت است از:

۱. ایجاد جمعیت اولیه: کروموزوم‌ها که نشان‌گر تعداد سهام در دسترس است به طول  $N$  در نظر گرفته شده و با بردار  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  نشان داده شده است. موقعیت هر ژن نشان‌دهنده‌ی شماره سهم و مقدار ژن نشان‌دهنده‌ی وزن آن سهم در سبد سهام است. به تعداد اندازه‌ی جمعیت که معمولاً با  $N_{pop}$  نشان داده می‌شود، کروموزوم‌ها را به‌طور تصادفی ایجاد می‌کنیم. با توجه به ساختار مسئله که مقدار هر ژن نشان‌گر وزن آن سهم در سبد سهام است، ژن‌های کروموزوم‌ها به‌صورت تصادفی بین صفر و ۱ ایجاد می‌شود. در این پژوهش چون حد بالا برای همه‌ی سهام یکسان و برابر ۰٫۳ در نظر گرفته شده ژن‌ها را می‌توان بین صفر و ۰٫۳ مقدار داد.

۲. ارزش‌یابی: برای هر کروموزوم فاکتورهای ارزش‌یابی یعنی رتبه و فاصله‌ی ازدحامی، که به ترتیب عامل اول و دوم در ارزش‌یابی هستند، را محاسبه می‌کنیم.

۳. انتخاب والد‌ها و انجام عملیات تقاطع: از فرایند رقابت دودویی برای انتخاب والد استفاده می‌شود. به این صورت که به تصادف دو عضو از جمعیت انتخاب می‌شود. اگر رتبه‌ی دو عضو انتخابی یکسان نیست، عضوی که دارای رتبه‌ی کم‌تری است، و در غیر این صورت عضوی که دارای فاصله‌ی ازدحامی بیشتری است انتخاب می‌شود. به این ترتیب دو والد  $x^1$  و  $x^2$  را انتخاب می‌کنیم.

در این مقاله از تقاطع حسابی -- که در مطالعات پیشین نیز به کار گرفته شده -- استفاده شده است.<sup>[۳۰-۳۲]</sup>

حالا از تقاطع حسابی برای انجام عملیات تقاطع استفاده می‌کنیم. به این صورت که بردار  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  را که در آن  $\alpha_i$ ها بین صفر و ۱ هستند، به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و دو فرزند  $y^1$  و  $y^2$  را چنین ایجاد می‌کنیم:

$$y_i^1 = \alpha_i x_i^1 + (1 - \alpha_i) x_i^2 \quad (38)$$

$$y_i^2 = \alpha_i x_i^2 + (1 - \alpha_i) x_i^1 \quad (39)$$

این فرایند را تا ایجاد جمعیت فرزندان یعنی  $P_c \cdot N_{pop} / 2$  بار انجام می‌دهیم؛  $N_{pop}$  اندازه‌ی جمعیت و  $P_c$  پارامتر درصدی از جمعیت است که در تقاطع شرکت می‌کنند. به این صورت جمعیت فرزندان ایجاد می‌شود.

جدول ۳. نتایج حل مدل مارکوویتز با الگوریتم NSGA-II.

شماره اجرا	بازده سبد	کارایی سبد
۱	۰٫۱۴۲۵	-۲٫۲۷۹۲
۲	۰٫۱۵۲۱	-۱٫۷۵۲۷
۳	۰٫۱۴۶۴	-۱٫۶۸۳۰
۴	۰٫۱۳۰۵	-۲٫۷۵۸۷
۵	۰٫۱۴۱۰	-۱٫۶۹۶۹
میانگین	۰٫۱۴۲۵	-۲٫۰۳۴۱

جدول ۴. نتایج حل مدل ترکیبی مارکوویتز و تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی با الگوریتم NSGA-II.

شماره اجرا	بازده سبد	کارایی سبد
۱	۰٫۱۳۰۵	-۱٫۰۲۰۷
۲	۰٫۱۲۵۷	-۰٫۹۱۰۷
۳	۰٫۱۳۳۸	-۰٫۸۴۱۱
۴	۰٫۱۳۰۵	-۱٫۰۲۰۷
۵	۰٫۱۲۲۰	-۱٫۱۰۶۶
میانگین	۰٫۱۲۸۵	-۰٫۹۷۹۹۶

آخرین لیست منتشر شده بودند، برای مطالعه‌ی موردی انتخاب شده‌اند. صندوق‌های سرمایه‌گذاری به دلیل استانداردهای حسابداری متفاوت‌شان از سایر شرکت‌ها، مستثنی شده‌اند. در نتیجه در این پژوهش ۵۲ شرکت انتخاب شد و داده‌های مورد نیاز برای ورودی‌های و خروجی‌های مدل تحلیل پوششی داده‌ها از آخرین صورت‌های مالی منتشره توسط شرکت‌ها جمع‌آوری شده و برای محاسبه‌ی بازده ماهانه‌ی سهام از بازده‌های روزانه برای ۱۲ ماه سال ۱۳۹۲ استفاده شده و میانگین این بازده‌های ماهانه به عنوان متوسط بازده سهام در نظر گرفته شده است.

## ۵. نتایج حل مدل

در این بخش، سبد سهام از بین این ۵۲ شرکت با به‌کارگیری مدل مارکوویتز و با به‌کارگیری مدل ترکیبی پیشنهادی و از دو طریق الگوریتم NSGA-II و از روش دقیق و با استفاده از نرم افزار Lingo انتخاب شده و نتایج با هم مقایسه شده است. بازده و کارایی سبد سهام انتخابی را به ترتیب به صورت رابطه ۴۱ و ۴۲ تعریف می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i \quad (41)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i \bar{e}_i \quad (42)$$

الگوریتم NSGA-II با استفاده از نرم‌افزار MATLAB R2012a نسخه‌ی ۷٫۱۴ کدنویسی و در رایانه‌ی با مشخصات Pentium(R) Dual core-CPU و RAM = ۲ GB اجرا شده است.

پارامتر  $h$  برابر ۱۰ و حد بالای سهام برای همه‌ی سهام یکسان و برابر ۰٫۳ در نظر گرفته شده است. برای هر مدل، الگوریتم NSGA-II با اندازه جمعیت ۵۰،  $\mu = ۲$ ،  $P_m = ۰٫۱$ ،  $P_c = ۰٫۹$  در هر بار اجرا، میانگین بازده و کارایی سبد سهام اعضای جبهه‌ی اول به عنوان بازده و کارایی سبد سهام در آن اجرا در نظر گرفته شده است. نتایج حل مدل مارکوویتز و مدل ترکیبی مارکوویتز و تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی به ترتیب در جداول ۳ و ۴ ارائه شده است.

مقایسه‌ی نتایج حاصله نشان می‌دهد که با به‌کارگیری مدل ترکیبی پیشنهادی، کارایی سبد سهام نسبت به سبد سهام انتخاب شده با مدل مارکوویتز به طور میانگین ۵۱٫۸۲ درصد بهبود می‌یابد، در حالی که بازده سهام سبد انتخابی به طور میانگین به مقداری ناچیز -- یعنی تنها ۹٫۸۲ درصد کاهش یافته است.

برای حل مدل به روش دقیق، از نرم افزار Lingo ۱۵ استفاده شده است. برای حل مدل چندهدفه از روش پارامتریک استفاده می‌شود. به همین منظور ابتدا باید

جدول ۵. نتایج حل مدل مارکوویتز با روش دقیق.

شماره اجرا	بازده سبد	کارایی سبد
۱	۰٫۱۲۷۲	-۰٫۹۱۳۰
۲	۰٫۱۲۴۷	-۱٫۰۱۸۹
۳	۰٫۱۳۱۱	-۰٫۷۱۵۶
۴	۰٫۱۲۲۲	-۱٫۰۲۰۶
۵	۰٫۱۳۰۰	-۰٫۹۵۸۶
میانگین	۰٫۱۲۷۰	-۰٫۹۲۵۳

توابع هدف بی مقیاس شود. بدین منظور مدل برای هر کدام از توابع هدف به صورت جداگانه و بدون در نظر گرفتن سایر توابع هدف بهینه شده است؛ مقدار بهینه برای هر تابع هدف را به ترتیب با  $z_1^*$ ،  $z_2^*$  و  $z_3^*$  برای توابع بازده، ریسک و کارایی نشان می‌دهیم. حال داریم:

$$\max \frac{\alpha \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i}{z_1^*} - \frac{\beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j)}{z_2^*} + \frac{\gamma \sum_{i=1}^N w_i \bar{e}_i}{z_3^*}$$

محدودیت‌های مدل همان محدودیت‌های مدل چندهدفه است. با تغییر ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  در مدل مارکوویتز و ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  در مدل ترکیبی می‌توان نقاط پارتو را به دست آورد. نتایج بازده و کارایی تعدادی از نقاط پارتو برای مدل مارکوویتز و مدل ترکیبی در جداول ۵ و ۶ آورده شده است.

در اینجا نیز مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهد که به‌کارگیری مدل ترکیبی پیشنهادی کارایی سبد سهام را نسبت به سبد سهام انتخاب شده با مدل مارکوویتز به طور میانگین ۵۰٫۲۷ درصد بهبود می‌دهد در حالی که بازده سهام سبد انتخابی به طور میانگین به میزان ناچیزی یعنی تنها ۸٫۷۶ درصد کاهش یافته است. همچنین با مقایسه‌ی متوسط بازده و کارایی به دست آمده برای هر مدل در

در این مقاله برای سنجش کارایی از تحلیل پوششی داده‌های تقاطعی استفاده شده است. سپس مدل پیشنهادی و مدل مارکوویتز برای ۵۲ شرکت از شرکت‌های بورس اوراق بهادار تهران به کار گرفته شده و نتایج با هم مقایسه شده است. نتایج حاصله نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی نسبت به مدل مارکوویتز کارایی را به نحو چشمگیری افزایش می‌دهد در حالی که بازده سبد سهام به میزان ناچیزی کاهش می‌یابد.

مسئله‌ی انتخاب سبد سهام به صورت تک‌دوره‌یی در نظر گرفته شده و برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود مسئله به صورت چنددوره‌یی در نظر گرفته شود. همچنین می‌توان محدودیت‌های جدیدی به مدل اضافه کرد. در این مقاله الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب برای حل مدل به کار گرفته شده است. استفاده از سایر الگوریتم‌های فراابتکاری نیز می‌تواند از مهم‌ترین توسعه‌های آتی این پژوهش باشد.

دو روش الگوریتم NSGA-II و روش دقیق، مشاهده می‌شود که نتایج نزدیکی به دست آمده و در نتیجه الگوریتم NSGA-II عملکرد مناسبی داشته است.

## ۶. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مطالعه بیشینه کردن کارایی سبد سهام را نیز به مدل مارکوویتز با محدودیت کاردینالیتهی اضافه کردیم تا بتوانیم علاوه بر ریسک و بازده، هم‌زمان کارایی سبد انتخابی را نیز در نظر بگیریم. در ادبیات موضوع موارد متعدد گسترش مدل مارکوویتز مشاهده می‌شود، و نیز مطالعاتی که از DEA برای انتخاب سبد سهام استفاده کرده‌اند اما در هیچ‌یک از آن‌ها بازده، ریسک و کارایی به صورت هم‌زمان در یک مدل در نظر گرفته نشده است.

## منابع (References)

1. Markowitz, H. "Portfolio selection", *The Journal of Finance*, **7**(1), pp. 77-91 (1952).
2. Derakhshan, M., Golmakani, H.R. and Hanafizadeh, P. and Metaheuristic, A. "Approach to multiobjective portfolio selection in Tehran stock exchange (TSE)", *International Journal of Industrial Engineering & Production Management*, **23**(3), pp. 317-331 (2012).
3. Mansini, R. and Speranza, M.G. "Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots", *European Journal of Operational Research*, **114**(2), pp. 219-233 (1999).
4. Konno, H. "Piecewise linear risk function and portfolio optimization", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **33**(2), pp. 139-156 (1990).
5. Speranza, M.G. "Linear programming models for portfolio optimization. Finance", **14**(1), pp. 107-123 (1993).
6. Yoshimoto, A. "The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**(1), pp. 99-117 (1996).
7. Chang, T.J., Meade, N., Beasley, J.E. Sharaiha, Y.M. "Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization", *Computers & Operations Research*, **27**(13), pp. 1271-1302 (2000).
8. Maringer, D. and Kellerer, H. "Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm", *OR Spectrum*, **25**(4), pp. 481-495 (2003).
9. Schaerf, A. "Local search techniques for constrained portfolio selection problems", *Computational Economics*, **20**(3), pp. 177-190 (2002).
10. Fernández, A. and Gómez, S. "Portfolio selection using neural networks", *Computers & Operations Research*, **34**(4), pp. 1177-1191 (2007).
11. Chang, T.-J., Yang, S.-C. and Chang, K.-J. "Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm", *Expert Systems with Applications*, **36**(7), pp. 10529-10537 (2009).
12. Soleimani, H., Golmakani, H.R. and Salimi, M.H. "Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm", *Expert Systems with Applications*, **36**(3, Part 1), pp. 5058-5063 (2009).
13. Anagnostopoulos, K.P. and Mamanis, G. "A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables", *Computers & Operations Research*, **37**(7), pp. 1285-1297 (2010).
14. Yu, J.-R. and Lee, W.-Y. "Portfolio rebalancing model using multiple criteria", *European Journal of Operational Research*, **209**(2), pp. 166-175 (2011).
15. Golmakani, H.R. and Fazel, M. "Constrained portfolio selection using particle swarm optimization", *Expert Systems with Applications*, **38**(7), pp. 8327-8335 (2011).
16. Sadjadi, S.J., Gharakhani, M. and Safari, E. "Robust optimization framework for cardinality constrained portfolio problem", *Applied Soft Computing*, **12**(1), pp. 91-99 (2012).
17. Li, J. and Xu, J. "Multi-objective portfolio selection model with fuzzy random returns and a compromise approach-based genetic algorithm", *Information Sciences*, **220**(0), pp. 507-521 (2013).
18. Barak, S., Abessi, M. and Modarres, M. "Fuzzy turnover rate chance constraints portfolio model", *European Journal of Operational Research*, **228**(1), pp. 141-147 (2013).
19. Jana, P., Roy, T.K. and Mazumder, S.K. "Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**(1), pp. 188-196 (2009).
20. Ehrgott, M., Klamroth, K. and Schwehm, C. "An MCDM approach to portfolio optimization", *European*

- Journal of Operational Research*, **155**(3), pp. 752-770 (2004).
21. Edirisinghe, N.C.P. and Zhang, X. "Generalized DEA model of fundamental analysis and its application to portfolio optimization", *Journal of Banking & Finance*, **31**(11), pp. 3311-3335 (2007).
  22. Branda, M. "Diversification-consistent data envelopment analysis with general deviation measures", *European Journal of Operational Research*, **226**(3), pp. 626-635 (2013).
  23. Lamb, J.D. and Tee, K.-H. "Data envelopment analysis models of investment funds", *European Journal of Operational Research*, **216**(3), pp. 687-696 (2012).
  24. Lamb, J.D. and Tee, K.-H. "Resampling DEA estimates of investment fund performance", *European Journal of Operational Research*, **223**(3), pp. 834-841 (2012).
  25. Joro, T. and Na, P. "Portfolio performance evaluation in a mean-variance-skewness framework", *European Journal of Operational Research*, **175**(1), pp. 446-461 (2006).
  26. Lim, S., Oh, K.W. and Zhu, J. "Use of DEA cross-efficiency evaluation in portfolio selection: An application to Korean stock market", *European Journal of Operational Research*, **236**(1), pp. 361-368 (2014).
  27. Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, **2**(6), pp. 429-444 (1978).
  28. Cooper, W., Park, K. and Pastor, J. "RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA", *Journal of Productivity Analysis*, **11**(1), pp. 5-42 (1999).
  29. Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. and Meyarivan, T. "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II", *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, **6**(2), pp. 182-197 (2002).
  30. Liu, Y.-J., Zhang, W.-G. and Xu, W.-J. "Fuzzy multi-period portfolio selection optimization models using multiple criteria", *Automatica*, **48**(12), pp. 3042-3053 (2012).
  31. Huang, X. "Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information", *European Journal of Operational Research*, **180**(1), pp. 396-405 (2007).
  32. Xia, Y., Liu, B., Wang, S. and Lai, K.K. "A model for portfolio selection with order of expected returns", *Computers & Operations Research*, **27**(5), pp. 409-422 (2000).