

# طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل میانگین انطباق‌پذیر با اندازه نمونه متغیر با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری

عباس سقایی\* (دانشیار)

فائزه فاضلی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۶ (۱۳۹۶)  
دوری ۱، شماره ۱/۲، ص. ۵۵-۶۵

نمودارهای کنترل ی کی از ابزارهای کنترل فرایند و از مهم‌ترین روش‌های تشخیص تغییرات به شمار می‌روند. در کاربرد انواع نمودارها، طراحی پارامترهای آنها شامل اندازه نمونه، فاصله نمونه‌گیری و حدود کنترل ضروری است. اما از آنجا که از نمونه‌گیری استفاده می‌شود وجود خطای اندازه‌گیری اجتناب‌ناپذیر است. یکی از روش‌های کاهش اثرات خطای اندازه‌گیری تکرار اندازه‌گیری هر کالاست. در این نوشتار برای نخستین بار، طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل میانگین استاندارد و میانگین انطباق‌پذیر با اندازه نمونه متغیر با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری انجام شده است. سپس تابع طراحی شده با استفاده از مثال عددی بررسی، و در نهایت مقادیر بهینه‌ی پارامترهای طراحی با هدف کمینه‌کردن هزینه‌ها و با استفاده از الگوریتم ژنتیک حاصل شد. نتایج نشان‌دهنده‌ی کاهش هزینه‌ها با به‌کاربردن نمودار انطباق‌پذیر است. نتایج تحلیل حساسیت کاهش تعداد اندازه‌گیری‌های اضافی مشخصه‌ی کیفی هر محصول با افزایش شیب مدل خطای اندازه‌گیری را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: طراحی آماری - اقتصادی، خطای اندازه‌گیری، تکرار اندازه‌گیری، نمودار کنترل میانگین با اندازه نمونه متغیر، الگوریتم ژنتیک.

a.saghaei@srbiau.ac.ir  
f.fazeli@srbiau.ac.ir

## ۱. مقدمه

ساده‌ترین نمودار کنترل است و از آن برای پایش میانگین مشخصه‌ی کیفی مورد نظر استفاده می‌شود. استفاده از تمام نمودارهای کنترل، از جمله نمودار کنترل میانگین استاندارد، نیازمند طراحی پارامترهای این نمودارها - شامل انتخاب اندازه نمونه<sup>۱</sup>، فاصله‌ی نمونه‌گیری (فاصله‌ی زمانی بین نمونه‌گیری‌ها<sup>۲</sup>) و حدود کنترل<sup>۳</sup> - معروف به «طراحی آماری<sup>۴</sup>» است. هدف از طراحی آماری، یافتن مقادیر بهینه‌ی پارامترهای طراحی است، طوری که متوسط طول دنباله در شرایط تحت کنترل و متوسط طول دنباله برای شناسایی یک تغییر خاص در مشخصه‌ی کیفی، برابر مقدار مشخصی باشد. اما این روش طراحی هزینه‌های اقتصادی زیادی را به فرایند تحمیل می‌کند، زیرا هزینه‌های نمونه‌گیری و آزمایش، هزینه‌های بررسی هشدارهای خارج از کنترل، و احیاناً رفع انحرافات با دلیل و هزینه‌های مربوط به دریافت محصول نامنطبق به‌وسیله‌ی مشتری، همگی بستگی به انتخاب پارامترهای نمودار کنترل دارند. به همین علت، دیدگاه طراحی اقتصادی<sup>۵</sup> نمودارهای کنترل نیز باید مورد توجه قرار گیرد. منظور از طراحی اقتصادی تعیین پارامترهای نمودار کنترل است به طوری که مجموع هزینه‌های نمونه‌گیری، جست‌وجو و بازرسی، تعمیرات و هزینه‌ی تولید قطعات معیوب کمینه شود. هر دو طراحی آماری و اقتصادی، هر یک به‌طور جداگانه نقاط ضعف و قوت منحصر به خود را دارند. در همین راستا، طرح آماری - اقتصادی<sup>۶</sup> مطرح شد. هدف از طراحی آماری - اقتصادی، کمینه کردن متوسط هزینه در واحد زمان با اعمال

کنترل فرایند آماری یک رویکرد مناسب برای نگهداری پارامترهای فرایند در یک سطح تولیدی مناسب و کاهش هزینه‌های سازمان است. در بحث کیفیت، هر محصول و مشخصه‌های کیفی آن باید چنان ویژگی‌هایی داشته باشند که بتوانند شایسته‌ی کاربرد باشند. به عبارت دیگر، فرایند تولید دارای ثبات قابل قبول باشد و تغییر پذیری در مشخصه‌های کیفی محصول به حداقل مقدار ممکن کاهش یابد. برای نگه‌داری و بهبود کیفیت و کسب اطمینان از کمینه‌بودن تغییرات مشخصات محصول با مشخصات استانداردها، با استفاده از اندازه‌گیری‌ها یا آزمون‌هایی کنترل کیفیت روی یک محصول صورت پذیرفت. سپس دکتر والتر شوهارت استفاده از آمار را در کنترل کیفیت پیشنهاد داد و بدین ترتیب مبحثی جدید مطرح شد، تحت عنوان «کنترل فرایند آماری» که در حین تولید استفاده می‌شود و زیرشاخه‌ی کنترل کیفیت آماری است. نمودارهای کنترل برجسته‌ترین، مؤثرترین و در عین حال پیچیده‌ترین روش مورد استفاده در کنترل فرایند آماری است و نقش مهمی در ارتقاء کیفیت فرایند از طریق پایش و شناسایی تغییرات رخ داده در آنها ایفا می‌کنند. مهم‌ترین دلایل استفاده از نمودارهای کنترل، بهبود وضعیت موجود در یک فرایند است. نمودار کنترل  $\bar{X}$

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۸/۲۴، اصلاحیه ۱۳۹۴/۴/۲۹، پذیرش ۱۳۹۴/۸/۲۳.

تأثیر خطای اندازه‌گیری را بر نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی انطباق‌پذیر بررسی کرده و نشان دادند که عملکرد این نمودار کنترل در حضور خطای اندازه‌گیری کاهش می‌یابد.<sup>[۱۹]</sup> با توجه به مطالب ذکر شده مشاهده می‌شود طراحی آماری - اقتصادی نمودارهای کنترل میانگین استاندارد و انطباق‌پذیر با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری، تاکنون انجام نشده و به‌عنوان گپ تحقیقاتی به حساب می‌آید.

## ۲. مدل‌سازی

### ۱.۲. تعریف فرایند

در اکثر فرایندهای موجود، آگاهی از مقدار یک مشخصه کیفی نیازمند اندازه‌گیری آن مشخصه است. اما غالباً به‌علت وجود خطای اندازه‌گیری، قادر به مشاهده مقدار واقعی نخواهیم بود. لینا و وودال مدل خطای اندازه‌گیری را به‌صورت رابطه‌ی ۱ گسترش دادند:

$$Y = A + BX + \varepsilon \quad (1)$$

که در آن  $A$  و  $B$  مقادیر ثابت‌اند. با توجه به این که  $X$  (مقدار واقعی مشخصه کیفی) و  $\varepsilon$  (خطای تصادفی) به‌ترتیب دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma_p^2$  و میانگین صفر و واریانس  $\sigma_m^2$  هستند،  $Y$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $A + B\mu$  و واریانس  $\sigma_p^2 + \sigma_m^2$  خواهد بود. از آنجا که به‌علت وجود خطا در سیستم اندازه‌گیری امکان دستیابی به مقادیر واقعی  $X$  وجود ندارد از نمودارهای کنترل برای پایش  $Y$  جهت کنترل  $X$  استفاده می‌شود. اگر هر نمونه به تعداد  $K$  بار اندازه‌گیری شود میانگین کل  $\bar{Y}_i$  روی نمودار کنترل ترسیم می‌شود. آماره‌ی نمودار به‌صورت:

$$Z_i = \left( \bar{Y}_i - \mu_{\bar{Y}} / \sigma_{\bar{Y}} \right)$$

خواهد بود که در آن  $\bar{Y}_i$  میانگین زیرگروه‌ی است که اندازه نمونه‌اش  $n_i$  بوده و هر نمونه به تعداد  $K$  بار اندازه‌گیری شده است؛  $Z_i$  دارای توزیع نرمال استاندارد است. در صورتی که میانگین مشخصه کیفی  $\mu$  باشد، فرایند تحت کنترل است اما اگر میانگین تغییر کرده و به  $\mu + \delta\sigma_p$  تبدیل شود فرایند خارج از کنترل نامیده می‌شود. در فرایند مورد بررسی، فرض بر رخ دادن یک انحراف بادلیل بوده و تعداد وقوع این انحراف‌ها دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  در هر ساعت است. بنابراین زمان تحت کنترل بودن فرایند دارای توزیع نمایی با میانگین  $1/\lambda$  خواهد بود. لازم به ذکر است که این فرایند خوداصلاح نبوده و پس از انتقال به حالت خارج از کنترل، با انجام فعالیت‌های اصلاحی، به حالت تحت کنترل باز می‌گردد. همچنین توزیع خطاهای نمونه‌برداری نرمال، و دارای میانگین صفر است. لازم به ذکر است توزیع خطاهای اندازه‌گیری در صورت وجود هرگونه اریبی از حالت نرمال بودن خارج می‌شود. ایجاد حالت اریبی در توزیع خطاها می‌تواند ناشی از مواردی از جمله کالیبره نبودن دستگاه، مشابه نبودن دستگاه‌های اندازه‌گیری و یکسان نبودن رفتار پرسنل نمونه‌برداری باشد. در صورت وجود هر یک از موارد ذکر شده خطاها تصادفی نیستند و توزیع آنها از توزیع نرمال پیروی نخواهد کرد. در این مقاله، مشابه برخی از تحقیقات پیشین<sup>[۱۸]</sup> خطاهای اندازه‌گیری از توزیع نرمال پیروی می‌کند.

در مدل هزینه‌ی لورنزن و وانس، دوره‌ی کیفیت به‌صورت فاصله بین دو حالت تحت کنترل تعریف شده و دارای ۴ جزء است: ۱. از شروع فرایند تا بروز یک انحراف بادلیل؛ ۲. از بروز یک انحراف بادلیل تا هشدار این رخداد توسط نمودار کنترل؛ ۳. زمان لازم برای کشف انحراف بادلیل؛ ۴. زمان لازم برای تعمیر فرایند و برطرف کردن انحراف بادلیل.

برخی محدودیت‌های آماری روی خطای نوع اول و دوم است.<sup>[۱۱]</sup> طراحی اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  برای اولین بار توسط دانکن مطرح شد؛ یکی از مفروضات مدل وی وجود یک انحراف بادلیل در فرایند بود.<sup>[۲]</sup> وی همچنین در سال ۱۹۷۱، طراحی اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  را در شرایطی که چندین انحراف بادلیل وجود دارد، ارائه داد.<sup>[۳]</sup> لورنزن و وانس یک مدل تابع هزینه ارائه کردند که برای تمامی نمودارهای کنترل، مستقل از آماره‌ی که روی آن ترسیم می‌شود قابل استفاده است.<sup>[۴]</sup> ساینگا و رحیم، و بعدها رحیم و کاستا (۲۰۰۰) طراحی اقتصادی همزمان دو نمودار  $\bar{X}$  و  $R$  و نیز  $\bar{X}$  و  $S$  را انجام دادند.<sup>[۷-۵]</sup> تالی و انگلیش طراحی اقتصادی نمودار کنترل ترکیبی  $\bar{X}$  و EWMA را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند.<sup>[۸]</sup> اما حساس نبودن نمودار کنترل میانگین استاندارد در پی بردن به تغییرات کوچک در فرایند، عمده‌ترین نقطه ضعف این نمودار به شمار می‌رود. معرفی نمودارهای کنترل انطباق‌پذیر<sup>۷</sup> از نوآوری‌هایی بوده که درخصوص بهبود عملکرد نمودارهای میانگین استاندارد انجام شده است. نمودارهای انطباق‌پذیر قابلیت شناسایی سریع‌تر تغییرات رخ داده در فرایند را دارند و از تولید محصولات معیوب بیشتر جلوگیری می‌کنند. یکی از انواع نمودارهای کنترل انطباق‌پذیر، نمودار با اندازه نمونه‌ی متغیر است. این نمودار توسط پرابهو و همکاران و نیز توسط کاستا، به‌طور مجزا و با دو روش متفاوت مطرح شد.<sup>[۱۰،۹]</sup> در کاربرد عملی نمودارهای انطباق‌پذیر، نیکلایز و همکاران نمودار  $\bar{X}$  را با اندازه نمونه‌ی متغیر یا فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر در یک کارخانه‌ی تولید کاشی در یونان، مورد استفاده قرار دادند. آنها به این نتیجه رسیدند که پیاده‌سازی نمودارهای انطباق‌پذیر، پیچیدگی زیادی نسبت به نمودار شوهارت استاندارد ندارد.<sup>[۱۱]</sup> در نهایت تاگایاس ادبیات نمودارهای کنترل انطباق‌پذیر را مرور کرده و چن و همکاران عملکرد نمودارهای انطباق‌پذیر را با یکدیگر مقایسه کردند.<sup>[۱۳،۱۲]</sup> در تمام مواردی که عنوان شد، طراحی نمودار کنترل در نهایت استفاده از این نمودار برای کنترل فرایند نیازمند نمونه‌گیری از مشخصه کیفی مورد نظر و در فواصل زمانی مشخص است تا پس از اندازه‌گیری مشخصه کیفی و طراحی نمودار، درمورد تحت کنترل بودن فرایند اظهار نظر شود. مسئله‌ی رایج در بخش نمونه‌گیری و در نهایت استفاده از نمودارهای کنترل، خطای اندازه‌گیری<sup>۸</sup> است. از آنجا که سیستم اندازه‌گیری شامل اپراتور و دستگاه‌های اندازه‌گیری است که از دقت کافی برخوردار نیستند، بروز خطا امری اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. وجود خطای اندازه‌گیری در نمودارهای کنترل موجب کاهش کارایی آنها شده و کشف سریع تغییرات را به تعویق می‌اندازد. به‌عبارت دیگر، خطای اندازه‌گیری بر شاخص متوسط طول دنباله اثر گذاشته و در نتیجه هزینه‌ی محصولات نامنتطبق در یک فرایند تولید و تابع هزینه‌ی کل، دچار تغییر خواهد شد. محققین طی سال‌های مختلف، تأثیر خطای اندازه‌گیری بر نمودارهای کنترل را بررسی کرده‌اند. در سال ۱۹۵۴، بنت تأثیر خطای اندازه‌گیری بر روی نمودار کنترل  $\bar{X}$  را مورد مطالعه قرار داد.<sup>[۱۴]</sup> سپس آبراهام به معرفی حدود کنترل در حضور و عدم حضور خطای اندازه‌گیری پرداخت و اثر خطای اندازه‌گیری بر پایش انحراف از معیار فرایند را بررسی کرد.<sup>[۱۵]</sup> کانازوکا (۱۹۸۶) تأثیر خطای اندازه‌گیری بر نمودار  $\bar{X}$  و  $R$  را بررسی کرد. این محقق افزایش اندازه نمونه را به‌عنوان راه حل مشکل پیشنهاد داد.<sup>[۱۶]</sup> اثر خطای اندازه‌گیری بر روی متوسط طول دنباله نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  به تهنایی و نمودار کنترل ترکیبی  $\bar{X}$  و  $R$ ، توسط والدن بررسی شد. راه‌حل پیشنهادی وی برای کاهش اثرات خطای اندازه‌گیری، افزایش اندازه نمونه، تکرار اندازه‌گیری و ترکیبی از دو روش مطرح شده بود.<sup>[۱۷]</sup> لینا و وودال در تحقیقی اثر خطای اندازه‌گیری را روی نمودارهای کنترل شوهارت مطالعه کردند. آنها نشان دادند که وجود خطای اندازه‌گیری موجب کاهش توان نمودار کنترل در کشف حالات خارج از کنترل می‌شود. این محققین راه‌حل تکرار اندازه‌گیری‌ها را برای کاهش اثرات منفی خطای اندازه‌گیری پیشنهاد دادند.<sup>[۱۸]</sup> سقای و همکاران

$\delta$  تغییرات ایجاد شده در میانگین فرایند برحسب انحراف استاندارد فرایند،  $\sigma_m^2$  واریانس خطای اندازه‌گیری،  $\sigma_p^2$  واریانس مقدار واقعی مشخصه کیفی مورد نظر،  $B$  شیب خطای اندازه‌گیری،  $L$  حدود کنترل نمودار کنترل،  $h$  فاصله زمانی بین نمونه‌گیری‌ها،  $n$  تعداد نمونه‌های گرفته شده در هر بار نمونه‌گیری،  $E$  زمان لازم برای گرفتن هر نمونه، و  $K$  تعداد دفعات اندازه‌گیری برای هر قلم کالا است.

در راستای طراحی آماری، کم‌ترین مقدار برای متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل به صورت  $l$  و بیشترین مقدار برای متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل  $u$  در نظر گرفته می‌شود. در نهایت، هدف یافتن مقادیر بهینه‌ی برای پارامترهای طراحی نمودار کنترل میانگین استاندارد با در نظر گرفتن محدودیت‌های مطرح شده برای متوسط طول دنباله‌هاست تا هزینه‌ی کل دوره کیفیت بر واحد زمان (رابطه‌ی ۲) حداقل شود.

### ۳.۲. مدل‌سازی نمودار کنترل میانگین VSS

در تمام نمودارهای انطباق‌پذیر، حدود هشدار  $(w)$  بر روی نمودار کنترل رسم می‌شود و ناحیه را به دو قسمت تقسیم می‌کند. ناحیه‌ی که بین حدود هشدار رسم می‌شود و به آن ناحیه‌ی مرکزی نیز گفته می‌شود و ناحیه‌ی خارج از حدود هشدار ولی داخل حدود کنترل که در هر دو طرف نمودار قرار می‌گیرد ناحیه‌ی هشدار نامیده می‌شود. فرض کنید  $n_1$  و  $n_2$  به ترتیب بیشینه و کمینه اندازه نمونه باشند به طوری که  $n_1 < n_0 < n_2$  است. انتخاب بین بیشینه و کمینه اندازه نمونه به موقعیت نقطه‌ی نمونه‌ی قبل روی نمودار کنترل بستگی دارد. اگر نقطه‌ی  $(1 - \lambda_m)$  در ناحیه‌ی مرکزی باشد، نشان می‌دهد که فرایند در شرایط ایمنی به سر می‌برد و کم‌ترین اندازه نمونه  $(n_1)$  برای نمونه‌گیری بعدی انتخاب می‌شود. اما اگر نقطه‌ی قبل در ناحیه‌ی هشدار واقع شود، بیان‌گر احتمال جابه‌جایی میانگین فرایند بوده و برای یافتن هرچه سریع‌تر انحراف با دلیل، بیشترین اندازه نمونه  $(n_2)$  برای نمونه‌ی بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در نهایت، چنانچه نمونه‌ی قبل در ناحیه‌ی واکنش قرار گیرد فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود.

برای طراحی آماری - اقتصادی نمودار VSS، ابتدا طراحی اقتصادی انجام می‌شود و تابع هزینه طبق رابطه‌ی ۳ به دست می‌آید.

$$C = \left\{ \frac{\frac{c_1}{\lambda} + c_2 (h \cdot ARL_\delta - \tau + E_\delta[N] \cdot KE + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2) + F \left( \frac{s}{ARL} \right) + W}{\frac{1}{\lambda} + T_0 (1 - \gamma_1) \left( \frac{s}{ARL} \right) + h \cdot ARL_\delta - \tau + E_\delta[N] \cdot KE + T_1 + T_2} \right\} + \left\{ \frac{[a + n_0 (b_1 + b_2 (K - 1))] \cdot s + [a + E_\delta[N] \cdot (b_1 + b_2 (K - 1))] \cdot \left[ ARL_\delta + \frac{\gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2}{h} \right]}{\frac{1}{\lambda} + T_0 (1 - \gamma_1) \left( \frac{s}{ARL} \right) + h \cdot ARL_\delta - \tau + E_\delta[N] \cdot KE + T_1 + T_2} \right\} \quad (3)$$

تعریف پارامترهای  $c_1, c_2, \lambda, \gamma_1, \gamma_2, s, \tau, T_1, T_2, E, K, n, h, c_1, \lambda, c_2, W, F, a, b_1, b_2$  در رابطه‌ی ۳، مشابه رابطه‌ی ۲ است. موارد متفاوت نیز عبارت‌اند از:  $ARL_\delta$  یا متوسط تعداد نمونه‌گیری‌ها تا هشدار خارج از کنترل بودن فرایند توسط نمودار و  $E_\delta[N]$  یا متوسط اندازه نمونه  $ARL_\delta$  و  $E_\delta[N]$  با استفاده از زنجیره‌ی مارکوف به دست آمده است؛ روابط مربوطه در پیوست آورده شده است. در نهایت، مقدار بهینه‌ی پارامترها بر در نظر گرفتن محدودیت‌های آماری (رابطه‌ی ۴) برای متوسط طول دنباله‌ها و با استفاده از الگوریتم ژنتیک با هدف کمینه‌کردن

### ۲.۲. مدل‌سازی نمودار کنترل میانگین استاندارد

به منظور مدل‌سازی، ابتدا طراحی اقتصادی انجام می‌شود و سپس تابع هزینه بر واحد زمان به دست می‌آید. در ادامه با در نظر گرفتن محدودیت‌های آماری، طراحی آماری انجام می‌شود. ترکیب دو طراحی عنوان شده منجر به طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل میانگین استاندارد خواهد شد. تابع هزینه بر واحد زمان نمودار کنترل میانگین استاندارد در رابطه‌ی ۲ نشان داده شده است:

$$C = \left\{ \frac{\frac{c_1}{\lambda} + c_2 (h \cdot ARL_1 - \tau + nKE + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2) + F \left( \frac{s}{ARL} \right) + W}{\frac{1}{\lambda} + T_0 (1 - \gamma_1) \left( \frac{s}{ARL} \right) + h \cdot ARL_1 - \tau + nKE + T_1 + T_2} \right\} + \left\{ \frac{[a + n_0 (b_1 + b_2 (K - 1))] \cdot \left[ \frac{1}{\lambda} + h \cdot ARL_1 - \tau + nKE + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \right]}{\frac{1}{\lambda} + T_0 (1 - \gamma_1) \left( \frac{s}{ARL} \right) + h \cdot ARL_1 - \tau + nKE + T_1 + T_2} \right\} \quad (2)$$

که در آن،  $C$  هزینه‌ی کل دوره‌ی کیفیت بر واحد زمان؛  $C_0$  هزینه‌ی تولید محصولات نامنتطبق در واحد زمان در حالت تحت کنترل؛  $C_1$  هزینه‌ی تولید محصولات نامنتطبق در واحد زمان در حالت خارج از کنترل؛  $F$  هزینه‌ی جست‌وجو برای یک هشدار اشتباهی؛  $W$  هزینه‌ی تعمیر و اصلاح فرایند برای هر هشدار خارج از کنترل؛  $a$  هزینه‌ی ثابت نمونه‌گیری؛  $b_1$  هزینه‌ی نخستین نمونه‌گیری برای هر کالا؛  $b_2$  هزینه‌ی نمونه‌گیری به‌ازاء هر بار اندازه‌گیری مجدد برای هر کالا؛  $T_0$  متوسط زمان جست‌وجو برای یک هشدار اشتباه،  $T_1$  متوسط زمان جست‌وجو برای یک انحراف با دلیل،  $T_2$  متوسط زمان لازم برای اصلاح فرایند و رفع انحراف با دلیل.

اگر فرایند حین بازرسی و جست‌وجو ادامه داشته باشد  $\lambda_1 = 1$  و در غیر این صورت  $\lambda_1 = 0$  همچنین اگر فرایند حین تعمیر و اصلاح فرایند ادامه داشته باشد  $\lambda_2 = 1$  و در غیر این صورت  $\lambda_2 = 0$ .  $s$  متوسط تعداد نمونه‌های گرفته شده در حالت تحت کنترل با مقدار:

$$\tau_s = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p(ih < x < (i+1)h) = \sum_{i=0}^{\infty} i [e^{-\lambda h i} - e^{-\lambda h (i+1)}] = \frac{e^{-\lambda h}}{\lambda (1 - e^{-\lambda h})}$$

است. متوسط زمان بروز یک انحراف با دلیل از زمان گرفتن آخرین نمونه با مقدار:

$$\tau = \frac{1 - e^{-\lambda h} (1 + \lambda h)}{\lambda (1 - e^{-\lambda h})}$$

$ARL_0$  متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل با مقدار:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2 - 2\varphi(L)}$$

$ARL_1$  متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل با مقدار:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \varphi \left( L + \frac{\sqrt{n} \cdot \delta}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_m^2}{\sigma_p^2} \cdot K \cdot B^2}} \right) + \varphi \left( -L + \frac{\sqrt{n} \cdot \delta}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_m^2}{\sigma_p^2} \cdot K \cdot B^2}} \right)}$$

هزینه به دست خواهد آمد:

$$ARL_0 > 1, \quad ARZL_\delta < u \quad (4)$$

### ۴.۲. تابع زیان محصولات نامنتطبق

در این نوشتار هزینه تولید محصولات نامنتطبق در حالت تحت کنترل ( $c_0$ ) و خارج از کنترل ( $c_1$ )، براساس مجذور اختلاف میانگین مشخصه کیفی مورد نظر از میانگین هدف تعریف شده است. در تابع زیان درجه دوم هرچه اختلاف افزایش یابد هزینه تولید محصولات نامنتطبق طبق روابط ۵ بیشتر می‌شود.

$$L(x) = H(x - \tau)^2 \\ c_0 = pH \left[ \sigma_0^2 + (\mu_0 - \tau)^2 \right] \\ c_1 = pH \left[ \sigma_0^2 + (\mu_0 - \tau)^2 + \delta^2 \sigma_0^2 - 2\delta\sigma_0(\mu_0 - \tau) \right] \quad (5)$$

در روابط ۵،  $H$  ضریب تناسب و  $p$  میزان تولید محصول در هر ساعت خواهد بود. همچنین در روابط مربوط به محاسبه  $c_1$ ، مقدار  $\delta$  تغییرات ایجاد شده در میانگین فرایند برحسب انحراف استاندارد فرایند را نشان می‌دهد.

### ۳. تحلیل نتایج

برای به دست آوردن مقادیر بهینه طراحی پارامترهای نمودارهای کنترل میانگین استاندارد و میانگین انطباق پذیر با اندازه نمونه متغیر، در شرایطی که حداقل هزینه کسب می‌شود از یک مثال عددی استفاده شده است: [۱۹]

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad F = 50\%, \quad W = 25\%, \quad a = 3, \\ b_1 = 1, \quad b_2 = 0.1, \quad E = 0.5, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = 20, \quad T_2 = 0, \\ H = 0.1, \quad \sigma = 1, \quad p = 20\%, \quad B = 1, \quad \mu_0 = \tau = 0, \\ \delta \in \{1, 1.5, 2, 2.5\}, \quad \lambda \in \{0.1, 0.5\}$$

مقادیر فوق در مدل‌های ۲ و ۳ قرار داده شده در نهایت مدل بهینه‌سازی برای هر یک از توابع هزینه با در نظر گرفتن محدودیت‌های موجود خواهد بود:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z_1 = C \quad (\text{رابطه } 2) \\ \text{St} : & ARL_0 > 200 \\ & ARL_\delta < 10 \\ & 1 < n < 20 \\ & 0.5 < h < 20 \\ & 1 < L < 4 \\ & 1 < K < 20 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & Z_2 = C \quad (\text{رابطه } 3) \\ \text{St} : & ARL_0 > 200 \\ & ARL_\delta < 10 \\ & 1 < n_0, n_1, n_2 < 20 \\ & 0.5 < h < 20 \\ & 1 < L < 4 \\ & 1 < K < 20 \end{array}$$

در روابط فوق متغیرهای  $n, h, L$  و  $K$  برای تابع هزینه نمودار کنترل میانگین استاندارد (رابطه ۲) و متغیرهای  $n_0, n_1, n_2, h, L$  و  $K$  برای تابع هزینه نمودار کنترل میانگین VSS (رابطه ۳) به عنوان متغیرهای تصمیم در نظر گرفته می‌شوند. در نهایت، مقادیر بهینه طراحی پارامترهای نمودارهای کنترل با استفاده از الگوریتم ژنتیک به دست خواهد آمد.

### ۱.۳. الگوریتم ژنتیک پیشنهادی

پس از مدل‌سازی، برای کمیته کردن تابع هزینه و یافتن مقادیر بهینه طراحی پارامترهای طراحی می‌توان از روش‌های مختلفی مانند الگوریتم ژنتیک، الگوریتم PSO و طراحی آزمایشات استفاده کرد. از آنجا که پیاده‌سازی الگوریتم ژنتیک از سایر روش‌ها ساده‌تر بوده و با استفاده از مقالات محققین پیشین، گام‌های مختلف حل این الگوریتم در دسترس است. لذا از الگوریتم ژنتیک به عنوان راه حل انتخاب شده در راستای یافتن مقادیر بهینه طراحی پارامترهای نمودار کنترل استفاده شد. برای طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل میانگین استاندارد و نمودار کنترل میانگین انطباق پذیر با اندازه نمونه متغیر، از الگوریتم ژنتیک با گام‌های زیر استفاده شده است:

گام ۱. ده جواب اولیه (کروموزوم) که در آن مقدار هر متغیر (ژن) دارای دامنه تغییرات براساس محدودیت‌های ذکر شده در مثال است، به صورت تصادفی ایجاد می‌شود.

گام ۲. مقدار برازندگی برای هر جواب طبق رابطه ۲ برای نمودار میانگین و رابطه ۳ برای نمودار کنترل VSS محاسبه می‌شود.

گام ۳. پس از انتخاب کروموزوم‌هایی با مطلوبیت بالا، عملگر تلفیق به صورت زیر روی کروموزوم‌های والد اعمال می‌شود  $D_2 = 0.2R + 0.8M$ ، عملگر تلفیق روی کروموزوم‌های والد  $R$  و  $M$  است.

گام ۴. عملگر جهش با نرخ ۰/۱ با استفاده از روش غیریکنواخت روی جمعیت جواب اعمال شده است.

گام ۵. پس از ۵۰ مرتبه تکرار مراحل ۲ تا ۴، الگوریتم متوقف می‌شود. [۱۹]

### ۲.۳. نتایج طراحی آماری - اقتصادی نمودار میانگین

#### ۱.۲.۳. مقادیر بهینه طراحی پارامترهای نمودار کنترل میانگین به ازاء

#### مقادیر مختلف $\sigma_m^2/\sigma_p^2$

مقادیر بهینه طراحی پارامترهای نمودار کنترل میانگین به ازاء مقادیر مختلف واریانس خطای اندازه‌گیری در حالات وجود و عدم وجود خطای اندازه‌گیری ( $K = 1$ ) در جداول ۱ تا ۴ ارائه شده است.

همانطور که در جداول مشاهده می‌شود هزینه‌ها در عدم وجود خطای اندازه‌گیری افزایش یافته است. همچنین به ازاء واریانس خطای اندازه‌گیری ثابت، با افزایش

جدول ۱. مقادیر بهینه طراحی پارامترهای نمودار کنترل میانگین به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 0$ .

| $K = 1$ | وجود تکرار اندازه‌گیری |      |       |     |       |                    |          |
|---------|------------------------|------|-------|-----|-------|--------------------|----------|
|         | $C_{\overline{X}}$     | $K$  | $L$   | $h$ | $n$   | $C_{\overline{X}}$ | $\delta$ |
| ۲۷,۸۸   | ۱                      | ۲,۸۱ | ۱۶,۷  | ۱۵  | ۲۷,۸۸ | ۰/۰۱               | ۱        |
| ۳۸,۵    | ۲                      | ۲,۸۱ | ۱۹,۸۸ | ۱۳  | ۳۸,۲۷ | ۰/۰۵               |          |
| ۳۲,۴۹   | ۱                      | ۲,۹۳ | ۸,۶   | ۸   | ۳۲,۴۹ | ۰/۰۱               | ۱/۵      |
| ۵۳,۰۸   | ۲                      | ۲,۸۱ | ۷,۱۲  | ۷   | ۵۲,۱۹ | ۰/۰۵               |          |
| ۳۸,۶۷   | ۱                      | ۳,۱۴ | ۴,۸   | ۵   | ۳۸,۶۷ | ۰/۰۱               | ۲        |
| ۷۰,۵۱   | ۲                      | ۲,۸۱ | ۴,۲۸  | ۴   | ۷۰,۴۷ | ۰/۰۵               |          |
| ۴۶,۵۳   | ۱                      | ۳,۳۸ | ۳,۲۸  | ۴   | ۴۶,۵۳ | ۰/۰۱               | ۲/۵      |
| ۱۰۲,۴۳  | ۲                      | ۳,۰۹ | ۲,۲۶  | ۳   | ۹۳,۶۲ | ۰/۰۵               |          |

داشته‌اند. از طرف دیگر، با افزایش نرخ وقوع رخداد‌های بادلیل، به اندازه نمونه کم‌تر و تعداد تکرار بیشتر نیازمندیم. همچنین با افزایش واریانس خطای اندازه‌گیری، تعداد اندازه‌گیری‌های اضافی برای مشخصه کیفی هر قلم کالا نیز افزایش می‌یابد.

### ۲.۲.۳. تحلیل حساسیت نمودار کنترل میانگین استاندارد به ازاء مقادیر

**مختلف B**

در جداول ۵ تا ۸ مقادیر بهینه‌ی پارامترها به‌ازاء مقادیر مختلف شیب خطای اندازه‌گیری (B) ارائه شده است. در تمامی جداول،  $\frac{\sigma_m}{\sigma_p} = 2$  است.

چنان‌که مشاهده می‌شود تعداد بهینه‌ی تکرارهای اندازه‌گیری با افزایش B کاهش یافته است. همچنین با توجه به افزایش انحراف، با اندازه نمونه‌ی کم‌تر نیز می‌توان انحراف بادلیل را شناسایی کرد. بنابراین n نیز کاهش یافته است.

### ۳.۲.۳. تحلیل حساسیت اثر هزینه‌ی نمونه‌گیری مجدد برای هر کالا در

**نمودار کنترل میانگین استاندارد**

مقادیر بهینه‌ی پارامترها به‌منظور بررسی اثر هزینه‌ی نمونه‌گیری مجدد روی مقادیر بهینه‌ی پارامترها، به‌ازاء  $b_2 = 0.05$  محاسبه شده و نتایج در جداول ۹ تا ۱۱ ارائه شده است.

نتایج حاکی از آن است که کاهش هزینه‌ی نمونه‌گیری به‌ازاء دفعات اضافی اندازه‌گیری برای هر قلم کالا، افزایش تعداد اندازه‌گیری‌های اضافی مشخصه‌ی کیفی را در پی خواهد داشت.

### جدول ۵. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل $\bar{X}$ به ازاء $\delta = 1$ .

| K | L    | h     | n  | $C_{\bar{X}}$ | $\lambda$ | B |
|---|------|-------|----|---------------|-----------|---|
| 3 | 2,81 | 18,11 | 19 | 28,90         | 0,01      | 1 |
| 4 | 2,81 | 19,57 | 14 | 38,83         | 0,05      |   |
| 3 | 2,81 | 17,7  | 16 | 28,38         | 0,01      | 2 |
| 3 | 2,81 | 19,4  | 13 | 38,49         | 0,05      |   |
| 2 | 2,81 | 17,43 | 16 | 28,16         | 0,01      | 3 |
| 2 | 2,81 | 19,38 | 13 | 38,54         | 0,05      |   |
| 1 | 2,81 | 16,19 | 16 | 28            | 0,01      | 4 |
| 2 | 2,81 | 19,9  | 13 | 38,32         | 0,05      |   |

### جدول ۶. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل $\bar{X}$ به ازاء $\delta = 1,5$ .

| K | L    | h    | n  | $C_{\bar{X}}$ | $\lambda$ | B |
|---|------|------|----|---------------|-----------|---|
| 3 | 2,81 | 9,39 | 10 | 33,62         | 0,01      | 1 |
| 4 | 2,81 | 7,63 | 8  | 53,27         | 0,05      |   |
| 3 | 2,83 | 8,47 | 8  | 33,07         | 0,01      | 2 |
| 3 | 2,81 | 6,76 | 7  | 52,61         | 0,05      |   |
| 2 | 2,86 | 8,49 | 8  | 32,81         | 0,01      | 3 |
| 2 | 2,81 | 7,16 | 7  | 52,34         | 0,05      |   |
| 1 | 2,87 | 8,16 | 8  | 32,62         | 0,01      | 4 |
| 2 | 2,81 | 7,03 | 7  | 52,27         | 0,05      |   |

### جدول ۲. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل میانگین به‌ازاء $\sigma_m/\sigma_p = 1$ .

| K   | وجود تکرار اندازه‌گیری |   |      |       |    |           |          |
|-----|------------------------|---|------|-------|----|-----------|----------|
|     | $C_{\bar{X}}$          | K | L    | h     | n  | $\lambda$ | $\delta$ |
| 1   | 29                     | 2 | 2,81 | 18,29 | 19 | 28,54     | 0,01     |
|     | 39,09                  | 3 | 2,81 | 19,75 | 14 | 38,61     | 0,05     |
| 1,5 | 34,65                  | 2 | 2,81 | 9,57  | 10 | 33,21     | 0,01     |
|     | 56,87                  | 3 | 2,81 | 7,59  | 8  | 52,83     | 0,05     |
| 2   | 39,3                   | 2 | 2,91 | 5,58  | 6  | 39,45     | 0,01     |
|     | 72,45                  | 3 | 2,81 | 4,15  | 5  | 71,21     | 0,05     |
| 2,5 | 50,09                  | 2 | 3,05 | 3,46  | 4  | 47,32     | 0,01     |
|     | 98,72                  | 3 | 2,85 | 2,46  | 3  | 94,43     | 0,05     |

### جدول ۳. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل میانگین به‌ازاء $\sigma_m/\sigma_p = 2$ .

| K   | وجود تکرار اندازه‌گیری |   |      |       |    |           |          |
|-----|------------------------|---|------|-------|----|-----------|----------|
|     | $C_{\bar{X}}$          | K | L    | h     | n  | $\lambda$ | $\delta$ |
| 1   | 29,08                  | 3 | 2,81 | 18,11 | 19 | 28,90     | 0,01     |
|     | 38,78                  | 4 | 2,81 | 19,57 | 14 | 38,83     | 0,05     |
| 1,5 | 34,8                   | 3 | 2,81 | 9,39  | 10 | 33,62     | 0,01     |
|     | 55,78                  | 4 | 2,81 | 7,63  | 8  | 53,27     | 0,05     |
| 2   | 43,6                   | 3 | 2,81 | 5,84  | 6  | 39,89     | 0,01     |
|     | 75,89                  | 4 | 2,81 | 4,73  | 5  | 71,76     | 0,05     |
| 2,5 | 48,9                   | 3 | 2,99 | 4,66  | 5  | 47,81     | 0,01     |
|     | 96,23                  | 4 | 2,85 | 3,23  | 4  | 95,02     | 0,05     |

### جدول ۴. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل میانگین به‌ازاء $\sigma_m/\sigma_p = 3$ .

| K   | وجود تکرار اندازه‌گیری |   |      |       |    |           |          |
|-----|------------------------|---|------|-------|----|-----------|----------|
|     | $C_{\bar{X}}$          | K | L    | h     | n  | $\lambda$ | $\delta$ |
| 1   | 30,2                   | 4 | 2,81 | 18,16 | 19 | 29,18     | 0,01     |
|     | 39,56                  | 5 | 2,81 | 19,8  | 14 | 38,98     | 0,05     |
| 1,5 | 36,54                  | 4 | 2,81 | 9,27  | 10 | 33,94     | 0,01     |
|     | 55,67                  | 5 | 2,81 | 8,5   | 9  | 53,63     | 0,05     |
| 2   | 42,05                  | 4 | 2,82 | 5,41  | 6  | 40,25     | 0,01     |
|     | 75,4                   | 5 | 2,81 | 3,82  | 5  | 72,21     | 0,05     |
| 2,5 | 49,6                   | 4 | 2,88 | 3,9   | 4  | 48,17     | 0,01     |
|     | 95,43                  | 5 | 2,81 | 3,18  | 4  | 95,51     | 0,05     |

تغییر در میانگین مشخصه کیفی، به اندازه نمونه کم‌تری برای شناسایی تغییر رخ داده نیازمندیم. با توجه به استفاده از تابع زیان درجه دوم، هر چه تغییر در میانگین بیشتر می‌شود اختلاف با میانگین هدف افزایش یافته و به تبع آن هزینه‌ها نیز افزایش خواهد یافت. لازم به ذکر است با افزایش تغییر در میانگین زمانی که میزان واریانس خطای اندازه‌گیری ثابت است، تعداد بهینه‌ی تکرارهای اندازه‌گیری (K) نیز روندی صعودی

جدول ۱۰. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار  $\bar{X}$  به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 2$  و  $b_2 = 0.05$ .

| K | L    | h     | n  | $C_{\bar{Y}}$ | $\lambda$ | $\delta$ |
|---|------|-------|----|---------------|-----------|----------|
| ۴ | ۲,۸۱ | ۱۸,۶۹ | ۱۹ | ۲۸,۷۶         | ۰,۰۱      | ۱        |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۱۹,۵۵ | ۱۵ | ۳۸,۷۱         | ۰,۰۵      |          |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۸,۵۱  | ۹  | ۳۳,۵          | ۰,۰۱      | ۱,۵      |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۷,۴۷  | ۹  | ۵۳,۱          | ۰,۰۵      |          |
| ۴ | ۲,۹۱ | ۵,۵۲  | ۶  | ۳۹,۸          | ۰,۰۱      | ۲        |
| ۵ | ۲,۸۱ | ۴,۲۵  | ۵  | ۷۱,۶۴         | ۰,۰۵      |          |
| ۴ | ۲,۹۸ | ۳,۹۱  | ۴  | ۴۷,۶۹         | ۰,۰۱      | ۲,۵      |
| ۵ | ۲,۸۷ | ۲,۲۲  | ۳  | ۹۴,۹۷         | ۰,۰۵      |          |

جدول ۱۱. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار  $\bar{X}$  به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 3$  و  $b_2 = 0.05$ .

| K | L    | h     | n  | $C_{\bar{Y}}$ | $\lambda$ | $\delta$ |
|---|------|-------|----|---------------|-----------|----------|
| ۴ | ۲,۸۱ | ۱۶,۹۸ | ۱۹ | ۲۹,۰۲         | ۰,۰۱      | ۱        |
| ۵ | ۲,۸۱ | ۱۹,۵۷ | ۱۵ | ۳۸,۸۴         | ۰,۰۵      |          |
| ۵ | ۲,۸۱ | ۸,۷۲  | ۹  | ۳۳,۷۹         | ۰,۰۱      | ۱,۵      |
| ۵ | ۲,۸۱ | ۷,۹۵  | ۹  | ۵۳,۴          | ۰,۰۵      |          |
| ۵ | ۲,۸۶ | ۵,۵۹  | ۶  | ۴۰,۱۱         | ۰,۰۱      | ۲        |
| ۵ | ۲,۸۱ | ۴,۱۷  | ۵  | ۷۱,۹۴         | ۰,۰۵      |          |
| ۵ | ۲,۹۹ | ۳,۵   | ۴  | ۴۸,۰۴         | ۰,۰۱      | ۲,۵      |
| ۵ | ۲,۸۱ | ۳,۱۸  | ۴  | ۹۵,۲۶         | ۰,۰۵      |          |

### ۳.۳. نتایج طراحی آماری - اقتصادی نمودار VSS

۱.۳.۳. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای طراحی نمودار کنترل VSS به ازاء مقادیر مختلف  $\sigma_m^2/\sigma_p^2$

مجهولات تابع هزینه‌ی نمودار VSS پس از قراردادن متغیرهای ثابت ذکر شده در مثال، شامل ۵ پارامتر  $h, n, m_1, m_2, L$  و  $K$  است. از نتایج نمودار میانگین استاندارد برای مقدار  $n_0$  به ازاء شرایط مختلف استفاده می‌شود. در نهایت، برای به دست آوردن مقادیر بهینه‌ی پارامترها به طوری که حداقل مقدار ممکن برای تابع هزینه‌ی ۳ به دست آید، مسئله با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل شد. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای طراحی به ازاء مقادیر مختلف واریانس خطا، در جداول ۱۲ تا ۱۵ ارائه شده است. نتایج جداول ۱۲ تا ۱۵ نشان می‌دهد که در صورت وجود تکرار اندازه‌گیری، هزینه‌ها کاهش یافته است (شکل ۱). به علاوه با افزایش انحراف از میانگین فرایند، به ازاء واریانس خطای ثابت، به تعداد اندازه‌گیری بیشتری نیاز است (شکل ۲). همچنین به علت استفاده از تابع زیان درجه دوم، هزینه‌ها نیز افزایش یافته است (شکل ۳). با افزایش نرخ وقوع انحرافات، هزینه و تعداد تکرارهای اندازه‌گیری نیز بیشتر شده است. لازم به ذکر است در تمام نمودارها، مقدار  $\sigma_m^2/\sigma_p^2$  برابر با ۲ و نرخ وقوع اتفاقات ۰,۰۱ است.

جدول ۷. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل  $\bar{X}$  به ازاء  $\delta = 2$ .

| K | L    | h    | n | $C_{\bar{Y}}$ | $\lambda$ | B |
|---|------|------|---|---------------|-----------|---|
| ۳ | ۲,۸۱ | ۵,۸۴ | ۶ | ۳۹,۸۹         | ۰,۰۱      | ۱ |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۴,۷۳ | ۵ | ۷۱,۷۶         | ۰,۰۵      |   |
| ۳ | ۲,۹۷ | ۵,۳۸ | ۵ | ۳۹,۳۱         | ۰,۰۱      | ۲ |
| ۳ | ۲,۸۴ | ۴,۴۱ | ۵ | ۷۰,۹۹         | ۰,۰۵      |   |
| ۲ | ۳    | ۵,۴۵ | ۵ | ۳۹,۰۲         | ۰,۰۱      | ۳ |
| ۲ | ۲,۸۸ | ۴,۳۳ | ۵ | ۷۰,۶۴         | ۰,۰۵      |   |
| ۱ | ۳,۰۴ | ۴,۹۲ | ۵ | ۳۸,۸          | ۰,۰۱      | ۴ |
| ۱ | ۲,۹  | ۴,۰۹ | ۵ | ۷۰,۳۵         | ۰,۰۵      |   |

جدول ۸. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل  $\bar{X}$  به ازاء  $\delta = 2.5$ .

| K | L    | h    | n | $C_{\bar{Y}}$ | $\lambda$ | B |
|---|------|------|---|---------------|-----------|---|
| ۳ | ۳    | ۴,۶۶ | ۵ | ۴۷,۸۱         | ۰,۰۱      | ۱ |
| ۴ | ۲,۸۵ | ۳,۲۳ | ۴ | ۹۵,۰۲         | ۰,۰۵      |   |
| ۲ | ۳,۱  | ۴,۱۶ | ۴ | ۴۷,۰۳         | ۰,۰۱      | ۲ |
| ۲ | ۲,۹  | ۲,۴۳ | ۳ | ۹۳,۹۸         | ۰,۰۵      |   |
| ۲ | ۳,۲۴ | ۳,۷۲ | ۴ | ۴۶,۸۸         | ۰,۰۱      | ۳ |
| ۲ | ۲,۹۳ | ۲,۷۶ | ۳ | ۹۳,۷۳         | ۰,۰۵      |   |
| ۱ | ۳,۱۹ | ۴,۰۶ | ۴ | ۴۶,۶۳         | ۰,۰۱      | ۴ |
| ۱ | ۲,۹۷ | ۲,۵  | ۳ | ۹۳,۴۵         | ۰,۰۵      |   |

جدول ۹. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار  $\bar{X}$  به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 1$  و  $b_2 = 0.05$ .

| K | L    | h     | n  | $C_{\bar{Y}}$ | $\lambda$ | $\delta$ |
|---|------|-------|----|---------------|-----------|----------|
| ۳ | ۲,۸۱ | ۱۸,۴۸ | ۱۸ | ۲۸,۴۶         | ۰,۰۱      | ۱        |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۱۹,۳۸ | ۱۴ | ۳۸,۵۴         | ۰,۰۵      |          |
| ۳ | ۲,۸۲ | ۸,۴۵  | ۹  | ۳۳,۱۶         | ۰,۰۱      | ۱,۵      |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۷,۰۵  | ۷  | ۵۲,۷۸         | ۰,۰۵      |          |
| ۳ | ۳,۰۲ | ۵,۲۴  | ۶  | ۳۹,۴۲         | ۰,۰۱      | ۲        |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۴,۵۸  | ۵  | ۷۱,۲۱         | ۰,۰۵      |          |
| ۳ | ۳,۱۳ | ۳,۴۵  | ۴  | ۴۷,۲۹         | ۰,۰۱      | ۲,۵      |
| ۴ | ۲,۸۶ | ۲,۶۵  | ۳  | ۹۴,۳۹         | ۰,۰۵      |          |

جدول ۱۲. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 0$ .

| $K = 1$   |     | وجود تکرار اندازه‌گیری |       |       |       |       |           |           |          |  |
|-----------|-----|------------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|----------|--|
| $C_{VSS}$ | $K$ | $L$                    | $h$   | $n_2$ | $n_1$ | $n_0$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $\delta$ |  |
| ۲۵,۷۷     | ۱   | ۳,۰۵                   | ۱۹,۸۴ | ۱۶    | ۱     | ۱۵    | ۲۵,۷۷     | ۰,۰۱      | ۱        |  |
| ۳۶,۴۶     | ۱   | ۳,۹۹                   | ۱۵,۷  | ۱۴    | ۲     | ۱۳    | ۳۶,۴۶     | ۰,۰۵      |          |  |
| ۲۹,۱۸     | ۱   | ۳,۲۳                   | ۱۹,۹۱ | ۹     | ۱     | ۸     | ۲۹,۱۸     | ۰,۰۱      | ۱,۵      |  |
| ۴۸,۷۴     | ۳   | ۳,۶۷                   | ۴,۷۷  | ۱۹    | ۱     | ۷     | ۴۴,۶۳     | ۰,۰۵      |          |  |
| ۳۴,۷۶     | ۲   | ۳,۱۷                   | ۱۹,۵۱ | ۶     | ۱     | ۵     | ۳۴,۷      | ۰,۰۱      | ۲        |  |
| ۵۲,۲۷     | ۴   | ۳,۹۳                   | ۰,۹۷  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۵۲,۱۲     | ۰,۰۵      |          |  |
| ۴۲,۲۶     | ۴   | ۳,۸۵                   | ۶,۷۱  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۴۱,۳۴     | ۰,۰۱      | ۲,۵      |  |
| ۷۰,۱۷     | ۶   | ۳,۹۱                   | ۰,۹۷  | ۱۹    | ۱     | ۳     | ۵۹,۶۲     | ۰,۰۵      |          |  |

جدول ۱۳. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 1$ .

| $K = 1$   |     | وجود تکرار اندازه‌گیری |       |       |       |       |           |           |          |  |
|-----------|-----|------------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|----------|--|
| $C_{VSS}$ | $K$ | $L$                    | $h$   | $n_2$ | $n_1$ | $n_0$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $\delta$ |  |
| ۰,۹۱      | ۱   | ۳,۸۸                   | ۱۰,۵  | ۱۹    | ۲     | ۱۸    | ۰,۹۱      | ۰,۰۱      | ۱        |  |
| ۱,۹۲      | ۲   | ۳,۷۲                   | ۳,۰۵  | ۱۵    | ۵     | ۱۴    | ۱,۳۶      | ۰,۰۵      |          |  |
| ۲۹,۶۵     | ۲   | ۲,۹۲                   | ۱۹,۹۴ | ۱۱    | ۲     | ۱۰    | ۲۹,۵۹     | ۰,۰۱      | ۱,۵      |  |
| ۴۹,۵      | ۳   | ۲,۹۵                   | ۱۵,۳۱ | ۱۰    | ۱     | ۸     | ۴۹,۱۳     | ۰,۰۵      |          |  |
| ۳۴,۹۱     | ۴   | ۳,۱۳                   | ۱۹,۰۷ | ۷     | ۱     | ۶     | ۳۴,۸۸     | ۰,۰۱      | ۲        |  |
| ۵۶        | ۶   | ۳,۷۱                   | ۰,۹۹  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۵۵,۹۷     | ۰,۰۵      |          |  |
| ۴۲,۶۲     | ۶   | ۳,۹۷                   | ۴,۹۱  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۳۹,۲۸     | ۰,۰۱      | ۲,۵      |  |
| ۸۸,۰۹     | ۷   | ۳,۹۶                   | ۷,۲۸  | ۱۹    | ۱     | ۳     | ۷۳,۱۲     | ۰,۰۵      |          |  |

جدول ۱۴. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 2$ .

| $K = 1$   |     | وجود تکرار اندازه‌گیری |       |       |       |       |           |           |          |  |
|-----------|-----|------------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|----------|--|
| $C_{VSS}$ | $K$ | $L$                    | $h$   | $n_2$ | $n_1$ | $n_0$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $\delta$ |  |
| ۲,۷۷      | ۲   | ۳,۶۲                   | ۱,۲۵  | ۱۹    | ۸     | ۱۸    | ۱,۱       | ۰,۰۱      | ۱        |  |
| ۲,۸       | ۴   | ۳,۸۲                   | ۱۸,۲۷ | ۱۹    | ۱۰    | ۱۴    | ۱,۸۱      | ۰,۰۵      |          |  |
| ۲۹,۶      | ۳   | ۲,۸۳                   | ۱۹,۷۲ | ۱۱    | ۱     | ۱۰    | ۲۹,۵۱     | ۰,۰۱      | ۱,۵      |  |
| ۴۸,۰۸     | ۴   | ۳,۹                    | ۱,۴۷  | ۱۹    | ۷     | ۸     | ۴۷,۸۴     | ۰,۰۵      |          |  |
| ۳۶,۰۲     | ۵   | ۳,۹۸                   | ۸,۶۲  | ۱۹    | ۲     | ۶     | ۳۵,۴      | ۰,۰۱      | ۲        |  |
| ۵۴,۵۱     | ۷   | ۳,۹                    | ۰,۶۴  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۴۹,۴۳     | ۰,۰۵      |          |  |
| ۴۵,۹۳     | ۷   | ۳,۹۳                   | ۸,۱۶  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۴۰,۴۸     | ۰,۰۱      | ۲,۵      |  |
| ۵۵,۹۵     | ۹   | ۳,۹۵                   | ۰,۶۴  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۵۱,۷۴     | ۰,۰۵      |          |  |

جدول ۱۵. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\sigma_m^2/\sigma_p^2 = 3$

| $K = 1$ | وجود تکرار اندازه‌گیری |     |      |      |       |       |       |           |           |          |
|---------|------------------------|-----|------|------|-------|-------|-------|-----------|-----------|----------|
|         | $C_{VSS}$              | $K$ | $L$  | $h$  | $n_2$ | $n_1$ | $n_0$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $\delta$ |
| ۱       | ۲,۰۵                   | ۲   | ۳,۲۸ | ۱,۰۳ | ۱۹    | ۸     | ۱۸    | ۱,۰۶      | ۰,۰۱      |          |
|         | ۵,۳۵                   | ۴   | ۳,۳۶ | ۹,۲۹ | ۱۵    | ۸     | ۱۴    | ۲,۲۵      | ۰,۰۵      |          |
| ۱,۵     | ۲۵,۰۶                  | ۳   | ۳,۹۱ | ۰,۷۴ | ۱۲    | ۸     | ۱۰    | ۶,۰۱      | ۰,۰۱      |          |
|         | ۵۰,۳۶                  | ۵   | ۳,۹  | ۸,۰۲ | ۱۰    | ۱     | ۹     | ۴۸,۶۴     | ۰,۰۵      |          |
| ۲       | ۲۸,۵۶                  | ۶   | ۳,۹  | ۸,۸۲ | ۱۹    | ۲     | ۶     | ۳۵,۱۲     | ۰,۰۱      |          |
|         | ۵۸,۷                   | ۸   | ۳,۹۲ | ۰,۹  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۵۰,۰۸     | ۰,۰۵      |          |
| ۲,۵     | ۳۷                     | ۸   | ۳,۹۶ | ۴,۵۷ | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۳۷,۰۹     | ۰,۰۱      |          |
|         | ۷۳,۲۶                  | ۱۰  | ۳,۹۸ | ۸,۲  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۷۲,۹۷     | ۰,۰۵      |          |



شکل ۳. هزینه نمودار کنترل در مقابل میزان انحراف از میانگین.

جدول ۱۶. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\delta = 1$

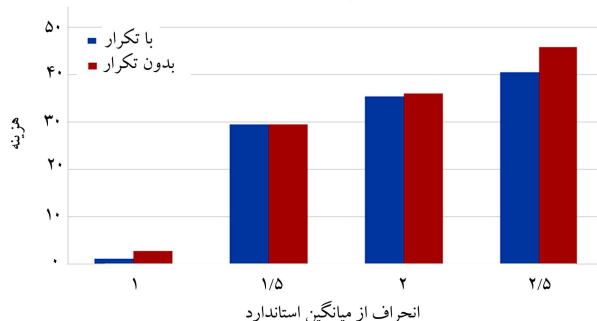
| $K$ | $L$  | $h$   | $n_2$ | $n_1$ | $n_0$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $B$ |
|-----|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----|
| ۱   | ۳,۸۲ | ۵,۱۸  | ۱۹    | ۳     | ۱۸    | ۳,۹۲      | ۰,۰۱      |     |
|     | ۴    | ۳,۸۲  | ۸,۷۳  | ۱۵    | ۳     | ۴,۷۵      | ۰,۰۵      |     |
| ۲   | ۳,۹۹ | ۵     | ۱۸    | ۱۴    | ۱۶    | ۴,۷۳      | ۰,۰۱      |     |
|     | ۳    | ۲,۸۲  | ۱۹,۴۶ | ۱۴    | ۲     | ۳۶,۸۶     | ۰,۰۵      |     |
| ۳   | ۲,۹۲ | ۱۹,۷۲ | ۱۷    | ۲     | ۱۶    | ۲۵,۳۴     | ۰,۰۱      |     |
|     | ۲    | ۲,۸۳  | ۱۹,۹۶ | ۱۶    | ۱     | ۳۶,۷۴     | ۰,۰۵      |     |
| ۴   | ۳,۳۸ | ۱۸,۹۸ | ۱۷    | ۱     | ۱۶    | ۲۵,۲۷     | ۰,۰۱      |     |
|     | ۱    | ۲,۸۱  | ۱۹,۵۱ | ۱۴    | ۱     | ۳۶,۶۱     | ۰,۰۵      |     |

همچنین با توجه به افزایش خطا و شناسایی سریع آن توسط نمودار کنترل، با اندازه نمونه‌ی کم‌تر نیز می‌توان به وجود خطا پی برد. بنابراین  $n$  نیز کاهش یافته است.

### ۳.۳.۳. تحلیل حساسیت اثر هزینه‌ی نمونه‌گیری مجدد برای هر کالا در نمودار VSS

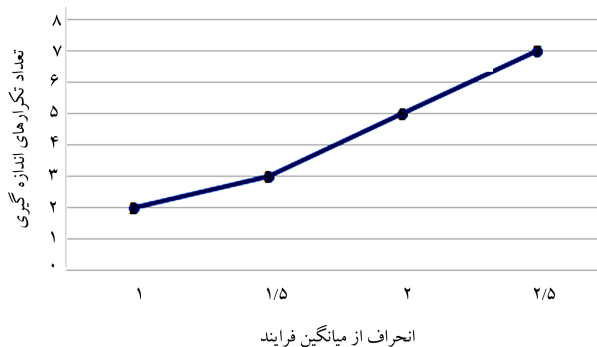
به منظور بررسی اثر هزینه‌ی نمونه‌گیری به‌ازاء دفعات اضافی برای هر قلم کالا روی مقادیر بهینه‌ی پارامترها، مقادیر بهینه‌ی جداول ۱۳ تا ۱۵ به‌ازاء  $b_2 = 0.05$  محاسبه

هزینه نمودار کنترل در صورت وجود و عدم وجود تکرار اندازه‌گیری  $\lambda = 0.01$



شکل ۱. هزینه نمودار کنترل در صورت وجود یا عدم وجود خطای اندازه‌گیری.

تعداد تکرارهای اندازه‌گیری در مقابل انحراف از میانگین



شکل ۲. تعداد تکرارهای اندازه‌گیری در مقابل انحراف از میانگین.

### ۲.۳.۳. تحلیل حساسیت نمودار کنترل VSS به‌ازاء مقادیر مختلف $B$

جداول ۱۶ تا ۱۹، مقدار بهینه‌ی پارامترها را به‌ازاء مقادیر مختلف  $B$  نشان می‌دهد. در تمامی حالات فرض شده است که نسبت واریانس خطای اندازه‌گیری به واریانس فرایند برابر ۲ است.

با توجه به جداول فوق، تعداد تکرار اندازه‌گیری برای هر قلم کالا بر اثر افزایش شیب خطای اندازه‌گیری ( $B$ )، کاهش یافته است؛ زیرا افزایش شیب نشان‌دهنده‌ی افزایش خطای اندازه‌گیری است و باعث تشخیص سریع‌تر انحراف بادلیل می‌شود.



جدول ۲۰. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\sigma_m/\sigma_p = 1$

| K | L    | h     | $n_r$ | $n_1$ | $n_o$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $\delta$ |
|---|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|----------|
| ۲ | ۳,۹۵ | ۶,۱۶  | ۱۹    | ۱۳    | ۱۸    | ۱۴,۹۸     | ۰,۰۱      | ۱        |
| ۳ | ۳,۹۶ | ۰,۵۱  | ۱۵    | ۵     | ۱۴    | ۱۸,۴۹     | ۰,۰۵      |          |
| ۴ | ۳,۱  | ۱۷,۶۷ | ۱۰    | ۱     | ۹     | ۲۹,۱۹     | ۰,۰۱      | ۱,۵      |
| ۴ | ۳,۹  | ۳,۶۵  | ۸     | ۶     | ۷     | ۳۴,۳۸     | ۰,۰۵      |          |
| ۵ | ۳,۹۸ | ۴,۸۳  | ۱۹    | ۱     | ۶     | ۳۴,۱      | ۰,۰۱      | ۲        |
| ۶ | ۳,۴۷ | ۴,۲۸  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۶۴,۳۳     | ۰,۰۵      |          |
| ۷ | ۳,۹  | ۲,۱۶  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۳۸,۳۱     | ۰,۰۱      | ۲,۵      |
| ۸ | ۳,۸۹ | ۲,۱۳  | ۱۹    | ۱     | ۳     | ۷۳,۱۲     | ۰,۰۵      |          |

جدول ۲۱. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\sigma_m/\sigma_p = 2$

| K  | L    | h     | $n_r$ | $n_1$ | $n_o$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $\delta$ |
|----|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|----------|
| ۲  | ۳,۷۷ | ۵,۵۲  | ۱۹    | ۴     | ۱۸    | ۵,۶       | ۰,۰۱      | ۱        |
| ۵  | ۳,۹۸ | ۷,۶۹  | ۱۶    | ۴     | ۱۵    | ۲۶,۸۱     | ۰,۰۵      |          |
| ۴  | ۳,۰۶ | ۱۹,۲۸ | ۱۰    | ۱     | ۹     | ۲۹,۱۷     | ۰,۰۱      | ۱,۵      |
| ۵  | ۲,۸۹ | ۱۶,۱۶ | ۱۰    | ۱     | ۹     | ۴۹,۰۲     | ۰,۰۵      |          |
| ۶  | ۳,۹۶ | ۴,۷۱  | ۱۹    | ۱     | ۶     | ۳۴,۵۲     | ۰,۰۱      | ۲        |
| ۸  | ۳,۹۱ | ۴,۸۶  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۶۲,۶۳     | ۰,۰۵      |          |
| ۹  | ۳,۸۴ | ۲,۷۵  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۳۶,۴۸     | ۰,۰۱      | ۲,۵      |
| ۱۰ | ۳,۷۹ | ۵,۴۹  | ۱۹    | ۱     | ۳     | ۶۷,۱۶     | ۰,۰۵      |          |

جدول ۲۲. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\sigma_m/\sigma_p = 3$

| K  | L    | h     | $n_r$ | $n_1$ | $n_o$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | $\delta$ |
|----|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|----------|
| ۴  | ۳,۹۱ | ۵,۳۵  | ۱۹    | ۶     | ۱۸    | ۴,۸۶      | ۰,۰۱      | ۱        |
| ۶  | ۳,۹  | ۲,۲۱  | ۱۶    | ۳     | ۱۵    | ۸,۷۴      | ۰,۰۵      |          |
| ۴  | ۳,۹۹ | ۳,۱۳  | ۱۰    | ۶     | ۹     | ۱۸,۵۷     | ۰,۰۱      | ۱,۵      |
| ۷  | ۳,۰۲ | ۱۸,۹۱ | ۱۰    | ۱     | ۹     | ۴۹,۱۶     | ۰,۰۵      |          |
| ۸  | ۳,۹۷ | ۴,۲۳  | ۱۹    | ۱     | ۶     | ۳۳,۹۵     | ۰,۰۱      | ۲        |
| ۱۰ | ۳,۹۷ | ۶     | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۶۱        | ۰,۰۵      |          |
| ۱۰ | ۳,۹۹ | ۳,۰۶  | ۱۹    | ۲     | ۴     | ۳۶,۵۳     | ۰,۰۱      | ۲,۵      |
| ۱۲ | ۳,۸۸ | ۲,۸۱  | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۷۰,۷۹     | ۰,۰۵      |          |

#### ۴. نتیجه‌گیری

از آنجا که برای اطمینان از پایداری فرایند از نمونه‌گیری استفاده می‌شود وجود خطای اندازه‌گیری در نمودارهای کنترل امری اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. زیرا سیستم اندازه‌گیری شامل اپراتور و دستگاه‌های اندازه‌گیری است که هیچ‌کدام از دقت کامل برخوردار نیستند. عدم توجه و نادیده گرفتن خطای اندازه‌گیری، می‌تواند عواقب ناگوار و هزینه‌های زیادی را به همراه داشته باشد. وجود خطای اندازه‌گیری در نمودارهای کنترل موجب کاهش کارایی آنها شده و کشف سریع تغییرات را

جدول ۱۷. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\delta = 15$

| K | L    | h     | $n_r$ | $n_1$ | $n_o$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | B |
|---|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|---|
| ۳ | ۳,۱  | ۱۷,۸۸ | ۱۱    | ۱     | ۱۰    | ۲۹,۱۷     | ۰,۰۱      | ۱ |
| ۴ | ۲,۸۱ | ۱۹,۷۸ | ۹     | ۲     | ۸     | ۴۹,۳۱     | ۰,۰۵      |   |
| ۳ | ۳,۳۵ | ۱۸,۴۳ | ۹     | ۱     | ۸     | ۲۹,۱۸     | ۰,۰۱      | ۲ |
| ۳ | ۲,۸۶ | ۱۷,۲۳ | ۹     | ۱     | ۷     | ۴۹,۰۷     | ۰,۰۵      |   |
| ۱ | ۲,۸۸ | ۱۸,۶۱ | ۹     | ۱     | ۸     | ۲۸,۹۶     | ۰,۰۱      | ۳ |
| ۳ | ۲,۹۱ | ۱۸,۸۲ | ۸     | ۱     | ۷     | ۴۸,۷۵     | ۰,۰۵      |   |
| ۱ | ۲,۹۶ | ۱۷,۷۴ | ۹     | ۱     | ۸     | ۲۸,۹۷     | ۰,۰۱      | ۴ |
| ۱ | ۲,۸۴ | ۱۶,۱۲ | ۸     | ۱     | ۷     | ۴۸,۶۱     | ۰,۰۵      |   |

جدول ۱۸. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\delta = 2$

| K | L    | h     | $n_r$ | $n_1$ | $n_o$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | B |
|---|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|---|
| ۵ | ۳,۹۹ | ۴,۶۳  | ۲۱۹   | ۲     | ۶     | ۳۴,۸۳     | ۰,۰۱      | ۱ |
| ۷ | ۳,۹۸ | ۴     | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۶۳,۵۸     | ۰,۰۵      |   |
| ۵ | ۳,۸۹ | ۳,۸۷  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۳۴,۲۷     | ۰,۰۱      | ۲ |
| ۶ | ۳,۹۴ | ۴,۹   | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۶۴,۴      | ۰,۰۵      |   |
| ۴ | ۳,۹۴ | ۵,۱۶  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۳۴,۷      | ۰,۰۱      | ۳ |
| ۵ | ۳,۹۷ | ۶,۰۸  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۶۵,۱      | ۰,۰۵      |   |
| ۲ | ۳,۱۸ | ۱۵,۲۴ | ۶     | ۱     | ۵     | ۳۴,۷۳     | ۰,۰۱      | ۴ |
| ۳ | ۳,۹۲ | ۵,۷۵  | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۶۶,۲۶     | ۰,۰۵      |   |

جدول ۱۹. مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل VSS به ازاء  $\delta = 2,5$

| K | L    | h    | $n_r$ | $n_1$ | $n_o$ | $C_{VSS}$ | $\lambda$ | B |
|---|------|------|-------|-------|-------|-----------|-----------|---|
| ۷ | ۳,۹۳ | ۳    | ۱۹    | ۱     | ۵     | ۳۹,۸۵     | ۰,۰۱      | ۱ |
| ۹ | ۳,۹  | ۳,۸۵ | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۷۷,۵      | ۰,۰۵      |   |
| ۵ | ۳,۹۵ | ۳,۲۷ | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۴۰,۰۱     | ۰,۰۱      | ۲ |
| ۷ | ۳,۸۸ | ۲,۶  | ۱۹    | ۱     | ۳     | ۷۶,۶۶     | ۰,۰۵      |   |
| ۴ | ۳,۹۴ | ۲,۳۸ | ۱۹    | ۱     | ۴     | ۴۰,۸۲     | ۰,۰۱      | ۳ |
| ۶ | ۳,۹۹ | ۲,۸۷ | ۱۹    | ۱     | ۳     | ۷۹,۱۱     | ۰,۰۵      |   |
| ۲ | ۳,۸۷ | ۲,۸۴ | ۱۸    | ۱     | ۴     | ۴۲,۴۷     | ۰,۰۱      | ۴ |
| ۴ | ۳,۹۷ | ۳,۰۹ | ۱۸    | ۱     | ۳     | ۸۴,۲۹     | ۰,۰۵      |   |

شده و نتایج در جداول ۲۰ تا ۲۲ آورده شده است.

چنان که در جداول مشاهده می‌شود کاهش هزینه‌ی نمونه‌گیری به‌ازاء دفعات اضافی برای هر قلم کالا، موجب افزایش تعداد اندازه‌گیری‌های اضافی مشخصه‌ی کیفی می‌شود زیرا با توجه به کاهش هزینه، می‌توان تکرارهای بیشتری برای کاهش اثر خطای اندازه‌گیری انجام داد.

داشته است. زیرا شناسایی انحراف بادلیل سریع تر انجام شده و هزینه بیشتری در راستای کشف این انحراف به فرایند تحمیل نمی شود. از دیگر نتایج می توان به کاهش اندازه نمونه لازم با افزایش انحراف از میانگین (در یک واریانس خطای ثابت) اشاره کرد. در این شرایط، تعداد تکرارهای اندازه گیری لازم افزایش یافته است. لازم به ذکر است به علت استفاده از تابع زیان درجه دوم برای تولید محصولات نامنتبقتی، هنگام افزایش انحراف از میانگین، هزینه ها نیز روندی صعودی داشته اند. همچنین با افزایش نرخ وقوع انحرافات بادلیل، تعداد تکرار اندازه گیری بیشتری لازم است. نتایج حاصل از تحلیل حساسیت برای بررسی تأثیر مقادیر ورودی پارامترها روی مقدار بهینه متغیرها نیز نشان دهنده کاهش تعداد اندازه گیری های اضافی مشخصه کیفی هر محصول با افزایش شیب مدل خطای اندازه گیری است. همچنین با کاهش هزینه اندازه گیری مجدد، تعداد تکرارهای اندازه گیری مجدد افزایش یافته است.

به تعویق می اندازد. به عبارت دیگر، خطای اندازه گیری بر شاخص متوسط طول دنباله اثر می گذارد و در نتیجه هزینه محصولات نامنتبقتی در یک فرایند تولید و تابع هزینه کل دچار تغییر خواهد شد. بنابراین با توجه به رایج بودن و اجتناب ناپذیر بودن بروز خطای اندازه گیری، مد نظر قراردادن عامل خطای اندازه گیری در طراحی پارامترهای نمودار کنترل، ضروری است. در این مقاله، پارامتر تکرار اندازه گیری برای کاهش اثرات منفی وجود خطای اندازه گیری، به پارامترهای طراحی نمودار کنترل میانگین استاندارد افزوده شده است، اما چون نمودار کنترل میانگین استاندارد توانایی لازم و سرعت مناسب برای تشخیص انحرافات کوچک در فرایند را ندارد، از نمودارهای کنترل انطباق پذیر استفاده شده و طراحی پارامترهای نمودار انطباق پذیر با اندازه نمونه متغیر نیز با در نظر گرفتن پارامتر تکرار اندازه گیری ها انجام شد. نتایج حاکی از آن است که هزینه ها علی رغم استفاده از تکرار اندازه گیری ها کاهش یافته است. به علاوه هزینه نمودار انطباق پذیر نسبت به نمودار میانگین استاندارد کاهش

## پانویسها

1. sample size (n)
2. sampling intervals (h)
3. control limits (L)
4. statistical design
5. economical design
6. economical- statistical design
7. adaptive control chart
8. measurement error

## منابع (References)

1. Montgomery, D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley, New York (2009).
2. Duncan, A.J. "The economic design of  $\bar{x}$  charts used to maintain current control of a process", *Journal of the American Statistical Association*, **51**(274), pp. 228-242 (1956).
3. Duncan, A.J. "The economic design of X-Bar charts when there is a multiplicity of assignable causes", *Journal of the American Statistical Association*, **66**(333), pp. 107-121 (1971).
4. Lorenzen, T.J. and Vance, L.C. "The economic design of control charts: A unified approach", *Technometrics*, **28**(1), pp. 3-10 (1986).
5. Saniga, E.M. "Economic statistical control-chart designs with an application to  $\bar{x}$  and R charts", *Technometrics*, **31**(3), pp. 313-320 (1989).
6. Rahim, M. A., "Determination of optimal design parameters of joint  $\bar{x}$  and R charts", *Journal of Quality Technology*, **21**, pp. 56-70 (1989).
7. Rahim, M.A. and Costa, A.F.B. "Joint economic design of  $\bar{x}$  and R charts under Weibull shock models", *International Journal of Production Research*, **38**(13), pp. 2871-2889 (2000).
8. Tolley, G.O. and English, J.R. "Economic designs of constrained EWMA and combined EWMA-X control schemes", *IIE Transactions*, **33**(6), pp. 429-436 (2001).
9. Prabhu, S.S., Runger, G.C. and Keats, J.B. " $\bar{x}$  chart with adaptive sample sizes", *International Journal of Production Research*, **31**(12), pp. 2895-2909 (1993).
10. Costa, A.F.B. " $\bar{x}$  charts with variable sample size", *Journal of Quality Technology*, **26**, pp. 155-163 (1994).
11. Nikolaidis, Y., Rigas, G. and Tagaras, G. "Using economically designed Shewhart and adaptive  $\bar{x}$  charts for monitoring the quality of tiles", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**, pp. 233-245 (2007).
12. Tagaras, G. "A survey of recent development in the design of adaptive control charts", *Journal of Quality Technology*, **30**, pp. 212-231 (1998).
13. Chen, Y.K., Liao, H.C. and Chiu, F.R. "Re-evaluation of performance for adaptive charts: Viewpoints of inspection efficiency and efforts", *International Journal of Quality and Reliability Management*, **25**(2), pp. 621-625 (2008).
14. Bennett, C.A. "Effect of measurement error on chemical process control", *Industrial Quality Control*, **6**, pp. 337-342 (1952).

15. Abraham, B. "Control charts and measurement error", *Annual Technical Conference of the American Society for Quality Control*, **31**, pp. 370-374 (1977).
16. Kanazuka, T. "The effect of measurement error on the power of  $\bar{x}$ -R charts", *Journal of Quality Technology*, **18**(2), pp. 91-95 (1986).
17. Walden, C.T. "An analysis of variable control charts in the presence of measurement error", Unpublished Master's Thesis, Department of Industrial Engineering, Mississippi State University, UMI No. 1343291 (1990).
18. Linna, K.W. and Woodall, W.H. "Effect of measurement error on Shewhart control charts", *Journal of Quality Technology*, **33**(2), pp. 213-222 (2001).
19. Saghaei, A., Fatemi Ghomi, S.M.T. and Jaberi, S. "Economic design of exponentially weighted moving average control chart based on measurement error using Genetic algorithm", *Quality and Reliability Engineering International*, **30**(8), pp. 1153-1163 (2013).
20. Prabhu, S.S., Montgomery, D.C. and Runger, G.C. "Economic- statistical design of an adaptive  $\bar{x}$  chart", *International Journal of Production Economics*, **49**, pp. 1-15 (1997).

## پیوست

به دست آوردن حدود هشدار در نمودار کنترل VSS:

با توجه به این که متوسط اندازه نمونه‌ها زمانی که فرایند در حالت تحت کنترل به سر می‌برد برابر با  $n_0$  است، مقدار حدود هشدار از رابطه‌ی الف به دست خواهد آمد:

$$E.[n(i) | LCL < Z_{i-1} < UCL; \delta = 0] = n_0$$

$$w_{VSS} = \varphi^{-1} \left[ \frac{2\varphi(L).(n_0 - n_1) + (n_1 - n_0)}{2(n_1 - n_2)} \right] \quad (\text{الف } 1)$$

در طرح نمونه‌گیری VSS، با هر بار نمونه‌گیری از فرایند، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

۱. اگر  $Z_i$  در ناحیه‌ی مرکزی باشد فرایند تحت کنترل است.

۲. اگر میانگین نمونه در بین  $w$  و  $L$  یا  $w$  و  $-L$  (ناحیه‌ی هشدار) قرار داشته باشد همچنان فرایند تحت کنترل است.

۳. اگر  $Z_i$  در خارج از حدود کنترل باشد نمودار کنترل هشدار داده و فرایند از کنترل خارج شده است.

برای یک زنجیر مارکوف با دو حالت گذرای ۱ و ۲ و حالت جاذب ۳، ماتریس احتمال انتقال و ماتریس احتمال گذار عبارت خواهد بود از:

$$p = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$Q_\delta = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

در ماتریس احتمال انتقال  $p$ ،  $p_{ij}$  بیان‌گر احتمال انتقال از وضعیت قبلی  $i$  به وضعیت فعلی  $j$  است و به صورت  $p_{ij} = p(Z_j \in I_j | n_i, \delta)$  محاسبه می‌شود.  $Q_\delta$  که

ماتریس احتمال گذار نامیده می‌شود پس از حذف سطر و ستون حالت جاذب از ماتریس احتمال انتقال  $p$  به دست می‌آید. اگر داشته باشیم:

$$a_1 = \frac{\sqrt{n_1} \cdot \delta}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_m^2}{\sigma_p^2 \cdot K \cdot B^2}\right)}}$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{n_2} \cdot \delta}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_m^2}{\sigma_p^2 \cdot K \cdot B^2}\right)}}$$

عناصر تشکیل‌دهنده‌ی ماتریس احتمال گذار عبارت خواهد بود از:

$$p_{11} = 2\varphi(w - a_1) - 1$$

$$p_{12} = 2\varphi(L - a_1) - 2\varphi(w - a_1)$$

$$p_{21} = 2\varphi(w - a_2) - 1$$

$$p_{22} = 2\varphi(L - a_2) - 2\varphi(w - a_2)$$

با توجه به توضیحات فوق، روابط مربوط به متوسط طول دنباله و متوسط اندازه نمونه‌ی لازم چنین محاسبه می‌شود:<sup>[۲۰]</sup>

$$ARL_\delta = b' \cdot (I - Q_\delta)^{-1} \cdot 1$$

$$E_\delta [N] = \frac{b' \cdot Q_\delta (I - Q_\delta)^{-1} \cdot n}{b' \cdot Q_\delta (I - Q_\delta)^{-1} \cdot 1}$$

در روابط مربوط به  $ARL_\delta$  و  $E_\delta [N]$ ،  $b' = [b_1 \ b_2]$ ، نشان‌دهنده‌ی بردار احتمال اولیه،  $Q_\delta$  ماتریس احتمال گذار،  $I$  ماتریس همانی، و  $n' = [n_1 \ n_2]$  است.  $b$  که بیان‌گر احتمال شروع فرایند از هر یک از دو حالت ۱ یا ۲ است با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود.<sup>[۲۰]</sup>

$$b_1 = \frac{p(Z \in I_1)}{p(Z \in I_2)} = \frac{2\varphi(w) - 1}{2\varphi(L) - 1}$$

$$b_2 = \frac{p(Z \in I_2)}{p(Z \in I_2)} = \frac{2\varphi(L) - 2\varphi(w)}{2\varphi(L) - 1}$$