مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۱-۳۳، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۱۱۳-۱۲۰، (یادداشت فنی)

Research Note

مدل نقطه‌ی تغییر برای پایش پروفایل‌های پواسون در فاز ۲

سجاد عبدالتاجدینی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
یاسر صمیمی[*] (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

در بعضی از کاربردهای کنترل فرایند آماری، عملکرد فرایند یا کیفیت محصول به‌وسیله‌ی رابطه‌ی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود که این رابطه را پروفایل می‌نامند. طی سال‌های اخیر پایش پروفایل برای مشخصه‌های کیفی وصفی مانند برنولی، پواسون و چندجمله‌یی با استفاده از مدل‌های خطی تعمیم‌یافته[۱] مورد توجه محققین قرار گرفته است. نمودارهای کنترل مرسوم برای پایش پروفایل علی‌رغم قابلیت بسیار در تشخیص وضعیت فرایند، نسبت به تشخیص زمان واقعی ایجاد انحراف در فرایند، که به آن «نقطه‌ی تغییر» گفته می‌شود، از کارایی لازم برخوردار نیستند. هدف ما در این تحقیق استفاده از آزمون نسبت درست‌نمایی به‌منظور پایش و تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های پواسون در فاز ۲ کنترل فرایند آماری، و مقایسه‌ی این روش با روش تخمین بیشترین درست‌نمایی مبتنی بر به‌کارگیری نمودار کنترل T^2 برای پایش ضرایب پروفایل است.

واژگان کلیدی: پایش پروفایل پواسون، مدل نقطه‌ی تغییر، الگوهای خطی تعمیم‌یافته، آزمون نسبت درست‌نمایی، فاز ۲ کنترل فرایند آماری.

sajjadtajedini@gmail.com
y_samimi@kntu.ac.ir

۱. مقدمه

کنترل فرایند آماری به‌عنوان شاخه‌یی از کنترل کیفیت آماری، مجموعه‌ابزاری است که در کنترل و کاهش پراکندگی و درنتیجه بهبود کیفیت فرایندها کاربرد دارد. در تحقیقات پیشین و به‌طورکلی در اکثر کاربردهای مرسوم کنترل فرایند آماری، فرض بر این بوده که کیفیت محصول یا عملکرد فرایند را می‌توان به‌وسیله‌ی توزیع یک یا چند مشخصه‌ی کیفی و به‌وسیله‌ی نمودارهای کنترل تک‌متغیره یا چندمتغیره کنترل کرد. در دهه‌ی گذشته محققینی همچون کنگ و آلباین[۱] و وودال و همکاران[۲] حوزه‌ی جدیدی را در کنترل فرایند آماری معرفی، و عنوان کرده‌اند که در برخی از واحدهای صنعتی و خدماتی، کیفیت محصول یا عملکرد فرایند به‌وسیله‌ی رابطه‌ی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل، بهتر توصیف می‌شود؛ آنها این رابطه را پروفایل می‌نامند. پروفایل‌ها براساس نوع رابطه‌ی بین متغیر پاسخ و متغیرهای مستقل به انواع مختلفی تقسیم می‌شود. بررسی‌های صورت گرفته در ادبیات موضوع نشان می‌دهد که پایش پروفایل‌های خطی به‌علت سادگی محاسبات، بخش قابل توجهی از تح قیقات صورت گرفته در حوزه‌ی پایش پروفایل‌ها را به خود اختصاص داده است.

الگوهای خطی تعمیم‌یافته الگوهای غیر خطی خاصی هستند که با استفاده از تابع تبدیل مشخص به الگوهای خطی تبدیل می‌شوند. یکی از انواع الگوهای خطی تعمیم‌یافته‌ی گسسته، رگرسیون پواسون است. پایش پروفایل‌های پواسون به‌دلایلی چون کاربرد فراوان آن در صنعت و جدید بودن حوزه‌ی کاری به‌عنوان یک موضوع حائز اهمیت در زمینه‌ی پایش پروفایل‌ها مطرح است. معمولاً از نمودارهای کنترل چندمتغیره به‌منظور پایش این‌گونه پروفایل‌ها استفاده می‌شود. با توجه به این که زمان کشف تغییر توسط نمودارهای کنترل لزوماً منطبق با زمان واقعی تغییر نیست استفاده از رویکردهای شناسایی نقطه‌ی تغییر که زمان واقعی تغییر را معلوم می‌کند، می‌تواند در کشف سریع‌تر و ساده‌تر انحرافات با دلیل مؤثر واقع شود.

در این تحقیق به‌منظور پایش پروفایل‌های پواسون در فاز ۲ پس از توسعه‌ی مدل نقطه‌ی تغییر براساس تابع درست‌نمایی، نموداری مبتنی بر آماره‌ی درست‌نمایی استاندارد شده ارائه شده است. در این روش علاوه بر امکان تشخیص وضعیت خارج از کنترل، امکان برآورد نقطه‌ی تغییر نیز به‌صورت همزمان فراهم می‌شود. ساختار ارائه‌ی مطالب در این مقاله بدین‌شکل است که در ادامه، در بخش دوم با هدف بررسی روش‌های موجود درخصوص شناسایی نقطه‌ی تغییر در پایش پروفایل‌ها، تحقیقات پیشینِ مرتبط با موضوع مقاله مرور می‌شود. در بخش سوم مدل رگرسیون پواسون به‌طور مختصر معرفی می‌شود و سپس روش آزمون نسبت درست‌نمایی (LRT)[۲] و نمودار کنترل مربوط به آن معرفی می‌شود. در بخش چهارم عملکرد روش پیشنهادی با رویکرد پایش مرسوم مبتنی بر برآورد بیشترین درست‌نمایی (MLE) مورد مقایسه قرارگرفته است. و نهایتاً در قسمت پنجم جمع‌بندی و پیشنهاداتی برای توسعه‌ی مطالعه‌ی حاضر ارائه می‌شود.

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۱۲/۹، اصلاحیه ۱۳۹۴/۶/۷، پذیرش ۱۳۹۴/۷/۲۱.

۲. مروری بر مطالعات پیشین

در بسیاری از واحدهای صنعتی و خدماتی، کیفیت محصول یا عملکرد فرایند به‌وسیله‌ی رابطه‌ی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل، بهتر توصیف می‌شود که به این رابطه پروفایل می‌گویند. بسیاری از کاربرد پروفایل‌ها در صنعت توسط محققینی چو مستک و همکاران،[۳] کنگ و آلباین،[۱] محمود و وودال[۲] و امیری و همکاران[۴] نشان داده شده است. روش‌های مختلفی برای پایش انواع پروفایل‌ها در فاز ۱ و ۲ توسعه داده شده است. در فاز ۱ از گذشته، مجموعه‌یی از داده‌ها در دسترس است. اهداف فاز ۱ به دست آوردن اطلاعات درمورد پراکندگی فرایند در طول زمان، ارزیابی پایداری فرایند و برآورد پارامترهای مدل است. هدف از فاز ۲، کشف سریع شیفت و روند در پارامترهای مدل براساس نمودار کنترل طراحی شده در فاز ۱ است. به‌عبارت دیگر، در این فاز پارامترهای مدل معلوم‌اند و هدف اصلی این فاز آزمون فرض برابری پارامترهای مدل با مقادیر برآورد شده از فاز ۱ است. محققین بسیاری مانند کنگ و آلباین،[۱] کیم و همکاران،[۵] محمود و همکاران،[۶] زو و همکاران،[۷] سقایی و همکاران[۸] و ژانگ و همکاران[۹] پایش پروفایل‌های خطی ساده را به تفکیک فاز ۱ و ۲ بررسی کردند. روش‌هایی برای پروفایل‌های غیرخطی و مدل‌های پیچیده‌تر نیز توسط محققین دیگر بیان شد. همه‌ی محققین فوق‌الذکر متغیر پاسخ را پیوسته فرض کردند اما در بسیاری از کاربردهای صنعتی متغیر پاسخ گسسته است. پروفایل‌هایی که دارای متغیر پاسخ گسسته‌اند زیرمجموعه‌یی از مدل‌های خطی تعمیم‌یافته هستند که توجه کم‌تری به آنها شده است. محققین پایش پروفایل‌های باینری در فاز ۱ را بررسی[۱۰] و نمودارهای کنترل T^2 مختلفی برای پایش پروفایل‌های لجستیک ارائه دادند. شانگ و همکاران[۱۱] مدل کنترل براساس EWMA-GLM را برای بیان رابطه بین متغیر پاسخ باینری و متغیرهای تشریحی تصادفی در فاز ۲ بیان کردند.

زمان کشف تغییر توسط نمودارهای کنترل لزوماً منطبق با زمان واقعی تغییر نیست. استفاده از رویکردهای شناسایی نقطه‌ی تغییر که زمان واقعی تغییر را معلوم می‌کند، می‌تواند در کشف سریع‌تر و ساده‌تر انحرافات با دلیل مؤثر واقع شود. انواع تغییرات را می‌توان به‌صورت تغییر پله‌یی، تغییر پله‌یی چندگانه، تغییر با روند خطی و تغییر مونوتونیک دسته‌بندی کرد. برای یافتن زمان واقعی تغییر، محققین روش‌های مختلفی نظیر EWMA [۳]، CUSUM [۴] و MLE [۵] و روش‌های هوشمند (شبکه‌ی عصبی، درخت تصمیم و خوشه‌بندی) ارائه کردند. ساموئل و همکاران[۱۲،۱۳] از روش MLE در نمودارهای کنترل مختلف برای یافتن زمان واقعی تغییر پله‌یی در فرایند استفاده کردند. پری و پیگناتیلو[۱۴،۱۵] تغییر با روند خطی در میانگین فرایندهای پواسون و نرمال را بررسی کردند. پیگناتیلو و ساموئل[۱۳] و پری و پیگناتیلو[۱۴] نشان دادند که عملکرد MLE در شناسایی نقطه‌ی تغییر فرایندهای پواسون و نرمال از تخمین‌های EWMA و CUSUM بهتر است.

محمود و همکاران[۶] و زو و همکاران[۷] از آماره نسبت درست‌نمایی برای تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۱ و ۲ استفاده کردند. خادم‌زاده و همکاران[۱۶] همین روش را برای تخمین نقطه‌ی تغییر پروفایل‌های خطی چندگانه تحت تغییر پله‌یی در فاز ۱ به کار بردند. شرفی و همکاران[۱۷] روش MLE را برای شناسایی نقطه‌ی تغییر پله‌یی در فاز ۲ به‌منظور پایش پروفایل‌های باینری مطرح کردند. شرفی و همکاران[۱۸] روش MLE را برای شناسایی نقطه‌ی تغییر پله‌یی در فاز ۲ به‌منظور پایش پروفایل‌های پواسون مطرح کردند.

در این مقاله از آماره‌ی نسبت درست‌نمایی برای تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های پواسون در فاز ۲ استفاده می‌شود و نتایج شبیه‌سازی و عملکرد روش پیشنهادی با روش MLE شرفی و همکاران[۱۸] مقایسه می‌شود.

۳. معرفی مدل

۱.۳. مدل رگرسیون پواسون

درکنترل فرایند آماری، توزیع پواسون مطابق مرسوم به‌منظور مدل کردن تعداد نقص در یک واحد بازرسی مشخص به کار می‌رود. در این تحقیق شرایطی بررسی می‌شود که طی آن، ارزش انتظاری متغیر پاسخ از طریق مدل رگرسیون پواسون با مجموعه‌یی از متغیرهای مستقل قابل توضیح است. مدل رگرسیون پواسون زیرمجموعه‌یی از مدل‌های خطی تعمیم‌یافته است. مایرز و همکاران[۱۹] مدل رگرسیون پواسون را چنین بیان کردند:

$$\log(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} \tag{1}$$

که در آن $\boldsymbol{\beta}=(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)^T$ بردار ضرایب مدل است و $y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ ، $i = 1, \ldots, n$. رابطه‌ی ۱ را می‌توان چنین نوشت:

$$\lambda_i = \exp(\eta_i) = \exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}) = \exp(\sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{ik}) \tag{2}$$

آلبرت و اندرسون[۲۰] برای تخمین بردار پارامترهای مدل پواسون ($\boldsymbol{\beta}$) ابتدا تابع احتمال توأم را محاسبه می‌کنند:

$$L(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \left[e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{y_i}}{y_i!} \right] = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \tag{4}$$

با گرفتن لگاریتم از معادلات ۳ و ۴ و استفاده از رابطه‌ی ۲ خواهیم داشت:

$$l(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^{n} \exp(x_i^T \beta) + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(\exp(x_i^T \beta)) - \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i!) \tag{5}$$

کولاگ و نلدر[۲۱] بیان کردند که با مشتق گرفتن از رابطه‌ی ۱۵ نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ و استفاده از روش حداقل مربعات وزنی تکرارشونده، پارامترهای رگرسیون پواسون چنین برآورد می‌شوند:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X^T \hat{W} X})^{-1} \mathbf{X^T \hat{W} q} \tag{6}$$

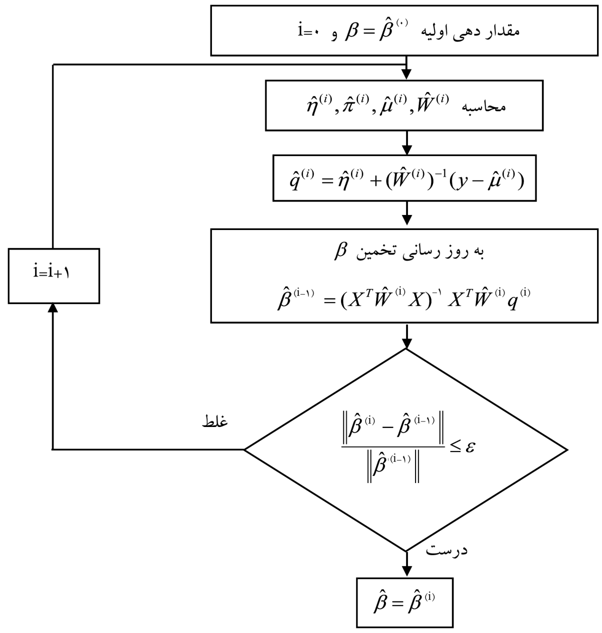
که در آن $\mathbf{X} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n})^T$ ماتریس $n \times p$ و

$$\hat{\boldsymbol{W}} = diag\left[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n\right]$$

ماتریس قطری $n \times n$ است و $\mathbf{q} = \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}})$. روند تکرار مطابق شکل ۱ است.

کولاگ و نلدر ثابت کردند هنگامی که n بزرگ است، $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ دارای توزیع نرمال p بعدی به‌صورت $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_p(\boldsymbol{\beta}, \sum)$ است به‌طوری که:

$$\sum = (\mathbf{X^T W X})^{-1} \tag{7}$$



شکل ۱. روند تخمین پارامترهای رگرسیون پواسون.[۸]

۲.۳. تخمین نقطه‌ی تغییر بار روش MLE

شرفی و همکاران[۱۸] توزیع پروفایل پواسون را به‌صورت رابطه‌ی ۸ تعریف کردند:

$$f(y_{ij}) = e^{-\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0)} \frac{(\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0))^{y_{ij}}}{y_{ij}!}, \qquad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., K \tag{8}$$

و شیفت در پارامترهای آن را به‌صورت رابطه‌ی ۹ در نظر گرفتند:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \beta_0 + \boldsymbol{\Delta} \tag{9}$$

در روابط بالا y_{ij} متغیر پاسخ با توزیع پواسون، $\mathbf{x_i}$ متغیر مستقل، $\boldsymbol{\Delta}$ بردار ثابت شیفت برحسب انحراف معیار پارامتر و $\boldsymbol{\beta}_0$ بردار پارامترهای مدل تحت کنترل و $\boldsymbol{\beta}_1$ بردار پارامترهای مدل خارج از کنترل است که چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0, & j = 1, 2, ..., \tau \\ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1, & j = \tau + 1, ..., K \end{cases} \tag{10}$$

در مدل رگرسیون پواسون، n مجموعه‌ی آزمایشی مستقل با p متغیر پیش‌بینی در هر مجموعه وجود دارد که به‌صورت $\mathbf{x_i} = (l, x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip})$ نشان داده می‌شود. تابع درست‌نمایی پروفایل پواسون به‌صورت زیر است:

$$L(\tau, \boldsymbol{\beta}_1|\mathbf{y}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{K}\prod_{i=1}^{n} y_{ij}!}[e^{-\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0) - \sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_1)} [\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0)]^{\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}} [\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_1)]^{\sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}}] \tag{11}$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی پروفایل پواسون عبارت است از:

$$\ln(\tau, \boldsymbol{\beta}_1|\mathbf{y}) = -\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0) - \sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_1) + \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0 - \sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_1 \tag{12}$$

از رابطه‌ی ۱۲ نسبت به $\boldsymbol{\beta}_1$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \ln(\tau, \boldsymbol{\beta}_1|\mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = -\sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n} x_i e^{\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_1} + \sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\mathbf{x_i} = 0 \tag{13}$$

نتیجه می‌شود:[۱۸]

$$\mathbf{x_i^T}\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \ln\left[\sum_{j=\tau+1}^{K}\frac{y_{ij}}{K-\tau}\right], \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{14}$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی ۱۲، نقطه‌ی تغییر پروفایل پواسون با روش MLE چنین به دست می‌آید:

$$\hat{\tau} = \arg\max[-\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0) - \frac{1}{K-\tau}\sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij} + \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\mathbf{x_i^T}\boldsymbol{\beta}_0 + \sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\ln\left[\sum_{j=\tau+1}^{K}\frac{y_{ij}}{K-\tau}\right]] \tag{15}$$

برای پایش پروفایل‌های پواسون در فاز ۲ از نمودار کنترل T^2 استفاده می‌شود. این نمودار کنترل با فرض مشخص‌بودن بردار میانگین ($\boldsymbol{\beta}_0$) و ماتریس کواریانس ($\sum$) در فاز ۲ به کار می‌رود. آماره نمودار کنترل T^2 به‌صورت رابطه‌ی زیر است:

$$T_j^2 = \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\mathbf{j} - \boldsymbol{\beta}_0\right)^T \sum^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\mathbf{j} - \boldsymbol{\beta}_0\right) \tag{16}$$

حد بالای کنترل نمودار T^2 برابر $\chi^2_{2,\alpha}$ است که α خطای نوع اول در توزیع مربع کای با دو درجه آزادی است. درجه آزادی مذکور به دلیل وجود دو پارامتر شیب و عرض از مبدا منظور شده است. ماتریس کواریانس در فاز ۲ مطابق رابطه‌ی ۱۷ محاسبه می‌شود:

$$\sum = (\mathbf{X^T W X})^{-1} \tag{17}$$

هرگاه نمودار کنترل T^2 هشدار خارج از کنترل بدهد، زمان واقعی تغییر از رابطه‌ی ۱۵ محاسبه می‌شود.

۳.۳. پایش پروفایل پواسون و تخمین نقطه‌ی تغییر با روش آزمون نسبت درست‌نمایی

در این روش همزمان با توسعه‌ی مدل نقطه‌ی تغییر براساس آزمون نسبت درست‌نمایی، یک نمودار کنترل براساس آماره‌ی نسبت درست‌نمایی استاندارد شده در فاز ۲ کنترل فرایند آماری ایجاد می‌شود. در نمودار کنترل پیشنهادی با افزوده شدن هر پروفایل، به‌روز رسانی برآوردهای پروفایل و بررسی شرایط خارج از کنترل به‌صورت همزمان

انجام می‌شود و نیازی نیست که ابتدا شرایط خارج ازکنترل بررسی شود و سپس به تخمین نقطه‌ی تغییر پرداخته شود. به‌منظور محاسبه‌ی حد بالای کنترل نمودار فوق از شبیه‌سازی براساس متوسط طول دنباله[۶] استفاده شده است که در بخش بعد به شرح کامل آن پرداخته می‌شود. این روش پیشنهادی درگام‌های زیر اجرایی می‌شود:

۱. مدل نقطه‌ی تغییر براساس آزمون نسبت درست‌نمایی مطابق رابطه‌ی ۱۸ تعریف می‌شود:

$$y_{ij} = \begin{cases} e^{-\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_0)} \frac{(\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_0))^{y_{ij}}}{y_{ij}!}, & i=1,\dots,n,\ \ j=1,\dots,\tau \\ e^{-\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1)} \frac{(\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_1))^{y_{ij}}}{y_{ij}!}, & i=1,\dots,n,\ \ j=\tau+1,\dots,K \end{cases} \qquad (18)$$

که در آن τ عبارت است از نقطه‌ی تغییر و $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_0$ بردار پارامترهای رگرسیون پواسون در حالت تحت کنترل و خارج ازکنترل هستند.

۲. به‌منظور تعیین زمان وقوع نقطه‌ی تغییر در τ آزمون نسبت درست‌نمایی برای آزمون فرض صفر و فرض مقابل آن مطابق رابطه‌ی ۱۹ تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_0 \\ H_1 : \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_0 \end{cases} \qquad (19)$$

ایده‌ی اصلی استفاده از آزمون نسبت درست نمایی، جایگزین کردن توابع $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_0$ با برآوردکننده‌هایشان است. آماره‌ی نسبت درست‌نمایی که در این روش پیشنهادی مورد استفاده قرارگرفته در رابطه‌ی ۲۰ نشان داده شده است:

$$lr_{K,\tau} = -2(l_0 - l_1), \tau = 1, 2, \dots, K-1 \qquad (20)$$

که در آن l_0 و l_1 به‌ترتیب لگاریتم تابع درست‌نمایی در شرایط تحت کنترل و خارج ازکنترل هستند که نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها عبارت است از:

$$l_0(K,\tau) = -\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_0) + \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\log(y_{ij}!) \qquad (21)$$

$$l_1(K,\tau) = -\sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_0) - \sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + \sum_{j=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}_0 + \sum_{j=\tau+1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}\mathbf{x}_{\mathbf{i}\mathbf{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\log(y_{ij}!) \qquad (22)$$

در این روابط $\boldsymbol{\beta}_0$ تخمین بردار پروفایل‌های تحت کنترل است که از فاز I به دست می‌آید؛ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ تخمین MLE پارامتر $K-\tau$ پروفایل باقی‌مانده که با افزوده شدن هر پروفایل جدید در فاز ۲ کنترل فرایند آماری به‌روز رسانی می‌شود؛ K تعداد پروفایل‌ها در فاز ۲ و τ نقطه‌ی تغییر است.

۳. پس از محاسبه‌ی آماره‌ی نسبت درست نمایی، نمودارکنترل براساس این آماره ایجاد می‌شود. اما از آنجاکه امید ریاضی آماره $lr_{K,\tau}$ به مقدار τ بستگی دارد، به‌منظور خنثی‌کردن اثر امیدهای نابرابر، در این مقاله مطابق مطالعات پیشین[۷] به‌منظور ایجاد نمودارکنترل از آماره‌ی نسبت درست نمایی استاندارد استفاده شده که در رابطه‌ی ۲۳ نشان داده شده است.

$$slr_{K,\tau} = \frac{lr_{K,\tau} - E(lr_{K,\tau})}{\sqrt{\mathrm{var}(lr_{K,\tau})}}, \qquad \tau = 1, 2, \dots, K-1 \qquad (23)$$

امید ریاضی و انحراف معیار آماره $lr_{K,\tau}$ با تکرارهای شبیه‌سازی و میانگین‌گیری به دست می‌آیند که نحوه‌ی محاسبه‌ی آنها در بخش چهارم نوشتار حاضر به‌طور کامل شرح داده شده است.

۴. پس از محاسبه‌ی آماره‌های نسبت درست‌نمایی استاندارد شده، در مرحله‌ی بعد بیشینه‌ی آن‌ها از پروفایل اول تا هر پروفایلی که افزوده می‌شود محاسبه شده و به‌عنوان آماره‌ی نمودارکنترل پیشنهادی که پس از این در این مقاله تحت عنوان نمودارکنترل LRT از آن یاد می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرد. نحوه‌ی محاسبه‌ی این آماره در رابطه‌ی ۲۴ نشان داده شده است. شایان ذکر است بیشینه‌ی آماره‌های نسبت درست‌نمایی با هربار افزوده شدن پروفایل جدید از پروفایل اول تا آخرین پروفایل، مقدار بیشینه را محاسبه، و لحاظ می‌کند؛ در واقع مقدار آن با افزوده شدن هر پروفایل جدید به‌روز رسانی می‌شود.

$$slr_{\max} = \max_{1\le\tau<K} slr_{K,\tau} \qquad (24)$$

۵. حد بالای نمودارکنترل با استفاده از شبیه‌سازی محاسبه می‌شود که شرح کامل آن در مثال عددی بخش چهارم ملاحظه خواهد شد. چنانچه بیشینه‌ی آماره‌ی نسبت درست‌نمایی از مقدار حد بالای کنترل تجاوزکند هشدار خارج ازکنترل دریافت می‌شود و درصورتی که مقدار فوق کم‌تر باشد، فرایند پایش ادامه پیدا می‌کند و پروفایل بعدی افزوده شده و پس از به‌روز رسانی روابط ۱۸ تا ۲۴، آماره‌ی نسبت درست‌نمایی مجدداً محاسبه شده و با حد بالای کنترل مقایسه می‌شود.

۶. به محض مشاهده‌ی هشدار خارج ازکنترل، پروفایلی که آماره‌ی نسبت درست‌نمایی استاندارد شده‌ی آن در فاصله‌ی پروفایل اول تا پروفایلی که هشدار خارج از کنترل از آن گرفته شده، بیشترین مقدار را دارد، برآورد نقطه‌ی تغییر را به دست می‌دهد که رابطه‌ی آن عبارت است از:

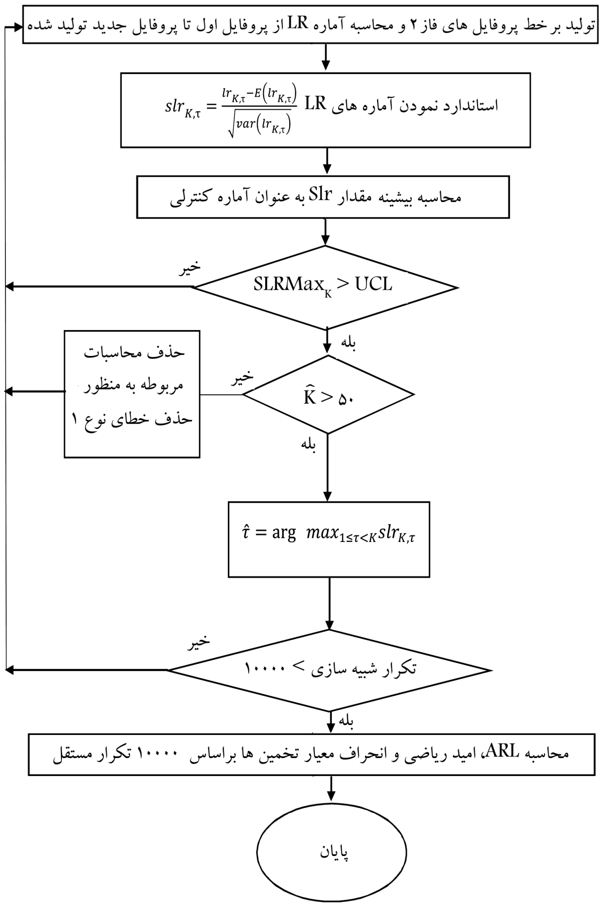
$$\hat{\tau} = \arg\max_{1\le\tau<K} slr_{K,\tau} \qquad (25)$$

که در آن مقصود از K شماره پروفایلی است که در نمودارکنترل LRT، هشدار خارج ازکنترل مشاهده شده است. نکته‌ی حائز اهمیت در این رویکرد آن است که با افزوده شدن هر پروفایل جدید، هم‌زمان با بررسی شرایط خارج ازکنترل، نقطه‌ی تغییر نیز تخمین زده می‌شود، به‌عبارت دیگر به‌محض دریافت هشدار خارج ازکنترل مقدار برآورد نقطه‌ی تغییر نیز اعلام می‌شود. در پایان این بخش، فلوچارتی از مراحل طی شده در روش LRT در شکل ۲ ارائه می‌شود.

۴. ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی

۱.۴. مثال انتخابی

مثال منتخب برای پایش پروفایل‌های پواسون در این مقاله از یکی از مطالعات پیشین[۱۸] انتخاب شده است، بدان علت که نتایج شبیه‌سازی نمودار LRT پیشنهادی در



شکل ۲. فلوچارت روش پیشنهادی LRT.

نوشتار حاضر با روش MLE بیان شده در آن مطالعه قابل مقایسه است. با توجه به معرفی رابطه‌ی پروفایل‌های پواسون در قسمت قبل، تابع پیوندی در این مثال عبارت است از:

$$g(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{26}$$

که در آن β_0 عرض از مبدا و β_1 شیب تابع رگرسیون است که به‌صورت $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ نشان داده می‌شود. ماتریس $\boldsymbol{X}$ نیز چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X^T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \log(1) & \log(2) & \dots & \log(9) \end{pmatrix} \tag{27}$$

در پایان فاز ۱، وقتی که فرایند در کنترل است بردار پارامترهای فرایند به‌صورت $\boldsymbol{\beta} = (1, 1.5)$ است. ماتریس واریانس ـ کواریانس پارامترهای رگرسیونی در فاز ۲ عبارت است از:

$$\sum_0 = (\mathbf{X^T W X})^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} .07787 & -.04022 \\ -.04022 & .02170 \end{pmatrix} \tag{28}$$

فرض می‌کنیم که حالت خارج از کنترل زمانی رخ می‌دهد که شیفت در پارامترهای فرایند مطابق رابطه‌ی ۲۹ رخ بدهد:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\Delta}, \qquad \boldsymbol{\Delta} = (\delta_1\sigma_1, \delta_2\sigma_2)^T, \qquad ncp = \boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{T}} \sum_0^{-1} \boldsymbol{\Delta} \tag{29}$$

در این مثال فرض شده است که نقطه‌ی تغییر، پروفایل ۵۰ام است. شرفی و همکاران[۱۸] با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و تکرار ۱۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی، نتایج تخمین نقطه‌ی تغییر با روش MLE را با اعمال شیفت‌های مختلف در پارامترهای فرایند به دست می‌آورند.

۲.۴. شبیه‌سازی روش پیشنهادی

چنان که پیش‌تر شرح داده شد، روش پیشنهادی همزمان با کشف شیفت قادر است تخمین نقطه‌ی تغییر را نیز شناسایی کند. در این روش که روابط ریاضی آن به‌طور کامل در بخش سوم شرح داده شد، به‌علت حجم بالای محاسبات و طولانی بودن زمان اجرای برنامه‌ها، شبیه‌سازی‌های تنها براساس تولید ۵۰۰ پروفایل در فاز ۲ صورت گرفته است. در این بخش ابتدا نحوه‌ی استانداردسازی آماره‌ی کنترل و تعیین حد بالای کنترل در روش دوم تعیین، و سپس عملکرد نمودار LRT بررسی و ارزیابی می‌شود.

۱.۲.۴. استانداردسازی آماره‌ی کنترل

در مدل نقطه‌ی تغییر پس از محاسبه‌ی آماره‌ی نسبت درست‌نمایی، به‌منظور رفع مشکل ناهمسانی امید ریاضی و واریانس، از آماره‌ی نسبت درست‌نمایی استاندارد شده در رابطه‌ی ۲۳ استفاده می‌شود. آنچه در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد نحوه‌ی محاسبه‌ی امید ریاضی و انحراف معیار آماره‌های نسبت درست‌نمایی (LR) به‌ازای ۵۰۰ پروفایل مذکور است که طی شبیه‌سازی مجزایی انجام شده است. نحوه‌ی شبیه‌سازی چنان است که در ۱۰۰۰۰ تکرار مستقل ابتدا به‌ازای همه‌ی ۵۰۰ پروفایل، آماره‌های LR محاسبه شده و نتایج در قالب یک ماتریس پایین‌مثلثی به‌ابعاد ۴۹۹ × ۵۰۰ ذخیره می‌شود. سپس امید ریاضی و انحراف معیار آماره‌های فوق محاسبه، و در قالب یک ماتریس پایین‌مثلثی به ابعاد ۴۹۹ × ۵۰۰ ثبت می‌شود.

۲.۲.۴. تعیین حد بالای کنترل

به‌منظور محاسبه‌ی حد بالای کنترل در این روش، از شبیه‌سازی براساس شاخص متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل بهره گرفته شده است. با فرضیات در نظر گرفته شده در این پژوهش و اجرای ۵۰۰ تکرار مستقل شبیه‌سازی، حد بالای کنترل باید به نحوی تعیین شود که مقدار شاخص برابر با ۲۰۰ به دست آید که این مهم از طریق آزمون و خطا حاصل می‌شود. برای این منظور، با درنظر گرفتن مقدار مشخصی برای حد بالای کنترل، متوسط طول دنباله در ۵۰۰ تکرار مستقل محاسبه می‌شود. با توجه به انحراف مقدار به دست آمده برای شاخص فوق (نسبت به عدد ۲۰۰)، مقدار جدیدی برای حد بالای کنترل در نظر گرفته و مجدداً مقدار شاخص محاسبه می‌شود. این رویه تا جایی ادامه می‌یابد که مقدار متوسط طول دنباله به‌ازای عدد در نظر گرفته شده برای حد بالای کنترل برابر ۲۰۰ شود. در این مقاله مقدار حد بالای کنترل با استفاده از روش فوق برای پروفایل‌های پواسون برابر ۳٫۲۶ به دست آمده است. علت این که مقدار شاخص برابر با ۲۰۰ در نظر گرفته شده این است که روش MLE شرفی و همکاران[۱۸] با روش پیشنهادی در این مقاله قابل مقایسه باشد.

جدول ۱. نتایج ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار شبیه‌سازی روش MLE شرفی و همکاران[۱۸] $\tau = ۵۰$.

ncp	(δ_1, δ_2)	E(K)	$\bar{\tau}$	$se(\bar{\tau})$
۲/۰۸	(۰/۱, ۰/۱)	۱۴۹/۴	۵۰/۷۲	۲/۱۵
۳/۷	(۰/۲, ۰/۲)	۸۰/۰۹	۵۰/۵۲	۱/۲۷
۳/۷۲	(۰/۱, ۰/۳)	۷۹/۰۲	۵۰/۴۴	۱/۰۲
۵/۷۸	(۰/۳, ۰/۲)	۶۱/۰۱	۴۹/۶۷	۰/۷۳
۵/۸	(۰/۴, ۰/۱)	۶۱/۱	۵۰/۲۵	۰/۶۹
۵/۸۵	(۰, ۰/۵)	۵۹/۷۸	۵۰/۲۲	۰/۷۹
۸/۳۲	(۰/۳, ۰/۳)	۵۵/۱	۴۹/۸۲	۰/۶۱
۸/۳۴	(۰/۲, ۰/۴)	۵۵/۱۲	۵۰/۰۷	۰/۵۹
۱۱/۳۳	(۰/۳۵, ۰/۳۵)	۵۲/۶۳	۵۰/۰۸	۰/۶۳
۱۴/۸	(۰/۴, ۰/۴)	۵۱/۶۹	۵۰/۰۲	۰/۲۵
۱۴/۸۱	(۰/۳, ۰/۵)	۵۱/۷۱	۴۹/۹۸	۰/۲۴
۲۳/۱۳	(۰/۵, ۰/۵)	۵۱/۱۲	۴۹/۹۴	۰/۲۱
۲۳/۳۸	(۱, ۰)	۵۱/۱۱	۴۹/۹۸	۰/۱۶
۲۳/۳۸	(۰, ۱)	۵۱/۱	۴۹/۹۵	۰/۱۹
۳۳/۳۱	(۰/۶, ۰/۶)	۵۱/۰۱	۴۹/۹۶	۰/۱۹

جدول ۲. نتایج ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار شبیه‌سازی روش LRT پیشنهادی $\tau = ۵۰$.

ncp	(δ_1, δ_2)	E(K)	$\bar{\tau}$	$se(\bar{\tau})$
۲/۰۸	(۰/۱, ۰/۱)	۶۱/۶۵	۴۹/۵۵	۱/۷۲
۳/۷	(۰/۲, ۰/۲)	۵۳/۸۴	۴۹/۷۱	۱/۱۲
۳/۷۲	(۰/۱, ۰/۳)	۵۳/۸۰	۴۹/۷۷	۰/۹۷
۵/۷۸	(۰/۳, ۰/۲)	۵۲/۵۱	۴۹/۷۳	۰/۶۳
۵/۸	(۰/۴, ۰/۱)	۵۲/۵۶	۴۹/۶۴	۰/۴۶
۵/۸۵	(۰, ۰/۵)	۵۴/۲۲	۴۹/۹۹	۰/۵۶
۸/۳۲	(۰/۳, ۰/۳)	۵۳/۸۸	۴۹/۹۴	۰/۴۴
۸/۳۴	(۰/۲, ۰/۴)	۵۲/۹۷	۴۹/۹۷	۰/۴۲
۱۱/۳۳	(۰/۳۵, ۰/۳۵)	۵۱/۳۳	۴۹/۹۸	۰/۳۸
۱۴/۸	(۰/۴, ۰/۴)	۵۱/۰۰	۵۰/۰۰	۰/۰۲
۱۴/۸۱	(۰/۳, ۰/۵)	۵۱/۰۰	۵۰/۰۰	۰/۰۰
۲۳/۱۳	(۰/۵, ۰/۵)	۵۱/۰۰	۵۰/۰۰	۰/۰۰
۲۳/۳۸	(۱, ۰)	۵۱/۰۱	۴۹/۹۹	۰/۰۲
۲۳/۳۸	(۰, ۱)	۵۱/۰۰	۵۰/۰۰	۰/۰۰
۳۳/۳۱	(۰/۶, ۰/۶)	۵۱/۰۰	۵۰/۰۰	۰/۰۰

۴.۲.۳. تخمین نقطه‌ی تغییر

پس از محاسبه‌ی آماره‌ی استاندارد شده و تعیین حد بالای کنترل، پروفایل‌ها یک به یک اضافه می‌شوند. چنانچه بیشینه‌ی آماره‌ی نسبت درست‌نمایی از مقدار حد بالای کنترل تجاوز کند، هشدار خارج از کنترل دریافت می‌شود و در صورتی که مقدار فوق کم‌تر باشد، فرایند پایش ادامه پیدا می‌کند. با اضافه شدن پروفایل بعدی پس از به‌روز رسانی‌های محاسبات، بیشینه‌ی آماره‌ی نسبت درست‌نمایی مجددا با حد بالای کنترل مقایسه می‌شود. در نهایت پروفایلی که آماره‌ی نسبت درست‌نمایی استاندارد شده‌ی آن در فاصله‌ی پروفایل اول تا پروفایلی که هشدار خارج از کنترل از آن دریافت شده بیشترین مقدار را دارد، برآورد نقطه‌ی تغییر را به دست می‌دهد.

۴.۳. مقایسه

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی با نتایج شبیه‌سازی شرفی و همکاران[۱۸] در قالب جداول ۱ تا ۴ مقایسه می‌شود. جداول ۱ و ۲ با مقایسه‌ی تخمین زننده‌های نقطه‌ی تغییر روش MLE و LRT نشان‌گر دقت روش LRT درکشف به‌موقع شیفت و تخمین نسبتاً خوبی از نقطه‌ی تغییر است. براساس نتایج حاصله، در مقایسه با رویکرد MLE، روش پیشنهادی ضمن برآورد مناسبی از نقطه‌ی تغییر، درکشف به موقع شیفت از قدرت بالاتری برخوردار است؛ این مسئله نقطه‌ی قوت روش محسوب می‌شود. در برآورد نقطه‌ی تغییر در روش LRT میزان انحراف معیار برآوردها در شیفت‌های کوچک مقداری بیشتر از روش MLE است که با توجه به کشف بسیار سریع شیفت و وجود داده‌ی کمتر توجیه‌پذیر است. با مقایسه‌ی جداول ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که دقت عملکرد تخمین‌گر نقطه‌ی تغییر با روش LRT بیشتر از روش MLE است. از لحاظ میزان قدرت مدل درکشف به‌موقع شیفت نیز با توجه به این که متوسط طول دنباله در روش پیشنهادی به‌صورت چشم‌گیری کم‌تر از روش MLE است استفاده از روش LRT پیشنهاد می‌شود. شایان ذکر است دقت روش LRT نسبت به کشف شیفت‌های بزرگ‌تر افزایش پیدا می‌کند که این مسئله درکشف شیفت بیشتر از تخمین نقطه‌ی تغییر نمود پیدا می‌کند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش آزمون نسبت درست‌نمایی به‌منظور پایش و شناسایی نقطه‌ی تغییر پروفایل‌های پواسون در فاز ۲ استفاده شد و عملکرد این روش با روش ترکیبی از پایش با استفاده از نمودارکنترل هاتلینگ T^2 و برآورد نقطه‌ی تغییر با استفاده از روش MLE مقایسه شد. نتایج نشان داد که تخمین‌گر روش آزمون نسبت درست‌نمایی مطرح شده در این مقاله با دقت قابل قبول‌تری نسبت به روش MLE قادر به شناسایی زمان تغییر و مقدار تغییر است. برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود محققین علاقه‌مند به این حوزه، نکات زیر را مد نظر داشته باشند:

- توسعه‌ی روش آزمون نسبت درست‌نمایی در حضور مشاهدات خودهمبسته در پروفایل‌های پواسون؛
- توسعه‌ی روش پیشنهادی برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌یی.

جدول ۳. دقت عملکرد تخمین زننده نقطه‌ی تغییر شرفی و همکاران[۱۸] با ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار شبیه‌سازی $\tau = 50$.

ncp	(δ_1, δ_2)	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 0)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 1)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 2)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 3)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 4)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 5)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 6)$
۲٫۰۸	(۰٫۱, ۰٫۱)	۰٫۶۰	۰٫۷۷	۰٫۸۵	۰٫۹۲	۰٫۹۵	۰٫۹۶	۰٫۹۷
۳٫۷	(۰٫۲, ۰٫۲)	۰٫۷۱	۰٫۸۸	۰٫۹۳	۰٫۹۶	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۱٫۰۰
۳٫۷۲	(۰٫۱, ۰٫۳)	۰٫۷۳	۰٫۸۹	۰٫۹۵	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۱٫۰۰	
۵٫۷۸	(۰٫۳, ۰٫۲)	۰٫۸۳	۰٫۹۴	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۱٫۰۰		
۵٫۸	(۰٫۴, ۰٫۱)	۰٫۷۹	۰٫۹۴	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۰٫۹۹		
۵٫۸۵	(۰, ۰٫۵)	۰٫۸۰	۰٫۹۴	۰٫۹۷	۰٫۹۸	۰٫۹۹		
۸٫۳۲	(۰٫۳, ۰٫۳)	۰٫۸۷	۰٫۹۷	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۱٫۰۰		
۸٫۳۴	(۰٫۲, ۰٫۴)	۰٫۸۷	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۱٫۰۰			
۱۱٫۳۳	(۰٫۳۵, ۰٫۳۵)	۰٫۹۱	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۱٫۰۰			
۱۴٫۸	(۰٫۴, ۰٫۴)	۰٫۹۴	۰٫۹۹	۱٫۰۰				
۱۴٫۸۱	(۰٫۳, ۰٫۵)	۰٫۹۴	۰٫۹۹	۱٫۰۰				
۲۳٫۱۳	(۰٫۵, ۰٫۵)	۰٫۹۵	۰٫۹۹	۱٫۰۰				
۲۳٫۳۸	(۱, ۰)	۰٫۹۷	۰٫۹۹	۱٫۰۰				
۲۳٫۳۸	(۰, ۱)	۰٫۹۶	۰٫۹۹	۱٫۰۰				
۳۳٫۳۱	(۰٫۶, ۰٫۶)	۰٫۹۷	۱٫۰۰					

جدول ۴. دقت عملکرد تخمین زننده نقطه‌ی تغییر روش LRT پیشنهادی با ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار شبیه‌سازی $\tau = 50$.

ncp	(δ_1, δ_2)	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 0)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 1)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 2)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 3)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 4)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 5)$	$p(\vert\hat{\tau}-\tau\vert \leq 6)$
۲٫۰۸	(۰٫۱, ۰٫۱)	۰٫۶۱	۰٫۸۰	۰٫۸۹	۰٫۹۳	۰٫۹۵	۰٫۹۶	۰٫۹۷
۳٫۷	(۰٫۲, ۰٫۲)	۰٫۹۰	۰٫۹۶	۰٫۹۷	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹
۳٫۷۲	(۰٫۱, ۰٫۳)	۰٫۹۵	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹	
۵٫۷۸	(۰٫۳, ۰٫۲)	۰٫۹۳	۰٫۹۷	۰٫۹۸	۰٫۹۸	۰٫۹۹		
۵٫۸	(۰٫۴, ۰٫۱)	۰٫۸۶	۰٫۹۵	۰٫۹۷	۰٫۹۸	۰٫۹۸		
۵٫۸۵	(۰, ۰٫۵)	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰		
۸٫۳۲	(۰٫۳, ۰٫۳)	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰		
۸٫۳۴	(۰٫۲, ۰٫۴)	۰٫۹۹	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰			
۱۱٫۳۳	(۰٫۳۵, ۰٫۳۵)	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۱٫۰۰			
۱۴٫۸	(۰٫۴, ۰٫۴)	۰٫۹۹	۱٫۰۰	۱٫۰۰				
۱۴٫۸۱	(۰٫۳, ۰٫۵)	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰				
۲۳٫۱۳	(۰٫۵, ۰٫۵)	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰				
۲۳٫۳۸	(۱, ۰)	۰٫۹۶	۰٫۹۸	۰٫۹۹				
۲۳٫۳۸	(۰, ۱)	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰				
۳۳٫۳۱	(۰٫۶, ۰٫۶)	۱٫۰۰	۱٫۰۰					

منابع (References)

1. Kang, L. and Albin, S.L. "Online monitoring when the process yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, **32**, pp. 418-426 (2000).

2. Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications", *Technometrics*, **46**, pp. 380-391 (2004).

3. Mestek, O., Pavlik, J. and Suchnek, M. "Multivariate control charts: Control charts for calibration curves", *Fresenius' Journal of Analytical Chemistry*, **350**, pp. 344-351 (1994).

پانوشت‌ها

1. generalized linear models
2. likelihood ratio test
3. exponentially weighted moving average control chart
4. cumulative sum control chart
5. maximum likelihood estimation
6. average run length

4. Amiri, A., Jensen, W.A. and Kazemzadeh, R.B. "A case study on monitoring polynomial profiles in the automotive industry", *Quality and Reliability Engineering International*, **26**, pp. 509-520 (2010).

5. Kim, K., Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "On the monitoring of linear profiles", *Journal of Quality Technology,* **35**, pp. 317-328 (2003).

6. Mahmoud, M.A., Parker, P.A., Woodall, W.H. and Hawkins, D.M. "A change point method for linear profile data", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**, pp. 247-268 (2007).

7. Zou, C., Zhang, Y. and Wang, Z. "Control chart based on change point model for monitoring linear profiles", *IIE Transactions*, **38**, pp. 1093-1103 (2006).

8. Saghaei, A., Mehrjoo, M. and Amiri, A. "A CUSUM-based method for monitoring simple linear profiles", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **45**, pp. 1252-1260 (2009).

9. Zhang, J., Li, Z. and Wang, Z. "Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles", *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, pp. 1440-1448 (2009).

10. Yeh, B., Huwang, L. and Li, Y.M. "Profile monitoring for a binary response", *IIE Transactions,* **41**, pp. 931-941 (2009).

11. Shang, Y., Tsung, F. and Zou, C. "Phase II profile monitoring with binary data and random predictors", *Journal of Quality Technology,* **43**, pp. 196-208 (2011).

12. Pignatiello, J.J. and Samuel, T.R. "Identifying the time of a step change in a Poisson rate parameter", *Quality Engineering*, **10**, pp. 673-681 (1998).

13. Pignatiello, J.J. and Samuel, T.R. "Estimation of the change point of a normal process mean in SPC applications", *Quality Technology,* **33**, pp. 82-95 (2001).

14. Perry, M.B. and Pignatiello, J.J. "Estimation of the change point of a Poisson rate parameter with a linear trend disturbance", *Quality and Reliability Engineering International*, **22**, pp. 371-384 (2005).

15. Perry, M.B. and Pignatiello, J.J. "Estimation of the change point of a normal process mean with a linear trend disturbance", *Quality Technology and Quantitative Management*, **3**, pp. 101-115 (2006).

16. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Phase I monitoring of polynomial profiles", *Communications in Statistics Theory and Methods,* **37**, pp. 1671-1686 (2008).

17. Sharafi, A., Aminnayeri, M. and Amiri, A. "Identifying the time of step change in binary profiles", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **63**, pp. 209-214 (2013).

18. Sharafi, A., Aminnayeri, M. and Amiri, A. "An MLE approach for estimating the time of step changes in Poisson regression profiles", *Scientia Iranica*, **20**(3), pp. 855-860, (2013).

19. Myers, R.H., Montgomery, D.C. and Vining, G.G., *Generalized Linear Models*, John Wiley & Sons, Inc. New York. USA. (2002).

20. Albert, A. and Anderson, J.A. "On the existence of maximum likelihood estimates in logistic regression models", *Biometrika,* **71**, pp. 1-10 (1984).

21. McCullagh, P. and Nelder, J.A., *Generalized Linear Models*, 1st Edn., Chapman & Hall, London, UK (1989)