مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۳۹۷)
دوره‌ی ۱-۳۴، شماره‌ی ۲/۲، ص. ۹-۱۹

Original Article

یک مدل موجودی تک‌دوره‌یی با ظرفیت تولید محدود در شرایط عدم قطعیت بودجه و هزینه‌ی کمبود

مهدی سیف‌برقی* (دانشیار)
زهرا سرمست حسن‌کیاده (کارشناس)
فرناز توکلیان (کارشناس)
گروه مهندسی صنایع، دانشگاه الزهرا

در این نوشتار مدل‌سازی مسئله‌ی تولید تک‌دوره‌یی چندمحصولی که اقلام آن به‌صورت تصادفی، معیوب و تقاضا به‌صورت پیوسته و احتمالی باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم تحت محدودیت ظرفیت تولید به‌صورت قطعی و محدودیت‌های بودجه و هزینه‌ی کمبود به‌صورت احتمالی و فازی عمل می‌کند. محدودیت‌های هزینه‌ی کمبود و بودجه به سه حالت تقسیم می‌شود: ۱. هر دو محدودیت احتمالی؛ ۲. یکی از محدودیت‌ها احتمالی و دیگری فازی؛ ۳. هر دو محدودیت فازی. در این مدل‌سازی محدودیت‌های غیر قطعی (فازی) به‌صورت محدودیت‌های امکان/الزام نشان داده می‌شود. همچنین مدل در قالب مثال عددی نشان داده شده است. مسائل معین شده به‌وسیله‌ی نرم‌افزار متلب و با شیوه‌ی حل SQP [۱] بهینه‌سازی شده‌اند و تحلیل حساسیت روی تابع سود نسبت به پارامترهای مختلف صورت گرفته است.

واژگان کلیدی: موجودی، تقاضای احتمالی، محدودیت شانسی، محدودیت امکان/الزام، فازی.

m.seifbarghy@alzahra.ac.ir
saghisarmast92@gmail.com
tavakolianfz@gmail.com

۱. مقدمه

در بیشتر مدل‌های موجودی پایه نظیر مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ)[۲] تقاضا به‌صورت قطعی در نظر گرفته می‌شود، در حالی که در برخی شرایط واقعی مانند مسئله‌ی پسر روزنامه‌فروش تقاضا به‌صورت غیر قطعی است. در بسیاری از تحقیقات، مسئله‌ی ایجاد عیب و نقص در محصول تولیدی در نظر گرفته نمی‌شود. عده‌یی از محققین[۱-۴] کیفیت ناقص اقلام را در یک فضای احتمالی بررسی کردند. اخیراً نیز مدل جدید تک‌دوره‌یی را با در نظرگرفتن تقاضای تصادفی نامعین در حالت تک‌کالایی و چندکالایی بررسی کرده[۵] و کاربردهای آن را مطرح کردند. همچنین مسئله‌ی سفارش‌دهی و پرداخت را در حالت تک‌دوره‌یی و با فرض دوره‌ی اعتباری جزیی مد نظر قرار داده[۶] و تقاضا را در این مدل به‌صورت احتمالی در نظر گرفتند. محققین دیگری نیز با در نظر گرفتن رویکرد توزیع قوی، مسئله‌ی کنترل موجودی تک‌دوره‌یی را با چند تأمین‌کننده غیر قابل اطمینان و تقاضای احتمالی ارائه دادند.[۷]

در مواردی می‌توان از ابزارهای دیگر نمایش عدم قطعیت مانند منطق فازی استفاده کرد. در چند سال اخیر مدل‌های EPQ در یک فضای فازی فرموله شده‌است.[۸-۱۲]

محققین برنامه‌ریزی محدودیت‌های شانسی[۱۳] را برای کاربردهای مختلف گسترش داده‌اند. آنان[۱۴-۱۶] محدودیت‌های الزام[۳] و امکانی[۴] را که بسیار به تصمیم‌گیری‌های دنیای واقعی مربوط است معرفی کردند و فرایند فازی‌سازی این محدودیت‌ها را نشان دادند.

در مطالعات بعدی[۱۷] زمان تحویل تقاضا به‌عنوان متغیرهای فازی، و تقاضای سالانه به‌عنوان متغیرهای تصادفی فازی گسسته در نظر گرفته شد. مسئله‌ی پسر روزنامه‌فروش دومرحله‌یی جدید و کاربردی نیز در یک زنجیره‌ی تأمین‌سبز برای تولیدکننده با محدودیت‌های بودجه و فضا به کار گرفته شد.[۱۸] همچنین یک مدل موجودی فازی برای اقلام فاسدشدنی که در آن زمان برنامه‌ریزی به عنوان متغیر تصادفی و محدودیت‌های بودجه و فضا به‌صورت فازی و فازی تصادفی در نظر گرفته شده[۱۹] معرفی شده است. محققین مدل تصمیم‌گیری یکپارچه را برای تعیین مقادیر بهینه‌ی تولید محصول تک‌دوره‌یی با تقاضای فازی با هدف بیشینه‌سازی سود در نظر گرفته و آن را حل کردند.[۲۰]

در تحقیقات اخیر در زمینه‌ی موجودی، برنامه‌ریزی فازی با محدودیت‌های نرم بیشتر مطرح است. براین اساس یک مدل موجودی تولید چندمحصولی تحت محدودیت‌های فازی سرمایه و فضا توسعه داده شده است.[۲۱] محققین یک مدل موجودی تولید چندمحصولی را که در آن محدودیت‌های هزینه‌ی کمبود و

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۴/۲، اصلاحیه ۱۳۹۶/۶/۱، پذیرش ۱۳۹۶/۶/۲۷.
DOI:10.24200/J65.2018.20095

سرمایه به‌صورت فازی در نظر گرفته شده[۲۲] ارائه داده‌اند. آنان به‌ترتیب مدل‌های ریاضی فازی چندهدفه را برای برنامه‌ریزی تولید و زنجیره‌ی تأمین پیشنهاد داده‌اند.[۲۳،۲۴]

مسئله‌ی مورد بررسی در این تحقیق درخصوص مدل موجودی تک‌دوره‌یی در شرایط تولید است، اما مطالعه‌یی که به مدل‌سازی و حل مسئله‌ی تولید تک‌دوره‌یی چندمحصولی احتمالی با فرض تولید اقلام معیوب پرداخته و انواع مختلف محدودیت‌های مؤثر را با توجه به ماهیت آنها در شرایط دنیای واقعی در نظر بگیرد، کم‌تر دیده می‌شود. همچنین در مدل‌های تک‌دوره‌یی چون فرصت و زمان تصمیم‌گیری محدود است، محدودیت ظرفیت تولید تأثیر به‌سزایی در تصمیم‌گیری دارد. به عبارتی در مدل‌های چنددوره‌یی امکان تغییر ظرفیت در دوره‌های مختلف وجود دارد اما در مدل تک‌دوره‌یی با توجه به این‌که امکان نوسان ظرفیت وجود ندارد، این محدودیت وجود داشته و باید به آن توجه شود. در مدل ارائه شده، سه محدودیت اساسی ظرفیت تولید، بودجه و هزینه‌ی کمبود در نظر گرفته شده است، به‌گونه‌یی که محدودیت ظرفیت تولید به‌صورت قطعی و با توجه به نداشتن اطلاعات دقیق از حداکثر بودجه و هزینه‌ی کمبود، این دو محدودیت در فضای احتمالی و فازی بررسی شده‌اند. دو محدودیت بیشینه بودجه و هزینه‌ی کمبود به‌صورت احتمالی، فازی و ترکیبی در نظر گرفته شده و در رابطه با محدودیت‌های فازی، دو حالت الزام (بدبینانه) و امکان (خوش‌بینانه) مورد بررسی قرار می‌گیرند. محدودیت‌های احتمالی با استفاده از روش برنامه‌ریزی محدودیت‌های شانسی، و محدودیت‌های فازی براساس تحقیقات انجام شده[۲۵،۲۶] به محدودیت‌های قطعی تبدیل می‌شوند. سپس مسئله با ترکیب‌های مختلف محدودیت‌ها فرموله و معادل قطعی آنها با استفاده از الگوریتم SQP حل می‌شود. ضمناً با استفاده از مثال‌های عددی اثر پارامترهای مختلف روی سود مورد انتظار بررسی می‌شود. نتایج به دست آمده از حل مثال‌های عددی و تحلیل‌های حساسیت مطابق با انتظارات بوده و اعتبار مدل را تأیید می‌کند.

۲. فرضیات و نمادها

فرضیات مسئله عبارت‌اند از:

۱. محصولات مختلفی با نرخ تولید معیوب طی یک دوره تولید می‌شود.

۲. نرخ تولید هر محصول مشخص و ثابت است.

۳. تقاضای هر محصول در طول دوره احتمالی و یکنواخت در نظر گرفته می‌شود.

۴. درصد تولید معیوب هر محصول احتمالی است.

۵. کمبود مجاز است و به طور کامل پس‌افت در نظر گرفته می‌شود.

۶. هزینه‌های بازبینی برای تمامی کالاها یکسان است.

فرض می‌شود در سیستم موجودی مورد نظر n محصول مختلف تولید می‌شود و برای هریک از آنها $(i = 1, 2, \dots, n)$ علائم زیر به کار می‌رود:

T_i: مدت زمان ثابت مربوط به دوره محصول i؛

x_i: تقاضای احتمالی هر واحد محصول i در طول دوره $(0, T_i)$؛

$f_i(x_i)$: تابع چگالی احتمال تقاضای محصول i $(0 < x_i < \infty)$.

طبق رابطه‌ی ۱، اگر هر محصول i حداکثر تا مقدار مشخص R_i تولید شود، تابع چگالی احتمال به‌صورت $A_i + B_i x_i$ بیان می‌شود. بدیهی است باید داشته باشیم $\int_0^{R_i}(A_i + B_i x_i)dx_i = 1$.

$$f_i(x_i) = \begin{cases} A_i + B_i x_i & 0 \leq x_i \leq R_i \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \qquad (1)$$

A_iها، B_iها و R_iها ثابت‌های تابع چگالی تقاضا $f_i(x_i)$ هستند که مطابق رابطه‌ی ۱ ارائه می‌شوند؛

e_i: نرخ واحدهای معیوب محصول i؛

$g_i(e_i)$: تابع چگالی احتمال نرخ واحدهای معیوب محصول i.

طبق رابطه‌ی ۲ در صورتی که نرخ واحدهای معیوب محصول i حداکثر تا مقدار مشخص b_i در نظر گرفته شود، تابع چگالی احتمال به‌صورت d_i بیان می‌شود. بدیهی است باید داشته باشیم $\int_0^{b_i}(d_i)de_i = 1$.

$$g_i(e_i) = \begin{cases} d_i & 0 \leq e_i \leq b_i \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \qquad (2)$$

b_iها و d_iها ثابت‌های تابع چگالی $g_i(e_i)$ هستند که طبق رابطه‌ی ۲ بیان می‌شوند؛

$k = 1, 2, \dots, m$: اندیس محدودیت‌های احتمالی؛

$\tilde{B}, B$: حداکثر بودجه در دسترس برای تولید و بازبینی به‌ترتیب برای حالت‌های احتمالی و فازی؛

C_{li}: هزینه‌ی نگه‌داری موجودی به‌ازای هر واحد محصول در هر واحد زمان؛

$\tilde{C}_{pi}, C_{pi}$: هزینه‌ی تولید هر واحد محصول به‌ترتیب برای حالت‌های احتمالی و فازی؛

$\tilde{C}_{si}, C_{si}$: هزینه‌ی کمبود هر واحد محصول به‌ترتیب برای حالت‌های احتمالی و فازی؛

$EAP(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$: متوسط کل سود مورد انتظار؛

$E(S_M), E(B)$: امید ریاضی متغیرهای تصادفی B و S_M؛

EP_i: سود مورد انتظار محصول iام؛

k_i: قیمت فروش هر واحد معیوب محصول i؛

L_i: قیمت حراج هر واحد محصول i؛

P_i: نرخ تولید هر واحد محصول i؛

P_{ii}: نرخ تولید واحدهای قابل قبول محصول i. ضمناً $P_{ii} = (1 - e_i)\, P_i$؛

$q_i(t)$: موجودی در دست از محصول i در زمان t؛

Q_i: کل تولید محصول i؛

Q_{ii}: کل تولید واحدهای قابل قبول محصول i. ضمنا $Q_{ii} = (1 - e_i)\, Q_i$؛

Q_{si}: مقدار کمبود محصول i؛

r_k: احتمال مربوط به محدودیت احتمالی k و $k = 1, \dots, m$؛

s_c: هزینه‌ی بازبینی هر واحد محصول؛

s_i: قیمت فروش هر واحد محصول i با کیفیت قابل قبول؛

$\tilde{S}_M, S_M$: بیشینه هزینه‌ی مجاز کمبود به‌صورت احتمالی و فازی؛

t_{1i}: زمان تولید محصول i؛

t_{2i}: زمانی که پس از آن کمبود محصول i اتفاق می‌افتد؛

$\varphi(t)$: تابع چگالی نرمال استاندارد؛

$\varphi(r_k)$: عددی حقیقی که $\int_{\varphi(r_k)}^{\infty} \varphi(t)dt = r_k$ و $k = 1, \dots, m$؛

η_1: احتمال مربوط به امکان/الزام محدودیت فازی بودجه؛

η_2: احتمال مربوط به امکان/الزام محدودیت فازی کمبود؛

$\sigma(S_M), \sigma(B)$: انحراف استاندارد متغیرهای تصادفی B و S_M؛
α_i: مقدار زمان لازم برای تولید هر واحد محصول i؛
CAP: بیشترین ظرفیت زمانی تولید.

۳. مدل ریاضی

ابتدا به نحوه‌ی مدل‌سازی تابع هدف در قالب بیشینه‌سازی، سود مورد انتظار پرداخته می‌شود. بدین منظور لازم است تمامی هزینه‌ها و درآمدها در نظر گرفته شوند. به منظور محاسبه‌ی هزینه‌ی نگه‌داری اقلام قابل قبول و معیوب، ارزش حراج و هزینه‌ی کمبود دو حالت وقوع و عدم وقوع کمبود در نظر گرفته می‌شود.

۱.۳. حالت ۱. زمانی که کمبود اتفاق نمی‌افتد

برای به دست آوردن هزینه‌ی نگه‌داری، نیاز به سطح موجودی در دست داریم. سطح موجودی $q_i(t)$ از دیفرانسیل اختلاف تولید سالم $P_i\,(1-e_i)$ و تقاضا $\frac{x_i}{T_i}$ به دست می‌آید و در دو ضابطه تا زمان تولید محصول و پس از آن طبق رابطه‌ی ۳ ارائه می‌شود:

$$\frac{dq_i(t)}{dt}=\begin{cases}(1-e_i)P_i-\frac{x_i}{T_i} & 0\le t\le t_{1i}\\ \frac{x_i}{T_i} & t_{1i}\le t\le T_i\end{cases} \tag{3}$$

که در آن $Q_i(0)=0$ است.

با استفاده از محدودیت‌های ابتدایی و محاسبه‌ی انتگرال، پاسخ معادله‌ی ۳ عبارت خواهد بود از:

$$q_i(t)=\begin{cases}(P_{ii}-\frac{x_i}{T_i})t & 0\le t\le t_{1i}\\ P_{ii}t_{1i}-\frac{x_i}{T_i}t & t_{1i}\le t\le T_i\end{cases} \tag{4}$$

از آنجا که طبق فرض کمبود مجاز نیست، باید $q_i(T_i)\ge 0$ و در نتیجه رابطه‌ی ۵ برقرار خواهد بود:

$$\Rightarrow\ x_i\le p_{ii}t_{1i} \tag{5}$$

حال به‌وسیله‌ی نمادهای $Q_i=P_it_{1i}$ و $Q_{ii}=P_{ii}t_{1i}$، هزینه‌ی نگه‌داری مورد انتظار برای اقلام قابل قبول به‌ازای محصول i، با توجه به روابط ۴ و ۵ برابر با رابطه‌ی ۶ خواهد بود:

$$\begin{aligned}&C_{li}\int_0^1\left[\int_0^{Q_{ii}}\left\{\begin{array}{l}\int_0^{t_{1i}}(P_{ii}-\frac{x_i}{T_i})tdt\\ +\int_{t_{1i}}^{T_i}(P_{ii}t_{1i}-\frac{x_i}{T_i}t)dt\end{array}\right\}f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i\\ &=C_{li}\int_0^1\left[\int_0^{Q_{ii}}\left\{Q_{ii}T_i-\frac{Q_{ii}^2}{2P_{ii}}-\frac{T_i}{2}x_i\right\}f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i\end{aligned} \tag{6}$$

همچنین هزینه‌ی نگه‌داری مورد انتظار برای اقلام معیوب به‌ازای محصول iام طبق رابطه‌ی ۷ می‌تواند ارائه شود:

$$C_{li}\int_0^1\frac{e_iP_i}{2}t_{1i}^2g_i(e_i)de_i=C_{li}\int_0^1\frac{e_iQ_i^2}{2P_i}g_i(e_i)de_i \tag{7}$$

ارزش حراج نیز طبق رابطه‌ی ۸ محاسبه می‌شود:

$$L_i\int_0^1\left\{\int_0^{Q_{ii}}(Q_{ii}-x_i)f_i(x_i)dx_i\right\}g_i(e_i)de_i \tag{8}$$

۲.۳. حالت ۲. زمانی که کمبود اتفاق می‌افتد

برای به دست آوردن هزینه‌ی نگه‌داری نیاز به سطح موجودی در دست داریم و سطح موجودی $q_i(t)$ تابع معادلات دیفرانسیل کنترل‌کننده‌ی رابطه‌ی ۹ هستند:

$$\frac{dq_i(t)}{dt}=\begin{cases}P_{ii}-\frac{x_i}{T_i} & 0\le t\le t_{1i}\\ -\frac{x_i}{T_i} & t_{1i}\le t\le t_{2i}\\ -\frac{x_i}{T_i} & t_{2i}\le t\le T_i\end{cases} \tag{9}$$

که در آن $q_i(t_{2i})=0$ و $q_i(0)=0$ است.

با محاسبه‌ی انتگرال، جواب معادله‌ی ۹ به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ خواهد بود:

$$q_i(t)=\begin{cases}(P_{ii}-\frac{x_i}{T_i})t & 0\le t\le t_{1i}\\ P_{ii}t_{1i}-\frac{x_i}{T_i}t & t_{1i}\le t\le t_{2i}\\ -\frac{x_i}{T_i}t(t-t_{2i}) & t_{2i}\le t\le T_i\end{cases} \tag{10}$$

و داریم: $q_i(t_{2i})=0\Rightarrow t_{2i}=\frac{Q_{ii}T_i}{x_i}$.

وقتی کمبود اتفاق می‌افتد باید $q_i(t)<0$ و در نتیجه رابطه‌ی ۱۱ برقرار است:

$$q_i(t)<0\Rightarrow x_i>P_{ii}t_{1i}(=Q_{ii}) \tag{11}$$

هزینه‌ی نگه‌داری اقلام قابل قبول با استفاده از معادلات ۱۰ و ۱۱ برابر با رابطه‌ی ۱۲ به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&C_{li}\int_0^1\left[\int_{Q_{ii}}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\int_0^{t_{1i}}(P_{ii}-\frac{x_i}{T_i})tdt\\ +\int_{t_{1i}}^{t_{2i}}(Q_{ii}-\frac{x_i}{T_i}t)dt\end{array}\right\}f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i\\ &=C_{li}\int_0^1\left[\int_{Q_{ii}}^{\infty}\frac{Q_{ii}^2}{2}(\frac{T_i}{x_i}-\frac{1}{P_{ii}})f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i\end{aligned} \tag{12}$$

هزینه‌های کمبود مورد انتظار برای محصول iام برابر رابطه‌ی $C_{si}Q_{si}$ است که مطابق رابطه‌ی ۱۳ قابل ارائه باشد:

$$\begin{aligned}C_{si}Q_{si}&=C_{si}\int_0^1\left[\int_{Q_{ii}}^{\infty}\left[\int_{t_{2i}}^{T_i}\{-q_i(t)\}dt\right]f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i\\ &=C_{si}\int_0^1\left[\int_{Q_{ii}}^{\infty}\left[\int_{t_{2i}}^{T_i}\frac{x_i}{T_i}(t-t_{2i})dt\right]f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i\\ &=\frac{1}{2}C_{si}T_i\int_0^1\left[\int_{Q_{ii}}^{\infty}x_i(1-\frac{Q_{ii}}{x_i})^2f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i\end{aligned} \tag{13}$$

که درآن مقدار Q_{si} برابر رابطه‌ی ۱۴ است:

$$Q_{si}=\frac{1}{2}T_i\int_0^1\left[\int_{Q_{ii}}^{\infty}x_i(1-\frac{Q_{ii}}{x_i})^2f_i(x_i)dx_i\right]g_i(e_i)de_i \tag{14}$$

سود مورد انتظار برای محصول i، برابر EP_i است که مطابق رابطه‌ی زیر ارائه می‌شود:
= درآمد به‌دست آمده از فروش واحدهای قابل قبول + ارزش حراج + درآمد به‌دست آمده از فروش واحدهای معیوب − هزینه‌ی نگه‌داری واحدهای قابل قبول − هزینه‌ی نگه‌داری واحدهای معیوب − هزینه‌ی کمبود − هزینه‌ی بازبینی − هزینه‌ی تولید

از این رو متوسط کل سود مورد انتظار با توجه به رابطه‌ی فوق برای تمامی اقلام طبق رابطه‌ی ۱۵ است:

$$
\begin{aligned}
EAP(Q_1,Q_2,...,Q_n) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}EP_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}\left[s_i\int_0^1\left\{\begin{array}{l}\int_0^{Q_{ii}}x_if_i(x_i)dx_i\\ +Q_{ii}\int_{Q_{ii}}^{\infty}f_i(x_i)dx_i\end{array}\right\}g_i(e_i)de_i\right. \\
&+L_i\int_0^1\left\{\int_0^{Q_{ii}}(Q_{ii}-x_i)f_i(x_i)dx_i\right\}g_i(e_i)de_i \\
&+k_iQ_i\int_0^1 e_ig_i(e_i)de_i \\
&-C_{li}\int_0^1\left\{\int_0^{Q_{ii}}(Q_{ii}T_i-\frac{Q_{ii}^2}{2P_{ii}}-\frac{T_i}{2}x_i)f_i(x_i)dx_i\right\}g_i(e_i)de_i \\
&-C_{li}\int_0^1\frac{e_iQ_i^2}{2P_i}g_i(e_i)de_i-(s_c+C_{pi})Q_i \\
&-\frac{C_{li}}{2}\int_0^1\left\{Q_{ii}^2\int_{Q_{ii}}^{\infty}(\frac{T_i}{x_i}-\frac{1}{P_{ii}})f_i(x_i)dx_i\right\}g_i(e_i)de \\
&\left.-C_{si}\frac{T_i}{2}\int_0^1\left\{\int_{Q_{ii}}^{\infty}x_i(1-\frac{Q_{ii}}{x_i})^2f_i(x_i)dx_i\right\}g_i(e_i)de_i\ \right]
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

مدل کلی مسئله را با توجه به محدودیت قطعی ظرفیت تولید و محدودیت‌های احتمالی و غیر قطعی بودجه و هزینه‌ی کمبود می‌توان مطابق رابطه‌ی ۱۶ تا ۲۰ ارائه کرد:

$$\text{Max}\quad EAP(Q_1,Q_2,...,Q_n) \tag{۱۶}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{n}(C_{pi}+s_c)Q_i\le B \tag{۱۷}$$

$$\sum_{i=1}^{n}C_{si}Q_{si}\le S_M \tag{۱۸}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iQ_i\le CAP \tag{۱۹}$$

$$Q_i\ge 0\quad (i=1,2,..,n) \tag{۲۰}$$

در ادامه، مدل کلی مسئله با در نظر گرفتن توابع چگالی مشخص برای "x_i" و e_i (درصد واحدهای معیوب در Q_i) و شکل تابع چگالی احتمال تقاضا، مطابق رابطه‌ی ۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

با توجه به ویژگی تابع چگالی احتمال $\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1\right\}$ و با توجه به رابطه‌ی ۱:

$$\int_0^{R_i}f_i(x_i)dx_i=1$$

که با ساده‌سازی آن به رابطه‌ی ۲۱ می‌رسیم:

$$A_iR_i+\frac{B_iR_i^2}{2}=1,\qquad i=1,2,...,n \tag{۲۱}$$

با در نظرگرفتن تابع چگالی احتمال برای e_i:

$$g_i(e_i)=\left\{\begin{array}{ll} d_i & 0\le e_i\le b_i\\ 0 & Otherwise\end{array}\right.$$

ثابت می‌شود رابطه‌ی $b_id_i=1\ (i=1,2,...,n)$ برقرار است.

با توجه به رابطه‌ی ۱۵ و پیش‌فرض‌های اشاره شده در ابتدای مقاله، رابطه‌ی ۲۲ را درخصوص تابع هدف می‌توان ارائه کرد:

$$
\begin{aligned}
&EAP(Q_1,Q_2,...,Q_n)= \\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}\left[d_i\int_0^{b_i}[s_i\left\{\begin{array}{c}\frac{A_iQ_{ii}^2}{2}+\frac{B_iQ_{ii}^3}{3}+Q_{ii}A_i(R_i-Q_{ii})\\ +\frac{Q_{ii}B_i}{2}(R_i^2-Q_{ii}^2)\end{array}\right\}\right. \\
&+L_iQ_{ii}^2(\frac{A_i}{2}+\frac{Q_{ii}B_i}{6})+k_iQ_ie_i \\
&-C_{li}\left\{\left(Q_{ii}T_i-\frac{Q_{ii}^2}{2P_{ii}}\right)\left(A_iQ_{ii}+\frac{B_iQ_{ii}^2}{2}\right)\right. \\
&-\frac{1}{2}T_i\left(\frac{A_iQ_{ii}^2}{2}+\frac{B_iQ_{ii}^3}{3}\right)+\frac{1}{2}A_iT_iQ_{ii}^2\ln\left(\frac{R_i}{Q_{ii}}\right) \\
&+\frac{Q_{ii}^2}{2P_{ii}}\left(P_{ii}T_iB_i-A_i\right)\left(R_i-Q_{ii}\right)-\frac{Q_{ii}^2}{4P_{ii}}B_i(R_i^2-Q_{ii}^2) \\
&\left.+\frac{e_iQ_i^2}{2P_i}\right\}-\frac{1}{2}T_iC_{si}\left\{Q_{ii}\left(B_iQ_{ii}-2A_i\right)\left(R_i-Q_{ii}\right)\right. \\
&+\frac{1}{2}\left(A_i-2B_iQ_{ii}\right)\left(R_i^2-Q_{ii}^2\right)-\frac{B_i}{3}(R_i^3-Q_{ii}^3) \\
&\left.\left.+A_iQ_{ii}^2\ln\left(\frac{R_i}{Q_{ii}}\right)\right\}de_i-\left(s_c+C_{pi}\right)Q_i\right]
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

با قراردادن مقادیر $Q_{ii}=(1-e_i)Q_i$ و $P_{ii}=(1-e_i)P_i$ و محاسبه‌ی انتگرال، رابطه‌ی ۲۳ برقرار است:

$$
\begin{aligned}
&EAP(Q_1,Q_2,...,Q_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{T_i}\left[s_i(b_i-\frac{b_i^2}{2})(A_iR_i+\frac{1}{2}B_iR_i^2)\ Q_i\right. \\
&+(L_i-s_i)\left\{\frac{A_iQ_i^2}{6}(1-(1-b_i)^3)+\frac{B_iQ_i^3}{24}\ (1-(1-b_i)^4)\right\} \\
&+\frac{1}{2}k_iQ_ib_i^2-C_{li}\left\{\frac{1}{3}\ (1-(1-b_i)^3)(\frac{3}{4}A_iT_iQ_i^2\right. \\
&+\frac{1}{2}A_iT_iQ_i^2\ln\frac{R_i}{Q_i}+\frac{1}{2}T_iQ_i^2B_iR_i) \\
&-\frac{1}{24}(1-(1-b_i)^4)T_iQ_i^3B_i-\frac{1}{18}A_iT_iQ_i^2 \\
&(1-b_i)^3\left\{1-3\ln(1-b_i)\right\}-\left\{1-(1-b_i)^2\right\}(\frac{A_iR_iQ_i^2}{4P_i} \\
&\left.+\frac{Q_i^2B_iR_i^2}{8P_i})+\frac{b_i^2Q_i^2}{4P_i}\right\}-\frac{1}{2}T_iC_{si}\left\{\frac{1}{3}\ (1-(1-b_i)^3)(Q_i^2B_iR_i\right. \\
&+\frac{5}{2}A_iQ_i^2+A_iQ_i^2\ln\frac{R_i}{Q_i})-\frac{1}{2}\left\{1-(1-b_i)^2\right\}(2A_iR_iQ_i^2 \\
&+Q_iB_iR_i^2)-\frac{1}{6}\left\{1-(1-b_i)^4\right\}Q_i^3B_i+\frac{1}{2}A_iR_i^2b_i \\
&\left.+\frac{1}{3}B_iR_i^3b_i-\frac{A_iQ_i^2}{9}(1-b_i)^3(1-3\ln(1-b_i))\right\} \\
&\left.-\frac{(s_c+C_{pi})Q_i}{d_i}\right]
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

لازم به ذکر است مقدار Q_{si} برابر عبارت آخر رابطه‌ی ۱۵ بوده و حل انتگرال آن برابر رابطه‌ی ۲۴ است:

$$Q_{si} = \frac{1}{2}T_i \left\{ \frac{1}{3} \left\{ 1-(1-b_i)^3 \right\} (Q_i^2 B_i R_i + \frac{5}{2} A_i Q_i^2 + A_i Q_i^2 \ln \frac{R_i}{Q_i}) - \frac{1}{2} \left\{ 1-(1-b_i)^2 \right\} (2A_i R_i Q_i + B_i Q_i R_i^2) - \frac{1}{6} \left\{ 1-(1-b_i)^4 \right\} Q_i^3 B_i + \frac{1}{2} A_i R_i^2 b_i + \frac{1}{3} B_i R_i^3 b_i - \frac{A_i Q_i^2}{9} (1-b_i)^3 \ (1 - 3\ln(1-b_i)) \right\} \quad (۲۴)$$

بنابراین مدل ارائه شده به‌صورت روابط ۱۶ تا ۲۰ است که در آن تابع هدف مطابق رابطه‌ی ۲۳ محاسبه می‌شود.

۴. بررسی حالت‌های مختلف محدودیت‌ها

در این بخش محدودیت قطعی ظرفیت تولید و محدودیت‌های فازی و احتمالی هزینه‌ی کمبود و بودجه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۴. محدودیت قطعی

بسیاری از شرایط دنیای واقعی ایجاب می‌کند که محدودیت ظرفیت تولید را به‌صورت قطعی در نظر بگیریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i \le CAP \quad (۲۵)$$

۲.۴. محدودیت‌های احتمالی

الف) زمانی که محدودیت روی کل هزینه‌ی تولید و هزینه‌ی بازبینی احتمالی باشد، می‌توان آن را طبق رابطه‌ی ۲۶ نمایش داد:

$$prob \left[\sum_{i=1}^{n} (C_{pi} + s_c) Q_i \le B \right] \ge r_1, \quad 0 < r_1 < 1 \quad (۲۶)$$

ب) زمانی که محدودیت روی میزان مواجهه با هزینه‌ی کمبود احتمالی باشد، می‌توان آن را به‌صورت رابطه‌ی ۲۷ ارائه کرد:

$$prob \left[\sum_{i=1}^{n} C_{si} Q_{si} \le S_M \right] \ge r_2, \quad 0 < r_2 < 1 \quad (۲۷)$$

۳.۴. محدودیت‌های فازی (امکان/الزام)

در صورتی که $\tilde{C}_{pi}$، $\tilde{C}_{si}$، $\tilde{B}$ و $\tilde{S}_M$ به طور ذاتی مبهم باشند، محدودیت‌های بودجه و هزینه‌ی کمبود مطابق روابط ۲۸ و ۲۹ قابل ارائه خواهد بود:

$$\text{(الف)} \quad \sum_{i=1}^{n} (\tilde{C}_{pi} + s_c) Q_i \le \tilde{B} \quad (۲۸)$$

$$\text{(ب)} \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_{si} Q_{si} \le \tilde{S}_M \quad (۲۹)$$

اینجا نوار موجی $\sim$ نشانه‌ی فازی بودن پارامترهاست.

۵. روش برنامه‌ریزی محدودیت احتمالی

به‌طورکلی یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی غیر خطی احتمالی با محدودیت‌های شانسی خطی مطابق روابط ۳۰ تا ۳۲ قابل ارائه است:

$$\text{Max} \ \ Z(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (۳۰)$$

s.t.

$$prob \left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k \right] \ge r_k, \quad (۳۱)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad r_k \in (0, 1), \quad k = 1, 2, ..., m \quad (۳۲)$$

که در آن a_{kj}، b_k متغیرهای تصادفی نرمال و r_k احتمالات مشخص‌اند. برای سهولت، فرض می‌شود که متغیرهای تصمیم x_j قطعی‌اند. در اینجا این حالت در نظر گرفته می‌شود که فقط b_kها متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین و واریانس معلوم باشند. $E(b_k)$ و $Var(b_k)$ میانگین و واریانس متغیر تصادفی نرمال b_k را مشخص می‌کنند:

$$prob \left[\frac{b_k - E(b_k)}{\sqrt{Var(b_k)}} \ge \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - E(b_k)}{\sqrt{Var(b_k)}} \right] \ge r_k, \quad k = 1, 2, ..., m \quad (۳۳)$$

که در آن $\frac{b_k - E(b_k)}{\sqrt{Var(b_k)}}$ متغیر نرمال استاندارد است. با در نظر گرفتن $\varphi(r_k)$، که $\int_{\varphi(r_k)}^{\infty} \varphi(t) dt = r_k$، $\varphi(t)$ تابع چگالی نرمال استاندارد، داریم:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - E(b_k)}{\sqrt{Var(b_k)}} \le \varphi(r_k)$$

می‌توان رابطه‌ی ۳۳ را چنین نوشت:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le E(b_k) + \sqrt{Var(b_k)} \varphi(r_k) \quad (۳۴)$$

بنابراین مسئله‌ی برنامه‌نویسی غیر خطی احتمالی که در معادلات ۳۰ تا ۳۴ بیان شد معادل مسئله‌ی برنامه‌ریزی غیر خطی معین با تابع هدف ۳۰ و محدودیت‌های ۳۲ و ۳۴ خواهد بود.

۶. روش برنامه‌ریزی امکان/الزام

۱.۶. امکان/الزام در محیط فازی

به طورکلی هر زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{a}$ از $\Re$ ($\Re$ نماینده‌ی مجموعه‌یی از اعداد حقیقی است) با تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}}(x) : \Re \rightarrow [0, 1]$ یک عدد فازی نامیده می‌شود. فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ را دو مقدار فازی با تابع عضویت به‌ترتیب $\mu_{\tilde{a}}(x)$ و $\mu_{\tilde{b}}(y)$ قرار دهیم، در این صورت براساس مطالعات محققین[15,27] روابط ۳۵ و ۳۶ برقرار

خواهد بود:

$$Pos(\tilde a * \tilde b) = \sup \begin{Bmatrix} \min(\mu_{\tilde a}(x), \mu_{\tilde b}(y)), \\ x, y \in \Re, x * y \end{Bmatrix} \tag{۳۵}$$

$$Nes(\tilde a * \tilde b) = \inf \begin{Bmatrix} \max(1 - \mu_{\tilde a}(x), \mu_{\tilde b}(y)), \\ x, y \in \Re, x * y \end{Bmatrix} \tag{۳۶}$$

که در آن Pos مخفف امکان، Nes مخفف الزام و $*$ هریک از روابط $>$، $<$، $=$، $\leq$ و $\geq$ است. رابطهی دوگانهی امکان و الزام مستلزم برقراری رابطهی ۳۷ است:

$$Nes(\tilde a * \tilde b) = 1 - Pos(\overline{\tilde a * \tilde b}) \tag{۳۷}$$

مفهوم $Nes(\tilde a * \tilde b) = 1 - Pos(\overline{\tilde a * \tilde b})$ را میتوان با این مثال توضیح داد:

$$Nes(\tilde a \leq \tilde b) = 1 - Pos(\tilde a > \tilde b)$$

همچنین مقادیر الزام در شرط ۳۸ صدق میکند:

$$\mathrm{Min}(Nes(\tilde a * \tilde b),\ Nes(\overline{(a * b)})) = 0 \tag{۳۸}$$

رابطهی بین مقادیر امکان و الزام براساس تحقیقات انجام شده[۱۴] در شرایط ۳۹ صدق میکند:

$$\begin{aligned} &Pos(\tilde a * \tilde b) \geq Nes(\tilde a * \tilde b)\,,\quad Nes(\tilde a * \tilde b > 0) \\ &\Rightarrow\ Pos(\tilde a * \tilde b) = 1 \\ &Pos(\tilde a * \tilde b) < 1\ \Rightarrow\ Nes(\tilde a * \tilde b) = 0 \end{aligned} \tag{۳۹}$$

۲.۶. عدد فازی مثلثی

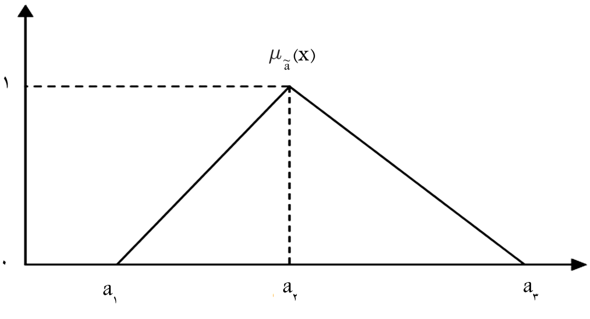
عدد فازی مثلثی ($\tilde a$) شکل ۱ یک عدد فازی با تابع عضویت $\mu_{\tilde a}(x)$، یک نگاشت پیوسته: $\mu_{\tilde a}(x) : R \to [0, 1]$ است که مطابق رابطهی ۴۰ تعریف میشود:

$$\mu_{\tilde a}(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < a_1, \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq x < a_2, \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 \leq x < a_3, \\ 0 & a_3 < x < \infty \end{cases} \tag{۴۰}$$

۱.۲.۶. η ـ برش عدد فازی

یک η ـ برش عدد فازی $\tilde a$ بهصورت یک مجموعهی قطعی مطابق رابطهی ۴۱ تعریف میشود:

$$a_\eta = \{x : \mu_{\tilde a}(x) \geq \eta,\ x \in R\}\,,\qquad \eta \in [0, 1] \tag{۴۱}$$



شکل ۱. تابع عضویت عدد فازی $\tilde{a}$.

۳.۶. محدودیتهای فازی (مبهم)

محدودیت $\tilde b \geq \tilde a$ را در نظر بگیرید. این محدودیت را میتوان در مفاهیم الزام و امکان بهصورت $Nes(\tilde a \geq \tilde b)$ و $Pos(\tilde a \geq \tilde b)$ نمایش داد. $Nes(\tilde a \geq \tilde b)$ و ($Pos(\tilde a \geq \tilde b)$) برآورد میکنند که پیشامد $\tilde b \geq \tilde a$ با حداقل (حداکثر) شانس حداقل η رخ خواهد داد. بنابراین محدودیت یادشده بهصورت $Nes(\tilde a \geq \tilde b) > \eta$ ($Pos(\tilde a \geq \tilde b) > \eta$) نمایش داده میشود.

دو عدد فازی مثلثی $\tilde a = (a_1, a_2, a_3)$ و $\tilde b = (b_1, b_2, b_3)$ را در نظر میگیریم. برای این اعداد فازی براساس تحقیقات انجام شده[۲۸,۲۹] لم ۱. و ۲. استنتاج میشوند:

لم ۱. رابطهی $Nes(\tilde a > \tilde b) > \eta$ برقرار است اگر و فقط اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\zeta_1 = \frac{b_3 - a_1}{a_2 - a_1 + b_3 - b_2} < 1 - \eta, \qquad (a_2 > b_2,\ b_3 > a_1)$$

اثبات: داریم $Nes(\tilde a > \tilde b) > \eta$، براساس شکل ۲ واضح است که رابطهی ۴۲ برقرار است:

$$Pos(\tilde a \leq \tilde b) = \begin{cases} 1 & a_2 \leq b_2 \\ \zeta_1 = \frac{b_3 - a_1}{a_2 - a_1 + b_3 - b_2} & a_2 > b_2,\ b_3 > a_1, \\ 0 & a_1 \geq b_3 \end{cases} \tag{۴۲}$$

بنابراین:

$$Nes(\tilde a > \tilde b) > \eta \Rightarrow (1 - Pos(\tilde a \leq \tilde b)) > \eta$$

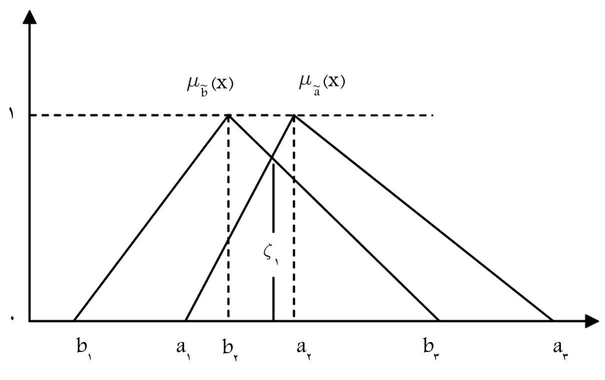
پس رابطه $Nes(\tilde a > \tilde b) > \eta$ برقرار است اگر و فقط اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\zeta_1 = \frac{b_3 - a_1}{a_2 - a_1 + b_3 - b_2} < 1 - \eta, \qquad (a_2 > b_2,\ b_3 > a_1)$$

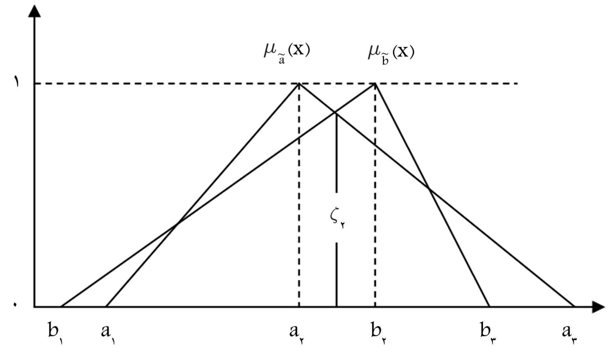
لم ۲. رابطهی $Pos(\tilde a \geq \tilde b) > \eta$ برقرار است اگر و فقط اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\zeta_2 = \frac{a_3 - b_1}{b_2 - b_1 + a_3 - a_2} > \eta, \qquad (a_2 < b_2,\ a_3 > b_1)$$

اثبات: $Pos(\tilde a \geq \tilde b) > \eta$ را در نظر بگیرید. براساس شکل ۳ واضح است که



شکل ۲. دو عدد فازی $\tilde{a}$، $\tilde{b}$ و $Pos(\tilde a \leq \tilde b)$.



شکل ۳. دو عدد فازی $\tilde{a}$، $\tilde{b}$ و $Pos(\tilde{a} \geq \tilde{b})$.

رابطه‌ی ۴۳ برقرار است:

$$Pos(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \begin{cases} 1 & a_2 \geq b_2 \\ \zeta_2 = \frac{a_3 - b_1}{b_2 - b_1 + a_3 - a_2} & a_2 < b_2,\ a_3 > b_1, \\ 0 & a_3 \geq b_1 \end{cases} \quad (43)$$

بنابراین رابطه‌ی $Pos(\tilde{a} \geq \tilde{b}) > \eta$ برقرار است اگر و فقط اگر نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\zeta_2 = \frac{a_3 - b_1}{b_2 - b_1 + a_3 - a_2} > \eta, \qquad (a_2 < b_2,\ a_3 > b_1)$$

۴.۶. اجرای محدودیت غیر قطعی منابع

عموماً محدودیت غیر قطعی منابع به دو شکل احتمالی و فازی مطرح می‌شود. درصورت وجود تجارب قبلی، محدودیت منابع را می‌توان به‌صورت محدودیت شانسی[13] فرموله کرد و سپس با مفهوم احتمالی پیاده‌سازی کرد.

در صورت عدم وجود داده‌های گذشته (به‌طور مثال جدید بودن محصول) محدودیت‌ها به‌صورت فازی در نظرگرفته می‌شود. از طرف دیگر، محدودیت فازی را می‌توان با مقادیر امکان و الزام به‌ترتیب در مفاهیم خوش‌بینانه و بدبینانه مطرح کرد و محدودیت فازی منابع را به‌صورت $Nes(\tilde{a} > \tilde{b}) > \eta$ $(Pos(\tilde{a} \geq \tilde{b}) > \eta)$ نشان داد. با فرض $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3)$ برای $Pos(\tilde{a} \geq \tilde{b})$، مقدار $\tilde{a}$، $\tilde{b}$ در مفهوم خوش‌بینانه معادل $[[a_2, a_3], [b_1, b_2]]$ و با همان پیش‌فرض برای $Nes(\tilde{a} \geq \tilde{b})$ این مقدار معادل $[[a_1, a_2], [b_2, b_3]]$ (در مفهوم بدبینانه) خواهد بود.

۷. ارائه‌ی مدل‌های مختلف

در این بخش برای ارائه‌ی مدل‌های مختلف باید حالت‌های مختلفی برای محدودیت‌ها در نظر بگیریم:

الف) محدودیت ظرفیت تولید، قطعی و دو محدودیت دیگر احتمالی باشد؛

ب) محدودیت ظرفیت تولید قطعی و یکی از محدودیت‌های بودجه یا هزینه‌ی کمبود، احتمالی و دیگری فازی باشد؛

ج) محدودیت ظرفیت تولید قطعی و دو محدودیت دیگر فازی باشد.

با توجه به توضیحات داده شده و این که برای محدودیت‌های فازی دو حالت الزام و امکان در نظرگرفته می‌شود، ۹ مدل مختلف ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که محدودیت‌های احتمالی و فازی براساس روش برنامه‌ریزی محدودیت احتمالی و روش برنامه‌ریزی امکان/الزام به محدودیت‌های معین تبدیل شده‌است.

۱.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی و محدودیت‌های بودجه و هزینه‌ی کمبود احتمالی است

در این حالت مسئله‌ی ما به‌صورت تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۲۶، ۲۷ و ۴۴ است:

$$Q_i \geq 0, \qquad 0 < r_1 < 1, \qquad 0 < r_2 < 1 \qquad (44)$$

پس طبق روابط ۳۰، ۳۲ و ۳۴ مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق به‌صورت روابط تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۴۵، ۴۶، ۴۷ بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} (C_{pi} + s_c)Q_i - E(B) - \sqrt{Var(B)}\varphi(r_1) \leq 0 \qquad (45)$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{si}Q_{si} - E(S_M) - \sqrt{Var(S_M)}\varphi(r_2) \leq 0, \qquad (46)$$

$$Q_i \geq 0,\ Q_{si} \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., n, \qquad 0 < r_1 < 1, \qquad 0 < r_2 < 1 \qquad (47)$$

۲.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، یکی از محدودیت‌های بودجه یا هزینه‌ی کمبود احتمالی و دیگری فازی است

در این صورت با توجه به توضیحات قبل چهار زیرحالت خواهیم داشت:

مدل ۱.۲.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه احتمالی و محدودیت هزینه‌ی کمبود از نوع الزام است.

در این حالت صورت مدل مسئله مطابق تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۲۶ و ۴۸ قابل ارائه است:

$$Nes\left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_{si}Q_{si} \leq \tilde{S}_M\right] > \eta_2 \qquad (48)$$

معین‌سازی محدودیت $Nes\left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_{si}Q_{si} \leq \tilde{S}_M\right] > \eta_2$ با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی امکان/الزام و روابط ۳۸ و ۴۳ صورت گرفته است. برای سایر محدودیت‌های الزام نیز به همین شیوه عمل شده است.

معادل قطعی مسئله را مطابق تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۴۵، ۴۹ و ۵۰ می‌توان ارائه کرد:

$$\sum_{i=1}^{n} \{\eta_2 c_{si3} + (1 - \eta_2)c_{si2}\}Q_{si} < \eta_2 S_{M1} + (1 - \eta_2)S_{M2} \qquad (49)$$

$$Q_i > 0, \qquad i = 1, 2, ..., n, \qquad 0 < r_1 < 1, \qquad 0 < \eta_2 < 1 \qquad (50)$$

مدل ۲.۲.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه احتمالی و هزینه‌ی کمبود از نوع امکان است. در این حالت مسئله مطابق تابع هدف ۱۶ و

محدودیت‌های ۱۹، ۲۶ و ۵۱ قابل ارائه است:

$$Pos\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{si}Q_{si} \le \tilde{S}_M\right] > \eta_2 \qquad (51)$$

معین‌سازی محدودیت $Pos(\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{si}Q_{si} \le \tilde{S}_M) > \eta_2$ با استفاده از روش برنامه‌ریزی امکان/الزام و رابطه‌ی ۴۲ صورت گرفته است. برای سایر محدودیت‌های امکان نیز به‌همین شیوه عمل شده است.

معادل قطعی مسئله را مطابق تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۴۵، ۵۰ و ۵۲ می‌توان ارائه کرد:

$$\sum_{i=1}^{n}\{\eta_2 c_{si2} + (1-\eta_2)c_{si1}\}Q_{si} < \eta_2 S_{M2} + (1-\eta_2)S_{M3} \qquad (52)$$

مدل ۳.۲.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه از نوع الزام و محدودیت هزینه‌ی کمبود احتمالی باشد که معادل تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۴۶، ۵۳ و ۵۴ است:

$$\sum_{i=1}^{n}\{\eta_1(C_{pi2}+s_c)+(1-\eta_1)(C_{pi2}+s_c)\}Q_i < \eta_1 B_1 + (1-\eta_1)B_2 \qquad (53)$$

$$Q_i > 0, \quad i=1,2,...,n, \quad 0<\eta_1<1, \quad 0<r_2<1 \qquad (54)$$

مدل ۴.۲.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه از نوع امکان و محدودیت هزینه‌ی کمبود احتمالی باشد که معادل تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۴۶، ۵۴ و ۵۵ است:

$$\sum_{i=1}^{n}\{\eta_1(C_{pi2}+s_c)+(1-\eta_1)(C_{pi1}+s_c)\}Q_i < \eta_1 B_2 + (1-\eta_1)B_3 \qquad (55)$$

۳.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی و محدودیت‌های بودجه و هزینه‌ی کمبود فازی هستند

مدل ۱.۳.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه از نوع الزام و محدودیت هزینه‌ی کمبود از نوع الزام است که معادل تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۴۹، ۵۳ و ۵۶ است:

$$Q_i > 0, \quad i=1,2,...,n, \quad 0<\eta_1<1, \quad 0<\eta_2<1 \qquad (56)$$

مدل ۲.۳.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه از نوع الزام و محدودیت هزینه‌ی کمبود از نوع امکان است که معادل تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۵۲، ۵۳ و ۵۶ است.

مدل ۳.۳.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه از نوع امکان و محدودیت هزینه‌ی کمبود از نوع الزام است که معادل تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۴۹، ۳۳ و ۵۶ است.

مدل ۴.۳.۷. محدودیت ظرفیت تولید قطعی، محدودیت بودجه از نوع امکان و محدودیت هزینه‌ی کمبود از نوع امکان است که معادل تابع هدف ۱۶ و محدودیت‌های ۱۹، ۵۲، ۵۵ و ۵۶ است.

۸. حل مسائل به‌کمک مثال‌های عددی

۱.۸. مثال عددی

به‌منظور حل مسائل پیش‌گفته با مثال‌های عددی مختلف، پارامترهای ورودی مشترک که در مدل‌های فوق مورد استفاده قرار گرفته‌اند، در جدول ۱ ارائه شده‌اند. همچنین مقدار $CAP = 1000$ برای کل محصولات در نظر گرفته می‌شود.

سایر داده‌ها برای مدل‌های ۱.۷.، ۱.۲.۷.، ۲.۲.۷.، ۳.۲.۷. و ۴.۲.۷. عبارت است از:

مدل ۱.۷.:

$$C_{p1}=2, \quad C_{p2}=3, \quad E(B)=510, \quad \sigma(B)=10,$$
$$\varphi(r_1)=-1/645, \quad C_{s1}=3/7, \quad C_{s2}=5/3,$$
$$E(S_M)=45, \quad \sigma(S_M)=3, \quad \varphi(r_2)=-1/645$$

مدل ۱.۲.۷.:

$$C_{p1}=2, \quad C_{p2}=3, \quad E(B)=510,$$
$$\tilde{C}_{s1}=(3/5, 3/7, 3/9), \quad \varphi(r_1)=-1/645,$$
$$\tilde{C}_{s2}=(4/9, 5/3, 5/5), \quad \tilde{S}_M=(37, 40, 43),$$
$$\eta_2=0/05, \quad \sigma(B)=10$$

مدل ۲.۲.۷.:

$$C_{p1}=2, \quad C_{p2}=3, \quad E(B)=510, \quad \sigma(B)=10,$$
$$\tilde{C}_{s1}=(3/5, 3/7, 3/9), \quad \tilde{C}_{s2}=(4/9, 5/3, 5/5),$$
$$\tilde{S}_M=(37, 40, 43), \quad \eta_2=0/95, \quad \varphi(r_1)=-1/645,$$

جدول ۱. پارامترهای ورودی‌های مشترک بین مدل‌ها.

محصول	۱	۲
A_i	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳
C_{li}	۰/۴۵	۰/۵۵
L_i	۱۲	۱۳
s_i	۱۷/۵	۱۸/۵
P_i	۴۵	۵۰
T_i	۶	۷
R_i	۸۰۰	۹۰۰
k_i	۵	۵/۵
d_i	۲۵	۲۰
b_i	۰/۰۵	۰/۰۴
S_c	۰/۲۵	۰/۲۵
α_i	۶/۴	۵/۳

جدول ۲. پارامترهای متفاوت در مدل‌ها.

مدل	$\eta_{۱}$	$\eta_{۲}$
۷.۳.۱.	۰٫۰۵	۰٫۰۵
۷.۳.۲.	۰٫۰۵	۰٫۹۵
۷.۳.۳.	۰٫۹۵	۰٫۰۵
۷.۳.۴.	۰٫۹۵	۰٫۰۵

مدل ۷.۲.۳.:

$$\tilde{C}_{p۱} = (۱٫۸, ۲٫۰, ۲٫۳), \quad \tilde{C}_{p۲} = (۲٫۳, ۳٫۰, ۳٫۵),$$
$$\tilde{B} = (۵۰۰, ۵۱۰, ۵۲۰), \quad \eta_{۱} = ۰٫۰۵, \quad C_{s۱} = ۳٫۷, \quad C_{s۲} = ۵٫۳,$$
$$E(S_M) = ۴۰, \quad \sigma(S_M) = ۳, \quad \varphi(r_{۲}) = -۱٫۶۴۵$$

مدل ۷.۲.۴.:

$$\tilde{C}_{p۱} = (۱٫۸, ۲٫۰, ۲٫۳), \quad \tilde{C}_{p۲} = (۲٫۳, ۳٫۰, ۳٫۵),$$
$$\tilde{B} = (۵۰۰, ۵۱۰, ۵۲۰), \quad \eta_{۱} = ۰٫۹۵, \quad C_{s۱} = ۳٫۷, \quad C_{s۲} = ۵٫۳,$$
$$E(S_M) = ۴۰, \quad \sigma(S_M) = ۳, \quad \varphi(r_{۲}) = -۱٫۶۴۵$$

پارامترهای زیر در مدل‌های ۷.۳.۱.، ۷.۳.۲.، ۷.۳.۳. و ۷.۳.۴. مشترک‌اند:

$$\tilde{C}_{p۱} = (۱٫۸, ۲٫۰, ۲٫۳), \quad \tilde{C}_{p۲} = (۲٫۳, ۳٫۰, ۳٫۵),$$
$$\tilde{B} = (۵۰۰, ۵۱۰, ۵۲۰), \quad \tilde{C}_{s۱} = (۳٫۵, ۳٫۷, ۳٫۹),$$
$$\tilde{C}_{s۲} = (۴٫۹, ۵٫۳, ۵٫۵), \quad \tilde{S}_M = (۳۳, ۳۶, ۳۹)$$

و سایر پارامترهای که در مدل‌های ۷.۳.۱.، ۷.۳.۲.، ۷.۳.۳. و ۷.۳.۴. متفاوت در این بخش در جدول ۲ ثبت شده است.

۸.۲. نتایج حل مسائل یادشده

براساس داده‌های مربوطه، مسائل مورد نظر با استفاده از الگوریتم SQP در نرم‌افزار متلب حل، و جواب‌های به دست آمده در جدول ۳ نشان داده شده است. با توجه به نتایج حاصله مثال‌های عددی خروجی منطقی دارند.

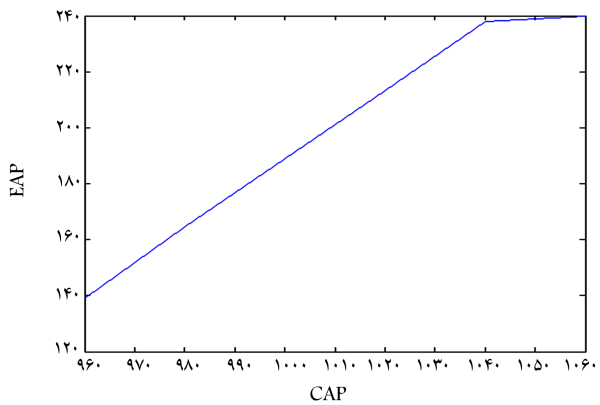
۹. تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت سود نسبت به پارامترهای مختلف انجام و نشان داده شد که در رابطه با کلیه‌ی مدل‌ها اثر یکسان بر سود دارد. در هر قسمت به عنوان نمونه‌ی تحلیل حساسیت یک مدل قالب نمودار نشان داده شده است.

تحلیل حساسیت برای بیشینه‌سازی تابع هدف نسبت به بیشترین ظرفیت تولید انجام شده است. تغییر در پارامتر یاد شده، در تمامی مدل‌ها اثر یکسان روی سود دارد. به‌عنوان نمونه، در مدل ۷.۳.۲. تغییرات تابع هدف EAP (سود) نسبت به تغییرات در CAP (ظرفیت تولید) در شکل ۴ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود در مدل ۷.۳.۲. با افزایش CAP تابع هدف افزایش می‌یابد که این افزایش تا حدود مقدار $CAP = ۱۴۰$ با شیب تندتری صورت می‌گیرد.

جدول ۳. نتایج حاصل از حل مثال‌های عددی برای مدل‌های نه‌گانه.

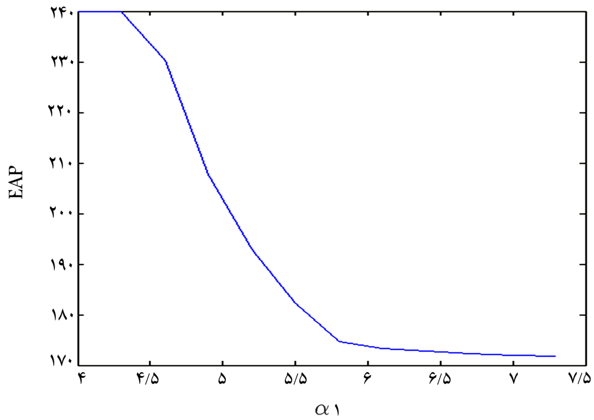
شماره مدل	محصول	Q_i	EAP
۷.۱.	۱	۴۲٫۳۴۷	۱۹۴٫۲۸۵
	۲	۱۲۱٫۱۸۱	
۷.۲.۱.	۱	۴۷٫۹۳۴	۱۹۳٫۹۲۱
	۲	۱۱۸٫۴۰۴	
۷.۲.۲.	۱	۴۲٫۸۲	۱۹۴٫۵۱۱
	۲	۱۲۰٫۷۹	
۷.۲.۳.	۱	۳۰٫۵۰۵	۱۸۸٫۹۴۱
	۲	۱۳۰٫۹۸۸	
۷.۲.۴.	۱	۳۰٫۵۰۵	۱۸۸٫۹۴۱
	۲	۱۳۰٫۹۸۸	
۷.۳.۱.	۱	۳۲٫۱۰۲	۱۸۹٫۶۳۶
	۲	۱۲۹٫۶۶۵	
۷.۳.۲.	۱	۳۳٫۲۶۳	۱۹۰٫۱۴۴
	۲	۱۲۸٫۷۰۴	
۷.۳.۳.	۱	۳۲٫۱۰۲	۱۸۹٫۶۳۶
	۲	۱۲۹٫۶۶۵	
۷.۳.۴.	۱	۳۳٫۲۶۳	۱۹۰٫۱۴۴
	۲	۱۲۸٫۷۰۴	



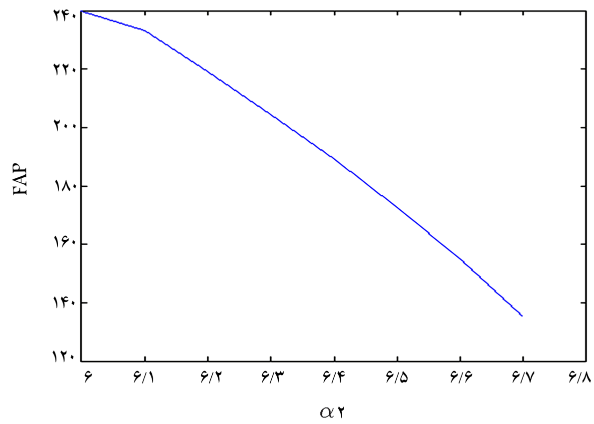
شکل ۴. نمودار تغییر سود برحسب تغییر حداکثر ظرفیت تولید.

تحلیل حساسیت سود نسبت به $\alpha_{۱}$ (مقدار زمان لازم برای تولید هر واحد محصول ۱) انجام شده است. تغییر در پارامتر ذکرشده، در تمامی مدل‌ها اثر یکسان بر سود دارد. در شکل ۵ تغییرات سود نسبت به $\alpha_{۱}$ در مدل ۷.۳.۲. نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با ثابت بودن $\alpha_{۲}$ و افزایش $\alpha_{۱}$، سود کاهش می‌یابد.

تحلیل حساسیت سود نسبت به $\alpha_{۲}$ (مقدار زمان لازم برای تولید هر واحد محصول ۲) انجام شده است. تغییر در پارامتر یادشده، در تمامی مدل‌ها اثر یکسان بر



شکل ۵. نمودار تغییر سود بر حسب تغییر α_1.



شکل ۶. نمودار تغییر سود برحسب تغییر α_2.

سود دارد. تغییرات سود در مدل ۳.۲.۷. نسبت به α_2 در شکل ۶ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با ثابت بودن α_1 و افزایش α_2، EAP کاهش می‌یابد. بنابراین زمانی که α_2 افزایش و α_1 ثابت بماند، کاهش در سود بسیار بیشتر از حالتی است که α_2 ثابت و α_1 افزایش یابد.

نتایج تحلیل‌های حساسیت مطابق با انتظارات بوده و حاکی از صحت نحوه‌ی مدل‌سازی برای این مسئله است.

۱۰. نتیجه‌گیری و پیشنهادهای آتی

در این مقاله، مدل مقدار تولید اقتصادی برای اقلام معیوب توسعه داده شده است که در آن نرخ تولید محدود فرض می‌شود. تقاضا پیوسته و احتمالی است و مدل تحت محدودیت‌های ظرفیت تولید، بودجه و هزینه‌ی کمبود در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، درصد معیوب (ناقص) بودن احتمالی، محدودیت ظرفیت تولید قطعی و محدودیت بودجه و هزینه‌ی کمبود احتمالی و فازی فرض شده‌اند. با توجه به قطعیت محدودیت ظرفیت تولید، سه حالت برای محدودیت‌های بودجه و هزینه‌ی کمبود، در نظر گرفته می‌شود: ۱. هر دو محدودیت بودجه و هزینه‌ی کمبود احتمالی باشند. ۲. یکی از محدودیت‌های بودجه و هزینه‌ی کمبود، احتمالی و دیگری غیر قطعی (فازی) باشد. ۳. هر دو محدودیت بودجه و هزینه‌ی کمبود غیر قطعی (فازی) باشند. همچنین با توجه به این که در حالت فازی دو مفهوم الزام (بدبینانه) و امکان (خوش‌بینانه) مطرح شده است، در نهایت به بررسی ۹ مدل مختلف پرداخته شده است. در مسئله‌ی برنامه‌ریزی غیر خطی در حالت‌های احتمالی و فازی (امکان/الزام)، مسئله با استفاده از تکنیک‌های برنامه‌ریزی محدودیت احتمالی و الزام/امکان به مسئله‌یی معین تبدیل شده است. همچنین مدل‌های ۹ گانه در قالب مثال عددی نشان داده شده است. مسائل معین شده به‌وسیله‌ی نرم‌افزار متلب و شیوه‌ی حل SQP بهینه‌سازی شده، تحلیل حساسیت روی تابع سود نسبت به پارامترهای CAP، α_1 و α_2 صورت گرفته و مشاهده شده است که افزایش CAP به افزایش سود، و فزایش α_1 و α_2 به کاهش سود منجر می‌شود.

در نوشتار حاضر، تابع چگالی تقاضا به‌صورت خطی (که حالت عمومی توزیع یکنواخت است) در نظر گرفته شده است. به‌منظور تحقیقات آتی با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف تابع چگالی نیز می‌توان مدل را فرموله و حل کرد. همچنین می‌توان مدل را برای اقلام فاسدشدنی فرموله و نسبت به تحلیل حساسیت آن اقدام کرد.

پانوشت‌ها

1. sequential quadratic programming
2. economic order quantity
3. necessity
4. possibility

منابع (References)

1. Goyal, S.K. and Cardenas-Barron, L.E. "Note on economic production quantity model for items with imperfect quality a practical approach", *International Journal of Production Economics*, **77**, pp. 85-87 (2002).
2. Ben-Daya, M. "The economic production lot-sizing problem with imperfect production process and imperfect maintenance", *International Journal of Production Economics,* **76**, pp. 257-264 (2002).
3. Goyal, S.K., Huang, C.K. and Chang, K.C. "A simple integrated production policy of an imperfect item for vendor and buyer", *Production Planning and Control,* **14**, pp. 596-602, (2003).
4. Salama, M.K. and Jaber, M.Y. "Economic production quantity model for items with imperfect quality", *International Journal of Production Economics*, **26**, pp. 59-6 (2000).
5. Wang, D., Qin, Z. and Kar, S. "A novel single-period inventory problem with uncertain random demand and

its application", *Applied Mathematics and Computation*, **269**, pp. 133-145 (2015).

6. Zhou, Y.-W., Wen, Z.-L. and Wu, X. "A single-period inventory and payment model with partial trade credit", *Computers and Industrial Engineering*, **90**, pp. 132-145 (2015).
7. Park, K. and Lee, K. "Distribution-robust single-period inventory control problem with multiple unreliable suppliers", *OR Spectrum,* **38**, pp. 949-966 (2016).
8. Chang, S.C. "Fuzzy production inventory for fuzzy product quantity with triangular fuzzy number", *Fuzzy Sets and Systems,* **107**, pp. 37-57 (1999).
9. Chen, S.H. and Hsieh, C.H. "Optimization of fuzzy production inventory model under fuzzy parameters", *Proceedings of the Fifth Joint Conference on Information Science (JCIS'2000)*, **1**, pp. 1098-1101 (2000).
10. Hsieh, C.H. "Optimization of fuzzy production inventory models", *Information Sciences*, **146**, pp. 29-40 (2000).
11. Lee, M. and Yao, J.S. "Economic production quantity for fuzzy demand quantity and fuzzy production quantity", *European Journal of Operational Research*, **157**, pp. 357-37 (2004).
12. Tsourveloudis, N.C.. Dretoulakis, E. and Ioannidis, S. "Fuzzy work-in-process inventory control of unreliable manufacturing systems", *Information Sciences,* **127**, pp. 69-83 (2000).
13. Charnes, A. and Cooper, W. "Chance constrained programming", *Management Science*, **6**, pp. 73-79 (1959).
14. Dubois, D. and Prade, H. "Systems of linear fuzzy constraints", *Fuzzy Sets and Systems*, **3**(1), pp. 37-48 (January 1980).
15. Dubois, D. and Prade, H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York (1980).
16. Wang, J.T. and Hwang, W.L. "A fuzzy set approach for R&D portfolio selection using a real options valuation model", *Omega-International Journal of Management Science*, **35**, pp. 247-257 (2007).
17. Dey, O. and Chakraborty, D. "Fuzzy periodic review system with fuzzy random vari-able demand", *European Journal of Operational Research*, **198**, pp. 113-120, (2009).
18. Karimi, M., Niknamfar, A.H. and Pasandideh, S.H.R. "Two-stage single period inventory management for a manufacturing vendor under green-supplier supply chain", *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, **8**(4), 704-718 (2017).
19. Jana, D.K., Das, B. and Maiti, M. "Multi-item partial backlogging inventory models over random planning horizon in random fuzzy environment", *Applied Soft Computing*, **21**, pp. 12-27 (2014).
20. Chou, S. and Chen, C.-W. "Supply chain coordination: an inventory model for single period utility product under fuzzy demand", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **88**, pp. 585-594 (2016).
21. Maity, K. and Maiti, M. "Possibility and necessity constraints and their defuzzification — A multi-item production-inventory scenario via optimal control theory", *European Journal of Operational Research*, **177**, pp. 882-896 (2007).
22. Panda, D., Kar, S., Maity, K. and Maiti, M. "A single period inventory model with imperfect production and stochastic demand under chance and imprecise constraints", *European Journal of Operational Research*, **188**, pp. 121-139 (2008).
23. Jiménez, F., Sánchez, G. and Vasant, P. "A multi-objective evolutionary approach for fuzzy optimization in production planning", *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **25**, pp. 441-455 (2013).
24. Diaz-Madronero, M., Peidro, D. and Vasant, P. "Vendor selection problem by using an interactive fuzzy multi -objective approach with modified S-curve membership functions", *Computers and Mathematics with Applications*, **60**, pp. 1038-1048 (2010).
25. Dubois, D. and Prade, H., *Possibility Theory*, Academic Press, New York (1988).
26. Liu, B. and Iwamura, K.B. "A note on chance constrained programming with fuzzy coefficients", *Fuzzy Sets and Systems,* **100**, pp. 229-233 (1998).
27. Liu, B. and Iwamura, K.B. "Chance constraint programming with fuzzy parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, **94**, pp. 227-237 (1998).
28. Wang, J. and Shu, Y.F. "Fuzzy decision modelling for supply chain management", *Fuzzy Sets and Systems,* **150**, pp. 107-127 (2005).
29. Inuiguchi, M., Sakawa, M. and Kume, Y. "The usefulness of possibility programming in production planning problems", *International Journal of Production Economics,* **33**, pp. 45-52 (1994).