مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۴۰۰)
دوره‌ی ۱-۳۷، شماره‌ی ۲، ص. ۱۱-۲۲، (پژوهشی)

Original Article

برنامه‌ریزی تبلیغات رسانه‌یی چندمحصولی با در نظرگرفتن منحنی چرخه‌ی عمر، ماتریس BCG، رفتار رقبا و محدودیت بودجه با استفاده از برنامه‌ریزی پویای تقریبی

مجید خلیل‌زاده (کارشناس‌ارشد)
حسین نقابی * (استادیار)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

در دنیای رقابتی موجود، شرکت‌ها از انواع ابزارها و راهکارها برای تمایز محصولات خود با محصولات رقبا استفاده می‌کنند. این مقاله به بررسی برنامه‌ریزی رسانه‌های تبلیغاتی و بودجه‌بندی آن برای چند محصول می‌پردازد. جنبه‌های مهمی شامل مرحله‌ی چرخه‌ی عمر محصول، طبقه‌ی ماتریس BCG واکنش رقبا و محدودیت بودجه در مدل پیشنهادی با هدف به حداکثر رساندن سود در پایان افق زمانی در نظرگرفته شد. مسئله‌ی تعریف شده با رویکرد برنامه پویای تصادفی فرموله شده و از الگوریتم برنامه‌ریزی پویای تقریبی برای غلبه بر بزرگی ابعاد مسئله و عدم قطعیت قابل توجه موجود در مسئله استفاده شد. در ادامه یک مطالعه موردی با استفاده از تکرار ارزش تقریبی ارائه و حل شد و نتایج مورد بحث قرار گرفت. همچنین، بودجه کل در مقادیر متفاوت مورد بررسی قرارگرفت که نشان می‌داد با افزایش مقدار بودجه مقدار هدف با سرعت (رشد) کمتری افزایش پیدا می‌کند.

واژگان کلیدی: برنامه‌ریزی پویای تقریبی، برنامه‌ریزی رسانه‌یی، محدودیت منابع، فرایند تصمیم‌گیری مارکوف، تبلیغات.

majid.khalilzadeh@mail.um.ac.ir
hosseinneghabi@um.ac.ir

۱. مقدمه

یک جنبه‌ی مهم از رقابت در بازار محصولات، استفاده از راهکارهای تبلیغاتی است. زمانی که خط تولید یک محصول جدید راه‌اندازی می‌شود، شرکت‌ها باید آگاهی مصرف‌کنندگان را از کالاهای جدید خود با یک کمپین تبلیغاتی درمورد وجود، قیمت، مشخصات و ...، افزایش دهند. به این منظور بازاریابان در آغاز باید اطلاعاتی از مصرف‌کنندگان (برای مثال، اطلاعات جمعیت‌شناختی، اقتصادی، یا جغرافیایی) را جمع‌آوری و پردازش کنند تا بتوانند آن‌ها را توصیف و شناسایی کنند. یک نکته‌ی کلیدی در برنامه‌ی بازاریابی انتخاب راهکار برنامه‌ریزی رسانه‌یی درست به منظور دست‌یابی مؤثر به هدف تبلیغات روی بخش‌های خریداران احتمالی است. تبلیغاتی موفقیت‌آمیز است که به‌وسیله‌ی رسانه‌یی که بیشترین مشتریان خود (محصول) را تحت پوشش تبلیغاتی قرار می‌دهد، صورت گیرد.[۱]

امروزه شرکت‌ها طیف وسیعی از خروجی‌های تبلیغاتی را در اختیار دارند. رسانه‌ها به‌عنوان یک واسطه عمل می‌کنند که پیام‌های تبلیغاتی را به مشتریان بالقوه ارسال می‌کند. تلویزیون، مجله، تبلیغات محیطی،[۱] اینترنت، ایمیل، شبکه‌های مجازی و ...، از جمله رسانه‌های عمومی مورد استفاده برای تبلیغات هستند. انتخاب رسانه برای تبلیغ یک محصول خاص یا خط محصول، بستگی به نوع محصولات، بودجه، منابع رسانه‌یی موجود، محبوبیت رسانه‌یی، نظرات و برآوردهای کارشناسان و مدیران ارشد دارد. در این حوزه تلاش می‌شود منابع تبلیغاتی در میان رسانه‌های منتخب به‌گونه‌یی تخصیص یابد که اهداف تبلیغاتی مد نظر تحقق یابند. لذا برنامه‌ریزان رسانه به دنبال توسعه‌ی یک برنامه‌ی رسانه‌یی هستند که نسبت به تغییرات بازار پاسخگو باشد و اهداف تبلیغاتی را نیز برآورده سازد.[۲]

در این خصوص، محققان بیشتر از نظر تخصیص بودجه تبلیغات در رسانه‌های مختلف، تعیین تعداد بهینه‌ی درج آگهی‌ها، سنجش اثربخشی رسانه‌ها و برنامه‌ریزی رسانه‌ها با توجه به نوع و بخش‌بازار، برنامه‌ریزی کرده‌اند. باس و لونسدیل (۱۹۶۶)[۳] یک مدل برنامه‌ریزی خطی ساده را برای تخصیص بودجه به انواع مختلف رسانه‌ها در بازارهای جداگانه ارائه دادند تا میزان قرارگرفتن تبلیغات در معرض دید مشتریان را تحت محدودیت‌های بودجه بیشینه کنند. در این نوشتار، تخصیص رسانه برای یک محصول واحد طی یک دوره‌ی زمانی بررسی می‌شود. همچنین، تجزیه و تحلیل حساسیت روی مدلی با محدودیت تعداد درج آگهی و بودجه‌ی رسانه‌ها برای هر بخش، انجام خواهد شد.

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۹/۱۰، اصلاحیه ۱۳۹۹/۳/۳۱، پذیرش ۱۳۹۹/۱۰/۱.
DOI:10.24200/J65.2020.54496.2054

چارنز و همکارانش[۴] مدلی را برای انتخاب رسانه‌ی یک محصول با بیشینه‌سازی میانگین فرکانس دسترسی به بخشی از مخاطبان، پیشنهاد کردند. آن‌ها برای حل مدل از برنامه‌ریزی آرمانی استفاده کردند و کوشیدند تا حد ممکن روش‌های واقعی مدیران رسانه‌یی را تقلید کنند. هدف آنها به دست آوردن دسته‌بندی مخاطبان در دوره‌های زمانی بود. آن‌ها با استفاده از الگوریتم تکرار، مخاطبین رسانه‌های مختلف را به‌صورت انبوه در زمان‌های متفاوت در نظر گرفتند. ویدی و زیمرمن[۵] یک مدل برنامه‌ریزی خطی رسانه‌یی مشابه مدل چارنز و همکارانش ارائه و استفاده از برنامه‌ریزی فازی را به‌عنوان یک راه حل جایگزین برای شرایط مختلف واقعی پیشنهاد کردند.

باسو و باترا،[۶] یک تابع پاسخ فروش به تبلیغاتِ مبتنی بر رگرسیون را برای تخصیص بهینه‌ی بودجه‌ی تبلیغات شرکتی دارای چند برند، تحت محدودیت بودجه و هزینه‌های تبلیغ برای هر برند ارائه کردند. نواک و همکاران[۷] یک مطالعه‌ی مبتنی بر نظرسنجی را برای بررسی شیوه‌های برنامه‌ریزی رسانه (اولویت‌های رسانه‌یی، بودجه‌بندی و ارزیابی رسانه) بین تجار و خرده‌فروشان منتشر کردند. فروستر و کلیش[۸] مدلی را برای تعیین راهکار تبلیغاتی چندساختاری برای یک شرکت توسعه دادند که ارزش مبنایی یک جریان سودآور را در افق برنامه‌ریزی در یک بازار دارای انحصار چندقطبی[۲] پویا نشان می‌دهد. همچنین روژاس و پترسون[۹] یک مدل از سهم بازار مبتنی بر رگرسیون را برای مطالعه‌ی تأثیر هزینه‌ی کل تبلیغات، قیمت و سهم بازار برند پیشنهاد کردند.

در برنامه‌ریزی رسانه‌یی، مشاهده می‌شود که واکنش افراد مختلف در بازار مشابه نیست و هر فرد به رسانه‌های تبلیغاتی مختلف پاسخ متفاوتی ارائه می‌دهد. البدوی و کوشا[۱۰] برای تخصیص بهینه‌ی منابع بازاریابی در بخش‌های مختلف، یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی ارائه دادند. هدف این بود که ارزش سهام مشتری، منوط به محدودیت بودجه، در یک محیط نامشخص بیشینه شود. بلتران‌روی و همکاران،[۱۱] یک مدل چندمرحله‌یی برای برنامه‌ریزی رسانه‌های چندمحصولی با هدف بیشینه‌سازی سودآوری تبلیغات، ارائه کردند. آن‌ها با در نظر گرفتن قابلیت تغییر در محصولات هم‌نوع، بودجه‌ی تبلیغاتی چندرسانه‌یی را برای محصولات چندگانه اختصاص دادند. این پژوهش‌گران همچنین مقایسه‌یی بین مدل چندمرحله‌یی و تک‌مرحله‌یی انجام دادند و ادعا کردند که مدل چندمرحله‌یی، تخصیص بهتر بودجه‌های تبلیغاتی را در افق برنامه‌ریزی ممکن می‌سازد.

همچنین یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه برای بیشینه‌سازی تبلیغات و کمینه‌سازی هزینه‌ها توسط کائول و همکارانش[۱۲] ارائه شد. آن‌ها به تعیین برنامه‌ی تبلیغاتی برای شرکتی با مجموعه‌یی از محصولات متفاوت در یک بازار جداگانه (تحت تأثیر مشترک رسانه‌های خاص و رسانه‌های جمعی) در یک افق برنامه‌ریزی چنددوره‌یی پرداختند. این مدل با استفاده از یک رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی، برای دست‌یابی به بهترین ترکیب بین اهداف متضاد حل شد. در سال ۲۰۱۹، پایوا و همکارانش[۱۳] چارچوب جدیدی برای انتخاب رسانه بر اساس انواع تصمیمات خرید پیشنهاد دادند. آنها فرضیه‌یی ضمنی مطرح کردند که در آن رسانه‌ها مستقل از یکدیگر بوده و هرگونه هم‌افزایی در میان آنها نادیده گرفته شده است. همچنین از پیشینه‌ی بودجه‌ی رسانه‌یی محصولات متنوع، برای بررسی نحوه‌ی واکنش تبلیغ‌کنندگان به تغییرات اقتصادی و تکنولوژیکی در تخصیص رسانه‌هایشان استفاده کردند.

به نظر می‌رسد که مسئله‌ی برنامه‌ریزی رسانه‌منجر به یک وضعیت پیچیده‌ی شبه بازی می‌شود که در آن شرکت‌ها به دنبال به دست آوردن سهم بیشتری نسبت به رقبا در بازار هستند. این بازی شامل سه چالش اساسی است. چالش اول مربوط به عدم قطعیت موجود در مسئله است که شامل واکنش رقبا، رفتار مشتریان و پیامدهای تصمیمات اتخاذ شده است. چالش دوم به‌وسیله‌ی وابستگی تصمیمات، موسوم به «تصمیم‌گیری متوالی»، ایجاد می‌شود؛ تصمیم‌گیرندگان باید از عواقب اقدامات خود در دوره‌های بعدی مطلع شوند. آخرین چالش، بزرگی ابعاد یا انفجار ابعاد در این مسئله با توجه به تعداد محصولات، اقدامات و واکنش‌های رقباست.

روش‌های مختلفی برای حل این چالش‌ها مانند فرایند مونت‌کارلو،[۳] برنامه‌ریزی پویا، برنامه‌ریزی تصادفی، برنامه‌ریزی ریاضی،[۴] برنامه‌ریزی فازی و استوار[۵] و ... وجود دارد. با این حال، هیچ‌یک از این روش‌ها نمی‌تواند هر سه چالش گفته شده را به‌صورت همزمان در نظر گیرد. با مطالعه‌ی ادبیات مسائل مشابه این موضوع می‌توان دریافت که یکی از بهترین روش‌ها برای مواجهه‌ی مناسب با این مسئله، برنامه‌ریزی پویای تقریبی (ADP)[۶] است که اساساً به‌وسیله‌ی این برنامه‌ریزی، با عدم قطعیت و ماهیت توالی مسئله روبرو شده و نیز به سبب رویکرد تقریبی، مشکل انفجار ابعاد حل خواهد شد.

برنامه‌ریزی پویای تقریبی یک روش قدرتمند برای حل مسائل در مقیاس زمانی گسسته، تحت فرایندهای کنترل تصادفی چندمرحله‌یی است.[۱۴] پاول[۱۵] مباحث مختلفی را که روی مسائل تصمیم‌گیری متوالی کار می‌کنند، بررسی کرد. او یک شیوه‌ی ساده‌ی پنج جزئی برای مدل‌سازی برنامه‌های پویای تقریبی پیشنهاد کرد و سپس چهار طبقه‌ی اصلی از سیاست‌ها (سیاست‌های مبتنی بر تقریب‌های تابع هزینه (CFAs)،[۷] سیاست‌های پیشرو، سیاست‌های مبتنی بر تقریب‌های تابع ارزش (VFAs)،[۸] سیاست‌های پیش‌بینی و تقریب تابع سیاست (PFAs)[۹] را مطرح کرد. برای مثال پاپادا کی و پاول،[۱۶] سیاست مطلوب برای اعزام یک کامیون به یک گره (با یک نوع محصول) را با سیاست تقریب آینده مقایسه کردند.

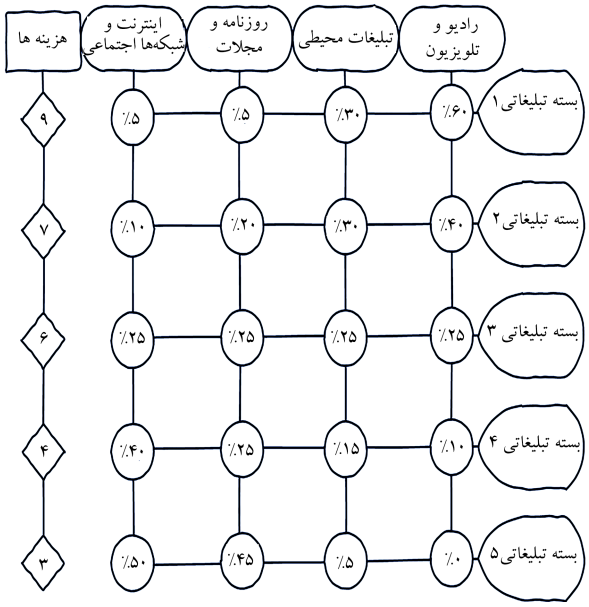
در این نوشتار به مسئله‌ی بودجه‌بندی تبلیغات چند دوره‌ی چندمحصولی (MAB)[۱۰] می‌پردازیم. در این مورد، تصمیمات شرکت برای انتخاب شیوه‌های تبلیغاتی مختلف می‌تواند در تصمیمات آتی رقبا اثرگذار باشد؛ به علاوه تصمیمات رقبا نیز در تصمیم‌گیری و برنامه‌ریزی تبلیغاتی شرکت مؤثر خواهد بود. تصمیمات در هر مرحله به شدت بر تصمیمات در مراحل و دوره‌های آتی مؤثر است و تصمیم‌گیری برای انتخاب روش‌های تبلیغاتی مختلف برای هر محصول، با توجه به قرارگیری وضعیت هر محصول اتخاذ می‌شود. همچنین بسیاری از پارامترهای اثرگذار در این مسئله به‌صورت غیر قطعی در نظر گرفته شده است.

در ادامه، در بخش ۲ به تعریف مسئله پرداخته و ویژگی‌های آن را بیان خواهیم کرد. در بخش ۳ به شرح روش و ساختار حل این مسئله پرداخته‌ایم. همچنین الگوریتم پیشنهادی را در بخش ۴ معرفی و شیوه عملکرد آن را بیان کرده‌ایم. نتایج حاصله و تحلیل‌های مورد نظر را در بخش ۵ آورده‌ایم و در نهایت نتیجه‌گیری کلی بیان شده است.

۲. تعریف مسئله

در این مقاله، مسئله‌ی انتخاب بسته‌های تبلیغاتی رسانه‌های مختلف، برای یک شرکت چندمحصولی در یک افق زمانی چنددوره‌یی مورد بحث قرار می‌گیرد. بسته‌های تبلیغاتی مختلفی برای انواع متفاوت رسانه وجود دارد که توسط یک آژانس تبلیغاتی ارائه می‌شود. در این پژوهش، بسته‌های تبلیغاتی هزینه‌های متفاوتی داشته و درصد بودجه‌ی اختصاص داده شده به هر رسانه، متفاوت است. این بسته‌ها (شکل ۱) از بالا به پایین، از حالت تهاجمی به حالت دفاعی مرتب شده‌اند. این شکل نشان می‌دهد که بسته‌های تهاجمی‌تر در مقایسه با موارد دفاعی‌تر، هزینه‌های بیشتری دارند و بدیهی است که تأثیر قابل‌توجه‌تری بر فروش خواهند داشت.

در این مقاله مراد از «چندمحصولی» این است که شرکت بیش از یک محصول



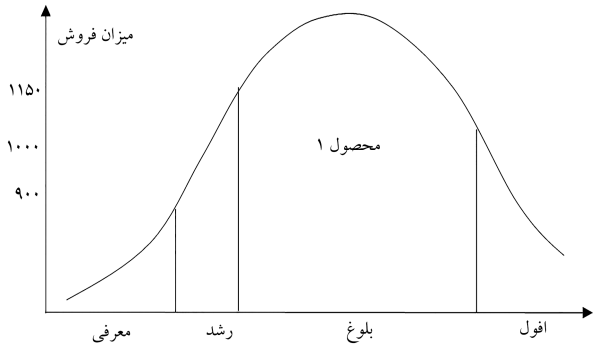
شکل ۱. بسته‌های تبلیغاتی و هزینه‌های آن.

را تولید می‌کند و باعث می‌شود آن‌ها را همزمان با یک راهکار تبلیغاتی مشترک تبلیغ کنیم. گرچه این محصولات مستقل‌اند (جانشین یا مکمل نیستند) و تأثیر متقابل بر یکدیگر ندارند، اما بودجه‌ی مشترکی دارند و باید در تبلیغات رسانه‌یی جداگانه معرفی شوند.

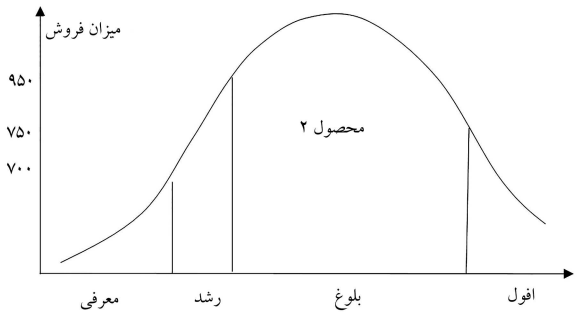
هر محصول دارای ویژگی‌هایی است که با توجه به آن‌ها میزان تأثیر هر بسته‌ی تبلیغاتی بر فروش تعیین می‌شود. این مقادیر می‌توانند توسط خبرگان، تصمیم‌گیرنده و یا روش‌هایی همچون داده‌کاوی مشخص شود. تأثیر بسته‌های مختلف پیشنهادی با توجه به وضعیت قرارگیری در منحنی چرخه‌ی عمر، ماتریس گروه مشاوره بوستون (BCG)[11] یا واکنش رقبا می‌تواند بسیار متفاوت ارزیابی شود. ماتریس BCG برای کمک به یک برنامه‌ریزی راهبردی بلندمدت، به منظور تجزیه و تحلیل کسب‌وکار طراحی شده است. نوع تبلیغات برای هر محصول با توجه به قرارگیری آن در هریک از چهار قسمت ماتریس BCG می‌تواند متفاوت باشد. به طورکلی می‌توان چنین ادعا کرد که یک محصول در ابتدای معرفی به بازار در بخش علامت سوال قرارگرفته و با افزایش سهم نسبی به بخش ستاره‌ها راه یافته و با کاهش میزان نرخ رشد بازار به گاو شیرده تبدیل شده و در نهایت با کاهش سهم نسبی به بخش سگ‌ها ورود پیدا کرده و از چرخه‌ی تولید خارج می‌شود.[۱۷]

هر محصول دارای ویژگی‌هایی است که با توجه به آن‌ها میزان تأثیر هر تصمیم (بسته‌ی تبلیغاتی) بر فروش تعیین می‌شود. در جدول ۱ و ۲ میزان اثرگذاری بسته‌های مختلف تبلیغاتی به ترتیب با توجه به فاکتورهای مؤثر برای محصول ۱ و ۲ آورده شده است. به منظور عملیاتی‌ترکردن پژوهش و استفاده‌ی بیشینه از نظرات خبرگان، این تأثیرگذاری‌ها به صورت یک عدد تصادفی در یک بازه‌ی محدود در نظر گرفته می‌شوند در این جدول r_1 و r_2 به ترتیب بیان‌گر حدود پایین و بالای تغییرات در فروش هستند.

معمولاً تبلیغات در هر مرحله از چرخه‌ی عمر محصول متفاوت در نظر گرفته می‌شود. در مراحل اولیه‌ی چرخه‌ی عمر، تبلیغات باعث افزایش آگاهی در مورد محصول می‌شود، در حالی که در مراحل بعدی سعی در حفظ وفاداری مشتریان داریم. در این مقاله، چرخه‌ی عمر محصول از چهار مرحله معرفی، رشد، بلوغ و افول[12] تشکیل شده و مرحله‌ی هر محصول براساس میزان فروش آن در منحنی عمر



شکل ۲. منحنی عمرکلاسیک برای محصول ۱.



شکل ۳. منحنی عمرکلاسیک برای محصول ۲.

محصول مشخص می‌شود. همچنین، چرخه‌ی عمر هریک از محصولات جداگانه تعریف شده (نگاه کنید به شکل‌های ۲ و ۳) و محدوده‌ی بین مراحل چرخه‌ی عمر را نشان می‌دهند. حجم اولیه‌ی فروش برای محصول ۱ و ۲ به ترتیب ۷۸۰ و ۵۵۰ در نظر گرفته شده است.

ماتریس BCG برای ارزیابی محصولات شرکت در برنامه‌ریزی بازاریابی و فروش استفاده می‌شود. برای دست‌یابی به ماتریس BCG تعیین سهم نسبی هریک از محصولات در بازار و نرخ رشد بازار ضروری است. برای تعیین سهم نسبی هر محصول در بازار می‌توان میزان فروش محصول مورد نظر را بر میزان فروش کل محصولات بازار تقسیم کرد (رابطه‌ی ۱). در این رابطه سهم نسبی محصول m در دوره‌ی t با Ω_t نمایش داده شده است که از تقسیم میزان فروش محصول مورد نظر در دوره‌ی t $(Y_t(m))$ به حجم کلی بازار در همان دوره یعنی $\hat{\Gamma}_{tm}$ به دست آمده است.[۱۸]

$$\Omega_t = \frac{Y_t(m)}{\hat{\Gamma}_{tm}} \qquad (۱)$$

همچنین میزان رشد بازار در دوره‌ی t (ψ_t) از نسبت تغییرات حجم بازار در دوره‌ی مورد بررسی و دوره‌ی مشابه سال قبل، به دست می‌آید (رابطه‌ی ۲).[۲]

$$\psi_t = \frac{\text{حجم بازار سال گذشته در دوره } t - \hat{\Gamma}_{tm}}{\text{حجم بازار سال گذشته در دوره } t} \qquad (۲)$$

مقادیر جدول ۳ نشان‌دهنده‌ی پیش‌بینی شرکت از حجم بازار در سال آتی (دوره‌های برنامه‌ریزی) و همچنین حجم بازار در سال گذشته است. برای در نظر گرفتن عدم قطعیت، به اعداد تخمینی حجم کل بازار در آغاز هر دوره، مقادیری به‌صورت تصادفی اضافه می‌شود. در شرکت مورد مطالعه، مقادیر خط تمایز طبقات ماتریس BCG، برای نرخ رشد بازار ۲٪ و برای سهم نسبی از بازار ۴٪ برآورد شده است. برای تخمین قیمت محصولات در دوره‌های تصمیم‌گیری، دو رگرسیون مختلف بر روی داده‌های فروش آن‌ها در سال‌های گذشته اعمال شد (شکل‌های ۴ و ۵).

جدول ۱. میزان اثرگذاری هر بسته‌ی تبلیغاتی با توجه به حالت‌های منحنی عمر، راهکار رقبا و ماتریس BCG برای محصول ۱.

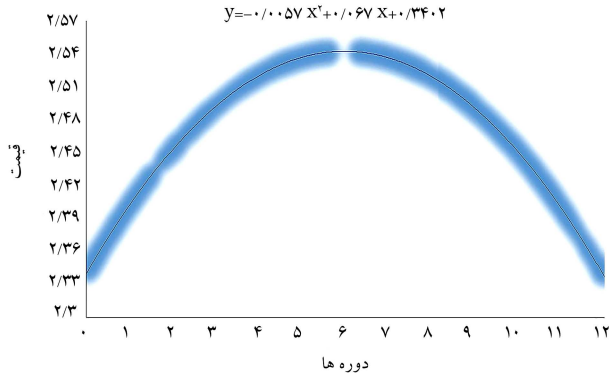
		ماتریس BCG				استراتژی رقبا				منحنی عمر محصول			
		سگ ها	گاوهای شیرده	ستاره ها	علامت سوال	تهاجمی کم	دفاعی کم	تهاجمی شدید	دفاعی شدید	افول	بلوغ	رشد	معرفی
بسته تبلیغاتی ۱	r_1	۱.۰۷	۱.۱۰	۱.۱۷	۰.۹۹	۰.۸۶	۰.۷۶	۰.۷۰	۰.۷۸	۰.۸۵	۱.۰۹	۱.۳۸	۱.۱۴
	r_2	۰.۹۹	۱.۱۷	۱.۴۴	۱.۳۵	۰.۷۹	۰.۸۸	۰.۷۶	۰.۹۸	۱.۰۷	۱.۳۳	۱.۵۶	۱.۳۷
بسته تبلیغاتی۲	r_1	۰.۹۸	۱.۰۱	۱.۴۴	۱.۰۵	۰.۸۲	۰.۹۱	۰.۷۷	۰.۹۱	۰.۹۸	۰.۸۵	۱.۲۶	۱.۰۷
	r_2	۰.۹۱	۱.۰۵	۱.۳۶	۱.۳۵	۰.۹۳	۰.۸۰	۰.۸۶	۱.۰۲	۱.۱۴	۱.۲۵	۱.۴۲	۱.۱۵
بسته تبلیغاتی ۳	r_1	۰.۹۸	۰.۹۹	۱.۱۳	۱.۱۶	۰.۶۹	۰.۶۹	۰.۷۵	۰.۸۹	۱.۰۵	۰.۸۵	۱.۳۵	۱.۲۸
	r_2	۱.۰۸	۱.۲۲	۱.۲۱	۱.۳۰	۰.۸۸	۱.۰۰	۰.۸۱	۰.۸۱	۱.۰۹	۱.۱۷	۱.۲۵	۱.۱۳
بسته تبلیغاتی ۴	r_1	۰.۷۶	۱.۰۰	۱.۰۷	۰.۹۳	۰.۷۴	۰.۸۰	۰.۴۷	۰.۸۷	۱.۰۱	۰.۸۵	۱.۱۴	۰.۹۹
	r_2	۰.۹۵	۱.۰۴	۱.۳۵	۰.۹۸	۰.۷۶	۰.۷۸	۰.۸۴	۱.۰۰	۰.۹۴	۱.۱۵	۱.۵۶	۱.۱۴
بسته تبلیغاتی۵	r_1	۰.۷۸	۰.۹۸	۱.۱۴	۰.۹۱	۰.۵۲	۰.۷۸	۰.۴۱	۰.۸۶	۰.۸۲	۱.۰۳	۱.۲۲	۰.۹۳
	r_2	۱.۰۵	۱.۰۲	۱.۴۸	۱.۰۴	۰.۹۹	۰.۸۲	۰.۹۷	۰.۷۸	۱.۱۴	۱.۱۵	۱.۵۰	۱.۰۶
بدون اقلام	r_1	۰.۶۹	۰.۹۵	۰.۸۲	۰.۹۹	۰.۶۵	۰.۶۲	۰.۶۹	۰.۶۲	۰.۵۱	۰.۷۹	۱.۰۸	۱.۰۱
	r_2	۰.۶۸	۰.۹۵	۱.۲۳	۱.۱۹	۰.۷۳	۰.۷۰	۰.۷۱	۰.۹۶	۱.۰۰	۰.۹۰	۱.۰۶	۱.۰۷

جدول ۲. میزان اثرگذاری هر بسته‌ی تبلیغاتی با توجه به حالت‌های منحنی عمر، راهکار رقبا و ماتریس BCG برای محصول ۲.

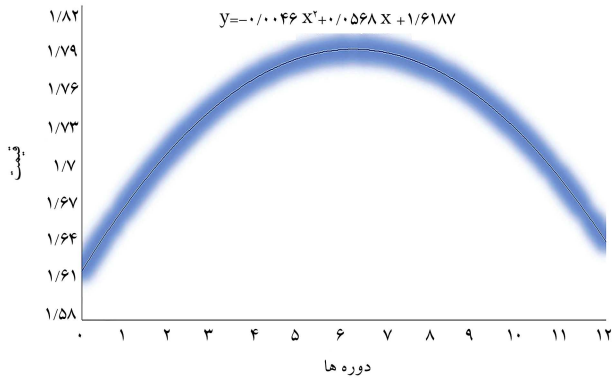
		ماتریس BCG				استراتژی رقبا				منحنی عمر محصول			
		سگ ها	گاوهای شیرده	ستاره ها	علامت سوال	تهاجمی کم	دفاعی کم	تهاجمی شدید	دفاعی شدید	افول	بلوغ	رشد	معرفی
بسته تبلیغاتی	r_1	۱.۰۱	۱.۲۰	۱.۴۳	۱.۱۰	۰.۶۲	۰.۷۰	۰.۷۸	۰.۹۳	۱.۱۱	۱.۲۳	۱.۴۴	۱.۱۴
	r_2	۱.۱۹	۱.۱۸	۱.۳۳	۱.۴۴	۰.۸۲	۱.۱۰	۰.۷۷	۰.۹۳	۱.۱۲	۱.۳۰	۱.۲۹	۱.۲۵
بسته تبلیغاتی۲	r_1	۰.۸۶	۱.۲۶	۱.۱۷	۱.۲۷	۰.۸۵	۰.۸۹	۰.۸۷	۰.۸۰	۰.۸۹	۱.۲۶	۱.۲۸	۱.۱۳
	r_2	۱.۰۹	۱.۰۶	۱.۴۱	۱.۱۲	۰.۸۵	۰.۹۲	۰.۹۱	۱.۰۱	۱.۱۵	۱.۲۳	۱.۳۶	۱.۲۵
بسته تبلیغاتی ۳	r_1	۰.۹۶	۱.۰۰	۱.۳۲	۱.۲۰	۰.۶۶	۰.۸۰	۰.۷۹	۰.۹۲	۰.۸۸	۱.۰۵	۱.۲۲	۱.۲۰
	r_2	۱.۱۴	۱.۳۰	۱.۴۰	۱.۳۱	۰.۶۹	۰.۸۱	۰.۸۷	۰.۸۷	۱.۱۵	۱.۱۱	۱.۴۱	۱.۲۶
بسته تبلیغاتی ۴	r_1	۰.۸۲	۱.۱۲	۱.۰۵	۱.۰۹	۰.۸۵	۰.۷۷	۰.۵۱	۰.۷۵			۱.۱۲	۱.۰۳
	r_2	۱.۰۲	۱.۰۲	۱.۳۸	۱.۱۳	۰.۷۹	۰.۷۷	۰.۹۴	۱.۰۱	۱.۰۱	۱.۳۰	۱.۵۱	۱.۲۰
بسته تبلیغاتی۵	r_1	۰.۹۴	۰.۹۴	۱.۲۱	۱.۱۷	۰.۵۹	۰.۷۲	۰.۴۰	۰.۸۰	۰.۹۱	۰.۹۶	۱.۲۰	۰.۹۹
	r_2	۱.۰۳	۰.۹۸	۱.۱۰	۱.۲۷	۰.۶۶	۰.۸۰	۰.۹۹	۰.۸۶	۰.۸۶	۱.۰۶	۱.۳۲	۰.۹۸
بدون اقلام	r_1	۰.۶۸	۱.۰۱	۱.۱۳	۰.۹۲	۰.۶۸	۰.۶۷	۰.۷۳	۰.۸۳	۰.۸۵	۰.۸۹	۰.۹۲	۰.۹۵
	r_2	۰.۷۸	۱.۰۲	۱.۱۲	۱.۱۰	۰.۸۶	۰.۷۴	۰.۵۹	۰.۷۹	۰.۹۶	۱.۰۴	۱.۱۵	۰.۹۲

جدول ۳. حجم بازار در دوره‌های سال گذشته و پیش‌بینی برای دوره‌های آتی.

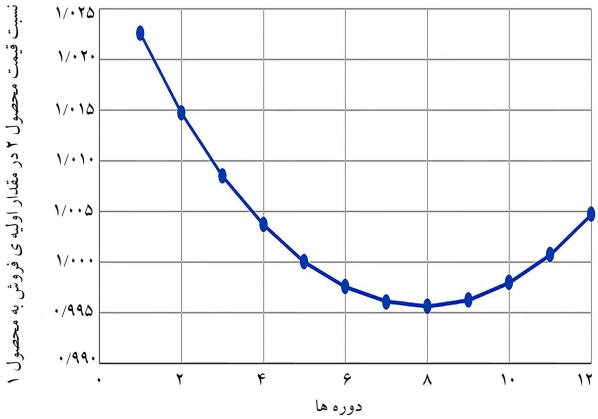
دوره‌ها $(\mathbf{T})$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
حجم بازار $(\hat{\Gamma}_{tm}) \times ۱۰^۴$	۳٫۲۱	۲٫۲۹	۲٫۱۹	۲٫۱۴	۲٫۰۹	۱٫۸۶	۱٫۵۹	۱٫۵۱	۱٫۴۰	۱٫۲۹	۱٫۴۱	۲٫۳۰
حجم بازار در سال گذشته $\times ۱۰^۴$	۲٫۹۱	۲٫۱	۱٫۹۰	۲	۱٫۹	۱٫۶۹	۱٫۴۸	۱٫۵۱	۱٫۴۶	۱٫۵	۱٫۷۱	۲٫۴۴



شکل ۴. رگرسیون پیش‌بینی قیمت محصول ۱.



شکل ۵. رگرسیون پیش‌بینی قیمت محصول ۲.



شکل ۶. تحلیل نسبت قیمت محصول ۲ در مقدار اولیه به محصول ۱.

چنان‌که مشاهده می‌شود، قیمت هر دو محصول در شش ماه ابتدایی برنامه‌ریزی افزایش، و در شش ماه پایانی کاهش داشته است. همچنین در شکل ۶، با در نظر گرفتن میزان فروش ۷۸۰ واحدی برای محصول ۱ و ۵۵۰ واحدی برای محصول ۲ (مقدار فروش اولیه)، نمودار تغییرات درآمد فروش محصول نسبت به درآمد محصول ۱ در طول دوره‌های برنامه‌ریزی را نشان می‌دهد. این نمودار به نوعی نمایانگر اهمیت محصولات نسبت به یکدیگر است که در دوره‌های آغازین اهمیت محصول ۲ بیشتر از محصول ۱ بوده ولی این اهمیت در دوره‌های میانی برعکس شده است.

مسئله‌ی مورد بررسی، مسئله‌یی با افق محدود است که در آن حالت‌های محتمل‌تر را بررسی کرده‌ایم. اگر مجموعه‌ی دوره‌های تصمیم‌گیری به صورت زیر تعریف شود:

$$\Im = \{1, 2, ..., T\}, \quad T \leq \infty \qquad (3)$$

تعداد دوره‌های تصمیم‌گیری ثابت (T) است و تصمیمات در ابتدای هر دوره‌ی زمانی گرفته می‌شود. فرض کنید $S_{t.t\in T}$ حالت سیستم در دوره‌ی t باشد و حالت اولیه (S_0) از پیش مشخص باشد. این حالت‌ها به تصمیم مرحله‌ی قبل و شرایط تصادفی که در طول دوره‌ی قبلی رخ می‌دهد، بستگی دارند. وضعیت زمان t در نتیجه‌ی تصمیم در $t-1$ و شرایطی است که در فاصله‌ی $t-1$ و t اتفاق افتاده است. در هر دوره‌ی زمانی، یک تصمیم باید طبق شاخص ارزش، مجموع احتمال رفتن به حالت‌های بعدی و محدودیت‌های تصمیم‌گیری، اتخاذ شود. به علاوه، تعداد محصولات مختلف به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathfrak{M} = \{1, 2, ..., M\} \qquad (4)$$

M نشان‌دهنده‌ی تعداد محصولات متنوع و مختلفی است که توسط شرکت تولید شده و برای آن‌ها باید برنامه‌ریزی تبلیغاتی در دوره‌های مختلف صورت پذیرد.

حالت یک سیستم، مجموعه اطلاعاتی است که در زمان تصمیم‌گیری برای تصمیم‌گیرنده در دسترس است. حالت‌های این سیستم با مرحله‌ی چرخه‌ی عمر، طبقه در ماتریس BCG t و راهکار رقبا برای هر محصول و نیز بودجه‌ی باقیمانده که برای همه محصولات به‌صورت مشترک است، بیان می‌شود. به عبارت دیگر، هر حالت سیستم را می‌توان با برداری با $3M+1$ مؤلفه مدل‌سازی کرد. بدین ترتیب می‌توان مجموعه‌ی وضعیت قرارگیری محصولات مختلف در مراحل چرخه‌ی عمر را به‌صورت یک بردار با M مؤلفه نشان داد:

$$LC_t = (lc_{t1}, lc_{t2}, \ldots, lc_{tM}), \qquad (5)$$

که در آن $lc_{t.m}$، بیان‌گر مرحله‌ی چرخه‌ی عمر برای محصول m در دوره‌ی تصمیم‌گیری tام است. این حالت به حجم فروش محصول در ابتدای دوره‌ی t بستگی دارد که با علامت $Y_t(m)$ نشان داده می‌شود. همچنین برای نشان دادن وضعیت‌های مختلف محصولات در ماتریس BCG از یک بردار M مؤلفه استفاده می‌کنیم:

$$BCG_t = (bcg_{t1}, bcg_{t2}, \ldots, bcg_{tM}), \qquad (6)$$

$bcg_{t.m}$، بیان‌گر وضعیت ماتریس BCG برای محصول m در دوره‌ی تصمیم‌گیری tام است. همچنین، وضعیت‌های در نظر گرفته شده برای مدل‌سازی واکنش رقبا به‌صورت یک بردار با M مؤلفه بیان می‌شود:

$$CS_t = (cs_{t1}, cs_{t2}, \ldots, cs_{tM}), \qquad (7)$$

چنین فرض شده که برای هر محصول تولیدی شرکت، رقبای متفاوتی وجود دارند که در هر دوره می‌توانند یکی از راهکارهای بازاریابی دفاعی شدید، بازاریابی تهاجمی شدید، بازاریابی دفاعی کم، بازاریابی تهاجمی کم را اختیار کنند. cs_{tm} نشان‌گر راهکاری است که مجموعه رقبای محصول m در دوره‌ی تصمیم‌گیری tام دنبال می‌کنند. تصمیم رقبا برای چگونگی واکنش، به اقدامات شرکت وابسته بوده و تصمیمات شرکت نیز با توجه به نحوه‌ی عملکرد رقبا در هر دوره می‌تواند متفاوت باشد. احتمالات هریک از این واکنش‌ها نسبت به تصمیمات شرکت برای انتخاب بسته‌های مختلف برای محصول ۱ و محصول ۲، در جداول ۴ و ۵ آورده شده است.

جدول ۴. احتمالات واکنش رقبا با توجه به بسته انتخابی برای محصول ۱.

	بسته تبلیغاتی					بدون اقلام
	۱	۲	۳	۴	۵	
دفاعی شدید	۰/۱۴	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۲	۰/۲۴	۰/۲۹
تهاجمی شدید	۰/۳۴	۰/۲۹	۰/۲۱	۰/۱۳	۰/۱۱	۰/۲۹
دفاع کم	۰/۳۱	۰/۳۱	۰/۳۱	۰/۳۵	۰/۳۷	۰/۲۱
تهاجمی کم	۰/۲۱	۰/۲۱	۰/۲۷	۰/۳۲	۰/۲۸	۰/۲۱

جدول ۵. احتمالات واکنش رقبا با توجه به بسته انتخابی برای محصول ۲.

	بسته تبلیغاتی					بدون اقلام
	۱	۲	۳	۴	۵	
دفاعی شدید	۰/۱۷	۰/۱۹	۰/۲	۰/۲۲	۰/۲۵	۰/۳۱
تهاجمی شدید	۰/۲۹	۰/۲۴	۰/۱۸	۰/۱۱	۰/۰۹	۰/۱۵
دفاع کم	۰/۲۱	۰/۳۶	۰/۳۴	۰/۳۱	۰/۲۵	۰/۲۴
تهاجمی کم	۰/۳۳	۰/۲۱	۰/۲۸	۰/۳۶	۰/۴۱	۰/۳

$P(cs_{tm}) = \hat{P}(cs_{tm}|X(_{t-1,m}))$ نشان‌دهنده‌ی توزیع احتمال شرطی راهکار رقباست. این توزیع مشروط به اقدام ما در دوره‌ی قبلی است که احتمال واکنش رقبا در بازار را تعیین می‌کند. به بیانی دیگر، احتمال واکنش رقبا در هر دوره به تصمیم اتخاذ شده توسط شرکت در دوره‌ی قبل وابسته بوده و اتخاذ تصمیمات مختلف توسط شرکت در دوره‌های مختلف با لحاظ کردن نوع واکنش رقبا صورت می‌پذیرد.

بودجه‌ی باقیمانده گسسته فرض می‌شود و با B_t نمایش داده می‌شود که عدد صحیحی بین صفر و کل بودجه (B) است. با توجه به این مؤلفه‌ها، حالت سیستم در زمان تصمیم‌گیری چنین تعریف می‌شود:

$$S_t = (LC_t, BCG_t, CS_t, Bt) \;\; S_t \in S, \qquad (۸)$$

که در آن S نشان‌گر مجموعه‌ی تمامی حالت‌های ممکن است، همچنین حالت‌های مرتبط با محصول m در دوره‌ی زمانی t را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S_{tm} = (lc_{tm}, bcg_{tm}, cs_{tm}), \qquad (۹)$$

در هر دوره‌ی زمانی، ما باید تصمیم بگیریم که یک بسته‌ی تبلیغاتی را در بین گزینه‌های دارای بودجه‌ی مجاز انتخاب کنیم. از این رو، بردار اقدام انتخاب شده برای کل محصولات را چنین تعریف می‌کنیم:

$$X_t = (x_{t1}, x_{t1}, \ldots, x_{tM}), x_{tm} \in D \forall m \in M \qquad (۱۰)$$

x_{tm} نشان‌دهنده‌ی اقدام یا تصمیم ما برای محصول m در دوره‌ی t است و D، مجموعه‌ی تمامی بسته‌های تبلیغاتی (گزینه‌های تصمیم‌گیری) و عدم اقدام (گزینه‌ی بدون واکنش) است؛ $D =$ {بدون واکنش، بسته‌ی تبلیغاتی ۱، بسته‌ی تبلیغاتی ۲، ... بسته‌ی تبلیغاتی k}.

برای تصمیم‌گیری به‌صورت پویا، محاسبه‌ی مقدار دقیق یا برآورد ارزش موجود (در این مطالعه) در وضعیت فعلی و همچنین وضعیت حاصل از تصمیم مربوطه ضروری است. با توجه به این واقعیت که تصمیماتی که در حال حاضر گرفته می‌شود، تأثیر پایدار دارند و می‌توانند تصمیمات دوره‌های بعدی را تحت تأثیر قرار دهند، نیازمند پیش‌بینی اثرات آن بر پیامدهای آینده هستیم. به طور دقیق‌تر، پیش‌بینی فروش محصولات به منظور انتخاب بسته‌ی تبلیغات رسانه‌یی مطلوب، تأثیر مستقیم بر انتخاب‌های دوره‌ی بعدی دارد که ممکن است با بودجه‌ی کم‌تر یا واکنش دیگری از رقبا و ... گرفته شود. پاداش هر اقدام (بسته‌ی انتخابی) برابر با اثراتی است که بر فروش محصول می‌گذارد و با حالت و اقدامی که انتخاب شده، تعیین می‌شود. این اثرگذاری‌ها، برای هریک از مؤلفه‌های بردار S_{tm} به‌صورت یک پارامتر تصادفی بازه‌یی مدل‌سازی شده است.

$$R(s_{tm}, x_{tm}) = rand\left(r_{1, s_{tm}, x_{tm}}, r_{2, s_{tm}, x_{tm}}\right) \forall t \in \Im, \qquad (۱۱)$$

که در آن $r_{1,s_{tm},x_{tm}}$ و $r_{2,s_{tm},x_{tm}}$ به ترتیب حد پایینی و حد بالایی، تغییرات حجم فروش محصول m را نشان می‌دهد. این مقدار وابسته به حالت محصول m، s_{tm} و اقدام x_{tm} است. در واقع، این تصادفی بودن نشان‌دهنده‌ی عدم قطعیت در مسئله است. با فرض استقلال در بین عدم قطعیت‌های ذکر شده، تأثیری که تصمیم گرفته شده بر فروش محصول می‌گذارد، معادل رابطه‌ی ۱۲ در نظر گرفته می‌شود.

$$\prod_{s_{tm} \in S_{tm}} R(s_{tm}, x_{tm}), \qquad (۱۲)$$

برای ارزیابی نتایج تصمیمات احتمالی در هر دوره‌ی زمانی، باید حجم فروش در پایان دوره را بر اساس اقدام خود، تخمین بزنیم. حجم فروش تخمینی $(\hat{A}(S_{tm}, x_{tm}))$ برای محصول m در پایان دوره‌ی زمانی t، چنین به دست می‌آید:

$$\hat{A}(S_{tm}, x_{tm}) = Y_t(m) \prod_{s_{tm} \in S_{tm}} R(s_{tm}, x_{tm})$$
$$\forall m \in \mathfrak{M}, \forall t \in \Im, \qquad (۱۳)$$

چنان که قبلاً نیز اشاره شد $Y_t(m)$ حجم فروش محصول m در ابتدای دوره‌ی t را نشان می‌دهد که با در نظرگرفتن تأثیرات تصمیمات مختلف، برآورد حجم فروش تخمینی انتهای دوره قابل دست‌یابی خواهد بود.

پاداش هر بسته‌ی تبلیغاتی بستگی به قیمت محصول و حجم فروش مربوطه دارد. قیمت هر محصول در یک دوره‌ی زمانی خاص مشخص نیست و با استفاده از ابزارهای پیش‌بینی آماری به دست می‌آید. همچنین $y(S_t, X_t)$ را مقدار کل فروش (درآمد) پیش‌بینی شده در صورت انتخاب گزینه‌ی X_t تعریف کرده که با جمع کردن حجم فروش تخمینی برای محصول m و با در نظرگرفتن قیمت بازار $(\xi_m(t))$ به دست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$y(S_t, X_t) = \sum_{m=1}^{M} \xi_m(t) \hat{A}(Stm, xtm),$$
$$\forall t \in T, x_{tm} \in X_t, \qquad (۱۴)$$

که در آن $\xi_m(t)$ قیمت محصول m در دوره‌ی تصمیم‌گیری t است. به علاوه، فرض می‌کنیم که اتخاذ تصمیمات در هر مرحله با در نظرگرفتن محدودیت، صورت پذیرفته است. به عبارتی محدودیت بودجه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{(X_t)} \leq B_t, \qquad (۱۵)$$

که $c(X_t)$ هزینه‌ی اقدامی (X_t) است که در دوره‌ی تصمیم t انجام شده است

و B_t بودجه‌ی باقیمانده در آغاز دوره‌ی t است. در ادامه یک متغیر باینری جدید برای حذف اقدامات غیر عملی [۱۳] (نشدنی) تعریف می‌شود:

$$u(Xt) = \left\{ \begin{array}{ll} ۱, & c_{(Xt)} \leq Bt \\ ۰, & otherwise \end{array} \right\}, \quad (۱۶)$$

که در آن $u(X_t)$ نشان‌دهنده‌ی امکان انجام اقدام X_t است.

توابع انتقال برای شناسایی نحوه‌ی تغییرات سیستم در نتیجه‌ی تصمیمات و اطلاعاتی که از یک حالت به یک حالت دیگر، معرفی و تعریف می‌شود.[۱۹] تابع انتقال چرخه‌ی عمر به طور طبیعی از حجم فروش واقعی به دست می‌آید. بدین ترتیب فروش واقعی محصول m در چرخه‌ی عمر مشخص و حالت به طور کیفی تعیین می‌شوند. در این مطالعه، به منظور تعیین حالت‌های بعدی از جمله وضعیت چرخه‌ی عمر و طبقه‌ی ماتریس BCG، ما باید حجم فروش را در دوره‌ی بعد (حجم فروش واقعی) به دست آوریم که به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$Y_{t+۱}(m) = \hat{A}(S_{tm}, x_{tm}) + \omega'_{tm} \quad (۱۷)$$

ω'_{tm} یک متغیر تصادفی است که نشان‌دهنده‌ی عدم قطعیت در تخمین فروش است و افزون بر عدم قطعیتی است که برای حجم فروش تخمینی در نظر گرفته شده‌است؛ چرا که لازم است حجم فروش واقعی را در دوره‌ی زمانی بعدی به‌روز کنیم.

طبقه‌ی ماتریس BCG وابسته به حجم کلی بازار است که با پارامتر Γ_{tm} نشان داده می‌شود. این مقدار دارای ماهیت عدم قطعیت است و با معادله‌ی ۱۸ تعیین می‌شود که در آن $\widehat{\omega}$ یک عدد تصادفی است و به مقدار پیش‌بینی شده‌ی حجم کلی بازار اضافه می‌شود.

$$\Gamma_{tm} = \hat{\Gamma}_{tm} + \widehat{\omega}_{tm} \quad (۱۸)$$

موقعیت هر محصول در ماتریس BCG به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$BCG \text{ ماتریس} = \begin{cases} \text{علامت سؤال.} & \psi_t > \psi_t^*.\Omega_t \leq \Omega_t^* \\ \text{ستاره.} & \psi_t > \psi_t^*.\Omega_t > \Omega_t^* \\ \text{گاو شیرده.} & \psi_t \leq \psi_t^*.\Omega_t > \Omega_t^* \\ \text{سگ‌ها.} & \psi_t \leq \psi_t^*.\Omega_t \leq \Omega_t^* \end{cases}$$

رشد بالا بازار $\leq \psi_t^*$ رشد پایین بازار

سهم بالا بازار $\leq \Omega_t^*$ سهم پایین بازار (۱۹)

که در آن ψ_t نرخ رشد بازار و Ω_t سهم نسبی بازار در اول دوره‌ی تصمیم t؛ ψ_t^* و Ω_t^* به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مرز نرخ رشد و سهم نسبی از بازار هستند که طبقه‌های ماتریس BCG را تعیین می‌کنند. تنها یک بودجه‌ی اولیه در ابتدای چشم‌انداز برنامه‌ریزی ما وجود دارد و بودجه‌ی موجود در هر دوره بر اساس بودجه‌ی دوره‌ی قبلی و هزینه‌ی اقدام انتخاب شده تعیین می‌شود:

$$B_{t+۱} = B_t - c(X_t), \quad (۲۰)$$

در نهایت بهترین بسته‌ی تبلیغاتی در افق زمانی توسط تابع هدف زیر انتخاب می‌شود:

$$MaxE \sum_{t=۱}^{T} y(S_t, X_t), \quad (۲۱)$$

که در آن، E ارزش مورد انتظار فروش در کلیه‌ی دوره‌هاست. برای یافتن پاسخ، معادله‌ی بلمن برای تابع هدف ما مطابق رابطه‌ی ۲۲ معرفی می‌شود:[۲۰]

$$V(S_t) = \max_{\forall X_t} u(X_t)\left(y(S_t.X_t) + \gamma E\left\{V(S_{t+۱})|S_t.X_t\right\}\right). \quad (۲۲)$$

که معرف تابع ارزش مورد بررسی برای مسئله است و نشان می‌دهد که تصمیم‌ها، برای همه‌ی محصولات بر اساس تخمین فروش در پایان دوره‌ی t و فروش مورد انتظار آینده (دوره‌های بعد) به دست می‌آید. در رابطه‌ی ۲۲ تصمیم (X_t) به گونه‌یی انتخاب می‌شود، که ارزش تصمیم دوره‌ی t و دوره‌های آتی را بیشینه کند. بنابراین، $V(S_t)$ که بیان‌گر ارزش حالت تابع هدف، هنگامی که سیستم در وضعیت S_t است، شامل مقدار فروش فعلی و مقدار فروش مورد انتظار برای دوره‌های بعدی است که بر اساس حالت، تصمیم و نرخ تنزیل γ تعیین می‌شوند. در حقیقت، هرچند تصمیمات در زمان t اتخاذ می‌شود، ولی دارای یک تأثیر درازمدت هستند و بر وضعیت سیستم در آینده تأثیر می‌گذارند و پس از آن ارزش واقعی آن حاصل می‌شود. تصمیمات مربوط به بودجه و تبلیغاتی که در حال حاضر انجام می‌شود، به طور مستقیم بر توانایی تبلیغاتی در آینده (با توجه به نوع اقدام) و ارزش درآمدی حاصل در بعد از آن تأثیر می‌گذارد. در ادامه این معادله برای نشان دادن ارزش فروش مورد انتظار اصلاح شده است:

$$V(S_t) = max u(X_t)\left(\begin{array}{l} y(S_t, X_t) + \\ \gamma \sum_{s.\in S} P(s'|S_t, X_t) V(S_{t+۱}) \end{array}\right) \quad (۲۳)$$

که در آن $P(s'|S_t, X_t)$ به نوعی نشان‌دهنده‌ی امکان قرارگیری حالت سیستم در دوره‌ی آتی در وضعیت s' است با فرض این‌که وضعیت فعلی سیستم در دوره‌ی فعلی S_t و تصمیم مد نظر X_t است.

$$P(s'|S_t, X_t) = \begin{cases} \forall \text{m if } p_{bcgtm} = ۱ \text{ and } p_{lctm}: \\ \prod_{m=۱}^{M} P(cs_{tm}) \quad \text{and } Rb_{t+۱} = Rb_t - c(X_t) \\ ۰ \quad \text{Otherwise} \end{cases} \quad (۲۴)$$

به عبارتی می‌توان $P(s'|S_t, X_t)$ را به‌عنوان تابع احتمال انتقال از S_t به $S_{t+۱}$ در نظر گرفت، همچنین $p_{bcgtm} = ۱$ و p_{lctm}، نشان‌دهنده‌ی احتمالات چرخه‌ی عمر محصول و ماتریس BCG است. لازم به ذکر است که این احتمالات برای حالت‌هایی که در دوره‌های آتی قابل‌دست‌یابی نیستند، صفر در نظر گرفته می‌شود.

۳. شرح روش

الگوریتم پیشنهادی حل مسئله‌ی مورد بررسی، منطبق بر برنامه‌ریزی پویای تقریبی با استفاده از روش جدول ـ جست‌وجوی[۱۴] پاول[۲۱] توسعه داده شده است. روش جدول ـ جست‌وجو در واقع یکی از روش‌های برنامه‌ریزی پویای تقریبی است که برای هر دوره‌ی مورد بررسی، یک جدول تهیه می‌شود که ارزش به‌روز شده هر حالت در آن دوره برای به‌روزرسانی‌های آتی نگهداری می‌شود.

شبه کد الگوریتم پویای تقریبی برای حل مسئله تخصیص رسانه:
مرحله ۰. مقداردهی اولیه:
مرحله‌ی ۰ الف) برای همه‌ی حالت‌های S_t، مقدار اولیه‌ی $\overline{V}_t^{0}$ را قرار دهید؛
مرحله‌ی ۰ ب) حالت اولیه‌ی s_0^n را مشخص کنید؛
مرحله‌ی ۰ ج) $n = 1$ قرار می‌دهیم؛
مرحله‌ی ۱. برای t $T = 0, 1, 2, \ldots,$ مراحل زیر را انجام دهید:
مرحله‌ی ۱ الف) یک مقدار تصادفی برای $R(s_{tm}.x_{tm})$ و $\xi_m(t)$ تعیین کنید؛
مرحله‌ی ۱ ب) اگر $c(X_t) > B_t$ باشد آنگاه مقدار $u(X_t) = 0$ و در غیر این‌صورت $u(X_t) = 1$ در نظر بگیرید؛
مرحله‌ی ۱ ج) با احتمال $(1 - p_{n-1})$ تصمیمی را انتخاب کنید که تابع ارزش را بیشینه می‌سازد (بهره‌برداری[15]).

$$\overline{v}_t^n = \max_{X_t} u(X_t) \left(\begin{array}{l} y(S_t^n, X_t) + \\ \gamma \sum_{s' \in S} P(S_{t+1}^n = s' | S_t^n, X_t) \overline{V}_{t+1}^{n-1}(s') \end{array} \right) \quad (25)$$

در رابطه‌ی ۲۵ مقدار $y(S_t^n, X_t)$ به‌صورت $y(S_t^n, X_t) = \sum_{m=1}^{M} \xi_m(t) A(m.S_t, x_{tm})$ به دست می‌آید.
با احتمال p_{n-1} تصمیمی را به‌صورت تصادفی انتخاب کنید (اکتشاف[16]).
مرحله ۲. مقدار $\overline{V}_t^{n-1}(S_t)$ را به‌وسیله‌ی تابع ۲۶ به‌روزرسانی کنید:

$$\overline{V}_t^n(S_t) = \begin{cases} (1 - \alpha_{n-1}) \overline{V}_{t+1}^{n-1}(S_t^n) + \alpha_{n-1} \overline{v}_t^n \\ \overline{V}_t^n(S_t^n) \end{cases} \quad (26)$$

مرحله ۳. انتخاب کنید یک مسیر تصادفی برای انتقال به حالت‌های دوره‌های بعدی از طریق انتخاب دو متغیر تصادفی زیر:

$$\omega^n = (\omega_{tm}, \hat{\omega}_{tm}) \quad (27)$$

مرحله ۴. وضعیت سیستم را در دوره‌ی بعدی مشخص کنید.

$$S_{t+1} = S_M(S_t, x_t, w_{tm+1}) \quad (28)$$

عبارت $W_{t+1}(\omega^n)$ نشان‌گر اطلاعات جدید مسئله است؛
مرحله ۵. $n = n + 1$ قرارداده و اگر $n < N$، بروید به مرحله‌ی ۱؛
مرحله ۶. مقدار $\overline{v}_t^n = \{1, 2, ..., T\}$ را اعلام کنید.
نکته: $A_{\cdot}(m)$ حجم فروش اولیه در ابتدای دوره را نشان می‌دهد.

در ادبیات برنامه‌ریزی پویا به انتخاب تصمیمات بر اساس تابع ارزش بهره‌برداری و به انتخاب تصادفی تصمیمات، اکتشاف اطلاق می‌شود. تعادل بین اکتشاف و بهره‌برداری یکی از مشکلات اساسی حل نشده در برنامه‌ریزی پویای تقریبی است.[17] از آن‌جا که یک سیاست قطعی می‌تواند منجر به پاسخ محلی شود، ما از یک راهکار اکتشاف و بهره‌برداری ترکیبی استفاده می‌کنیم. همچنین، برای خروج از جواب‌های بهینه محلی، در هر حالت با احتمال p_{n-1} از یک تصمیم تصادفی بهره می‌گیریم. مقدار احتمال p_{n-1} در مدل پیشنهادی بر اساس تابعی از دوره‌ی تکرار مورد بررسی و به صورت رابطه‌ی ۲۹ پیشنهاد شده است.

$$p_{n-1} = \left(\frac{b}{b + n - 1} \right)^2 \quad (29)$$

پس از تصمیم اتخاذ شده، مقدار ارزش حالت مورد بررسی برمبنای تصمیم اتخاذ شده تعیین خواهد شد و مقدار مربوطه با $\overline{v}_t^n$ نمایش داده می‌شود. در ادامه، مقدار $\overline{v}_t^n$ برای بروزرسانی تقریب مقدار تابع $\overline{V}_t^n(S_t)$ با استفاده از روش بازبینی جدول ـ جست‌وجو به کار برده می‌شود.

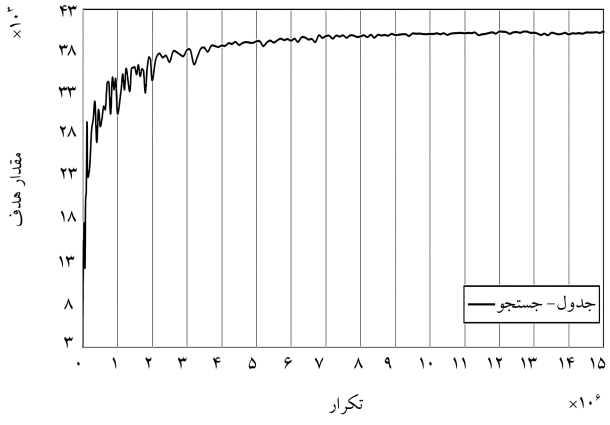
α_{n-1}، اندازه‌ی گام متناظر به‌روزرسانی است، که عامل مهمی بر همگرایی الگوریتم ADP است. این عامل در مدل پیشنهادی به‌صورت مدل هارمونیک[17] در نظرگرفته شده است و به‌صورت $a \in (0, \infty)$ $\alpha_{n-1} = \frac{a}{a+n-1}$، نمایش داده می‌شود که در آن مقادیر بالاتر a نرخ میل کردن α_n به صفر را کندتر می‌کند. تعداد تکرارهای الگوریتم (N) در آغاز هر بار اجرای آن با توجه به اندازه‌ی گام، تحلیل همگرایی و بیشینه‌سازی تابع هدف باید مشخص شود.

۴. نتایج

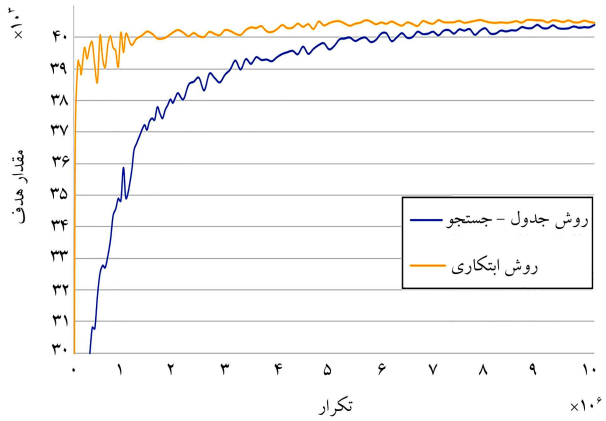
برای آزمایشات عددی، از یک رایانه با پردازنده‌ی اینتل Core i3 – ۷۱۰۰ و CPU ۳٫۹۰ GHz با ۴ گیگابایت حافظه‌ی Ram استفاده شده است. الگوریتم توسط نرم‌افزار Python ۳٫۶ پیاده‌سازی و اجرا شد. در ادامه به ارائه و تحلیل این نتایج خواهیم پرداخت. برنامه‌ریزی این مسئله طی افق زمانی محدود (یک دوره‌ی ۱۲ ماهه) صورت پذیرفته و تصمیمات در ابتدای این دوره‌ها اتخاذ خواهد شد، بودجه‌ی در نظرگرفته شده برای تمامی ۱۲ دوره برابر با ۱۰۰ واحد پولی است، که هر دو محصول شرکت در این بودجه سهیم‌اند.

در نمودار همگرایی (شکل ۷) مورد بررسی، مقدار هدف تقریباً بعد از 1×10^7 تکرار به حدود مقدار $4{,}05 \times 10^4$ همگرا می‌شود که ارزش کل مقدار فروش رفته را در طول زمان نشان می‌دهد.

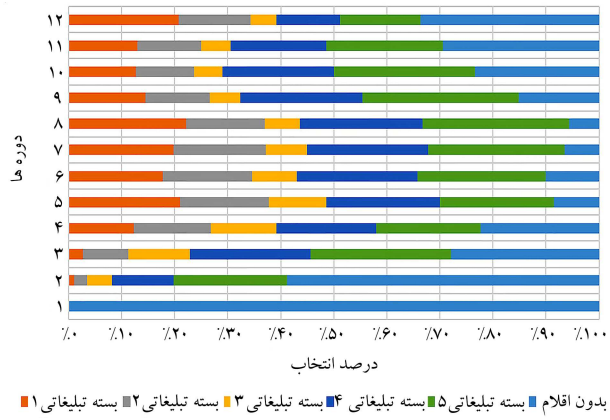
یکی از اهداف روش برنامه‌ریزی پویای تقریبی ارائه جواب مناسب در سریع‌ترین زمان ممکن است. در حین بررسی‌های صورت گرفته برای انتخاب الگوریتم حل، یک روش جدید (ابتکاری) به این صورت که در هر دوره انتخاب تصمیم به‌صورت تصادفی انجام شود (یعنی حالت مرحله‌ی بعدی یک حالت تصادفی خواهد بود) ولی مقدار هدف با حداکثر مقدار ممکن (بهترین تصمیم) به‌روزرسانی شود، مورد بررسی و تحلیل قرارگرفت. برای ارزیابی صحت این روش، مقدار ارزش به دست آمده از این روش با ارزش به دست آمده از روش قبل مورد مقایسه قرار گرفت (شکل ۸). به عبارتی در روش ابتکاری پیشنهاد شده، مسیر طی شده برای بروز رسانی حالات مختلف به‌صورت تصادفی طی شده ولی ارزش هر حالت بر اساس



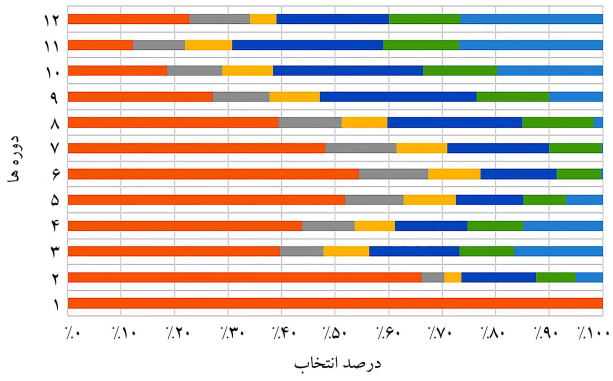
شکل ۷. نمودار همگرایی برای ۱۵ میلیون تکرار.



شکل ۸. مقایسه‌ی نمودار همگرایی روش جدول ـ جست‌وجو و ابتکاری.



شکل ۹. درصد انتخاب بسته‌های تبلیغاتی در دوره‌های محصول ۱.

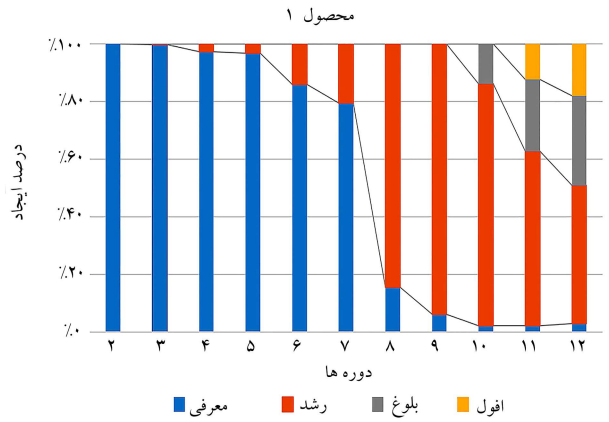


شکل ۱۰. درصد انتخاب بسته‌های تبلیغاتی در دوره‌های محصول ۲.

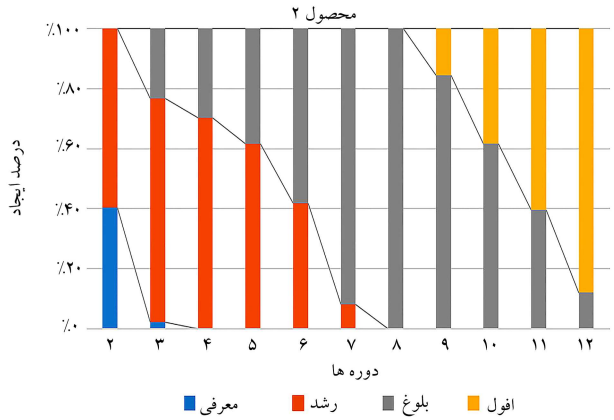
بهترین تصمیم ممکن در حالت مدنظر بروز رسانی می‌شود و نتایج نشان دهنده سرعت بسیار زیاد و در عین حال صحت این روش است. در این روش حجم حالت‌های مورد بررسی به سرعت افزایش یافته و با سرعت بالاتری جواب مناسب به دست می‌آید.

درصد تصمیمات انتخاب شده در شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب برای محصول ۱ و محصول ۲ نشان داده شده است.

همانطور که مشاهده می‌شود، در دوره‌ی اول تصمیم‌گیری به‌صورت قطعی مشخص است، زیرا ما دقیقاً وضعیت سیستم را می‌دانیم. با این حال، در مراحل



شکل ۱۱. درصد ایجاد بسته‌های تبلیغاتی در بودجه، محصول ۱.



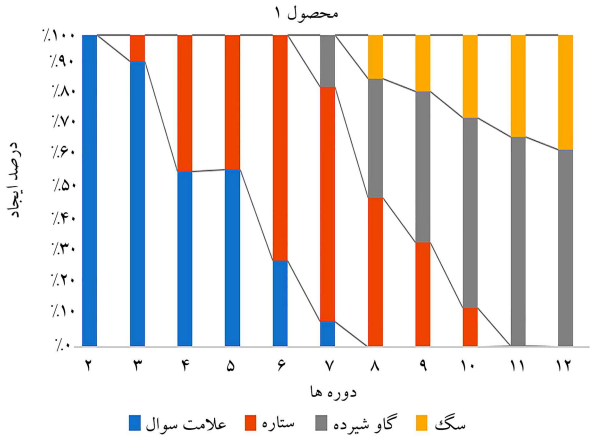
شکل ۱۲. درصد ایجاد بسته‌های تبلیغاتی در بودجه، محصول ۲.

بعد، تصمیم‌گیری می‌تواند با توجه به عدم اطمینان در نظرگرفته شده، متفاوت باشد. بسته‌های تهاجمی‌تر تقریباً در مراحل میانی انتخاب شده‌اند که با قیمت بالا و مرحله‌ی چرخه زندگی آن‌ها مطابقت دارد. در عین حال به‌صورت محسوسی برای محصول ۲ تهاجمی‌تر اقدام می‌شود، علت این امر می‌تواند نسبت قیمتی بالاتر آن باشد.

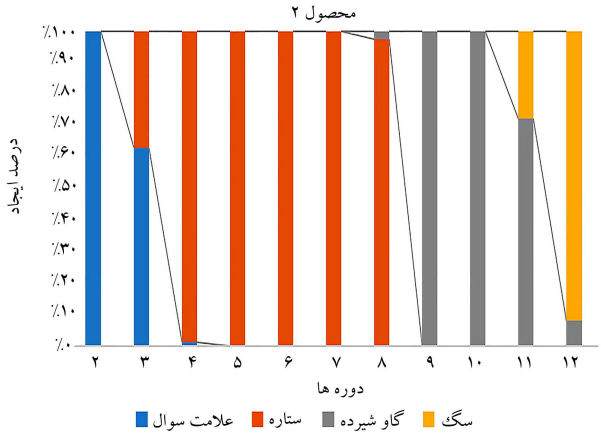
شناخت مسیری که محصول طی کرده (روند تغییر حالت‌ها) با توجه به انتخاب‌های الگوریتم پیشنهادی، به تصمیم‌گیری طی دوره‌های برنامه‌ریزی کمک کرده و می‌تواند دیدگاه مناسبی را در اختیار مدیران و برنامه‌ریزان قرار دهد. برای بررسی چگونگی روند تغییرات مراحل عمر محصول و طبقه‌ی ماتریس BCG، وضعیت هر یک از موارد فوق را در طی دوره‌های مختلف در میان حالت‌های بروزرسانی شده مورد بررسی قرارگرفته است. شکل‌های ۱۱ و ۱۲، درصد حالت قرارگیری محصولات ۱ و ۲ در مراحل مختلف چرخه‌ی عمر را در ۱۲ دوره‌ی مورد بررسی، نشان می‌دهد. (برای مثال در دوره‌ی ۶ برای محصول ۱، تقریباً در ۸۵ درصد حالت‌های بروزرسانی شده، مرحله‌ی چرخه‌ی عمر در وضعیت معرفی و تقریباً ۱۵ درصد در مرحله‌ی رشد قرار داشته است).

به نظر می‌رسد که محصول ۲ با تصمیمات پیشنهادی به‌صورت تقریبی منحنی عمر خود را کامل طی کرده و در دوره‌های پایانی به مرحله‌ی افول رسیده است، این در حالی است که محصول ۱ این مراحل را طی نکرده و با توجه به تصمیمات ضعیف گرفته شده، در دوره‌های پایانی هنوز در مرحله‌ی رشد و یا بلوغ قرار دارد.

شکل‌های ۱۳ و ۱۴ وضعیت قرارگیری ماتریس BCG در طی دوره‌های مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳. درصد ایجاد طبقه‌های ماتریس BCG محصول ۱.

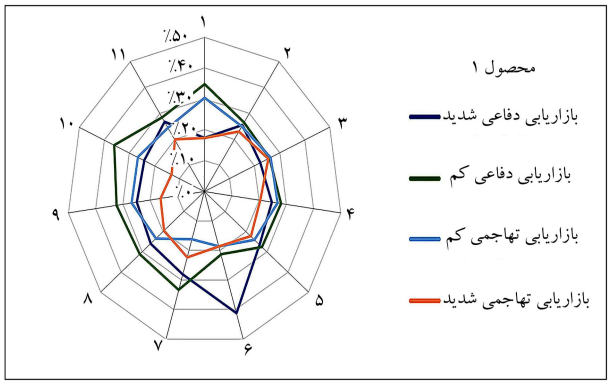


شکل ۱۴. درصد ایجاد طبقه‌های ماتریس BCG محصول ۲.

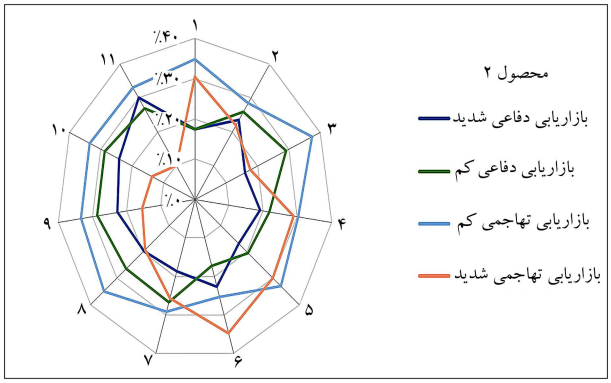
شکل ۱۳ به نوعی تبیین کننده این موضوع است که به‌صورت تقریبی می‌توان ادعا کرد که در طی ۱۲ دوره‌ی مورد بررسی، محصول ۱، چرخه حرکتی طبیعی خود را (یعنی حرکت از بخش علامت سوال‌ها به سمت ستاره‌ها و سپس حرکت به سمت گاوهای شیرده و در نهایت بخش سگ‌ها) نتوانسته به‌صورت کامل به اتمام برساند.

همچنین، با توجه به شکل ۱۴ می‌توان ادعا کرد که محصول ۲ تا حدودی با انتخاب بسته‌های تبلیغاتی بهتر در دوره‌های ۴ تا ۸ با احتمال بیشتری در طبقه‌ی ستاره‌ها، و در دوره‌های ۸ تا ۱۱، طبقه گاوها شیرده و دوره‌ی آخر، در طبقه سگ‌ها قرار گرفته است، که این موضوع نشان‌دهنده‌ی نزدیک شدن به پایان عمر محصول است. نتیجه فوق با یافته‌های پیشین در منحنی عمر صورت مطابقت داشته و آن را نیز تأیید می‌کند.

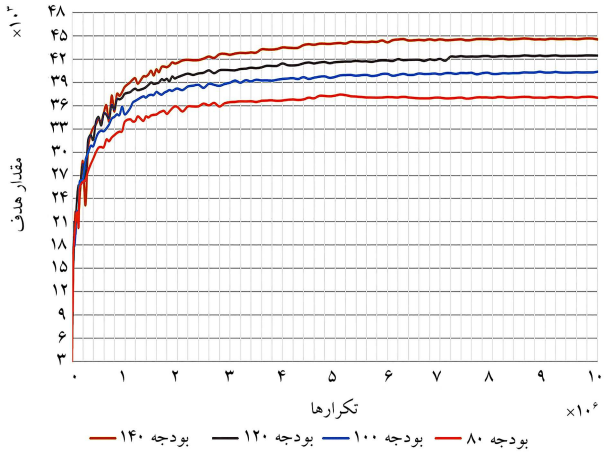
نوع واکنش رقبا به انتخاب‌های صورت گرفته توسط الگوریتم از دیگر عواملی است که می‌تواند در جواب مسئله بسیار تأثیرگذار باشد. شکل‌های ۱۵ و ۱۶، درصد واکنش رقبا محصولات به تصمیمات را نشان می‌دهد. رقبای محصول ۱ با توجه به اقدامات صورت گرفته، بیشتر رویکرد «بازاریابی کم‌دفاع» را انتخاب کرده‌اند. آن‌ها در دوره‌های اولیه تصمیم‌گیری حالت تهاجمی‌تری نسبت به دوره‌های پایانی دارد امّا رقبای محصول ۲، به‌صورت محسوسی رویکرد «بازاریابی کم‌تهاجم» را نسبت به سایر رویکردها، با احتمال بیشتری انتخاب کرده‌اند. رقبای محصول ۲ در دوره‌ی ششم، اقدامات خود را به شدت تهاجمی کرده، که می‌تواند به علت تصمیمات تهاجمی بالا در آغاز این دوره باشد ولی رقبای محصول ۱، به شدت دفاعی اقدام می‌کنند که این امر نیز می‌تواند به دلیل



شکل ۱۵. درصد انتخاب رقبا در دوره‌های مختلف محصول ۱.



شکل ۱۶. درصد انتخاب رقبا در دوره‌های مختلف محصول ۲.

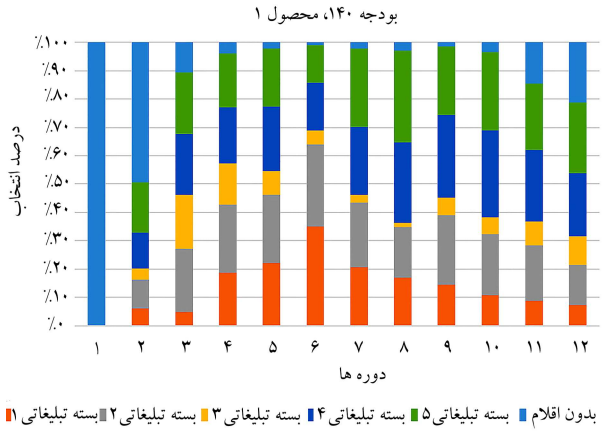


شکل ۱۷. مقدار هدف ایجاد شده در بودجه‌های کل متفاوت.

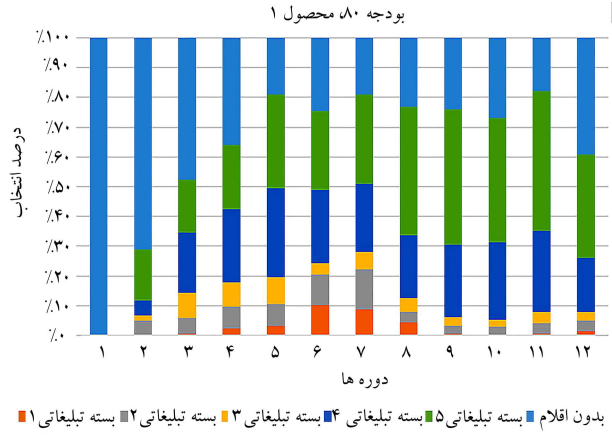
تصمیمات محافظه کارانه در مورد بسته‌های تبلیغاتی انتخابی برای محصول ۱ باشد.

واضح است که مقدار بودجه‌ی در دسترس می‌تواند در انتخاب بسته‌های تبلیغاتی مختلف بسیار اثرگذار باشد. در شکل ۱۷ مقایسه‌یی بین مقادیر ارزش مسئله با بودجه‌های مختلف صورت پذیرفته است که نشان دهنده‌ی افزایش مقدار تابع هدف با افزایش بودجه تخصیص داده شده است. نکته‌ی قابل توجه در این موضوع این است که ارتباط بین افزایش بودجه و افزایش تابع هدف به‌صورت خطی نبوده و با بالاتر رفتن بودجه، از رشد مقدار هدف کاسته شده که نشان‌می‌دهد با افزایش غیراصولی بودجه لزوماً به همان میزان هزینه شده، سودآوری حاصل نمی‌شود.

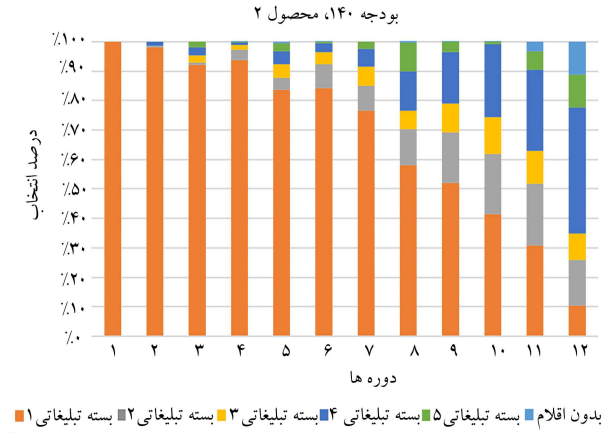
نتایج به دست آمده از حل مسئله با بودجه‌ی ۱۴۰ و ۸۰ جهت بررسی نوع



شکل ۱۸. درصد انتخاب بسته تبلیغاتی با بودجه کل ۱۴۰ محصول ۲.



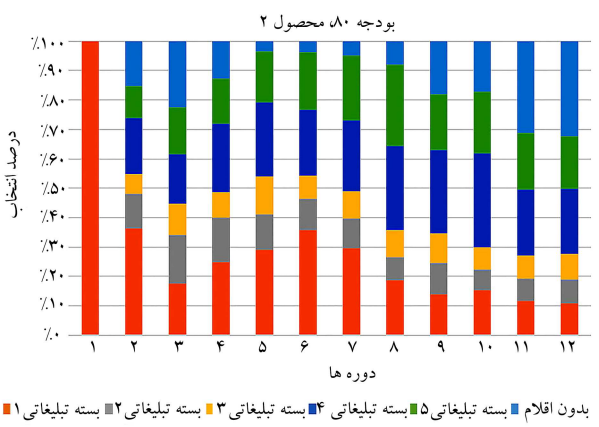
شکل ۱۹. درصد انتخاب بسته تبلیغاتی با بودجه کل ۸۰ محصول ۱.



شکل ۲۰. درصد انتخاب بسته‌ی تبلیغاتی با بودجه کل ۱۴۰ محصول ۲.

تغییر روند جواب‌ها با توجه به میزان بودجه در برای محصول ۱ در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ آورده شده است. با افزایش بودجه به همان میزان بر شدت انتخاب رسانه‌های تهاجمی افزوده می‌شود ولی روند کلی تصمیم‌گیری حفظ شده است.

بر اساس شکل‌های ۲۰ و ۲۱، محصول ۲ با کاهش بودجه علاوه بر کاهش انتخاب بسته‌های تهاجمی‌تر بر تنوع انتخاب‌ها در دوره‌های مختلف افزوده شده است.



شکل ۲۱. درصد انتخاب بسته‌ی تبلیغاتی با بودجه کل ۸۰ محصول ۲.

۵. نتیجه‌گیری

هدف این مقاله، شکل دادن به یک برنامه‌ریزی تبلیغات موجه با بررسی واکنش‌های ناشی آن بر روی فروش در هنگام دست‌یابی به هدف بیشینه‌سازی سود بازار است. تخصیص بودجه‌ی رسانه‌ها برای محصولات مختلف به‌صورت هم زمان با هدف بیشینه‌سازی حجم فروش مورد بحث قرارگرفت. جهت واقعی‌تر شدن مسئله، در مدل پیشنهادی سعی شد تا بسیاری از عدم‌قطعیت‌های موجود مورد بررسی قرار گرفته و در مدل لحاظ شود. همچنین وجود محدودیت‌هایی نظیر بودجه، مستقل بودن محصولات از یکدیگر، پویایی و انفجار ابعاد را در نظرگرفتیم.

یکی از بهترین روش‌ها برای حل این مسئله، استفاده از یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویای تقریبی است، که می‌تواند چالش‌های موجود در مسئله شامل تصمیمات چندمرحله‌یی، عدم‌قطعیت‌ها موجود در مسئله و بزرگی ابعاد را به‌صورت همزمان برطرف سازد. در ادامه یک مطالعه‌ی موردی با استفاده از الگوریتم پیشنهادی با این روش برای دو محصول در طول یک سال (۱۲ دوره‌ی ماهیانه) و با در نظرگرفتن ۵ بسته تبلیغاتی مختلف صورت پذیرفت.

نتیجه نشان داد که ۱۰ میلیون تکرار برای همگرا شدن نتایج، مناسب خواهد بود. این الگوریتم به طور عمده بر تخصیص بودجه بیشتر به محصول ۲ به جای محصول ۱ به دلیل نسبت قیمتی، چرخه‌ی عمر و اثربخشی متفاوت بسته‌ها برای این محصولات، تأکید دارد. تجزیه و تحلیل جواب پایانی الگوریتم بر اساس بودجه‌ی باقیمانده، روند منحنی عمر و ماتریس BCG انجام شد که نشان می‌دهند محصول ۱ دوره‌ی عمر خود را با تصمیمات اتخاذ شده با احتمال زیادی به پایان نرسانده ولی این موضوع برای محصول ۲ بالعکس است.

واکنش رقبا نیز به‌عنوان یکی از عوامل مؤثر بر مسئله مورد بررسی قرارگرفت که نشان داد برای محصول ۱، رقبای آن به بازاریابی دفاعی‌ترگرایش دارند. همچنین بودجه کل در مقادیر متفاوت (۴ بودجه متفاوت) مورد بررسی قرارگرفت که بررسی‌ها نشان می‌دادند با افزایش مقدار بودجه مقدار هدف با سرعت (رشد) کمتری افزایش پیدا می‌کند.

در پژوهش های آتی می‌توان محصولات را به‌صورت وابسته در نظر گرفت. همچنین لحاظ اثرات متقابل رسانه‌ها و محصولات در حین محاسبه تأثیرات ناخالص و تصمیم‌گیری به‌صورت سلسله‌مراتبی برای محصولات را دنبال کرد. همچنین تعیین میزان بودجه توسط مدل و انتخاب بودجه بر اساس تحلیل نتایج از موارد جذاب در مقالات آتی می‌تواند باشد.

پانوشت‌ها

1. outdoor advertising
2. oligopoly
3. Monte Carlo
4. mathematical programming
5. fuzzy and robust programming
6. approximate dynamic programming (ADP)
7. cost function approximations (CFA)
8. value function approximations (VFA)
9. policy function approximations (PFA)
10. multiperiod multiproduct advertising budgeting (MAB)
11. the boston consulting group's product portfolio matrix
۱۲. در برخی منابع با عنوان «نزول» آورده شده است.
13. infeasible
14. lookup-table
15. exploitation
16. exploration
17. harmonic

منابع (References)

1. Jha, P. and et al. "Multi-product dynamic advertisement planning in a segmented market", *Yugoslav Journal of Operations Research*, **27**(2), pp. 169-204 (2017).
2. Kotler, P. and Armstrong, G., *Principles of Marketing*, Pearson Education (2010).
3. Bass, F.M. and Lonsdale, R.T. "An exploration of linear programming in media selection", *Journal of Marketing Research*, **3**(2), pp. 179-188 (1966).
4. Charnes, A. and et al. "A goal programming model for media planning", *Management Science*, **14**(8), B:423 (1968).
5. Wiedey, G. and Zimmermann, H.-J. "Media selection and fuzzy linear programming", *Journal of the Operational Research Society*, **29**(11), pp. 1071-1084 (1978).
6. Basu, A.K. and Batra, R. "ADSPLIT: a multi-brand advertising budget allocation model", *Journal of Advertising*, **17**(2) pp. 44-51 (1988).
7. Nowak, G.J., Cameron, G.T. and Krugman, D.M. "How local advertisers choose and use advertising media", *Journal of Advertising Research*, **33**(6), pp. 39-50 (1993).
8. Fruchter, G.E. and Kalish, S. "Dynamic promotional budgeting and media allocation", *European Journal of Operational Research*, **111**(1), pp. 15-27 (1998).
9. Rojas, C. and Peterson, E.B. "Demand for differentiated products: Price and advertising evidence from the US beer market", *International Journal of Industrial Organization*, **26**(1), pp. 288-307 (2008).
10. Albadvi, A. and Koosha, H. "A robust optimization approach to allocation of marketing budgets", *Management Decision*, **49**(4), pp. 601-621 (2011).
11. Beltran-Royo, C. and et al. "Multistage multiproduct advertising budgeting", *European Journal of Operational Research*, **225**(1), pp. 179-188 (2013).
12. Kaul, A. and et al. "Multi-period media planning for multi-products incorporating segment specific and mass media", *Annals of Operations Research*, **269**(1-2), pp. 317-359 (2018).
13. Paiva, F.D. and et al. "Decision-making for financial trading: a fusion approach of machine learning and portfolio selection", *Expert Systems With Applications*, **115**, pp. 635-655 (2019).
14. Mes, M.R. and Rivera, A.P. "Approximate dynamic programming by practical examples", in Markov Decision Processes in Practice, Springer. pp. 63-101 (2017).
15. Powell, W.B. "Clearing the jungle of stochastic optimization, in Bridging data and decisions", *Informs*, pp. 109-137 (2014).
16. Papadaki, Katerina P. and Warren B. Powell. "Exploiting structure in adaptive dynamic programming algorithms for a stochastic batch service problem", *European Journal of Operational Research*, **142**(1), pp. 108-127 (2002).
17. Philip, K., *Principles of Marketing*, Pearson higher education; (2017).
18. Kotler, P. and et al., *Marketing Management*, 15th Global Edition. England: Pearson Educationn Limited (2016).
19. Papadaki, K.P. and Powell, W.B. "Exploiting structure in adaptive dynamic programming algorithms for a stochastic batch service problem", *European Journal of Operational Research*, **142**(1), pp. 108-127 (2002).
20. Bellman, Richard. and Stuart Dreyfus. "Functional approximations and dynamic programming", *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, **13**(68), pp. 247-251 (1959).
21. Powell, W.B., *Approximate Dynamic Programming: Solving the Curses of Dimensionality*, **703**, John Wiley & Sons (2007).