# تقاضای تصادفی با ماهیت درون‌زا در مسئله مسیریابی وسایل نقلیه

Original Article

**فرناز هوشمند خلیق (دانشجوی دکتری)**
**سیدعلی میرحسنی* (دانشیار)**
**دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر**

f.hooshmand.khaligh@aut.ac.ir
a_mirhassani@aut.ac.ir

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۱-۳۳، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۷۷-۸۴

برنامه‌ریزی تصادفی با عدم قطعیت درون‌زا مبحثی جدید است که در آن فرایند تصادفی مسئله تحت تأثیر تصمیمات قرار دارد. در این مقاله، توسعه‌ی نوینی از مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه به‌عنوان کاربردی جدید از این مبحث معرفی می‌شود که در آن، تقاضای هر مشتری غیرقطعی است و عدم قطعیت در لحظه‌ی ملاقات محقق می‌شود. لذا، زمان محقق شدن عدم قطعیت وابسته به تصمیمات و عدم قطعیت دارای ماهیت درون‌زاست. ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی با عدم قطعیت درون‌زا برای این مسئله ارائه می‌شود. سپس، از آنجا که قیود عدم ناهماهنگی به‌صورت شرطی هستند و درصد بالایی از کل قیود را تشکیل می‌دهند، چندین رویکرد کارا برای کاهش این قیود ارائه و اثبات می‌شود که تأثیر چشم‌گیری در کاهش اندازه‌ی مسئله و زمان حل خواهد داشت. نتایج محاسباتی عملکرد مدل پیشنهادی و روش‌های کاهش قیود را روی چند نمونه‌ی تصادفی نشان می‌دهند.

**واژگان کلیدی:** برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی، مسیریابی وسیله نقلیه، عدم قطعیت درون‌زا، درخت سناریوی وابسته به تصمیم، قیود عدم ناهماهنگی، شناسایی قیود زائد.

## ۱. مقدمه

در یک مسئله‌ی بهینه‌سازی قطعی، مقدار همه‌ی پارامترها معلوم فرض می‌شود؛ در حالی که در بسیاری از مسائل واقعی در زمینه‌های مختلف برنامه‌ریزی، زمان‌بندی، مکان‌یابی، حمل‌ونقل، سرمایه‌گذاری و غیره، پارامترهایی وجود دارند که مقدارشان در لحظه‌ی تصمیم‌گیری به‌طور قطع مشخص نیست. در چنین مسائلی لحاظ کردن عدم قطعیت در فرایند تصمیم‌گیری، ممکن است به جواب‌های استوارتری منجر شود و از این رو، لازم است به شیوه‌ی مناسبی عدم قطعیت در مدل وارد شود.

برحسب اطلاعاتی که ممکن است از پارامترهای غیرقطعی مسئله داشته باشیم، روش‌های مختلفی برای لحاظ کردن عدم قطعیت مطرح است که در این میان، می‌توان به روش برنامه‌ریزی تصادفی با بازگشت[۱] به‌عنوان یکی از روش‌های پرکاربرد اشاره کرد. در این روش، حالت‌های ممکن برای وقوع پارامترهای غیرقطعی با مجموعه‌یی از سناریوها نشان داده می‌شود و تصمیم‌گیرنده با دو یا چند مرحله‌ی تصمیم‌گیری مواجه است که در هر مرحله، مقدار برخی از پارامترهای غیرقطعی محقق می‌شود.[۱و۲]

با توجه به برخی از مطالعات انجام شده،[۳] در مسائل برنامه‌ریزی تصادفی با بازگشت، عدم قطعیت را به دو دسته می‌توان تقسیم کرد: برون‌زا[۲] و درون‌زا[۳]. در مسئله‌یی با عدم قطعیت برون‌زا، تصمیمات هیچ تأثیری بر فرایند تصادفی مسئله ندارد؛ هر پارامتر غیرقطعی در یک زمانِ از قبل تعیین شده محقق می‌شود و مقدارش به تصمیمات وابسته نیست. به‌عنوان مثال، در برخی از مسائل مطرح شده[۱] عدم قطعیت دارای ماهیت برون‌زاست. در مقابل، در یکی از مسائل با عدم قطعیت درون‌زا که محققین مطرح کردند[۴] فرایند تصادفی مسئله تحت تأثیر تصمیمات است؛ به این صورت که ممکن است تصمیمات توزیع احتمال را تغییر دهند (نوع اول) یا روی زمان محقق شدن پارامترهای غیرقطعی تأثیر بگذارند (نوع دوم).

نوع دومِ عدم قطعیتِ درون‌زا در زمینه‌های مختلف مانند حفاری چاه‌های نفت،[۵] برنامه‌ریزی تولید،[۶] و تولید دارو[۷] مطرح شده و همواره یافتن زمینه‌های کاربردی جدید برای آن، مورد توجه محققین بوده است. در این مقاله، کاربرد جدیدی از نوع دوم عدم قطعیت درون‌زا در حوزه‌ی مسیریابی وسایل نقلیه (VRP)[۴] معرفی می‌شود.

مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه، یکی از مسائل معروف و چالش‌برانگیز در بهینه‌سازی است که در آن، به مشتریان از طریق ناوگانی از وسایل نقلیه سرویس داده می‌شود و تقاضای هر مشتری باید توسط یک وسیله‌ی نقلیه به‌طورکامل تأمین شود.[۸] حالت خاصی از VRP که تقاضای مشتریان را غیرقطعی در نظر می‌گیرد،

---

* نویسنده مسئول

*تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۱۰/۲۴، اصلاحیه ۱۳۹۴/۲/۲۳، پذیرش ۱۳۹۴/۸/۱۲.*

مورد توجه محققین زیادی قرارگرفته وکاربردهای متنوعی برای آن مطرح شده است؛ توزیع سوخت، جمع‌آوری زباله، جمع‌آوری نقدینگی شعب بانک‌ها و توزیع کالا به مناطق بحران‌زده[۹و۱۰] از آن جمله‌اند.

در این مقاله بر VRP با یک وسیله‌ی نقلیه و با تقاضای تصادفی[5] متمرکز می‌شویم و آن را اختصاراً SVRPD می‌نامیم. در این مسئله یک وسیله‌ی نقلیه با ظرفیت محدود، در انبار مستقر است و باید به مشتریان سرویس دهد. تقاضای هر مشتری غیرقطعی است و مقدار آن در لحظه‌ی ملاقات محقق می‌شود. به‌دلیل ظرفیت محدود وسیله‌ی نقلیه و عدم قطعیت در تقاضای مشتریان، ممکن است لازم باشد وسیله‌ی نقلیه در طول مسیرش برای بارگیری به انبار مراجعه کند. هدف آن است که ضمن تأمین تقاضای مشتریان، متوسط هزینه‌ی سفر کمینه شود.

در ادبیات، این مسئله از دو دیدگاه مورد بررسی قرار گرفته است: ایستا و پویا. در دیدگاه ایستا، مسیر قبل از محقق شدن عدم قطعیت به‌طورکامل تعیین می‌شود. سپس وسیله‌ی نقلیه با ظرفیت پُر انبار را ترک و مسیر مذکور را دنبال می‌کند، و هر جا در طول مسیرکالایش تمام شد برای بارگیری به انبار برمی‌گردد؛ سپس مسیر را از همان نقطه‌یی که نقصان رخ داده ادامه می‌دهد.[۱۱و۱۲]

در دیدگاه پویا، هیچ مسیری از قبل تعیین نمی‌شود بلکه، مسیر وسیله‌ی نقلیه به‌تدریج و در طول چند مرحله ساخته می‌شود. به‌عبارت دیگر، تصمیم مرحله‌ی اول تعیین می‌کند کدام مشتری باید در مرحله‌ی اول ملاقات شود؛ پس از ملاقات تقاضای او معلوم می‌شود. سپس با توجه به اطلاعات محقق شده تصمیم مرحله‌ی دوم، مبنی بر این که «کدام مشتری باید در مرحله‌ی بعد ملاقات شود؟» و «آیا این مشتری باید مستقیماً یا بعد از بارگیری در انبار ملاقات شود»، گرفته می‌شود. پس از ملاقات او درباره‌ی انتخاب مشتری بعدی تصمیم‌گیری می‌شود و این روند تا زمانی که همه‌ی مشتریان ملاقات شوند ادامه دارد.

برخلاف دیدگاه ایستا، رویکرد پویا منجر به برنامه‌ی انعطاف‌پذیرتری می‌شود و در آن، امکان کاهش هزینه و بهبود جواب وجود دارد.[۱۳] اما نکته‌ی مهم آن است که SVRPD با دیدگاه پویا NP-Hard است و از نظر محاسباتی، پیچیدگی‌های زیادی به همراه دارد. لذا، ادبیات موجود در این زمینه بسیار محدود است. از جنبه‌ی فرایند حل، تعدادی روش ابتکاری مطرح شده،[۱۰و۱۴-۱۸] و از جنبه‌ی مدل‌سازی، دو رویکردِ برنامه‌ریزی پویا[6][۱۴و۱۵] و برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی ارائه شده است. با توجه به اطلاعات به دست آمده، فقط یکی از مطالعات[۱۸] به فرمول‌بندی مسئله در قالب یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی پرداخته که متأسفانه مدل مطرح شده در آن نیز صرفاً یک مدل مفهومی و تحلیلی است و قابل پیاده‌سازی و حل نیست. در این مقاله هدف آن است که با ارائه‌ی یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی برای مسئله‌ی SVRPD با رویکرد پویا، ضعف وکاستی فوق جبران شود. ارائه‌ی چنین مدلی به دو دلیل حائز اهمیت است. اولاً بینشی نسبت به ساختار و ویژگی‌های مسئله ایجاد می‌کند که می‌توان از آن در توسعه‌ی روش‌های حل کارآمد بهره جست. ثانیاً، جواب بهینه‌ی آن را می‌توان برای اعتبارسنجی الگوریتم‌های ابتکاری و غیردقیق به کار گرفت. نکته‌ی حائز اهمیت در فرمول‌بندی این مسئله آن است که تقاضای هر مشتری در لحظه‌ی ملاقات معلوم می‌شود و لذا زمان محقق شدن عدم قطعیت وابسته به تصمیمات و دارای ماهیت درون‌زاست. از این رو تعداد قیود عدم ناهماهنگی[7] به‌شدت زیاد خواهد بود و رویکردهایی برای کاهش آنها لازم است. بنابراین، نوآوری‌های مهم این مقاله عبارت‌اند از: ۱. معرفی مسئله‌ی SVRPD با رویکرد پویا به‌عنوان کاربردی جدید از نوع دوم عدم قطعیت درون‌زا؛ ۲. فرمول‌بندی مسئله به‌صورت یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی تحت عدم قطعیت درون‌زا (با توجه به اطلاعات به دست آمده مدل پیشنهادی اولین مدل قابل اجرا برای این دسته از مسائل است)؛ ۳. نشان دادن وابستگی درخت سناریو[8] به تصمیمات و فرمول‌بندی مناسب قیود عدم ناهماهنگی؛ ۴. ارائه‌ی رویکردهای نوین برای شناسایی و حذف قیود عدم ناهماهنگی زائد و کاهش اندازه مدل.

این مقاله ابتدا به شرح جزئیات مسئله می‌پردازد، وابستگی درخت سناریو به تصمیمات را نشان می‌دهد و مسئله را به‌صورت یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی با عدم قطعیت درون‌زا فرمول‌بندی می‌کند. سپس، از آنجا که قیود عدم ناهماهنگی بخش قابل توجهی از قیود مسئله را تشکیل می‌دهند و حل آن را مشکل می‌کنند، رویکردهایی برای کاهش تعداد این قیود ارائه می‌شود. در قسمت نتایج محاسباتی، مدل و رویکردهای کاهش قیود روی چند نمونه‌ی تصادفی ارزیابی می‌شود.

## ۲. توصیف و فرمول‌بندی مسئله

### ۱.۲. شرح مسئله

فرض کنید $I=\{0,1,2,\dots,n_I\}$ مجموعه‌ی مکان‌ها، $i=0$ و $i=1,2,\dots,n_I$ به‌ترتیب بیان‌گر انبار و مشتریان و $c_{i,i'}$ هزینه‌ی سفر بین دو نقطه‌ی $i,i'\in I$ باشد. یک وسیله‌ی نقلیه با ظرفیت $Q$ در انبار مستقر است و باید مشتریان را ملاقات کند. تقاضای هر مشتری تصادفی است و $S=\{1,2,\dots,n_S\}$ مجموعه‌ی سناریوهاست که $d_i^s$ تقاضای مشتری $i=1,\dots,n_I$ تحت سناریوی $s\in S$، و $p^s$ احتمال وقوع سناریوی $s$ است. فرض بر این است که عدم قطعیت در تقاضای هر مشتری به‌محض ملاقات او محقق می‌شود و $d_i^s\leq Q$. به‌دلیل ظرفیت محدود وسیله‌ی نقلیه و عدم قطعیت در تقاضا، ممکن است لازم باشد که وسیله‌ی نقلیه در طول مسیر برای بارگیری به انبار مراجعه کند. اما از آنجا که تقاضای هر مشتری باید دقیقاً در یک بار ملاقات و به‌طورکامل برآورده شود، تصمیمات بارگیری باید به‌گونه‌یی اتخاذ شود که وقتی وسیله‌ی نقلیه به یک مشتری می‌رسد، حداقل به‌اندازه‌ی تقاضای او موجودی داشته باشد. به‌علاوه، وسیله‌ی نقلیه حداکثر $R$ دفعه می‌تواند برای بارگیری به انبار مراجعه کند.

در این مسئله تصمیم‌گیری به‌صورت پویا انجام می‌شود؛ به این صورت که در مرحله‌ی اول که هنوز هیچ عدم قطعیتی محقق نشده، تصمیم می‌گیریم که کدام مشتری در وهله‌ی اول ملاقات شود. به‌محض این که وسیله‌ی نقلیه به این مشتری می‌رسد، مقدار تقاضای او معلوم می‌شود. سپس با توجه به اطلاعات به دست آمده، تصمیم مرحله‌ی دوم گرفته می‌شود مبنی بر این که «مشتری بعدی کدام است؟» و «آیا این مشتری باید مستقیماً یا پس از بارگیری در انبار ملاقات شود؟». بعد از ملاقات این مشتری، تقاضای او محقق می‌شود و به‌طور مشابه، تصمیمات مراحل بعدی به‌طور متوالی اتخاذ می‌شود تا زمانی که همه‌ی مشتریان ملاقات شوند و در این لحظه وسیله‌ی نقلیه به انبار بازمی‌گردد. هدف، کمینه‌کردن متوسط هزینه‌ی سفر است.

### ۲.۲. تعریف متغیرهای تصمیم

در این قسمت، پس از شرح مقدمات لازم، متغیرهای تصمیم معرفی می‌شود. از آنجا که بیشینه تعداد دفعات مجاز برای بارگیری $R$ است، ابتدا $R$ نقطه‌ی مجازی با برچسب $r=-1,-2,\dots,-R$، به‌عنوان «کپی از انبار» ایجاد و مجموعه‌ی نقاط جدید با $J=\{-R,\dots,-1,0,1,\dots,n_I\}$ نشان داده می‌شود. هزینه‌ی

سفر بین نقاط متمایز $j, j' \in J$ چنین تعریف می‌شود:

$$f_{j,j'} = \begin{cases} 0 & j \le 0,\ \ j' \le 0 \\ c_{0,j'} & j \le 0,\ \ 1 \le j' \le n_I \\ c_{j,0} & 1 \le j \le n_I,\ \ j' \le 0 \\ c_{j,j'} & 1 \le j \le n_I,\ \ 1 \le j' \le n_I \end{cases} \qquad (\forall j, j' \in J : j \neq j')$$

به‌علاوه، تحت هر سناریو، تقاضای انبار و نقاط مجازی برابر با $-Q$ قرار داده می‌شود که بیان‌گر بارگیری است. به‌عبارت دیگر، $(\forall -R \le j \le 0, \forall s \in S)\ d_j^s = -Q$.

یک مسیر شدنی متناظر با یک سناریوی خاص می‌تواند با یک دور همیلتونی که از هر نقطه‌ی $j \in J$ دقیقاً یک‌بار می‌گذرد، نظیر شود. به‌عنوان مثال، مسئله‌یی را با هشت مشتری در نظر بگیرید و فرض کنید حداکثر چهار دفعه بارگیری مجاز باشد؛ بنابراین، $J = \{-4, -3, ..., 0, 1, ..., 8\}$. به‌علاوه، فرض کنید تحت یک سناریوی خاص، $(0, 3, 5, 1, 0, 2, 4, 6, 7, 8, 0)$ دنباله‌ی یک مسیر شدنی باشد. در این مسیر، وسیله‌ی نقلیه با بار کامل انبار را ترک و به‌ترتیب مشتریان ۳، ۵ و ۱ را ملاقات می‌کند. سپس برای بارگیری به انبار برمی‌گردد و در ادامه، به‌ترتیب مشتریان ۲، ۴، ۶، ۷ و ۸ را ملاقات می‌کند و سرانجام به انبار می‌رود. یک دور همیلتونی متناظر با این مسیر عبارت است از: $(0, 3, 5, 1, -1, 2, 4, 6, 7, 8, -2, -3, -4, 0)$ البته دورهای دیگری مانند $(0, 3, 5, 1, -3, -4, 2, 4, 6, 7, 8, -2, -1, 0)$ را نیز می‌توان با آن نظیر کرد. لذا بدون از دست رفتن کلیت و برای حذف دورهای همیلتونی معادل، قراردادهای زیر را بیان می‌کنیم:

**قرارداد ۱.** نقاط مجازی باید به‌ترتیب کاهشی ملاقات شوند، یعنی برای هر جفت نقطه‌ی مجازی $j$ و $j'$ که $j' < j < 0$، باید $j$ زودتر از $j'$ ملاقات شود.

**قرارداد ۲.** فرض کنید در جواب شدنی متناظر با یک سناریوی خاص، تنها $n$ بارگیری لازم باشد و $R > n$. در این صورت لازم است در دور همیلتونی متناظرش، نقاط مجازی استفاده نشود. بلافاصله بعد از ملاقات آخرین مشتری و قبل از بازگشت به نقطه‌ی $j = 0$، به‌طور متوالی ملاقات شوند.

در مثالی که بیان شد، از میان همه‌ی دورهای همیلتونی که می‌توانند با مسیر شدنی $(0, 3, 5, 1, 0, 2, 4, 6, 7, 8, 0)$ نظیر شوند، تنها دور همیلتونی $(0, 3, 5, 1, -1, 2, 4, 6, 7, 8, -2, -3, -4, 0)$ با قراردادهای ۱ و ۲ مطابقت دارد. هر دور همیلتونی از نقطه‌ی $j = 0$ شروع می‌شود، از هر مشتری و هر نقطه‌ی مجازی دقیقاً یک‌بار عبور می‌کند و به $j = 0$ ختم می‌شود. بنابراین، فرایند تصمیم‌گیری را می‌توان به $n_K = n_I + R + 1$ مرحله تقسیم کرد که در هر مرحله دقیقاً یکی از نقاط $j \in J$ برای ملاقات انتخاب می‌شود. مجموعه‌ی مراحل تصمیم‌گیری را با $K = \{1, 2, ..., n_K\}$ نشان می‌دهیم. با توجه به مطالب فوق، متغیرهای تصمیم مسئله عبارت است از:

$\delta^s_{j,j',k}$: متغیر دودویی که اگر در $k$اُمین مرحله و تحت سناریوی $s$ نقطه‌ی $j'$ بلافاصله بعد از $j$ ملاقات شود برابر ۱ و در غیر این‌صورت معادل صفر است؛

$y^s_k$: متغیر پیوسته بیان‌گر میزان بار وسیله‌ی نقلیه تحت سناریوی $s$ پس از سرویس‌دهی به مشتری ملاقات شده در مرحله‌ی $k$ام.

## ۳.۲. کاهش تعداد متغیرهای دودویی

به‌سادگی می‌توان نشان داد که تعریف متغیر $\delta^s_{j,j',k}$ به‌ازای ترکیباتی از $(j, j', k)$ که در ادامه فهرست شده‌اند، ضروری نیست و حذف $\delta^s_{j,j',k}$ به‌ازای چنین ترکیباتی منجر به کاهش قابل توجهی در تعداد متغیرهای مسئله می‌شود:

۱. متغیر $\delta^s_{j,j',k}$ به‌ازای $j = j'$ معنی‌دار نیست.

۲. خروج از نقطه‌ی $j = 0$ تنها در مرحله‌ی اول امکان‌پذیر است و لذا متغیر $\delta^s_{0,j',k}$ به‌ازای $k > 1$ معنی‌دار نیست. همچنین از آنجا که در مرحله‌ی اول حتماً باید یکی از مشتریان ملاقات شود، متغیر $\delta^s_{0,j',1}$ تنها به‌ازای $1 \le j' \le n_I$ معنی‌دار است.

۳. بازگشت به نقطه‌ی $j' = 0$ تنها در مرحله‌ی آخر امکان‌پذیر است و لذا متغیر $\delta^s_{j,0,k}$ به‌ازای $k < n_K$ معنی‌دار نیست. همچنین از آنجا که در مرحله‌ی آخر وسیله‌ی نقلیه یا از یکی از مشتریان و یا از نقطه‌ی $j = -R$ به انبار می‌رود، متغیر $\delta^s_{j,0,n_K}$ تنها به‌ازای $j = -R$ و $1 \le j \le n_I$ معنی‌دار است.

۴. اگر $j$ و $j'$ دو نقطه‌ی مجازی باشند، طبق قراردادهای ۱ و ۲، $\delta^s_{j,j',k}$ تنها به‌ازای $(j, j') \in \{(-r, -(r+1)) : r = 1, ..., R-1\}$ معنی‌دار است. به‌علاوه، طبق قرارداد ۲، سفر مستقیم از نقطه‌ی مجازی $-r$ به نقطه‌ی مجازی $-(r+1)$ تنها به‌شرطی مجاز است که قبلاً همه‌ی مشتریان و نیز نقاط مجازی $j \ge -r$ ملاقات شده باشند (یعنی مرحله‌ی $k = n_I + r + 1$).

۵. با توجه به قراردادهای ۱ و ۲، زودترین زمانی که ممکن است نقطه‌ی مجازی $-r$ ملاقات شود، مرحله‌ی $2r$ است که متناظر با وضعیتی است که وسیله‌ی نقلیه پس از شروع سفر و تا قبل از ملاقات $-r$، هر بار که یک مشتری را ملاقات می‌کند، برای بارگیری به انبار بازمی‌گردد. همچنین دیرترین زمانی که ممکن است نقطه‌ی مجازی $-r$ ملاقات شود، مرحله‌ی $n_I + r$ است که متناظر با وضعیتی است که وسیله‌ی نقلیه قبل از ملاقات $-r$، همه‌ی مشتری‌ها و نیز همه‌ی نقاط مجازیِ قبل از $-r$ را ملاقات کرده است. بنابراین اگر $j$ و $j' = -r$ به‌ترتیب بیان‌گر یک مشتری و یک نقطه‌ی مجازی باشند، $\delta^s_{j,j',k}$ فقط لازم است برای $2r \le k \le n_I + r$ نوشته شود.

۶. با استدلالی مشابه با مورد ۵، می‌توان نشان داد که اگر $j = -r$ و $j'$ به‌ترتیب بیان‌گر یک نقطه‌ی مجازی و یک مشتری باشند، $\delta^s_{j,j',k}$ تنها برای $2r + 1 \le k \le n_I + r$ می‌تواند معنی‌دار باشد.

با توجه به موارد فوق، پارامتر دودویی $a_{j,j',k}$ معرفی می‌شود که ۱ است اگر و تنها اگر ترکیب $(j, j', k)$ معنی‌دار باشد و متغیر $\delta^s_{j,j',k}$ تنها به‌ازای ترکیباتی که $a_{j,j',k}$ معادل ۱ باشد، تعریف می‌شود.

## ۴.۲. شرح محدودیت‌ها

فرمول‌بندی مسئله که آن را با $RP$ نمایش می‌دهیم عبارت است از:

$(RP)$

$$\text{Min } z = \sum_{s \in S} p^s \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \sum_{k \in K} f_{j,j'} \delta^s_{j,j',k} \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{j \in J} \delta^s_{0,j,1} = 1 \qquad \forall s \in S \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} \delta^s_{j,0,n_K} = 1 \qquad \forall s \in S \tag{3}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j' \in J} \delta^s_{j',j,k} = 1 \qquad \forall j \in J : j \neq 0,\ \ \forall s \in S \tag{4}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j' \in J} \delta^s_{j,j',k} = 1 \qquad \forall j \in J : j \neq 0,\ \ \forall s \in S \tag{5}$$

$$\sum_{j'\in J}\delta^{s}_{j',j,k}=\sum_{j'\in J}\delta^{s}_{j,j',k+1}$$

$$\forall j\in J: j\neq 0,\ \forall k\in K: k<n_K,\ \forall s\in S \tag{۶}$$

$$\sum_{k\in K:k\geq 2}k\sum_{j'\in J}\delta^{s}_{j,j',k}-\sum_{k\in K}k\sum_{j'\in J}\delta^{s}_{j',j,k}=1$$

$$\forall j\in J: j\neq 0,\ \forall s\in S \tag{۷}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}k\delta^{s}_{j,j',k}\leq\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}k\delta^{s}_{j,j'-1,k}$$

$$\forall j'\in J: -R<j'<0,\ \forall s\in S \tag{۸}$$

$$y^{s}_{1}=Q-\sum_{j\in J}d^{s}_{j}\delta^{s}_{0,j,1}\qquad\forall s\in S \tag{۹}$$

$$y^{s}_{k}\leq y^{s}_{k-1}-\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}d^{s}_{j'}\delta^{s}_{j,j',k}\qquad\forall k\in K: k>1,\ \forall s\in S \tag{۱۰}$$

$$y^{s}_{k}\leq Q\qquad\forall k\in K: k>1,\ \forall s\in S \tag{۱۱}$$

$$y^{s}_{k}\geq Q\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J:j'\leq 0}\delta^{s}_{j,j',k},\qquad\forall k\in K: k>1,\ \forall s\in S \tag{۱۲}$$

$$\delta^{s}_{j,j',k}\in\{0,1\}\qquad\forall j,j'\in J,\ \forall k\in K: a_{j,j',k}=1,\ \forall s\in S \tag{۱۳}$$

$$y^{s}_{k}\geq 0\qquad\forall k\in K,\ \forall s\in S \tag{۱۴}$$

قیود عدم ناهماهنگی (۱۵)

تابع هدف، متوسط هزینه‌ی سفر را کمینه می‌کند. محدودیت‌های ۲ و ۳ به‌ترتیب تضمین می‌کنند که تحت هر سناریو، وسیله‌ی نقلیه در مرحله‌ی اول از نقطه‌ی $j=0$ خارج و در مرحله‌ی آخر به آن وارد شود. محدودیت‌های ۴ و ۵ تضمین می‌کنند که تحت هر سناریو، وسیله‌ی نقلیه دقیقاً یک بار به هر نقطه وارد و دقیقاً یک بار از آن نقطه خارج شود. محدودیت ۶ سبب می‌شود که تحت هر سناریو اگر وسیله‌ی نقلیه در مرحله‌ی $k$ به نقطه‌یی وارد شد، در مرحله‌ی $k+1$ از آن خارج شود و بالعکس. این مفهوم با قید ۷ نیز تضمین می‌شود؛ اما دلیل استفاده از هر دو قید، بهبود کرانِ آزادسازی خطی مسئله است. توجه داشته باشید که محدودیت‌های ۱ تا ۶ از تشکیل زیرتور[۹] جلوگیری، و تضمین می‌کنند که تحت هر سناریو یک دور همیلتونی ایجاد شود. محدودیت ۸ رعایت قرارداد ۱ را تضمین می‌کند. لازم به ذکر است به‌دلیل آن که در قسمت ۳.۲. دامنه‌ی اندیس متغیر به $\delta^{s}_{j,j',k}$ محدود شد، قرارداد ۲ در هر جواب شدنی مدل پیشنهادی به‌طور خود به خود رعایت می‌شود. محدودیت‌های ۹ تا ۱۲ مقدارِ بار وسیله‌ی نقلیه را پس از اتمام سرویس‌دهی در مرحله‌ی $k$اُم تعیین می‌کند. محدودیت‌های ۱۰ و ۱۴ تضمین می‌کنند تحت هر سناریو، هنگام ملاقات یک مشتری، مقدار بار وسیله‌ی نقلیه حداقل به اندازه‌ی تقاضای او باشد. محدودیت‌های ۱۱ و ۱۲ سبب می‌شوند که وسیله‌ی نقلیه هنگام ملاقات انبارهای مجازی به‌طور کامل بارگیری کند. البته قراردادن قید ۱۲ ضروری نیست و برای بهبود کران آزادسازی خطی مسئله در نظر گرفته شده است. محدودیت‌های ۱۳ و ۱۴ نوع متغیرها را تعیین می‌کند و محدودیت ۱۵ نمایشی نمادین از قیود عدم ناهماهنگی است که در قسمت بعد، به‌طور کامل شرح داده خواهد شد.

## ۵.۲. قیود عدم ناهماهنگی

در یک مرحله‌ی تصمیم‌گیری دو سناریو غیر قابل تمایز نامیده می‌شوند اگر با توجه به عدم قطعیتی که تا آن مرحله محقق شده، تاریخچه‌ی یکسانی داشته باشند و نتوان تشخیص داد که کدام‌یک از آن دو در آینده اتفاق می‌افتد؛ در غیر این صورت، دو سناریو تمایزپذیرند. قیود عدم ناهماهنگی تضمین می‌کنند که اگر دو سناریو در یک مرحله‌ی تصمیم‌گیری غیرقابل تمایزند، در آن مرحله تصمیمات مشابهی تحت آن دو سناریو اتخاذ شود. در مسائل تصادفی با عدم قطعیت برون‌زا، زمان محقق شدن هر پارامتر غیرقطعی از قبل معلوم است. از این رو، یک درخت سناریوی ثابت وجود دارد که قیود عدم ناهماهنگی به‌سادگی بر اساس آن نوشته می‌شود.[۱] اما چون در مسئله‌ی $RP$ تقاضای هر مشتری در لحظه‌ی ملاقات محقق می‌شود، زمان محقق شدن عدم قطعیت وابسته به تصمیمات است و عدم قطعیت از نوع درون‌زاست. در چنین مسئله‌یی درخت سناریو نیز به تصمیمات بستگی دارد و رعایت قیود عدم ناهماهنگی چالش‌برانگیز است.

برای نشان دادن وابستگی درخت سناریو به تصمیمات، مثالی را در نظر بگیرید که در آن وسیله‌ی نقلیه با ظرفیت ۱۰۰ واحد باید سه مشتری را سرویس دهد؛ مراجعه به انبار برای بارگیری حداکثر یک بار مجاز است. هشت سناریو با احتمال مساوی امکان‌پذیر است و تقاضای مشتریان تحت هر سناریو در جدول ۱ آمده است. در این مثال، $J=\{-1,0,1,2,3\}$ و پنج مرحله‌ی تصمیم‌گیری وجود دارد.

اکنون دو سیاست تصمیم‌گیری شدنی را در نظر بگیرید. طبق اولین سیاست، در مرحله‌ی اول مشتری ۱ ملاقات می‌شود. اگر تقاضای او ۴۰ بود، نقاط ۳ و ۲ و ۱- و ۰ به‌ترتیب ملاقات می‌شوند، اما اگر تقاضای او ۵۰ یا ۷۰ بود، در مرحله‌ی دوم، وسیله‌ی نقلیه برای بارگیری به انبار مجازی ۱- می‌رود، سپس نقاط ۲ و ۳ و ۰ را به‌ترتیب ملاقات می‌کند. طبق دومین سیاست، مشتری ۲ و ۳ به‌ترتیب در مرحله‌ی اول و دوم ملاقات می‌شوند. اگر تقاضای آنها به‌ترتیب ۳۰ و ۱۰ بود، مشتری ۱ و نقاط ۱- و ۰ به‌ترتیب ملاقات می‌شوند. در غیر این صورت، وسیله‌ی نقلیه برای بارگیری به انبار مجازی ۱- می‌رود، سپس مشتری ۱ و نقطه‌ی صفر را به‌ترتیب ملاقات می‌کند. در شکل ۱ درخت سناریوی متناظر با هریک از سیاست‌های فوق نشان داده شده و وابستگی درخت سناریو به تصمیمات تأیید شده است.

در این مسئله کافی است قیود عدم ناهماهنگی را فقط برای متغیرهای $\delta^{s}_{j,j',k}$ بنویسیم. از آنجا که در مرحله‌ی اول همه‌ی سناریوها غیرقابل تمایزند، قیود عدم ناهماهنگی برای تصمیمات مرحله‌ی اول عبارت است از:

$$\delta^{s}_{0,j,1}=\delta^{s'}_{0,j,1}\quad\forall s,s'\in S: s'=s+1 \tag{۱۶}$$

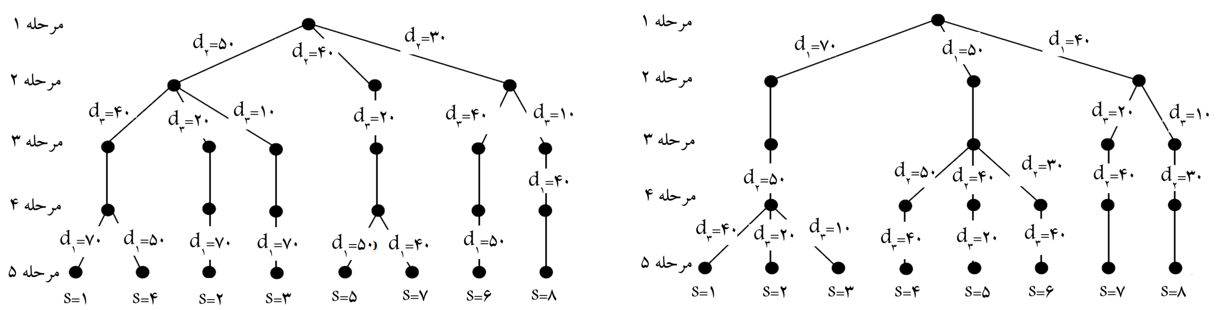
اما در مراحل $k>1$، این که دو سناریو تمایزپذیرند یا خیر، از قبل معلوم نیست و به تصمیمات وابسته است. از این رو برای فرمول‌بندی قیود عدم ناهماهنگی، به‌ازای هر جفت سناریوی $s$ و $s'$، مجموعه‌ی $D(s,s')$ تعریف می‌شود که بیانگر مشتریانی است که تقاضایشان تحت سناریوهای $s$ و $s'$ متفاوت است.

$$D(s,s')=\left\{j: j\in\{1,2,\ldots,n_I\}, d^{s}_{j}\neq d^{s'}_{j}\right\} \tag{۱۷}$$

به‌وضوح، سناریوهای $s$ و $s'$ تا زمانی که هیچ‌یک از مشتریان مجموعه‌ی $D(s,s')$ ملاقات نشوند، غیرقابل تمایز خواهد بود. به‌عنوان مثال، با توجه به جدول ۱ سناریوهای ۴ و ۵ فقط در تقاضای مشتریان ۲ و ۳ متفاوت است و داریم: $D(4,5)=\{2,3\}$.

جدول ۱. تقاضای مشتریان تحت سناریوهای مختلف.

| سناریو | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d^{s}_{1}$ | ۷۰ | ۷۰ | ۷۰ | ۵۰ | ۵۰ | ۵۰ | ۴۰ | ۴۰ |
| $d^{s}_{2}$ | ۵۰ | ۵۰ | ۵۰ | ۵۰ | ۴۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۳۰ |
| $d^{s}_{3}$ | ۴۰ | ۲۰ | ۱۰ | ۴۰ | ۲۰ | ۴۰ | ۲۰ | ۱۰ |




الف) اولین سیاست تصمیم گیری؛ ب) دومین سیاست تصمیم گیری.

شکل ۱. وابستگی درخت سناریو به اولین و دومین سیاست تصمیم‌گیری.

در اولین سیاست تصمیم‌گیری، تحت سناریوهای ۴ و ۵ هیچ‌یک از مشتریان ۲ و ۳ قبل از مرحله‌ی سوم ملاقات نشده‌اند، و از این رو این دو سناریو در مراحل $k \leq 3$ غیرقابل تمایزند (شکل ۱الف). در حالی که در دومین سیاست تصمیم‌گیری چون مشتری ۲ در اولین مرحله ملاقات شده، سناریوهای ۴ و ۵ از مرحله‌ی دوم به بعد متمایز شده‌اند (شکل ۱ب).

بنابراین، دو سناریوی $s$ و $s'$ در $k$اُمین مرحله‌ی تصمیم‌گیری غیرقابل تمایزند اگر و تنها اگر هیچ‌یک از مشتریانِ $j' \in D(s,s')$ در مراحل $k' < k$ ملاقات نشده باشند. لذا گزاره‌ی ۱ برقرار است.

**گزاره ۱.** در مدل $RP$، عدم ناهماهنگی میان تصمیماتِ مراحلِ $1 < k$ را می‌توان از طریق قید شرطی ۱۸ تضمین کرد که در آن $k_{s,s'} = \mathrm{Min}\,(2n_{s,s'}, n_{s,s'}+R)+1$ و $n_{s,s'}$ تعداد مشتریانی است که تقاضایشان تحت سناریوهای $s$ و $s'$ مشابه است.

$$\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(s,s')}\delta^{s}_{j,j',k'}=0 \;\Rightarrow\; \left(\forall j'''\in J \;\sum_{j''\in J}\delta^{s}_{j'',j''',k}=\sum_{j''\in J}\delta^{s'}_{j'',j''',k}\right) \quad \forall s,s'\in S: s<s',\ \forall k: 1<k\leq k_{s,s'} \tag{18}$$

**اثبات:** با توجه به تعریف مجموعه‌ی $D(s,s')$ به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که قید ۱۸ تضمین می‌کند اگر هیچ‌یک از مشتریان $j' \in D(s,s')$ در مراحل $k' < k$ ملاقات نشده‌اند، در مرحله‌ی $k$اُم و تحت $s$ و $s'$، نقطه‌ی یکسانی ملاقات شود.[3] ضمناً با استدلالی ساده می‌توان نشان داد که $k_{s,s'}$ یک کران بالا روی تعداد مراحلی است که سناریوهای $s$ و $s'$ می‌توانند غیرقابل تمایز بمانند. □

محدودیت ۱۸ با محدودیت‌های خطی ۱۹ و ۲۰ معادل است.

$$\sum_{j''\in J}\delta^{s}_{j'',j''',k}-\sum_{j''\in J}\delta^{s'}_{j'',j''',k}\leq\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(s,s')}\delta^{s}_{j,j',k'}, \quad \forall s,s'\in S: s<s',\ \forall k: 1<k\leq k_{s,s'},\ \forall j'''\in J \tag{19}$$

$$\sum_{j''\in J}\delta^{s'}_{j'',j''',k}-\sum_{j''\in J}\delta^{s}_{j'',j''',k}\leq\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(s,s')}\delta^{s}_{j,j',k'}, \quad \forall s,s'\in S: s<s',\ \forall k: 1<k\leq k_{s,s'},\ \forall j'''\in J \tag{20}$$

بدین‌ترتیب، مدل $RP'$ از جایگزینی قیود ۱۶، ۱۹ و ۲۰ به جای محدودیت نمادین ۱۵ در $RP$ به دست می‌آید:

$$(RP')$$

$$\mathrm{Min}\ z=\sum_{s\in S}p^{s}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}\sum_{k\in K}f_{j,j'}\delta^{s}_{j,j',k}$$

$$\text{s.t.}\quad (2)-(14),\ (16),\ (19),\ (20)$$

## ۳. کاهش در قیود عدم ناهماهنگی

قیود عدم ناهماهنگی ۱۹ و ۲۰ به‌ازای هر جفت سناریو نوشته شده است و درصد بالایی از قیود $RP'$ را تشکیل می‌دهد و حل آن را مشکل می‌کند. اما خوشبختانه تعداد زیادی از این قیود زائدند و حذف آنها تأثیر قابل توجهی در کاهش اندازه‌ی مدل خواهد داشت. در این قسمت، رویکردهایی برای شناسایی این قیود زائد ارائه می‌کنیم و نشان می‌دهیم با حذف محدودیت ۲۰ و بازنویسی محدودیت ۱۹ به‌ازای یک زیرمجموعه‌ی مشخص از جفت سناریوها می‌توان به مدلی معادل با $RP'$ اما با اندازه‌ی کوچک‌تر دست یافت و بهبود قابل توجهی در زمان حل ایجاد کرد.

**گزاره ۲.** در $RP'$، قید ۲۰ زائد است و می‌تواند حذف شود.

**اثبات:** فرض کنید بردار $\left(\hat{\delta},\hat{y}\right)$ در قیود ۲-۱۴، ۱۶ و ۱۹ صدق کند. کافی است نشان دهیم $\hat{\delta}$ در محدودیت ۲۰ نیز صدق می‌کند. بدین منظور، دو سناریوی دلخواه $s_1 < s'_1$ و مرحله‌ی دلخواه $1 \leq k_1 \leq k_{s_1,s'_1}$ را در نظر بگیرید. برای سه‌تایی $(s_1,s'_1,k_1)$ یکی از دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

**حالت اول:** $\sum_{k'\in K:k'<k_1}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(s_1,s'_1)}\hat{\delta}^{s_1}_{j,j',k'}\geq 1$

در این حالت، بدیهی است که $\hat{\delta}$ به‌ازای سه‌تایی $(s_1,s'_1,k_1)$ و به‌ازای هر $j''' \in J$، در قید ۲۰ صدق می‌کند و حکم برقرار است.

**حالت دوم:** $\sum_{k'\in K:k'<k_1}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(s_1,s'_1)}\hat{\delta}^{s_1}_{j,j',k'}=0$

در این حالت، طبق قید ۱۹ داریم:

$$\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_1}_{j'',j''',k_1}-\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s'_1}_{j'',j''',k_1}\leq 0 \qquad \forall j'''\in J$$

و لذا، به‌ازای هر $j''' \in J$، برای $\hat{\delta}$ سه وضعیت ممکن است:

وضعیت ۱. $\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_1}_{j'',j''',k_1}=0,\ \sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s'_1}_{j'',j''',k_1}=0$

وضعیت ۲. $\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_1}_{j'',j''',k_1}=1,\ \sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s'_1}_{j'',j''',k_1}=1$

وضعیت ۳. $\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_1}_{j'',j''',k_1}=0,\ \sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s'_1}_{j'',j''',k_1}=1$

ادعا می‌کنیم وضعیت ۳ هرگز نمی‌تواند رخ دهد. از طرف دیگر مغایرتی بین وضعیت ۱ و ۲ و قید ۲۰ وجود ندارد. لذا $\hat{\delta}$ به‌ازای سه‌تایی $(s_1, s'_1, k_1)$ و به‌ازای هر $j''' \in J$ در قید ۲۰ صدق می‌کند و اثبات تمام است. اکنون، تنها لازم است ادعای مطرح شده را ثابت کنیم. مطابق برهان خلف، فرض کنید وضعیت ۳ به‌ازای نقطه‌یی مانند $j_1$ رخ دهد که بیان می‌دارد در $k_1$اُمین مرحله، نقطه‌ی $j_1$ تحت سناریوی $s'_1$ ملاقات می‌شود، اما تحت $s_1$ ملاقات نمی‌شود. اما چون تحت هر سناریو و در هر مرحله دقیقاً یک نقطه باید ملاقات شود، پس نقطه‌ی $j_2$ $(j_2 \neq j_1)$ وجود دارد به‌طوری که در $k_1$اُمین مرحله تحت سناریوی $s_1$ ملاقات می‌شود، اما تحت $s'_1$ ملاقات نمی‌شود یعنی: $\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_1}_{j'',j_2,k_1}=1$ و $\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s'_1}_{j'',j_2,k_1}=0$ این روابط محدودیت ۱۹ را برای سه‌تایی $(s_1, s'_1, k_1)$ و برای $j''' = j_2$ نقض می‌کنند. از این رو فرض خلف باطل است.□

اکنون، فرض کنید $RP'R_1$ مدل کاهش یافته‌یی باشد که با اعمال گزاره‌ی ۲ و حذف محدودیت ۲۰ از $RP'$ به دست آمده است. در $RP'R_1$، محدودیت ۱۹ به‌ازای هر جفت سناریو نوشته شده و درصد بالایی از کل قیود را تشکیل می‌دهد؛ اما خوشبختانه این قیود به‌ازای تعداد زیادی از جفت سناریوها زائدند. بدین منظور، الگوریتم ۱ را ارائه می‌کنیم که قادر است ترکیبات زائدِ $(s, s')$ را شناسایی و کاهش چشم‌گیری در تعداد محدودیت ۱۹ ایجاد کند. درواقع خروجی این الگوریتم، گرافِ بدون جهت $G^* = (S, A^*)$ است که هر رأس آن با یک سناریو متناظر است. نشان می‌دهیم در مدل $RP'R_1$ تنها لازم است محدودیت ۱۹ برای جفت سناریوهای $(s, s')$ که کمان نظیر آنها در $A^*$ وجود دارد، نوشته شود.

### ۱.۳. الگوریتم ۱

**گام اول:** به‌ازای هر $L = 1, \ldots, n_I$، مجموعه‌ی $A^L$ را مجموعه‌ی همه‌ی جفت سناریوهایی تعریف کنید که در تقاضای دقیقاً $L$ مشتری متفاوت‌اند.

$$A^L = \{(s, s') : s, s' \in S, s < s', |D(s, s')| = L\}$$
$$\forall L = 1, 2, \ldots, n_I$$

قرار دهید $A^* = \{\}$، $L = 1$ و گراف تهی $G^* = (S, A^*)$ را تشکیل دهید و به گام دوم بروید.

**گام دوم:** تا وقتی که $L \leq n_I$، مراحل ذیل را انجام دهید:

اگر $A^L \neq \{\}$، به‌دلخواه جفت سناریوی $(s, s') \in A^L$ را انتخاب و از $A^L$ حذف کنید. سپس بررسی کنید که آیا در گراف $G^*$ مسیری بین $s$ و $s'$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر کمانِ $(s'', s''')$ روی آن، رابطه‌ی $D(s'', s''') \subseteq D(s, s')$ برقرار باشد؟ اگر چنین مسیری وجود ندارد، کمان جدیدِ $(s, s')$ را به $G^*$ اضافه کنید و قرار دهید $A^* = A^* \cup \{(s, s')\}$. در غیر این صورت، قرار دهید $L := L + 1$.

**گزاره‌ی ۳.** فرض کنید گراف بدون جهت $G^* = (S, A^*)$ از الگوریتم ۱ به دست آمده باشد. اگر در مدل $RP'R_1$، محدودیت عدم ناهماهنگی ۱۹ فقط به‌ازای جفت سناریوهای $(s, s') \in A^*$ نوشته شود، مدل کاهش‌یافته‌یی معادل با $RP'R_1$ به دست می‌آید.

**اثبات:** مدل $RP'R_2$ را مشابه $RP'R_1$ تعریف کنید؛ با این تفاوت که در $RP'R_2$ محدودیت ۱۹ تنها به‌ازای جفت سناریوهای $(s, s') \in A^*$ نوشته می‌شود. برای اثباتِ معادل بودنِ دو مدل، کافی است نشان دهیم هر جوابِ شدنی برای $RP'R_2$ برای $RP'R_1$ نیز شدنی است. بدین منظور، فرض کنید بردار $\left(\hat{\delta}, \hat{y}\right)$ یک جواب شدنی برای $RP'R_2$ باشد. باید نشان دهیم این جواب به‌ازای هر $s, s' \in S$ که $s < s'$، در محدودیت ۱۹ صدق می‌کند و از این رو برای $RP'R_1$ نیز شدنی است. بدین منظور، جفت سناریوی دلخواهِ $(\tilde{s}, \tilde{s}')$ را در نظر می‌گیریم $(\tilde{s} < \tilde{s}')$ و نشان می‌دهیم $\left(\hat{\delta}, \hat{y}\right)$ در محدودیت ۱۹ به‌ازای $(s, s') = (\tilde{s}, \tilde{s}')$ صدق می‌کند. اگر $(\tilde{s}, \tilde{s}') \in A^*$ به وضوح حکم برقرار است. پس فرض کنید $(\tilde{s}, \tilde{s}') \notin A^*$. با توجه به روندِ الگوریتم ۱، در $G^*$ مسیرِ $P_{\tilde{s},\tilde{s}'} : \tilde{s} = s_0, s_1, \ldots, s_M = \tilde{s}'$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $m = 1, \ldots, M$، $D(s_{m-1}, s_m) \subseteq D(\tilde{s}, \tilde{s}')$ و لذا $k_{\tilde{s},\tilde{s}'} \leq k_{s_{m-1},s_m}$ چون $(s_{m-1}, s_m) \in A^*$، پس در مدلِ $RP'R_2$ محدودیت ۱۹ به‌ازای $(s_{m-1}, s_m)$ نوشته شده‌اند و داریم:

$$\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D\left(s_{m-1},s_m\right)}\hat{\delta}^{s_{m-1}}_{j,j',k'}=0 \Rightarrow$$
$$\left(\forall j''' \in J \sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_{m-1}}_{j'',j''',k}=\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_m}_{j'',j''',k}\right)$$
$$\forall m = 1, 2, \ldots, M,\ \ \forall k : 1 < k \leq k_{\tilde{s},\tilde{s}'} \tag{21}$$

اکنون ادعا می‌کنیم:

$$\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(\tilde{s},\tilde{s}')}\hat{\delta}^{\tilde{s}}_{j,j',k'}=0 \Rightarrow$$
$$\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D\left(s_{m-1},s_m\right)}\hat{\delta}^{s_{m-1}}_{j,j',k'}=0$$
$$\forall m = 1, 2, \ldots, M,\ \ \forall k : 1 < k \leq k_{\tilde{s},\tilde{s}'} \tag{22}$$

با توجه به روابط ۲۱ و ۲۲ داریم:

$$\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(\tilde{s},\tilde{s}')}\hat{\delta}^{\tilde{s}}_{j,j',k'}=0 \Rightarrow$$
$$\left(\forall j''' \in J \quad \begin{array}{l}\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_0=\tilde{s}}_{j'',j''',k}=\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_1}_{j'',j''',k}= \\ =\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_2}_{j'',j''',k}=\ldots=\sum_{j''\in J}\hat{\delta}^{s_M=\tilde{s}'}_{j'',j''',k}\end{array}\right)$$
$$\forall k : 1 < k \leq k_{\tilde{s},\tilde{s}'} \tag{23}$$

و لذا بردار $\left(\hat{\delta}, \hat{y}\right)$ به‌ازای $(s, s') = (\tilde{s}, \tilde{s}')$ در محدودیت ۱۹ صدق می‌کند و حکم برقرار است.

اکنون تنها لازم است رابطه‌ی ۲۲ ثابت شود. به‌دلیل قید ۱۶، این رابطه به‌ازای $k = 2$ بدیهی است. پس حالت $2 < k \leq k_{\tilde{s},\tilde{s}'}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(\tilde{s},\tilde{s}')}\hat{\delta}^{\tilde{s}}_{j,j',k'}=0$. از آنجا که $D(\tilde{s}, s_1) \subseteq D(\tilde{s}, \tilde{s}')$ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(\tilde{s},s_1)}\hat{\delta}^{\tilde{s}}_{j,j',k'}=0 \tag{24}$$

با توجه به اینکه $(\tilde{s}, s_1) \in A^*$، در مدلِ $RP'R_1$ محدودیت ۱۹ به‌ازای $(\tilde{s}, s_1)$

جدول ۲. ارزیابی مدل‌های پیشنهادی.

| نمونه | $n_I$ | $n_S$ | مدل | تعداد متغیرها | تعداد قیود (۲)-(۱۴)و(۱۶) | مقدار بهین | تعداد قیود عدم ناهماهنگی | نسبت (٪) | اختلاف نسبی کران خطی (٪) | زمان حل (ثانیه) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $RP'$ | | | | ۱۵۶۸ | ۱۰۰ | - | ۴٫۲۴ |
| ۱ | ۵ | ۱۰ | $RP'R_1$ | ۱۶۳۱ | ۸۰۶ | ۲۵٫۴۵ | ۷۸۴ | ۵۰ | ۰٫۰۰ | ۲٫۸۶ |
| | | | $RP'R_2$ | | | | ۴۰۶ | ۲۶ | ۰٫۰۰ | ۱٫۷۳ |
| | | | $RP'$ | | | | ۴۰۶۰ | ۱۰۰ | - | ۲۰٫۱۹ |
| ۲ | ۵ | ۱۵ | $RP'R_1$ | ۲۴۴۶ | ۱۲۱۱ | ۲۸٫۶۸ | ۲۰۳۰ | ۵۰ | ۰٫۰۰ | ۱۴٫۲۷ |
| | | | $RP'R_2$ | | | | ۸۱۹ | ۲۰ | ۰٫۰۰ | ۹٫۶۱ |
| | | | $RP'$ | | | | ۳۱۶۸ | ۱۰۰ | - | ۴۸۱٫۲۶ |
| ۳ | ۷ | ۱۰ | $RP'R_1$ | ۴۰۹۱ | ۱۲۲۴ | ۲۶٫۴۷ | ۱۵۸۴ | ۵۰ | ۰٫۰۰ | ۳۷۸٫۴۰ |
| | | | $RP'R_2$ | | | | ۱۰۹۸ | ۳۵ | ۰٫۰۰ | ۲۲۲٫۰۵ |
| | | | $RP'$ | | | | ۶۰۶۶ | ۱۰۰ | - | ۱۳۶۷٫۴۹ |
| ۴ | ۷ | ۱۵ | $RP'R_1$ | ۶۱۳۶ | ۱۸۳۹ | ۲۷٫۰۵ | ۳۰۳۳ | ۵۰ | ۰٫۰۰ | ۹۵۷٫۱۸ |
| | | | $RP'R_2$ | | | | ۱۶۶۵ | ۲۷ | ۰٫۰۰ | ۹۳۰٫۴۲ |
| | | | $RP'$ | | | | ۴۸۰۰ | ۱۰۰ | - | ۵۲۱۷٫۱۱ |
| ۵ | ۱۰ | ۱۰ | $RP'R_1$ | ۱۱۲۳۱ | ۲۰۰۱ | ۳۰٫۹۷ | ۲۴۰۰ | ۵۰ | ۰٫۰۰ | ۳۰۸۹٫۰۷ |
| | | | $RP'R_2$ | | | | ۱۶۲۰ | ۳۴ | ۰٫۰۰ | ۹۵۸٫۹۱ |
| | | | $RP'$ | | | | ۱۱۱۶۰ | ۱۰۰ | - | * |
| ۶ | ۱۰ | ۱۵ | $RP'R_1$ | ۱۶۸۴۶ | ۳۰۰۶ | ۳۰٫۴۲ | ۵۵۸۰ | ۵۰ | ۰٫۰۰ | * |
| | | | $RP'R_2$ | | | | ۳۶۶۰ | ۳۳ | ۰٫۰۰ | ۵۰۳۹٫۰۷ |

نوشته شده‌اند و بنابر رابطه‌ی ۲۴ داریم:

$$\left(\forall j''' \in J \sum_{j''\in J} \hat{\delta}^{\tilde{s}}_{j'',j''',k''} = \sum_{j''\in J} \hat{\delta}^{s_1}_{j'',j''',k''}\right) \qquad \forall k'' : k'' \le k \tag{۲۵}$$

با توجه به ۲۴ و ۲۵ نتیجه می‌شود $\sum_{k'\in K:k'<k}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in D(\tilde{s},\tilde{s}')} \hat{\delta}^{s_1}_{j,j',k'} = 0$. با استدلالی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر $m = 2, ..., M$ داریم:

$$\left(\forall j''' \in J \sum_{j''\in J} \hat{\delta}^{s_{m-1}}_{j'',j''',k''} = \sum_{j''\in J} \hat{\delta}^{s_m}_{j'',j''',k''}\right) \qquad \forall k'' : k'' \le k \tag{۲۶}$$

از روابط ۲۵ و ۲۶ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j''\in J} \hat{\delta}^{\tilde{s}}_{j'',j''',k''} = \sum_{j''\in J} \hat{\delta}^{s_m}_{j'',j''',k''} \qquad \forall m = 1, ..., M, \quad \forall j''' \in J, \ \forall k'' : k'' \le k \tag{۲۷}$$

و لذا، رابطه‌ی ۲۲ برقرار است.□

چنان که پیش‌تر نیز گفته شد، مدل کاهش یافته‌یی که بعد از اِعمال گزاره‌ی ۲ روی $RP'$ به دست می‌آید را با $RP'R_1$ و مدلی که بعد از اِعمال گزاره‌های ۲ و ۳ به دست می‌آید، با $RP'R_2$ نشان می‌دهیم. در ادامه مدل‌های $RP'$، $RP'R_1$ و $RP'R_2$ از نظر محاسباتی ارزیابی می‌شوند.

## ۴. نتایج محاسباتی

در این قسمت، مدل‌های $RP'$، $RP'R_1$ و $RP'R_2$ روی چند نمونه‌ی تصادفی که مشخصات آنها در جدول ۲ آمده ارزیابی می‌شود (در همه‌ی نمونه‌ها، پارامتر $R$ برابر با ۱ قرار داده شده است). مدل‌ها در نرم‌افزار بهینه‌سازی AIMMS پیاده‌سازی و با CPLEX حل شد.[19] از آنجا که مدل‌های $RP'$، $RP'R_1$ و $RP'R_2$ تنها در قیود متضمن عدم ناهماهنگی برای مراحل $k > 1$ متفاوت‌اند، تعداد متغیرها و تعداد قیود ۲-۱۴ و ۱۶ و نیز مقدار بهین تابع هدف که به‌ترتیب در ستون‌های ۵ الی ۷ از جدول ۲ گزارش شده‌اند، برای آنها مشابه است. به‌علاوه برای هر مدل، تعداد قیود عدم ناهماهنگی (برای مراحل $k > 1$) در ستون ۸ آمده است. برای نمایشِ تأثیر رویکردهای پیشنهادی در کاهشِ تعداد قیود عدم ناهماهنگی، ستون «نسبت» در نظر گرفته شده است که هر درایه‌ی آن، بیان‌گر نسبت «تعداد قیود عدم ناهماهنگی در مدل مربوطه» به «تعداد قیود عدم ناهماهنگی در مدل $RP'$» است. به‌عنوان مثال، در نمونه‌ی ۱، مقدار ۲۶٪ در مقابل مدل $RP'R_2$ بیان می‌دارد که نسبت تعداد قیود عدم ناهماهنگی در $RP'R_2$ به تعداد آنها در $RP'$، ۰٫۲۶ است. به‌علاوه، هر درایه‌ی ستون «اختلاف نسبی کران خطی» بیان‌گر اختلاف نسبی کران آزادسازی خطی مدلِ نظیرش به کران آزادسازی خطی $RP'$ است. زمان حل هریک از مدل‌ها در ستون آخر گزارش شده و علامت * بیان می‌دارد که فرایند حل پس از گذشت ۱۰۸۰۰ ثانیه پایان نیافته است. با توجه به جدول ۲ گزاره‌های ۲ و ۳ تأثیر قابل توجهی در کاهش تعداد قیود عدم ناهماهنگی و بهبود زمان حل دارند. ضمناً کرانِ آزادسازی خطی هر سه مدل یکسان است، به عبارت دیگر، حفظ قیود

عدم ناهماهنگی زائد در مدل، منجر به بهبود کرانِ آزادسازی خطی مسئله نمی‌شود. درواقع، حذف این قیود نه تنها تأثیر منفی روی کران آزادسازی خطی مسئله ندارد، بلکه اندازه‌ی مسئله و زمان حل را نیز به‌شدت کاهش می‌دهد. بنابراین، از نظر محاسباتی مدل $RP'R_2$ به دو مدل دیگر ترجیح داده می‌شود.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه با فرض عدم قطعیت در تقاضای مشتریان و با دیدگاه پویا به‌عنوان کاربردی جدید از برنامه‌ریزی تصادفی تحت عدم قطعیت درون‌زا معرفی و فرمول‌بندی شد. سپس به‌دلیل آن‌که در این مسئله قیود عدم ناهماهنگی وابسته به تصمیمات‌اند و درصد بالایی از کل قیود را تشکیل می‌دهند، رویکردهای کارآمدی ارائه و اثبات شد که تأثیر چشم‌گیری در کاهش تعداد این قیود و بهبود اندازه‌ی مدل دارند. با توجه به اطلاعات ما، مدل پیشنهادی، اولین مدلِ برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌یی است که برای این دسته از مسائل ارائه شده است و اهمیت آن به سبب بینشی است که نسبت به ویژگی‌ها و ساختار مسئله ایجاد می‌کند؛ می‌توان از آن در توسعه‌ی روش‌های حلِ کارآمد بهره برد.

از آنجا که مسئله‌ی مذکور NP-Hard است، نرم‌افزارهای حل قادر نیستند نمونه‌های بزرگِ آن را در زمان مناسب حل کنند. از این رو، ارائه‌ی روش حلِ کارآمد مبتنی بر ساختار مدل به‌عنوان کار آتی پیشنهاد می‌شود.

## پانوشت‌ها

1. stochastic programming with recourse
2. exogenous uncertainty
3. endogenous uncertainty
4. vehicle routing problem
5. single vehicle routing problem with stochastic demands
6. dynamic programming
7. nonanticipativity constraints
8. scenario tree
9. sub-tour

## منابع (References)


1. Birge, J.R. and Louveaux, F., *Introduction to Stochastic Programming*, Springer (2011).
2. Sahinidis, N.V. "Optimization under uncertainty: State-of-the-art and opportunities", *Computers and Chemical Engineering,* **28**, pp. 971-983 (2004).
3. Goel, V. and Grossmann, I.E. "A class of stochastic programs with decision dependent uncertainty", *Mathematical Programming, Ser. B,* **108**(2-3), pp. 355-394 (2006).
4. Pflug, G.C. "On-line optimization of simulated markovian processes", *Mathematics of Operations Research,* **15**(3), pp. 381-395 (1990).
5. Goel, V. and Grossmann, I.E. "A stochastic programming approach to planning of offshore gas field developments under uncertainty in reserves", *Computers and Chemical Engineering*, **28**, pp. 1409-1429 (2004).
6. Gupta V. and Grossmann, I.E. "Solution strategies for multistage stochastic programming with endogenous uncertainties", *Computers and Chemical Engineering*, **35**(11), pp. 2235-2247 (2011).
7. Colvin, M. and Maravelias, C.T. "A stochastic programming approach for clinical trial planning in new drug development", *Computers and Chemical Engineering*, **32**(11), pp. 2626-2642 (2008).
8. Laporte, G., "Fifty years of vehicle routing", *Transportation Science*, **43**, pp.408-416 (2009).
9. Gendreau, M. Laporte, G. and Seguin, R. "Invited review: Stochastic vehicle routing", *European Journal of Operational Research*, **88**(1), pp. 3-12 (1996).
10. Novoa, C. and Storer, R. "An approximate dynamic programming approach for the vehicle routing problem with stochastic demands", *European Journal of Operational Research,* **196**(2), pp. 509-515 (2009).
11. Rei, W., Gendreau, M. and Soriano, P. "A hybrid monte carlo local branching algorithm for the sinlge vehicle routing problem with stochastic demands", *Transportation Science*, **44**(1), pp. 136-146 (2010).
12. Marinakis, Y., Iordanidou, G.R. and Marinaki, M. "Particle swarm optimization for the vehicle routing problem with stochastic demand", *Applied Soft Computing*, **13**(4), pp. 1693-1704 (2013).
13. Pillac, V., Gendreau, M., Guéret, C. and Medaglia, A.L. "A review of dynamic vehicle routing problems", *European Journal of Operational Research*, **225**(1), pp. 1-11 (2013).
14. Secomandi, N. "Comparing neuro-dynamic programming algorithms for the vehicle routing problem with stochastic demands", *Computers and Operations Research*, **27**(11-12), pp. 1201-1225 (2000).
15. Secomandi, N. "A rollout policy for the vehicle routing problem with stochastic demands", *Operations Research*, **49**(5), pp. 796-802 (2001).
16. Secomandi, N. "Analysis of a rollout approach to sequencing problems with stochastic routing applications", *Journal of Heuristics,* **9**(4), pp. 321-352 (2003).
17. Secomandi, N. and Margot, F. "Reoptimization approaches for the vehicle-routing problem with stochastic demands", *Operations Research*, **57**(1), pp. 214-230 (2009).
18. Dror, M. "Modeling vehicle routing with uncertain demands as a stochastic program: Properties of the corresponding solution", *European Journal of Operational Research*, **64**(3), pp. 432-441 (1993).
19. Bisschop, J., *AIMMS-Optimization Modeling*, Paragon Decision Technology, Harlem, 305 p. (2012). http://www.aimms.com