

مدل مقدار سفارش اقتصادی برای کالای فاسدشدنی با در نظر گرفتن هزینه‌ی کاهش مدت تحویل به صورت تابعی از اندازه سفارش

مینا هروی شرق (کارشناس ارشد)

محمدعلی پیرایش* (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه فردوسی مشهد

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۳۹۷ (دوره ۱-۳۳، شماره ۲/۲، ص. ۱۳۳-۱۴۰)

در این مقاله مدل مقدار سفارش اقتصادی برای کالای فاسدشدنی مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن «مدت تحویل» را به عنوان متغیر قابل کنترل در نظر گرفته می‌شود؛ به این معنا که با صرف هزینه می‌توان آن را کاهش داد. «مدت تحویل» به عنوان متغیر تصمیم وارد مدل می‌شود و هزینه‌ی با عنوان هزینه‌ی کاهش مدت تحویل به هزینه‌های سیستم موجودی می‌افزاید. ساختار هزینه‌ی کاهش مدت تحویل به صورت تابعی از اندازه سفارش و میزان کاهش مدت تحویل در نظر گرفته می‌شود. از سوی دیگر، بخشی از سفارش کالای فاسدشدنی در مدت تحویل فاسد شده و از دست می‌رود. لذا می‌توان با کاهش مدت تحویل، هزینه‌ی فاسد شدن و هزینه‌ی خرید این کالاها را کاهش داد. در مدل ارائه شده، برقراری تعادل میان منافع حاصل از کاهش مدت تحویل و افزایش هزینه‌های آن مورد نظر است.

واژگان کلیدی: مدل مقدار سفارش اقتصادی، فاسدشدنی، مدت تحویل متغیر.

۱. مقدمه

امروزه کالاهای فاسدشدنی، طیف وسیعی از محصولات نظیر لبنیات، میوه‌ها، سبزیجات، خون، مواد رادیواکتیو و شیمیایی را شامل می‌شود. با توجه به کاربرد گسترده و نقش مهم برخی از این اقلام در زندگی انسان، مطالعه پیرامون سیاست‌های موجودی این اقلام با در نظر گرفتن شرایط دنیای واقعی، امری ضروری است. یکی از شاخص‌ترین پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه‌ی مدل‌های موجودی اقلام فسادپذیر، مدل موجودی ارائه شده توسط قاره و اشنايدر^[۱] است که در آن نرخ فساد ثابت است. در بررسی این مدل محققین دریافتند که مصرف اقلام فاسدشدنی نسبتاً از تابع توزیع نمایی منفی نسبت به زمان پیروی می‌کند. در مدل مقدار سفارش اقتصادی با تخفیف موقت^[۲] سفارش بهینه با پیشینه‌سازی اختلاف بین هزینه‌ی مدل مقدار سفارش اقتصادی معمولی و هزینه‌ی مقدار خاص در دوره‌ی فروش به دست آمده است. در ادامه، مدل موجودی کالاهای فاسدشدنی با نرخ فساد متغیر با توزیع ویبول دو پارامتری^[۳] ارائه شد. تادیکامالا مدل کاورت^[۴] را بدون فرض پس‌افت و نیز با توزیع گاما برای فساد در نظر گرفت. مدل مقدار سفارش اقتصادی^[۵] برای اقلام فسادپذیر با تقاضای متغیر با زمان و کمبود به صورت سفارشات تعویق‌افتاده توسط چانگ و دای ارائه شد. همچنین در مدل مقدار سفارش اقتصادی^[۶] تقاضا متغیر با زمان، کمبود به صورت

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۱۱/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۶/۳/۶، پذیرش ۱۳۹۶/۴/۲۵.

DOI: 10.24200/J65.2018.20088

minaheravishargh@yahoo.com
pirayesh@um.ac.ir

سفارشات تعویق‌افتاده و نرخ فساد دارای توزیع ویبول سه پارامتری است. در مدل موجودی قطعی با تقاضای متغیر با زمان و کمبود به صورت سفارشات تعویق‌افتاده^[۷] نرخ فساد ثابت در نظر گرفته شده است. از جمله پژوهش‌های جامع در زمینه‌ی اقلام فسادپذیر، مقاله‌ی باکرو و همکاران است^[۸] که به بررسی ادبیات مرتبط با فسادپذیری از سال ۲۰۰۱ تا ۲۰۱۲ با در نظر گرفتن فرضیاتی همچون تخفیف در قیمت، کمبود پس‌افت و فروش از دست‌رفته، تک‌محصولی یا چندمحصولی بودن و پرداخت‌های معوقه پرداخته‌اند.

در بسیاری از مطالعات انجام‌شده در این زمینه، «مدت تحویل» صرف نظر از این که قطعی است یا احتمالی، غیر قابل کنترل در نظر گرفته شده است. در حالی که در بسیاری از موقعیت‌های واقعی مدت تحویل قابل کنترل است و می‌توان مدت تحویل را با صرف هزینه‌ی اضافی، کاهش داد. نخستین بار لیائو و شیو^[۹] مدلی ارائه دادند که در آن مقدار سفارش و سطح سفارش مجدد، معلوم است و مدت تحویل تنها متغیر تصمیم در این مدل است. مدل کلی‌تری نیز ارائه شد^[۱۰] که در آن، روش لیائو و شیو با افزودن مقدار سفارش به عنوان یک متغیر تصمیم تغییر یافته است.

به باور محققین^[۱۱] گاهی شکستن مدت تحویل به اجزا و تخمین مدت زمان و هزینه‌ی کاهش هر جزء امری دشوار است. لذا ساختار هزینه‌ی کاهش پیشنه‌ها شد که به صورت تابع نمایی منفی از مدت تحویل است. در مطالعات بعدی^[۱۱] نیز این نگاه و باور با در نظر گرفتن کمبودها به صورت ترکیبی از سفارشات به تعویق‌افتاده

آن، می‌توان نقش مدت تحویل را بر هر یک از هزینه‌های سیستم موجودی تحلیل کرد. مدت تحویل مستقیماً بر هزینه‌های فساد کالا در حین حمل و در نتیجه هزینه‌ی خرید اقلام مازاد بر نیاز که در طول مدت تحویل فاسد شده و در واقع هیچ‌گاه به دست بنگاه نمی‌رسد، تأثیرگذار است. لذا فقدان تحقیقی برای بررسی نقش عنصر مدت تحویل به عنوان متغیری که در فساد اقلام حین مدت تحویل نقش دارد، مشهود است. از این رو مطالعه‌ی حاضر با دخیل کردن مدت تحویل متغیر در مدل سفارش اقتصادی برای کالاهای فاسدشدنی، درصدد تحلیل نقش مدت تحویل بر هزینه‌های سیستم موجودی است.

۲. نمادها و مفروضات مسئله

۱.۲. مفروضات مسئله

مفروضات در نظر گرفته شده در این مدل عبارت‌اند از:

۱. نرخ تقاضا قطعی و ثابت است؛
۲. مدل برای یک کالای فاسدشدنی آبی ارائه شده است؛
۳. مدت تحویل به عنوان یکی از متغیرهای تصمیم مسئله است؛
۴. نرخ بازپرسی نامحدود فرض شده است؛
۵. کالاهایی که در طول دوره فاسد می‌شوند، تعویض یا تعمیر نمی‌شوند؛
۶. کمبود مجاز نیست؛
۷. افق برنامه‌ریزی نامحدود است.

همچنین در این مدل، هزینه‌ی کاهش مدت تحویل به صورت تابع قطعی خطی از میزان کاهش مدت تحویل و مقدار سفارش در نظر گرفته شده است. این ساختار برگرفته از مطالعه‌ی پن و همکاران^[۱۶] است و مفروضات آن عبارت‌اند از:

الف) مدت تحویل شامل n جزء است. جزء i ام شامل مدت زمان کمیته (a_i) ، مدت زمان نرمال (b_i) و هزینه‌ی کاهش (c_i) است. هزینه‌ی کاهش جزء i ام در واحد زمان، به صورت تابعی از مدت تحویل کاهش یافته و مقدار سفارش است:

$$c_i = x_i + y_i Q \quad (1)$$

که در آن، x_i هزینه‌ی ثابت کاهش جزء i ام در واحد زمان، y_i هزینه‌ی متغیر کاهش جزء i ام در واحد زمان و Q میزان سفارش کالاست و نیز $x_i > 0$ و $y_i > 0$. اجزاء مدت تحویل را از جزء با کم‌ترین c_i کاهش می‌دهیم و مقدار هر جزء را از b_i به a_i می‌رسانیم.

ب) به‌ازای هر دو هزینه‌ی کاهش واحد نظیر $c_i = x_i + y_i Q$ و $c_j = x_j + y_j Q$ که در آن $x_i > x_j$ و $y_i < y_j$ و $i \neq j$ نقطه‌ی تقاطع Q^* وجود دارد به‌طوری که $c_i = c_j$. این نقاط تقاطع چنان مرتب می‌شود که $Q_1^* \leq Q_2^* \leq \dots \leq Q_m^*$ و در آن $Q_m^* = \infty$ و $Q_m^* \leq Q_{m+1}^*$ است. برای هر مقدار سفارش در بازه (Q_i^*, Q_{i+1}^*) ، c_i ها به‌گونه‌ی مرتب می‌شود که $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ و اجزای مدت تحویل از جزء با کوچک‌ترین c_i شروع به کاهش می‌کنند و این روند ادامه دارد.

ج) L بیان‌گر مدت تحویل است و دامنه‌ی آن عبارت است از:

$$L_{\min} = \sum_{i=1}^n a_i \leq L \leq \sum_{i=1}^n b_i = L_{\max} \quad (2)$$

و فروش از دست رفته توسعه یافت. برای بهبود مقدار سفارش و نقطه‌ی سفارش مجدد روشی ابتکاری^[۱۲] ارائه شد که با توسعه‌ی آن برای سیاست مرور پیوسته با اندازه ثابت سفارش و دوره‌ی، مدل تصادفی با ترکیبی از سفارشات تعویق‌افتاده و فروش از دست رفته طرح شد؛ در این مدل «مدت تحویل» و «مقدار سفارش» متغیرهای تصمیم مسئله‌اند.^[۱۳] در مدل تولید موجودی یکپارچه با یک فروشنده و چند خریدار^[۱۴] هزینه‌ی کاهش مدت تحویل برای هر خریدار، مختص خودش و تابعی قطعی خطی از میزان کاهش مدت تحویل است. در بررسی زنجیره‌ی تأمین دوسطحی -- شامل یک انبار و یک توزیع‌کننده --^[۱۵] مدت تحویل کالا از انبار به توزیع‌کننده قابل کنترل است و هزینه‌ی کاهش مدت تحویل، تابعی قطعی خطی از میزان کاهش آن است. برخی از محققین هزینه‌ی کاهش مدت تحویل را تابعی نمایی از مدت تحویل در نظر گرفته‌اند.^[۱۷] جمشیدی و همکاران^[۱۸] زنجیره‌ی تأمینی را در نظر گرفتند که در آن مدت تحویل تولیدکنندگان و انبارها را با صرف هزینه می‌توان تغییر داد. پریان و اوتا یا کومار^[۱۹] مدل کنترل موجودی با سیاست مرور دوره‌ی که در آن مدت تحویل قابل کنترل است بررسی می‌کنند به طوری که هزینه‌ی کاهش مدت تحویل تابع نمایی از مدت تحویل است. سونی و جوشی^[۲۰] مدل کنترل موجودی با سیاست مرور دوره‌ی در محیط فازی - احتمالی بررسی می‌کنند. در مدل آنها مدت تحویل قابل کنترل و هزینه‌ی کاهش آن تابعی قطعی خطی است.

هزینه‌ی کاهش مدت تحویل در اکثر مقاله‌ها غالباً به عنوان تابعی قطعی خطی از مدت تحویل کاهش یافته بیان می‌شود. در حالی که هزینه‌ی کاهش مدت تحویل، تنها مربوط به میزان کاهش آن نیست؛ بلکه به مقدار سفارش نیز مربوط می‌شود. این موضوع اولین بار در مطالعه‌ی پن و همکاران^[۲۱] در نظر گرفته شد. از جمله عوامل تأثیرگذار بر هزینه‌های کاهش مدت تحویل، می‌توان به پرداخت‌های اضافه‌کاری بیشتر یا دستمزدهای کارمندان پاره وقت، هزینه‌های نگهداری بالاتر و روش حمل سریع‌تر و در نتیجه گران‌تر جهت تسریع تحویل سفارش اشاره کرد. بن دایا و هاریجا^[۲۲] مدل یکپارچه‌ی برای تک فروشنده تک خریدار ارائه دادند که در آن، مدت تحویل تابعی خطی از اندازه سفارش است. چانگ^[۲۳] ضریب هزینه‌ی کاهش مدت تحویل را به صورت تابعی از اندازه سفارش به همراه هزینه‌ی ثابتی در نظر گرفته است. ارکان و حجازی^[۲۴] زنجیره‌ی تأمین دوسطحی شامل یک فروشنده و یک خریدار را بررسی کردند که در آن هزینه‌ی سفارش‌دهی و مدت تحویل قابل کنترل در نظر گرفته شده است. در این مقاله هزینه‌ی کاهش مدت تحویل، تابعی از اندازه سفارش در نظر گرفته شده است.

از نمونه‌های کاربردی در حوزه مدت تحویل متغیر می‌توان به مقاله پیرایش و جوانشیر^[۲۵] اشاره کرد. در این مقاله سه وسیله‌ی حمل در نظر گرفته شده که هرکدام هزینه‌ی ثابت، هزینه‌ی متغیر و زمان حمل مختص به خود دارند به طوری که با صرف هزینه‌ی بیشتر می‌توان وسیله‌ی حمل سریع‌تر را انتخاب کرد و مدت تحویل را کاهش داد.

اگرچه بعضی محققین این موضوع را تشخیص داده‌اند که مدت تحویل باید به‌عنوان یکی از متغیرهای تصمیم در مدل در نظر گرفته شود، اما براساس یافته‌های ما تاکنون در هیچ‌یک از مقاله‌های حوزه‌ی کنترل موجودی، مطالعه‌ی که مدت تحویل را به عنوان متغیری قابل کنترل برای کالای فاسدشدنی در نظر بگیرد، صورت نگرفته است. در واقع، در تحقیقات حوزه‌ی فسادپذیر، مدت تحویل را مقداری از پیش تعیین شده و یا برابر صفر در نظر می‌گیرند. در صورتی که این فرض در دنیای واقعی برقرار نیست و می‌توان با صرف هزینه‌ی مدت تحویل را کاهش داد. با دخیل کردن مدت تحویل در مدل سفارش اقتصادی برای کالاهای فاسدشدنی و متغیر در نظر گرفتن

برای محاسبه‌ی میزان کالای دریافتی با در نظر گرفتن شرط $I(0) = q$ داریم:

$$q = \frac{D}{\theta_1} (e^{\theta_1 T} - 1) \quad (8)$$

۲.۳. تابع موجودی مدت تحویل بر حسب زمان

از آنجا که در مدت تحویل، کاهش سطح موجودی صرفاً به دلیل فساد کالا رخ می‌دهد، می‌توان برای به دست آوردن تابع سطح موجودی آن، $O(t)$ ، از معادله‌ی دیفرانسیلی ۹ استفاده کرد:

$$\frac{dO(t)}{dt} = -\theta_1 O(t); \quad 0 < t \leq L \quad (9)$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیلی ۸، با توجه به شرط $O(L) = q$ عبارت است از:

$$O(t) = q e^{\theta_1(L-t)}; \quad 0 < t \leq L \quad (10)$$

حال اگر موجودی مدت تحویل را در لحظه‌ی صفر محاسبه کنیم، میزان کالای ارسالی یا همان مقدار سفارش را طبق رابطه‌ی ۱۱ خواهیم داشت:

$$Q = q e^{\theta_1 L} \quad (11)$$

اگر در رابطه‌ی ۱۱ مقدار q را با معادل آن از رابطه‌ی ۸ جایگذاری کنیم، مقدار سفارش بر حسب پارامترها و متغیرهای تصمیم به صورت رابطه‌ی ۱۲ به دست می‌آید:

$$Q = \frac{D}{\theta_1} e^{\theta_1 L} (e^{\theta_1 T} - 1) \quad (12)$$

۳.۳. محاسبه‌ی هزینه‌های کنترل موجودی

۱.۳.۳. هزینه‌ی سفارش دهی

با توجه به این که در هر دوره تنها یک بار عمل سفارش دهی صورت می‌گیرد، مجموع هزینه‌های سفارش دهی در واحد زمان عبارت است از:

$$TC_O = \frac{A}{T} \quad (13)$$

۲.۳.۳. هزینه‌ی خرید

در یک دوره، هزینه‌ی خرید کالا متناسب با تعداد کالاهای سفارش داده شده (Q) محاسبه می‌شود. بنابراین مجموع هزینه‌های خرید کالا در واحد زمان مطابق رابطه‌ی ۱۴ محاسبه خواهد شد:

$$TC_P = \frac{CQ}{T} = \frac{CD e^{\theta_1 L} (e^{\theta_1 T} - 1)}{T \theta_1} \quad (14)$$

۳.۳.۳. هزینه‌ی نگهداری

برای محاسبه‌ی هزینه‌ی نگهداری ابتدا باید متوسط سطح موجودی انبار (\bar{I}) طی یک دوره سفارش دهی را محاسبه کنیم. بنابراین:

$$\bar{I} = \frac{\int_0^T \frac{D}{\theta_1} (e^{\theta_1(T-t)} - 1) dt}{T} = \frac{D}{T \theta_1} (e^{\theta_1 T} - \theta_1 T - 1) \quad (15)$$

مجموع هزینه‌های نگهداری در واحد زمان عبارت خواهد بود از:

$$TC_h = \frac{hD}{T \theta_1} (e^{\theta_1 T} - \theta_1 T - 1) \quad (16)$$

مدت تحویلی است که اجزاء ۱ تا i آن به مقدار کمینه‌ی خود کاهش پیدا کرده‌اند. لذا L_i تبدیل می‌شود به:

$$L_i = L_{\max} - \sum_{j=1}^i (b_j - a_j) \quad (3)$$

هـ. لذا هزینه‌ی کاهش برای یک مدت تحویل (L) معین عبارت است از:

$$R(L) = c_i (L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j (b_j - a_j); \quad L_i < L \leq L_{i-1} \quad (4)$$

با جایگذاری هزینه‌ی کاهش هر واحد از رابطه‌ی ۱ در رابطه‌ی ۴، هزینه‌ی کاهش برای یک مدت تحویل (L) معین عبارت خواهد بود از:

$$R(L, Q) = (x_i + y_i Q)(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j + y_j Q)(b_j - a_j); \quad L_i < L \leq L_{i-1} \quad (5)$$

۲.۲. پارامترها و متغیرهای مسئله

D : نرخ تقاضا (واحد زمان/واحد کالا);

A : هزینه‌ی هر بار سفارش کالا (سفارش/دلار);

C : هزینه‌ی خرید هر واحد کالا (واحد کالا/دلار);

h : هزینه‌ی نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان (واحد زمان/واحد کالا/دلار);

c_d : هزینه‌ی فاسد شدن هر واحد کالا (واحد کالا/دلار);

Q : میزان سفارش کالا (واحد کالا);

q : میزان کالای دریافتی در هر بار دریافت (واحد کالا);

θ_1 : ضریب فساد موجودی در انبار ($0 < \theta_1 < 1$);

θ_2 : ضریب فساد موجودی در مدت تحویل ($0 < \theta_2 < 1$);

L : مدت تحویل (واحد زمان) (متغیر تصمیم);

T : طول دوره‌ی سفارش دهی (واحد زمان) (متغیر تصمیم);

$R(L)$: تابع هزینه‌ی کاهش مدت تحویل (سفارش/دلار);

$K_i(L, T)$: تابع مجموع هزینه‌های موجودی که در آن $L_i < L < L_{i-1}$ (واحد زمان/دلار).

۳. مدل سازی مسئله

۱.۳. تابع موجودی انبار بر حسب زمان

با توجه به این که موجودی انبار با نرخ θ_1 فاسد می‌شود و از طرفی با نرخ D مصرف می‌شود، رابطه‌ی سطح موجودی انبار در طی یک دوره، از معادله‌ی دیفرانسیلی ۶ به دست خواهد آمد:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\theta_1 I(t) - D; \quad 0 < t \leq T \quad (6)$$

بدیهی است در حالت بهینه موجودی انتهای دوره به صفر می‌رسد. لذا، حل معادله‌ی ۶ با در نظر گرفتن شرط $I(T) = 0$ عبارت است از:

$$I(t) = \frac{D}{\theta_1} (e^{\theta_1(T-t)} - 1); \quad 0 < t \leq T \quad (7)$$

۴.۳.۳. هزینه‌ی فاسد شدن

هزینه‌ی فاسد شدن شامل دو بخش است. بخشی مربوط به کالاهایی است که در مدت تحویل با نرخ θ_2 فاسد می‌شوند ($Q - q$) و بخش دیگر مربوط به کالاهایی است که در مدت تحویل فاسد نشده اما پس از ورود به انبار با نرخ θ_1 فاسد می‌شوند ($q - DT$). لذا در مجموع، تعداد ($Q - DT$) واحد کالا طی یک بار سفارش دهی فاسد می‌شود. به این ترتیب، مجموع هزینه‌های فاسد شدن در واحد زمان به صورت زیر است:

$$TC_d = \frac{cd(Q - DT)}{T} = \frac{cd(De^{\theta_2 L}(e^{\theta_1 T} - 1) - DT\theta_1)}{T\theta_1} \quad (17)$$

۵.۳.۳. هزینه‌ی کاهش مدت تحویل

با جایگذاری اندازه سفارش از رابطه‌ی ۱۱ در رابطه‌ی ۵، هزینه‌ی کاهش مدت تحویل چنین به دست می‌آید:

$$R(L, T) = (x_i + y_i \frac{D}{\theta_1} e^{\theta_2 L} (e^{\theta_1 T} - 1))(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j + y_j \frac{D}{\theta_1} e^{\theta_2 L} (e^{\theta_1 T} - 1))(b_j - a_j); \quad (18)$$

$$L_i < L \leq L_{i-1}$$

لذا هزینه‌ی کاهش مدت تحویل در واحد زمان $R(L, T)/T$ است.

۴.۳. مدل ریاضی مسئله

تابع هدف مسئله شامل مجموع هزینه‌های سفارش دهی، خرید، نگه‌داری، فساد کالا و هزینه‌ی کاهش مدت تحویل است. به علت قطعی بودن هزینه‌ی کاهش مدت تحویل، تابع هدف نیز به صورت قطعی است. برای مقادیر $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$\text{Min } K_i(L, T) = \frac{A}{T} + \frac{CD e^{\theta_2 L} (e^{\theta_1 T} - 1)}{T\theta_1} + \frac{hD}{T\theta_1^2} (e^{\theta_1 T} - \theta_1 T - 1) + \frac{cd(De^{\theta_2 L} (e^{\theta_1 T} - 1) - DT\theta_1)}{T\theta_1} + (x_i + y_i \frac{D}{\theta_1} e^{\theta_2 L} (e^{\theta_1 T} - 1))(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j + y_j \frac{D}{\theta_1} e^{\theta_2 L} (e^{\theta_1 T} - 1))(b_j - a_j) \quad (19)$$

Subject to:

$$L_i = L_{\max} - \sum_{j=1}^i (b_j - a_j) \quad (20)$$

$$L_i < L \leq L_{i-1} \quad (21)$$

$$T > 0 \quad (22)$$

۴. حل مدل

با توجه به این که تابع هدف مسئله یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر نسبت به متغیرهای تصمیم است، از رویکرد مشتق‌گیری برای تعیین جواب بهینه استفاده می‌کنیم. معادلات ۲۴ و ۲۶ شرط لازم برای جواب بهینه است و شرط کافی، محذب بودن

تابع هدف است. توضیحات مربوط به بررسی تحذب تابع هدف در پیوست الف آمده است. مشتق جزئی نسبت به متغیر T را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial K_i(L, T)}{\partial T} = 0 \quad (23)$$

$$D(e^{\theta_1 T} (T\theta_1 - 1) + 1)(h + e^{\theta_2 L} (C + c_d)\theta_1) - (A + De^{\theta_1 T + \theta_2 L} (y_i(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} y_j(b_j - a_j)))\theta_1^2 = 0 \quad (24)$$

اکنون مشتق جزئی نسبت به متغیر L را در هر بازه زمانی $[L_i, L_{i-1}]$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial K_i(L, T)}{\partial L} = 0 \quad L_i < L \leq L_{i-1} \quad (25)$$

$$\frac{D\theta_2}{T\theta_1} (e^{\theta_1 T} - 1)e^{\theta_2 L} (C + c_d + y_i((L_{i-1} - L) + \theta_2^{-1})) + \sum_{j=1}^{i-1} y_j(b_j - a_j) - \frac{x_i}{T} = 0 \quad (26)$$

هر مقدار T و L که در هر دو رابطه‌ی ۲۴ و ۲۶ صدق کنند، شرط کافی برای بهینگی را دارند. لذا یک دستگاه معادلات غیرخطی داریم و به دلیل پیچیدگی معادلات ۲۴ و ۲۶ دست‌یابی به یک معادله‌ی تک‌متغیره ممکن نیست. در زیر الگوریتمی برای یافتن نقطه‌ی برخورد مشتق‌های اول تابع، از طریق جست‌وجوی عددی ارائه می‌شود.

۱.۴. الگوریتم حل

در این الگوریتم، بهینگی تابع هدف به‌ازای بازه‌های زمانی مختلف مدت تحویل بررسی می‌شوند. در هر بازه به صورت عددی به جست‌وجوی ریشه‌های مشتق‌های اول می‌پردازیم؛ به این صورت که در معادله‌ی ۲۴ مقدار اولیه‌ی به متغیر مدت تحویل تخصیص داده و آن را به معادله‌ی تک‌متغیره برحسب T تبدیل می‌کنیم و مقدار بهینه متغیر مجهول T را در معادله‌ی ۲۶ قرار می‌دهیم و این رویه را تکرار می‌کنیم تا به نقطه‌ی برخورد معادلات ۲۴ و ۲۶ نزدیک شویم. شرط توقف، اختلاف کم‌تر از ϵ بین دو مقدار متوالی متغیر مدت تحویل، یا تکرار بیشتر از k بار حل معادلات ۲۴ با ۲۶ است. چنانچه تکرار بیشتر از حد مجاز k شود، نقاط ابتدا و انتهای بازه (نقاط شکست) بررسی می‌شوند. در نهایت کم‌ترین مقدار تابع در بین بازه‌های مختلف به‌عنوان جواب بهینه و مقادیر متغیرهای تصمیم بهینه آن بازه، به‌عنوان مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم انتخاب می‌شوند. گام‌های این الگوریتم در زیر آمده است.

گام ۱. گام‌های ۱.۱ تا ۱.۱۰.۱ را برای هر بازه $[L_i, L_{i-1}]$ انجام دهید:

گام ۱.۱. مقدار $z = 0$ قرار دهید.

گام ۲.۱. در بازه $[L_i, L_{i-1}]$ ، $(L_i + L_{i-1})/2$ را محاسبه کنید و آن را $L(z)$ بنامید.

گام ۳.۱. مقدار z را یک واحد افزایش دهید.

گام ۴.۱. معادله‌ی ۲۴ را به‌ازای $L(z - 1)$ حل کنید و مقدار T را به دست آورید و آن را $T(z)$ بنامید.

گام ۵.۱. $T(z)$ به دست آمده از گام ۴.۱ را در معادله‌ی ۲۶ قرار دهید. مقدار L را به دست آورید و آن را $L(z)$ بنامید.

گام ۶.۱. اگر $k \leq z$ به گام ۷.۱ بروید؛ در غیر این صورت به گام ۹.۱ بروید.

جدول ۱. مقادیر پارامترهای مدت تحویل.

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
a_1	۲	x_2	۱٫۲
b_1	۱۶	y_2	۰٫۰۰۴
x_1	۰٫۴	a_2	۳
y_1	۰٫۱۲	b_2	۱۰
a_2	۲	x_3	۵
b_2	۱۶	y_3	۰٫۰۰۱۲

جدول ۲. مقادیر سایر پارامترهای مثال.

پارامتر	مقدار
D	۶۰۰
A	۲۰۰
C	۲۵
h	۲۰
cd	۵
θ_1	۰٫۲۵
θ_2	۰٫۳

گام ۷.۱. اگر $\varepsilon \leq L(j) - L(j-1)$ به گام ۸.۱ بروید؛ در غیر این صورت به گام ۳.۱ بروید.

گام ۸.۱. اگر $L_i < L(j) \leq L_{i-1}$ و $T(j) > 0$ باشند، مقادیر بهینه را $L_1^{opt} = L(j)$ و $T_1^{opt} = T(j)$ قرار دهید و به گام ۲ بروید؛ در غیر این صورت به گام ۹.۱ بروید.

گام ۹.۱. (بررسی نقاط شکست): $L_1^{opt} = L_i$ و $L_2^{opt} = L_{i-1}$ قرار دهید.

گام ۱۰.۱. معادله ۲۴ را به ازای مقادیر L_1^{opt} و L_2^{opt} (در صورت وجود) حل کنید و جواب‌ها را T_1^{opt} و T_2^{opt} بنامید.

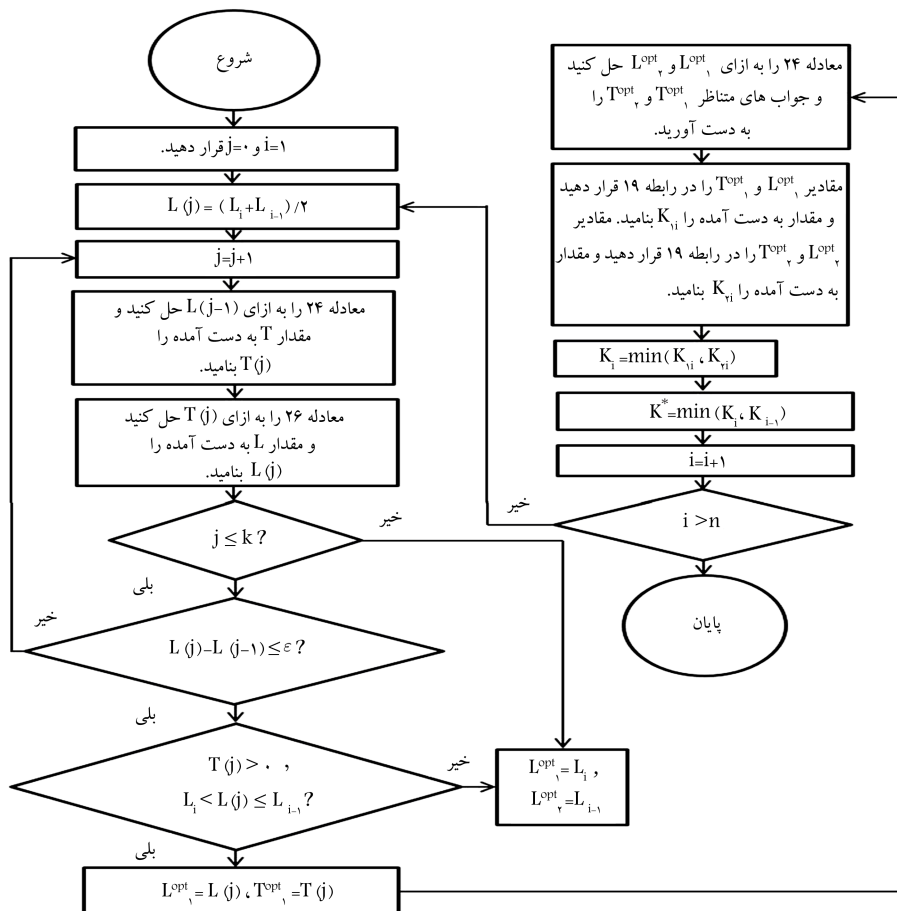
گام ۲. برای هر بازه $[L_i, L_{i-1}]$ مقادیر L_1^{opt} و L_2^{opt} مربوطه و T_1^{opt} و T_2^{opt} مربوطه را در تابع هدف ۱۹ قرار دهید.

گام ۳. در بین هزینه‌های حساب شده برای قطعات مختلف، جواب بهینه در بازه‌ی است که کم‌ترین هزینه را داشته باشد.

فلوچارت الگوریتم نیز در شکل ۱ ترسیم شده است.

۵. مثال عددی

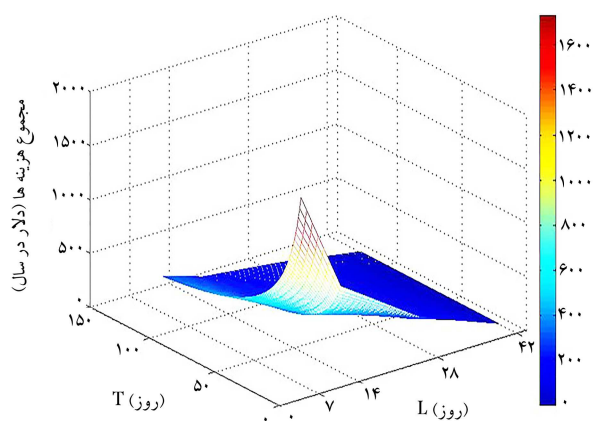
در این مثال مدت تحویل دارای ۳ جزء در نظر گرفته شده است. مقادیر پارامترهای مربوط به مدت تحویل در جدول ۱ ارائه شده است. مقادیر سایر پارامترهای مثال در جدول ۲ آورده شده است.



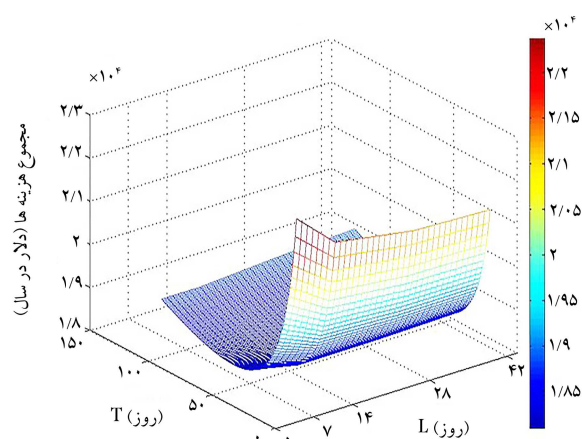
شکل ۱. فلوچارت الگوریتم پیشنهادی.

جدول ۳. تأثیر تغییر پارامترها بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم و مجموع هزینه‌ها.

پارامتر	مقدار	L	Q	K
D	۲۰۰	۲۸	۵۷	۶۷۰۶/۲
	۴۰۰	۱۴	۸۲	۱۲۴۷۹/۹
	۶۰۰	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶/۲
	۸۰۰	۱۴	۱۱۶	۲۳۶۳۳/۸
	۱۰۰۰	۱۴	۱۳۰	۲۹۱۲۱/۱
A	۱۰۰	۱۴	۷۵	۱۷۳۹۲/۶
	۱۵۰	۱۴	۸۹	۱۷۷۶۹/۶
	۲۰۰	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶/۲
	۲۵۰	۱۴	۱۱۲	۱۸۳۸۸/۵
	۳۰۰	۱۴	۱۲۱	۱۸۶۵۵/۷
h	۵	۱۴	۱۴۹	۱۷۲۱۱/۴
	۱۲/۵	۱۴	۱۱۸	۱۷۶۹۶/۱
	۲۰	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶/۲
	۲۷/۵	۱۴	۸۹	۱۸۴۴۴/۷
	۳۵	۱۴	۸۱	۱۸۷۵۷/۷
C	۱۵	۴۲	۱۰۲	۱۱۸۹۶/۲
	۲۰	۱۴	۱۰۲	۱۴۹۹۸/۲
	۲۵	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶/۲
	۳۰	۱۴	۹۸	۲۱۱۹۲/۷
	۳۵	۱۴	۹۶	۲۴۲۸۷/۹
c_d	۱	۱۴	۱۰۳	۱۸۰۱۷/۹
	۳	۱۴	۱۰۲	۱۸۰۵۷/۲
	۵	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶/۲
	۷	۱۴	۱۰۰	۱۸۱۳۵
	۹	۱۴	۹۹	۱۸۱۷۳/۵
θ_1	۰/۰۵	۱۴	۱۱۲	۱۷۶۶۰/۱
	۰/۱	۱۴	۱۰۹	۱۷۸۴۸
	۰/۲۵	۱۴	۱۰۰	۱۸۰۹۶/۲
	۰/۵	۱۴	۸۹	۱۸۴۶۹/۶
	۰/۷۵	۱۴	۸۱	۱۸۸۰۶/۲
θ_2	۰	۴۲	۹۴	۱۷۵۸۵/۷
	۰/۱۵	۴۲	۹۵	۱۷۹۰۵/۱
	۰/۳	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶/۲
	۰/۳۵	۱۴	۱۰۱	۱۸۱۳۲/۱
	۰/۶	۱۴	۱۰۲	۱۸۳۱۲/۸



شکل ۲. نمودار تغییرات هزینه‌ی کاهش مدت تحویل مثال عددی.



شکل ۳. نمودار تغییرات هزینه‌ی کل مثال عددی.

در اجرای الگوریتم ارائه شده در بخش ۱.۴، $k = 100$ ، $\varepsilon = 0.00005$ فرض شده، و معادلات ۲۴ و ۲۶ با تک مجهول به کمک نرم‌افزار Matlab[®] حل شده است. مقدار بهینه‌ی مدت تحویل ۱۴ روز و مقدار بهینه‌ی طول هر دوره‌ی سفارش دهی ۵۹ روز است. همچنین مجموع هزینه‌های موجودی برابر با $18096/2$ واحد پولی خواهد بود. نمودار تغییرات هزینه‌ی کاهش مدت تحویل مربوط به این مثال در شکل ۲ آورده شده است. چنان که مشاهده می‌شود با افزایش طول دوره‌ی سفارش دهی، هزینه‌ی کاهش مدت تحویل کاهش می‌یابد. همچنین با کاهش مدت تحویل، هزینه‌ی این کاهش با افزایش روبه‌رو می‌شود. نکته‌ی قابل توجه در این نمودار، تغییرات ناگهانی هزینه‌ی کاهش مدت تحویل در زمان عبور از نقاط شکست هزینه‌ی (مدت تحویل ۱۴ و ۲۸ روز) است. علت این امر تغییر در ضرایب هزینه‌ی (c_i) در هنگام عبور از این نقاط است.

نمودار تغییرات هزینه‌ی کل مربوط به این مثال در شکل ۳ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، نمودار تابع هزینه‌ی کل محدب است و در مدت تحویل ۱۴ روز شکستگی به وضوح دیده می‌شود که ناشی از تأثیر هزینه‌ی کاهش مدت تحویل بر مجموع هزینه‌هاست.

نتایج تحلیل حساسیت روی پارامترهای D ، A ، h ، C ، c_d ، θ_1 و θ_2 به منظور بررسی تأثیرشان بر جواب بهینه و مجموع هزینه‌ها صورت گرفته و نتایج عددی در جدول ۳ ارائه شده است. با افزایش هزینه‌ی سفارش دهی (A) نه تنها مقدار کالای ارسالی افزایش یافته، بلکه مقدار تابع هدف هم روند افزایشی دارد. با افزایش هزینه‌ی نگهداری (h)، مقدار کالای ارسالی کاهش می‌یابد، اما مجموع

هزینه‌های موجودی با افزایش روبه‌رو شده است. علت کاهش مقدار کالای ارسالی، جلوگیری از مواجهه با هزینه‌ی نگهداری بیش از حد کالا است. با افزایش هزینه‌ی خرید (C)، مقدار کالای ارسالی کاهش یافته، اما مجموع هزینه‌های موجودی افزایش داشته است. علت کاهش در مقدار کالای ارسالی، جلوگیری از مواجهه با هزینه‌ی خرید بالاست.

جدول ۴. تأثیر تغییر ضرایب هزینه‌ی ثابت بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم و مجموع هزینه‌ها.

x_1	x_2	x_3	L	Q	K
۰٫۲	۰٫۶	۲٫۵	۱۴	۹۷	۱۸۰۰۸٫۶
۰٫۳	۰٫۹	۳٫۷۵	۱۴	۹۸	۱۸۰۴۴
۰٫۴	۱٫۲	۵	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶٫۲
۰٫۵	۱٫۵	۶٫۲۵	۱۴	۱۰۱	۱۸۱۱۳٫۳
۰٫۶	۱٫۸	۷٫۵	۱۴	۱۰۲	۱۸۱۴۷٫۳

جدول ۵. تأثیر تغییر ضرایب هزینه‌ی متغیر بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم و مجموع هزینه‌ها.

y_1	y_2	y_3	L	Q	K
۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۰۶	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۰۹٫۵
۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۰۹	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۶۱٫۵
۰٫۰۰۱۲	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۱۲	۱۴	۱۰۱	۱۸۰۹۶٫۲
۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۱۵	۱۴	۱۰۱	۱۸۱۶۶٫۹
۰٫۰۰۱۸	۰٫۰۰۰۶	۰٫۰۰۰۱۸	۱۴	۱۰۱	۱۸۲۰۱٫۶

با افزایش هزینه‌ی فساد (ca)، مقدار کالای ارسالی کاهش یافته است؛ علت آن است که هرچه متوسط سطح موجودی کم‌تر باشد، تعداد کالاهای فاسد شده و به دنبال آن هزینه‌ی فساد کالا کاهش خواهد یافت. در این مدل به منظور کاهش تعداد کالاهای فاسد شده، نرخ فساد موجودی انبار (θ_1) چنان است که مدل خود را به سمت کاهش میزان کالای ارسالی سوق دهد. همچنین زمانی که نرخ فساد افزایش یابد، مجموع هزینه‌های موجودی نیز با افزایش روبه‌رو می‌شود.

با افزایش نرخ فساد موجودی در راه (θ_2) مدت تحویل سفارش با کاهش روبه‌رو می‌شود که علت آن جلوگیری از فساد بیش از حد کالا در مدت تحویل است و کاهش مدت تحویل، به منزله‌ی افزایش هزینه‌ی کاهش مدت تحویل است. بنابراین مدل برای مواجهه نشدن با هزینه‌ی بالا، باید تعداد دفعات سفارش در سال را کاهش دهد؛ دست‌یابی به این خواسته، منوط به افزایش مقدار کالای ارسالی است. هرچند افزایش نرخ فساد موجودی در راه موجب افزایش مقدار سفارش کالا می‌شود، اما تا زمانی که تغییری در مدت تحویل سفارش به وجود نیامده باشد، تغییرات مقدار سفارش کالا بسیار ناچیز خواهد بود. می‌توان گفت تنها زمانی تغییر در نرخ فساد موجودی در راه موجب تغییر در مقدار سفارش کالا می‌شود که طی آن تغییر مدت تحویل سفارش نیز تغییر کند. این موضوع در جدول ۳ قابل مشاهده است. با کاهش مدت تحویل از ۴۲ روز به ۱۴ روز، میزان سفارش از ۹۵ واحد به ۱۰۱ واحد تغییر می‌کند و با کاهش مدت تحویل از ۱۴ روز به ۷ روز، میزان سفارش از ۱۰۱ واحد به ۱۰۹ واحد افزایش می‌یابد.

نتایج تحلیل حساسیت روی ضرایب هزینه‌ی ثابت (x_i) در جدول ۴ آورده

شده است. می‌توان گفت از آنجا که افزایش در این ضرایب باعث افزایش در ضریب هزینه‌ی کل (c_i) می‌شود، بنابراین نمی‌توان انتظار کاهش مدت تحویل را داشت. در دامنه تغییراتی که برای ضرایب هزینه‌ی ثابت (x_i) در نظر گرفته شده مدت تحویل نسبت به این تغییرات حساس نیست اما اندازه سفارش افزایش می‌یابد. افزایش اندازه سفارش قابل انتظار است. زیرا با افزایش ضرایب هزینه‌ی ثابت (x_i) به نوعی هزینه‌ی سفارش‌دهی افزایش می‌یابد؛ این افزایش هزینه منجر به افزایش اندازه سفارش می‌شود.

نتایج تحلیل حساسیت روی ضرایب هزینه‌ی متغیر (y_i) در جدول ۵ آورده شده است. می‌توان گفت از آنجا که افزایش در این ضرایب باعث افزایش در ضریب هزینه‌ی کل (c_i) می‌شود، نمی‌توان انتظار کاهش مدت تحویل را داشت. همچنین، در دامنه‌ی تغییراتی که برای ضرایب هزینه‌ی متغیر (y_i) در نظر گرفته شده جواب بهینه نسبت به این تغییرات حساس نیست. افزایش ضرایب هزینه‌ی متغیر (y_i) به نوعی باعث افزایش هزینه‌ی سفارش‌دهی می‌شود و به تبع انتظار افزایش اندازه سفارش وجود دارد. از سوی دیگر، میزان افزایش ضریب هزینه‌ی کل (c_i) نسبت مستقیم با اندازه سفارش دارد و لذا، افزایش ضرایب هزینه‌ی متغیر کاهش اندازه سفارش را ایجاب می‌کند. ماحصل این روابط، در این تحلیل حساسیت، عدم تغییر در اندازه سفارش است.

جدول ۴ و ۵ نشان می‌دهد که در این مثال مدت تحویل بهینه نسبت به متغیرهای ثابت و متغیر هزینه‌ی کاهش مدت تحویل حساس نیست. تغییرات اندازه سفارش نیز ناچیز است. لذا اگر برآورد دقیق این ضرایب ممکن نباشد می‌توان از برآورد تقریبی آن در تعیین جواب بهینه استفاده کرد.

در حل مثال عددی و تحلیل حساسیت‌های آن زمان حل کم‌تر از ۱ ثانیه است. از طرفی با توجه به این که الگوریتم حل جواب بهینه را می‌دهد لذا می‌توان گفت الگوریتم از کارایی بالایی برخوردار است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل مقدار سفارش اقتصادی برای کالای فاسدشدنی ارائه شد که در آن مدت تحویل متغیر در نظر گرفته می‌شود. مدت تحویل به عنوان متغیر تصمیم وارد مدل شده و بخش هزینه‌ی جدیدی با عنوان هزینه‌ی کاهش مدت تحویل به تابع هدف مسئله افزوده شد. ساختار هزینه‌ی کاهش مدت تحویل به صورت تابعی از اندازه سفارش و میزان کاهش مدت تحویل در نظر گرفته شده است. پس از مدل‌سازی دقیق، الگوریتم عددی برای حل ارائه شد. نکته‌ی جالب در تحلیل حساسیت‌ها، کاهش میزان کالای ارسالی برای جلوگیری از افزایش بیش از حد هزینه‌ی فساد، بر اثر افزایش نرخ فساد موجودی انبار است. حال آن که با افزایش نرخ فساد موجودی در راه، مدت تحویل کاهش و به همین دلیل امکان افزایش میزان کالای ارسالی فراهم می‌شود. در هر دو این حالات و مطابق انتظار، هزینه‌های سیستم موجودی با افزایش نرخ‌های فساد روندی صعودی دارد.

تحلیل ریاضی تابع هدف و کشف خواص آن می‌تواند منجر به ارائه الگوریتم حل کارا تر شود. این امر به دلیل قطعی و غیرخطی بودن تابع هدف کمی پیچیده است و به عنوان تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود. در تحقیقات آتی می‌توان به تعمیم مسئله به حالات امکان وجود کمبود، محدودیت فضای انبار و محدودیت تعداد سفارشات پرداخت. همچنین می‌توان یکی از توابع فساد پیوسته‌ی رایج نظیر ویبول یا خطی را به جای نرخ فساد ثابت استفاده کرد.

(References) منابع

1. Ghare P. and Schrader, G. "A model for exponentially decaying inventory", *Journal of industrial Engineering*, **14**, pp. 238-243 (1963).
2. Tersine, R.J. and Barman, S. "Economic purchasing strategies for temporary price discounts", *European Journal of Operational Research*, **80**, pp. 328-343 (1995).
3. Covert, R.P. and Philip, G.C. "An EOQ model for items with Weibull distribution deterioration", *AIIE Transactions*, **5**, pp. 323-326 (1973).
4. Tadikamalla, P.R. "An EOQ inventory model for items with gamma distributed deterioration", *AIIE Transactions*, **10**, pp. 100-103 (1978).
5. Chang, H. and Dye, C. "An EOQ model for deteriorating items with time varying demand and partial backlogging", *Journal of the Operational Research Society*, **50**, pp. 1176-1182 (1999).
6. Sanni, S. and Chukwu, W. "An Economic order quantity model for Items with three-parameter Weibull distribution deterioration, ramp-type demand and shortages", *Applied Mathematical Modelling*, **37**, pp. 9698-9706 (2013).
7. Sicilia, J., González-De-la-Rosa, M. Febles-Acosta, J. and Alcaide-López-de-Pablo, D. "An inventory model for deteriorating items with shortages and time-varying demand", *International Journal of Production Economics*, **155**, pp. 155-162 (2014).
8. Bakker, M., Riezebos, J. and Teunter, R.H. "Review of inventory systems with deterioration since 2001", *European Journal of Operational Research*, **221**, pp. 275-284 (2012).
9. Liao C.-J. and Shyu, C.-H. "An analytical determination of lead time with normal demand", *International Journal of Operations & Production Management*, **11**, pp. 72-78 (1991).
10. Ben-Daya, M. and Raouf, A. "Inventory models involving lead time as a decision variable", *Journal of the Operational Research Society*, **45**(5), pp. 579-582 (1994).
11. Ouyang, L.-Y. and Wu, K.-S. "Mixture inventory model with backorders and lost sales for variable lead time", *Journal of the Operational Research Society*, **47**, pp. 833-838 (1996).
12. Moon, I. and Choi, S. "Technical note on lead time and distributional assumptions in continuous review inventory models", *Computers & Operations Research*, **25**, pp. 1007-1012 (1998).
13. Hariga, M. and Ben-Daya, M. "Some stochastic inventory models with deterministic variable lead time", *European Journal of Operational Research*, **113**, pp. 42-51 (1999).
14. Jha, J. and Shanker, K. "Single-vendor multi-buyer integrated production-inventory model with controllable lead time and service level constraints", *Applied Mathematical Modelling*, **37**, pp. 1753-1767 (2013).
15. Priyan, S. and Uthayakumar, R. "Two-echelon multi-product multi-constraint product returns inventory model with permissible delay in payments and variable lead time", *Journal of Manufacturing Systems*, **36**, pp. 244-262 (2015).
16. Priyan, S. and Uthayakumar, R. "Economic design of multi-echelon inventory system with variable lead time and service level constraint in a fuzzy cost environment", *Fuzzy Information and Engineering*, **8**, pp. 465-511 (2016).
17. Moon, I., Shin, E. and Sarkar, B. "Min—max distribution free continuous-review model with a service level constraint and variable lead time", *Applied Mathematics and Computation*, **229**, pp. 310-315 (2014).
18. Jamshidi, R., Fatemi Ghomi, S.M.T. and Karimi, B. "Flexible supply chain optimization with controllable lead time and shipping option", *Applied Soft Computing*, **30**, pp. 26-35 (2015).
19. Priyan, S. and Uthayakumar, R. "Continuous review inventory model with controllable lead time, lost sales rate and order processing cost when the received quantity is uncertain", *Journal of Manufacturing Systems*, **34**, pp. 23-33 (2015).
20. Soni, H.-N and Joshi, M. "A periodic review inventory model with controllable lead time and backorder rate in fuzzy-stochastic environment", *Fuzzy Information and Engineering*, **7**, pp. 101-114 (2015).
21. Pan, J., Hsiao, Y.-C. and Lee, C.-J. "Inventory models with fixed and variable lead time crash costs considerations", *Journal of the Operational Research Society*, **53**, pp. 1048-1053 (2002).
22. Ben-Daya, M. and Hariga, M. "Integrated single vendor single buyer model with stochastic demand and variable lead time", *International Journal of Production Economics*, **92**, pp. 75-80 (2004).
23. Chang, C.-T. "A linearization approach for inventory models with variable lead time", *International Journal of Production Economics*, **96**, pp. 263-272 (2005).
24. Arkan, A. and Hejazi, S.R. "Coordinating orders in a two echelon supply chain with controllable lead time and ordering cost using the credit period", *Computers & Industrial Engineering*, **62**, pp. 56-69 (2012).
25. Pirayesh, M. and Javanshir, R. "Introducing inventory replenishment policy and determining optimal order quantity and optimal vehicle type in critical situation; Case Study: Iran Khodro Khorasan", *Production and Operations Management*, **2**, pp. 57-72 (in persian) (2013).

پیوست الف

از آنجایی که تابع هدف براساس دو متغیر L و T است، برای اثبات تحدب این تابع، از ماتریس هشین به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K_i}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 K_i}{\partial L \partial T} \\ \frac{\partial^2 K_i}{\partial T \partial L} & \frac{\partial^2 K_i}{\partial L^2} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

شرط محدب بودن تابع هدف، مثبت بودن عنصر سطر اول و ستون اول ماتریس هشین ($\frac{\partial^2 K_i}{\partial T^2}$) و همچنین مثبت شدن دترمینان این ماتریس است. دترمینان این ماتریس نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det(H) = \frac{\partial^2 K_i}{\partial T^2} * \frac{\partial^2 K_i}{\partial L^2} - \left[\frac{\partial^2 K_i}{\partial L \partial T} \right]^2$$

درایه‌های ماتریس هشین برای تابع هدف از قرار زیر هستند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_i}{\partial T^2} &= \frac{D e^{\theta_1 T}}{T} (h + e^{\theta_2 L} (C + c_d) \theta_1) \left(\frac{-2}{T \theta_1} + 1 \right) \\ &\quad - \frac{D}{T^2} e^{\theta_1 T + \theta_2 L} (y_i (L_{i-1} - L)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} y_j (b_j - a_j) \left(\theta_1 - \frac{2}{T} \right) - \frac{2A}{T^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_i}{\partial L \partial T} &= \frac{1}{T^2 \theta_1} D (e^{\theta_1 T} (\theta_1 T - 1) + 1) * (\theta_1 \theta_2 e^{\theta_2 L} (C + c_d) \\ &\quad - \frac{1}{T^2} (D \theta_2 e^{\theta_1 T + \theta_2 L} (y_i (L_{i-1} - L) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} y_j (b_j - a_j)) (y_i D e^{\theta_1 T + \theta_2 L})) \\ \frac{\partial^2 K_i}{\partial L^2} &= \frac{D \theta_2}{T \theta_1} (e^{\theta_1 T} - 1) e^{\theta_2 L} * (\theta_2 (C + c_d + y_i (L_{i-1} - L) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} y_j (b_j - a_j) + 1) + y_i) \end{aligned}$$

عناصر ماتریس هشین به گونه‌ای است که دترمینان آن یک رابطه‌ی پیچیده می‌شود و درحالت کلی به صورت تحلیلی نمی‌توان علامت آن را تعیین کرد. لذا از تحلیل‌های عددی برای بررسی تحدب تابع استفاده شده است. برای هر مثال عددی مقدار دترمینان ماتریس هشین محاسبه می‌شود و به صورت عددی به‌ازای مقادیر مختلف L و T شرایط تحدب بررسی می‌گردد. همچنین جهت اطمینان، پاسخ‌های کاندید بهینگی که از الگوریتم حاصل می‌شوند را در شرایط تحدب بررسی می‌کنیم. تحلیل تحدب تابع هدف به روش عددی نسبت به روش تحلیلی ارزش کم‌تری دارد ولی به دلیل زیاد بودن پارامترها در دترمینان ماتریس هشین، از این روش استفاده شد. در مثال عددی مقاله و مثال‌های متعدد دیگر شرایط تحدب تابع هدف به صورت عددی بررسی شد و تابع هدف محدب است.