مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (زمستان ۱۴۰۰)
دوره‌ی ۱-۳۷، شماره‌ی ۲، ص. ۳-۱۰، (پژوهشی)

Original Article

توسعه‌ی مدلی یکپارچه در زنجیره‌ی تأمین دوسطحی با فرض تولید اقلام معیوب

علیرضا حجی* **(دانشیار)**
فردین رضائی زینالی (کارشناس‌ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

اقلام معیوب در چرخه‌ی تولید محصولات یکی از ویژگی‌های جدایی‌ناپذیر این‌گونه سیستم‌هاست که بنا بر ویژگی این محصولات و سیستم‌های مرتبط اقدامات مختلفی مانند بازفرآوری، تعمیر، فروش با قیمت پایین‌تر و یا اسقاط در قبال اقلام معیوب صورت می‌پذیرد. در این تحقیق ما به بررسی زنجیره‌ی تأمینی یکپارچه میان خریدار و فروشنده و اهمیت هماهنگی تصمیمات مربوط به مدیریت موجودی در زنجیره‌ی تأمین پرداخته‌ایم به‌نحوی که اقلام معیوب پس از بازرسی ۱۰۰ درصدی توسط خریدار به فروشنده عودت داده شده و فروشنده این محصولات را به قیمتی پایین‌تر به فروش می‌رساند. در مدل پیشنهادی، نرخ محصولات معیوب به‌صورت احتمالی لحاظ شده و خطاهای نوع اول و نوع دوم نیز در بازرسی خریدار منظور شده است. همچنین جهت تأکید بر اهمیت همکاری در این زنجیره‌ی تأمین، سرمایه‌گذاری بر روی کیفیت را در مدل پیشنهادی منظور کرده‌ایم.

واژگان کلیدی: مدیریت زنجیره‌ی تأمین، مدیریت موجودی، تعیین اندازه‌ی انباشته اقتصادی به‌صورت مشترک، اقلام معیوب، خطای بازرسی.

ahaji@sharif.edu
rezaeizeynali_fardin@ie.sharif.edu

۱. مقدمه

در حالت ایده‌آل تصمیم‌گیری در مورد زنجیره‌ی تأمین توسط یک تصمیم‌گیرنده که به اطلاعات تمامی اعضا اشراف کامل دارد صورت می‌پذیرد و منافع حاصل از این تصمیم‌گیری به‌صورت عادلانه متوجه تمامی اعضا می‌شود. این نوع مدیریت را «زنجیره‌ی تأمین مدیریت متمرکز» می‌نامند.[۱و۲] حال آن که در اکثر مواقع هر عضو از زنجیره‌ی تأمین به‌تمامی اطلاعات دسترسی ندارد و مایل به تصمیم‌گیری مستقل و بیشینه‌سازی سود خود است که منجر به مدیریت غیرمتمرکز در زنجیره‌ی تأمین می‌شود.[۳] فرمول‌بندی سازوکار اجزای زنجیره‌ی تأمین و بررسی عواید هماهنگ‌سازی این اعضا ما را در حل مسئله‌ی پیش رو یاری خواهد کرد. از آن‌جا که در مسائل لجستیکی سطح موجودی تأثیر به‌سزایی در هزینه‌های زنجیره‌ی تأمین دارد، توجه اکثر محققان را نیز به خود جلب کرده است. هدف از ایجاد هماهنگی در این حوزه، نیز مانند دیگر حوزه‌ها، افزایش سودآوری کل زنجیره است.[۴و۵] نظر به اهمیت این موضوع، تحقیقات در زمینه‌ی اندازه‌ی انباشته هماهنگ از سال ۱۹۷۶ آغاز شده است.

مدل تأمین اندازه‌ی اقتصادی مشترک بنا بر ماهیت اجرایی خود برای تأمین‌کنندگانی که دارای رابطه‌ی همکاری بلندمدت هستند مناسب‌تر است. در صنایع بزرگ مانند خودروسازی و کالاهای الکتریکی این نوع روابط بیشتر به چشم می‌خورد.[۶] مسئله‌ی اندازه‌ی اقتصادی انباشته را می‌توان با استفاده از یک مثال ساده توضیح داد. فرض کنید خریداری مقدار مشخصی از یک کالا سفارش می‌دهد و فروشنده با توجه به مقدار سفارش، تولید را شروع و پس از اتمام، محموله را برای خریدار ارسال می‌کند.

در حالت تصمیم‌گیری مستقل، اندازه‌ی انباشته‌ی اقتصادی برای هریک مقداری مستقل خواهد داشت. طبعاً به دلیل تعیین مقدار سفارش از جانب خریدار فروشنده هزینه‌های بیشتری متقبل خواهد شد. حال‌آن که خریدار می‌تواند با تغییر در اندازه‌ی سفارش از هزینه‌های فروشنده کاسته و بر هزینه‌های خود بیفزاید. درصورتی که سود حاصل از این امر متوجه خریدار نیز شود، این تغییر می‌تواند قابل توجیه باشد.[۷و۸]

در مدلی که بر اساس این سازوکار پیشنهاد داده خواهد شد طرفین بر روی سطح سفارش‌دهی و بازه‌های ارسال سفارش تصمیم‌گیری خواهند کرد.

۲. مروری بر متون

یکی از اولین مدل‌های تعیین اندازه‌ی انباشته که هماهنگی میان خریدار و فروشنده را در نظر گرفته‌اند، توسط گویال در سال ۱۹۷۶ ارائه شده است؛ که در آن یک سیستم متشکل از یک فروشنده و یک خریدار در نظر گرفته شده است. در این مقاله، تأمین‌کننده فقط فروشنده‌ی محصول است و به این دلیل

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۵/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۹/۱۲/۲، پذیرش ۱۴۰۰/۱/۲۳.
DOI:10.24200/J65.2021.52427.1951

نرخ بازپرسازی موجودی بی‌نهایت است. همچنین کالا در قالب محموله‌هایی در حجم ثابت از جانب فروشنده برای خریدار ارسال می‌شود، و تعداد محموله‌های ارسالی و میزان سفارش، متغیرهای تصمیم‌اند. در ادامه با در نظر گرفتن نرخ تولید برای فروشنده، گویال در سال ۱۹۸۸ مدلی ارائه داد که اندازه‌ی انباشته فروشنده برابر با ضریب عدد صحیحی از مقدار سفارش است. فروشنده هر انباشته تولیدی را در قالب چند محموله در اندازه‌های یکسان، برای خریدار ارسال می‌کند.[۲]

پس از بهینه‌سازی هزینه‌های مشترک توسط گویال برای یک خریدار و یک فروشنده[۲] این تحقیق توسط بانرژه با در نظر گرفتن هزینه‌ی راه‌اندازی گسترش یافت.[۹] گویال نیز در ادامه این تحقیق، با در نظر گرفتن چندین مشتری در سطح دوم، مدل بانرژه را بازطراحی کرد. چاکرابورتی و بوویا[۱۰] مدل موجودی یکپارچه با محدودیت سطح خدمت فازی را در ادامه ایجاد کردند. که برای حل مدل از روش بهینه‌سازی تصادفی فازی استفاده شده است. در سال ۱۹۹۶، اوویانگ و همکاران[۱۱] مدلی یکپارچه را پیشنهاد دادند که در آن امکان کمبود و زمان تحویل متغیر را در نظر گرفته بودند. مفهوم زمان تحویل قابل کنترل نیز توسط اویانگ و همکاران معرفی شد. یک مدل یکپارچه با کاهش هزینه‌ی راه‌اندازی برای فروشنده نیز توسط سارکار و مجومدر[۱۲] ارائه شده است. در سال‌های اخیر، سرکار و همکاران[۱۳] یک مدل زنجیره‌ی تأمین دوسطحی را با هدف بهبود کیفیت محصول پیشنهاد داده‌اند. همچنین مدلی یکپارچه با تقاضای وابسته به قیمت فروش و با کاهش هزینه‌ی راه‌اندازی توسط دی و همکاران[۱۴] پیشنهاد شده است. اخیراً، مجومدر و همکاران[۱۵] یک مدل زنجیره‌ی تأمین را برای هزینه‌های متغیر تولید با نرخ تولید متغیر پیشنهاد کرده‌اند. در ادبیات این مسئله، مدل‌های ساده‌ی تک‌فروشنده ـ تک‌خریدار در دو راستا توسعه یافته است:

عمق: مواردی که تعداد سطوح زنجیره‌ی تأمین مورد بررسی و یا تعداد اعضای حاضر در هر سطح را افزایش داده‌اند.

گستره: مسائلی که علاوه بر هزینه‌های نگهداری موجودی و تولید، سودفروش، هزینه‌های انتقال محموله‌ها، کیفیت محصولات، یادگیری، فسادپذیری کالا و نظایر آن را نیز در نظر گرفته‌اند.[۳] یکی دیگر از دسته‌بندی‌ها که گلاک در مقاله مروری خود انجام داده، عبارت است از:[۱۶]

مدل‌های پایه‌یی:

- دوسطحی؛
- چندسطحی.

مدل‌های گسترش‌یافته، بر اساس:[۱۶]

- تقاضا یا لیدتایم تصادفی؛
- سرمایه‌گذاری بر روی کاهش لیدتایم؛
- کیفیت برای محصولات؛
- فساد و زوال محصولات؛
- یادگیری در تولید.

بر اساس مبحث سرمایه‌گذاری که در پژوهش سرکار و مون مورد بحث قرار گرفته است، کیفیت محصولات، به‌عنوان مشخصه‌یی که قابل بهینه‌سازی است، وارد مدل شده است.[۱۸] کاردناس بارون و همکاران[۱۹] یک مدل تولید اقتصادی با یک روش بهبودیافته برای حل مسئله ایجاد کردند. در این مدل، آن‌ها همچنین rework و محموله‌های متعدد را در نظر گرفتند. مدل کیفیت ناقص با تقاضای تصادفی توسط پال و همکاران تدوین شد.[۲۰] ضمانتی برای محصولات معیوب نیز فراهم شد که موجب افزایش میزان رضایت‌مندی شرکت‌ها می‌شود.

نوآوری پژوهش به‌طور خلاصه چنین است:

- همراه بودن فرایند تولید با اقلام معیوب؛
- عملیات بازرسی همراه با خطاهای دوگانه و احتمالی؛
- سرمایه‌گذاری روی کیفیت تولید؛
- در نظر گرفتن سیاست گارانتی برای محصولات معیوب.

۳. تعریف و مدل‌سازی مسئله

در ادبیات مدیریت موجودی، تلاش بسیاری برای توسعه مدل‌های تعیین اندازه‌ی انباشته با محدودیت‌های مختلف شده است، که یکی از این محدودیت‌ها، محدودیت کیفیت است.

فرض‌های زیر در مدل پیشنهادی، برقرارند:

- زنجیره‌ی تأمین دوسطحی و متشکل از یک فروشنده (تولیدکننده) و یک خریدار (خرده‌فروش) است؛
- در زنجیره‌ی تأمین مورد بحث مدل، تنها یک محصول تولید می‌شود؛
- نرخ تولید محصولات معیوب، متغیری احتمالی است؛
- با سرمایه‌گذاری روی کیفیت، میانگین نرخ معیوبی کاهش می‌یابد. از یک تابع سرمایه‌گذاری لگاریتمی بدین منظور در مدل استفاده شده است؛
- در این مدل سعی بر آن است تا با سرمایه‌گذاری روی کیفیت، میانگین تعداد اقلام معیوب کاهش یابد؛
- بازرسی ۱۰۰ درصدی که خریدار بر روی محموله دریافتی انجام می‌دهد، همراه با خطای نوع اول و دوم با توزیع یکنواخت پیوسته معلوم است؛
- محصولات معیوب پس از پایان بازرسی به فروشنده بازگردانده می‌شوند و فروشنده با ارزش معینی، آن‌ها را اسقاط می‌کند، یا با قیمت پایین‌تری در بازار ثانویه به فروش می‌رساند. نمای کلی زنجیره‌ی تأمین در شکل ۱ نمایش داده شده است:

در ادامه، علائم مربوط به اندیس‌های مورد استفاده در مدل‌سازی مسئله را آورده‌ایم:

۱.۳. اندیس‌ها

b: مشخص‌کننده‌ی پارامترهای مربوط به خریدار؛

s: مشخص‌کننده‌ی پارامترهای مربوط به فروشنده؛

j: مشخص‌کننده‌ی توابع مربوط به کل سیستم.

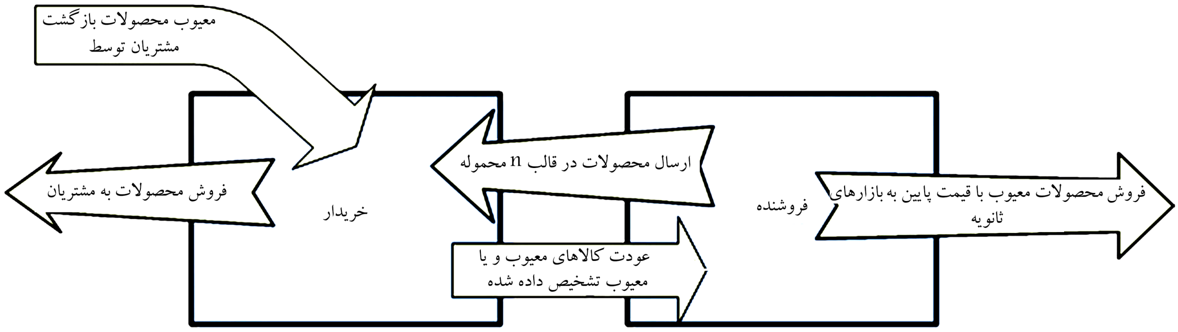
متغیرها

Q: اندازه‌ی محموله‌های ارسالی به خریدار؛

m: تعداد محموله ارسالی برای یک انباشته تولیدی؛

μ: احتمال معیوب بودن یک قطعه تولیدی؛

$f(\mu)$: تابع توزیع احتمال μ با میانگین $\frac{q}{2}$.



شکل ۱. نمای کلی زنجیره‌ی تأمین مسئله.[1]

پارامترها

D: نرخ تقاضای سالانه خریدار؛

P: نرخ تولید سالانه فروشنده؛

r: نرخ بازرسی محصولات؛

A: هزینه‌ی راه‌اندازی تولید برای فروشنده؛

F: هزینه‌ی ثابت هر محموله برای خریدار؛

u_1: احتمال خطای نوع ۱ (تشخیص یک کالای سالم به‌عنوان کالای معیوب)؛

$f(u_1)$: تابع توزیع خطای نوع ۱ با میانگین $\frac{\alpha}{2}$؛

u_2: احتمال خطای نوع ۲ (تشخیص یک کالای معیوب به‌عنوان کالای سالم)؛

$f(u_2)$: تابع توزیع خطای نوع ۲ با میانگین $\frac{\beta}{2}$؛

k_i: هزینه‌ی بازرسی هر واحد کالا نزد خریدار؛

k_w: هزینه‌ی ناشی از تولید یک واحد کالای معیوب برای فروشنده؛

k_{ab}: هزینه‌ی ناشی از فروش یک واحد محصول معیوب به‌جای محصول سالم برای خریدار؛

k_{as}: هزینه‌ی ناشی از فروش یک واحد محصول معیوب به‌جای محصول سالم برای فروشنده؛

$k_a = k_{ab} + k_{as}$: کل هزینه‌ی ناشی از فروش یک واحد محصول معیوب به‌جای محصول سالم برای سیستم؛

k_r: هزینه‌ی ناشی از تشخیص یک واحد محصول سالم به‌عنوان محصول معیوب؛

k: قیمت فروش واحد محصول توسط فروشنده به خریدار؛

h_s: هزینه‌ی سالانه‌ی نگهداری یک واحد موجودی نزد فروشنده؛

h_b: هزینه‌ی سالانه‌ی نگهداری یک واحد موجودی خریدار.

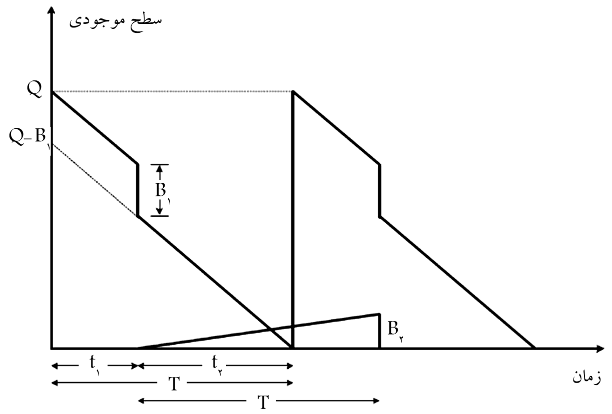
۴.۳. هزینه‌های مربوط به خریدار

در شکل ۲ رفتار سطح موجودی نزد خریدار نیز، برای این مسئله نشان داده شده است:

هزینه‌ی نگهداری موجودی نزد خریدار به مدت یک دوره تحویل محموله، عبارت است از:

$$HC_b = h_b \left(\begin{array}{c} \frac{Q^2((1-\mu)e_1+\mu(1-e_2))}{r} + \\ \frac{Q^2 \begin{pmatrix} 1-(e_1+\mu)+ \\ \mu(e_1+2e_2) \end{pmatrix} (1-\mu)(1-e_1)}{2D} \end{array} \right) \qquad (1)$$

بدین ترتیب، هزینه‌های خریدار در طول یک دوره‌ی تولیدی از رابطه‌ی ۳ تبعیت



شکل ۲. نمودار موجودی نزد خریدار.[8]

خواهد کرد:

$$C_b = mk_{ab}Q\mu e_2 + mk_iQ + mF + mHC_b \qquad (2)$$

برای به دست آوردن امید ریاضی کل هزینه‌ی سالانه نزد خریدار داریم:

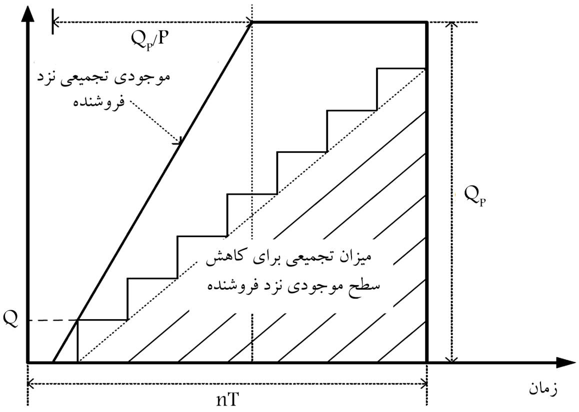
$$ETC_b = \frac{E(C_b)}{E(T_c)} \qquad (3)$$

بدین ترتیب با جایگذاری امید ریاضی متغیرهای تصادفی، در رابطه‌ی ۳ خواهیم داشت:

$$ETC_b = \frac{FD}{Q(1-\frac{q}{2})(1-\frac{\alpha}{2})} + \frac{D\left(k_i+k_{ab}\frac{q}{2}\times\frac{\beta}{2}\right)}{(1-\frac{q}{2})(1-\frac{\alpha}{2})} + h_bQ \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{D\left(\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\alpha}{2}+\frac{q}{2}\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\right)}{r(1-\frac{q}{2})(1-\frac{\alpha}{2})}\right) + \\ \left(\frac{\begin{array}{c} 1-q-\alpha+\alpha q+\frac{\beta}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)q+ \\ \left(1-\alpha-\beta+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{3}\right)\frac{q^2}{3}+\frac{\alpha^2}{3}(1-q) \end{array}}{2(1-\frac{q}{2})(1-\frac{\alpha}{2})} \right) \end{array} \right\} \qquad (4)$$

۵.۳. هزینه‌های مربوط به فروشنده

در شکل ۳ زیر ذوزنقه‌ی مشخص شده با خطوط تیره، بیانگر موجودی تجمعی



شکل ۳. نمودار رفتار تجمعی موجودی نزد فروشنده.[۸]

کالای تولید شده نزد فروشنده است و قسمت هاشورخورده بیان‌گر میزان کاسته شده از موجودی در طول زمان در طول یک دوره‌ی تولیدی است.

از این‌رو برای محاسبه هزینه‌ی کل سالانه نزد فروشنده و با جایگذاری امید ریاضی متغیرهای تصادفی داریم:

$$ETC_s = \frac{A}{mQ\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{D\left(k_w \frac{q}{2} + k_r\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\alpha}{2} + k_{as}\frac{q}{2}\times\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + h_s\left\{\frac{QD}{P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{mQD}{2P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{(m-1)Q}{2}\right\} \tag{5}$$

۶.۳. هزینه‌ی مربوط به سیستم در حالت تصمیم‌گیری هماهنگ

در حالت تصمیم‌گیری هماهنگ، تابع هدف مسئله‌ی حاصل مجموع هزینه‌های فروشنده و خریدار و همچنین در نظر گرفتن تابع مربوط به سرمایه‌گذاری بر روی کیفیت است. بدین ترتیب، تابع هدف عبارت است از:

$$ETC(m,q,Q) = \frac{A+mFD}{mQ\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{D\left(k_i + k_a\frac{q}{2}\times\frac{\beta}{2} + k_w\frac{q}{2} + k_r\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + h_bQ\left\{\left(\frac{D\left(\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\alpha}{2}+\frac{q}{2}\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\right)}{r\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) + \left(\frac{1-q-\alpha+\alpha q+\frac{\beta}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)q + \left(1-\alpha-\beta+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{3}\right)\frac{q^2}{3}+\frac{\alpha^2}{3}(1-q)}{2\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\right\} + h_s\left\{\frac{QD}{P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{mQD}{2P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{(m-1)Q}{2}\right\} + a_q(q) \tag{6}$$

با توجه به تابع سرمایه‌گذاری معرفی‌شده در،[۲۰] داریم:

$$q = q_0 e^{-\delta a_q(q)} \tag{7}$$

$$a_q(q) = a - b\times \ln(q) \tag{8}$$

$$a = \frac{\ln(q_0)}{\delta} \tag{9}$$

$$b = \frac{1}{\delta} \tag{10}$$

ایده‌ی اساسی در این تابع بر روند کاهش نمایی در تعداد اقلام معیوب به نسبت سرمایه‌گذاری انجام گرفته، متکی است که در آن q_0 نسبت اولیه اقلام معیوب و δ ضریب فنّاوری است که نشان دهنده‌ی درصد کاهش q_0 به‌ازای یک دلار افزایش در میزان سرمایه‌گذاری است. برای بررسی رفتار تابع q مشتق های اول و دوم آن را نسبت به a_q به دست می‌آوریم که خواهیم داشت:

$$\frac{d^2(q)}{d(a_p)^2} = \frac{a}{(a_p)^2} \tag{11}$$

$$\frac{d(q)}{d(a_p)} = -\frac{a}{a_p} \tag{12}$$

مشخص است که تابع درصد اقلام معیوب براساس میزان سرمایه‌گذاری، تابعی پیوسته، محدب و نزولی است که در صورت میل کردن میزان سرمایه‌گذاری به سمت بی‌نهایت، درصد اقلام معیوب نیز به سمت صفر میل خواهد کرد. بدین ترتیب مدل ریاضی مسئله برای حالت تصمیم‌گیری هماهنگ، عبارت است از:

$$Min z = ETC(m,q,Q) \tag{13}$$

$$s.t.$$

$$Q \geq 0 \tag{14}$$

$$0 \leq q \leq q_0 \tag{15}$$

$$a_q(q) = a - b\times \ln(q) \tag{16}$$

$$in\ integer \tag{17}$$

۴. حل مسئله

در این بخش، الگوریتمی برای حل مسائل مدل پیشنهادی در قالب دو حالت تصمیم‌گیری هماهنگ و تصمیم‌گیری مستقل ارائه می‌شود. از آن‌جا که m گسسته است باید برای آن حدود بالا و پایین مناسب برای مقادیر ممکن آن بیابیم و در هر تکرار الگوریتم نهایی باید به دنبال بهینه‌سازی تابع هدف برحسب Q و q، برای مقدار تثبیت شده m باشیم. برای سادگی، توابع جدید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$R_a = \left(\frac{D\left(\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\alpha}{2}+\frac{q}{2}\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\right)}{r\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) + \left(\frac{1-q-\alpha+\alpha q+\frac{\beta}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)q + \left(1-\alpha-\beta+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{3}\right)\frac{q^2}{3} + \frac{\alpha^2}{3}(1-q)}{2\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \tag{18}$$

$$R_b = \frac{D}{P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{mD}{2P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{(m-1)}{2} \tag{19}$$

که با این تعریف، تابع هدف را می‌توان چنین بیان کرد:

$$ETC\left(m,q,Q\right)=\frac{D\begin{pmatrix} k_i+k_a\frac{q}{2}\times\frac{\beta}{2}+k_w\frac{q}{2} \\ +k_r\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}}{\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+ \\ Q\left(h_bR_a+h_sR_b\right)+\frac{A+mFD}{mQ\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+ \\ a_q\left(q\right) \tag{20}$$

پس به‌ازای مقادیر مشخص برای m و q، کمینه‌تابع در ریشه‌ی مشتق درجه اول اتفاق می‌افتد:

$$\frac{\partial ETC}{\partial Q}=0 \\ \to Q^*=\left(\frac{A+mFD}{m\left(h_bR_a+h_sR_b\right)\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

با جایگذاری Q^* در رابطه‌ی مربوط به تابع هدف مسئله، می‌توان تابع هدف را برحسب m و q بیان کرد:

$$ETC\left(m,q,Q^*\right)=ETC'\left(m,q\right)= \\ 2\sqrt{\frac{(A+mFD)(h_bR_a+h_sR_b)}{m\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}+ \\ \frac{D\left(k_i+k_a\frac{q}{2}\times\frac{\beta}{2}+k_w\frac{q}{2}+k_r\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \\ +a_q\left(q\right) \tag{22}$$

حال در هر مقدار مشخص برای m، یک تابع داریم که می‌خواهیم در یک بازه‌ی محدود کمینه‌ی آن را بیابیم. رویه‌یی که می‌توان پیش گرفت، این است که برای هر مقدار مشخص m، یک تابع تک‌متغیره برحسب q در یک بازه محدود خواهیم داشت که می‌توانیم در صورت مشتق‌پذیر بودن تابع در بازه، با یافتن نقاط پایداری (ریشه‌های مشتق مرتبه اول) و محاسبه‌ی مقدار تابع هدف جدید در این نقاط، مقدار کمینه را برای تابع می‌یابیم. حال می‌بایست برای مقادیر m، حدود پایین و بالا را بیابیم و در این بازه برای تمام مقادیر m، مسئله به‌صورت گفته شده در بالا حل شود.

برای یافتن این حدود ابتدا m را پیوسته در نظر می‌گیریم و برای مقادیر مشخص q، مقدار بهینه‌اش را می‌یابیم که با توجه به کران‌دار بودن q، می‌توان حدود بالا و پایین برای m یافت. کمینه‌سازی رابطه‌ی ۲۲، معادل با کمینه‌سازی عبارت زیر است:

$$\Delta=\frac{(A+mFD)(h_bR_a+h_sR_b)}{m\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}= \\ \frac{(A+mFD)}{m}\left(\Gamma+m\Pi\right) \tag{23}$$

در حالی‌که:

$$\Gamma=\frac{h_bRa(q)}{\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+ \\ \frac{h_s}{\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\left\{\frac{D}{2P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{1}{2}\right\} \tag{24}$$

$$\Pi=\frac{h_s}{\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\left\{-\frac{D}{2P\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{1}{2}\right\} \tag{25}$$

با توجه به مشخص بودن کمینه‌و بیشینه‌ی توابع موجود در مخرج کسرها، داریم:

$$\frac{A\Gamma}{FD\Pi}\le upperbound\left(\frac{A\Gamma}{FD\Pi}\right)=\frac{A}{FD}\times \\ \frac{h_b\left\{\begin{matrix}\left(\frac{D\frac{\alpha}{2}}{r\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)+\left(\frac{D\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}{2r\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{q_0}{2}\right)}\right)q_0 \\ +\left(\frac{1-\alpha+\frac{\alpha^2}{3}}{2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{q_0}{2}\right)}\right)\end{matrix}\right\}+ \\ h_s\left\{\frac{D}{P\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{q_0}{2}\right)}-\frac{1}{2}\right\}}{h_s\left\{-\frac{D}{2P\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{1}{2}\right\}} \tag{26}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$m_{min}=1 \tag{27}$$

$$m_{\max}=\sqrt{upperbound\left(\frac{A\Gamma}{FD\Pi}\right)} \tag{28}$$

به این ترتیب، محدوده‌ی جست‌وجو برای مقادیر m، مشخص شد. حال باید برای هر مقدار مشخص m، مقادیر q و Q را بیابیم. سپس با محاسبه‌ی مقدار تابع هزینه‌ی کل برای مقادیر به دست آمده، مقدار بهینه برای m را به دست آوریم.

وقتی می‌خواهیم مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم را برای حالتی که دو جزء زنجیره‌ی مستقل از هم تصمیم‌گیری می‌کنند، محاسبه کنیم؛ ابتدا باید تابع هزینه‌ی به‌دست‌آمده برای خریدار را با ثابت در نظرگرفتن q، برحسب Q بهینه‌سازی کنیم. تابع مذکور عبارت است از:

$$ETC_b=\frac{FD}{Q\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+ \\ \frac{D\left(k_i+k_{ab}\frac{q_0}{2}\times\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+h_bQR_a\left(q_0\right) \tag{29}$$

پس کمینه‌ی‌تابع در ریشه‌ی مشتق درجه اول اتفاق می‌افتد:

$$\frac{\partial ETC_b}{\partial Q}=0 \\ \to Q^*=\sqrt{\frac{FD}{(h_bR(q_0))\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \tag{30}$$

پس از این‌که مقدار بهینه‌ی سطح سفارش توسط خریدار مشخص شد، با جایگذاری مقدار Q^* در رابطه‌ی مربوط به هزینه‌ی فروشنده، آن را برحسب m بهینه‌سازی می‌کنیم:

$$ETC_s\left(m\right)=\frac{A}{mQ^*\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+ \\ \frac{D\left(k_w\frac{q_0}{2}+k_r\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\frac{\alpha}{2}+k_{as}\frac{q_0}{2}\times\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+ \\ h_s\left\{\begin{matrix}\frac{Q^*D}{P\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{mQ^*D}{2P\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}+ \\ \frac{(m-1)Q^*}{2}\end{matrix}\right\} \tag{31}$$

کمینه‌ی تابع در ریشه‌ی مشتق درجه اول اتفاق می‌افتد:

$$\frac{\partial ETC_s}{\partial m}=0 \\ \to m^*=A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{h_s\left(\frac{Q^*}{2}-\frac{Q^*D}{2P\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)}{Q^*\left(1-\frac{q_0}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^{\frac{-1}{2}} \tag{32}$$

با توجه به این‌که ممکن است ریشه‌ی مشتق مرتبه‌ی اول، عدد صحیح نباشد؛ تابع $ETC_s(m)$ را به‌ازای رند پایین و رند بالای آن محاسبه می‌کنیم؛ هرکدام را که هزینه‌ی کم‌تری ایجاد کند به‌عنوان جواب بهینه گزارش می‌کنیم.

جدول ۱. مقادیر پارامترهای مثال مربوط به مدل.

پارامتر	مقدار
D تقاضا	۵۰۰۰
P نرخ تولید	۶۰۰۰
A هزینه‌ی راه‌اندازی	۵۰۰۰۰
F هزینه‌ی سفارش‌دهی	۵۰
q_0 نرخ اقلام معیوب	۰/۱
α خطای نوع اول	۰/۰۵
β خطای نوع دوم	۰/۰۵
k_i هزینه‌ی بازرسی	۰/۵
k_w هزینه‌ی تولید یک واحد کالای معیوب	۱۰
k_{ab} هزینه‌ی خطای نوع دوم برای خریدار	۵۰
k_{as} هزینه‌ی خطای نوع دوم برای فروشنده	۲۰
h_s هزینه‌ی نگهداری فروشنده	۲
h_b هزینه‌ی نگهداری خریدار	۲۰
δضریب بهبود کیفیت به ازای ۱ واحد سرمایه‌گذاری	۰/۰۰۰۵

۵. نتایج عددی و تحلیل حساسیت

در این بخش، با یک مثال عددی پایه که از داده‌های استاندارد موجود در ادبیات در آن‌ها استفاده شده و در جدول ۱ آورده شده است، به بررسی مدل ارائه شده در این پژوهش پرداخته‌ایم. نتایج حاصل از حل این مثال برای چهار حالت مورد بررسی قرار گرفته است.

در جدول ۲ مشاهده می‌شود که حتی با سرمایه‌گذاری روی کیفیت در حالت عدم هماهنگی در تصمیم‌گیری اعضای زنجیره، بهبود قابل توجهی صورت نگرفته است. در ادامه به تحلیل حساسیت مدل ارائه شده نسبت به چند پارامتر پرداخته‌ایم؛ لذا شاخص زیر (رابطه‌ی ۳۳) را تعریف می‌کنیم:[۱۲]

$$PI = ۱ - \frac{TC_J}{TC_I} \qquad (۳۳)$$

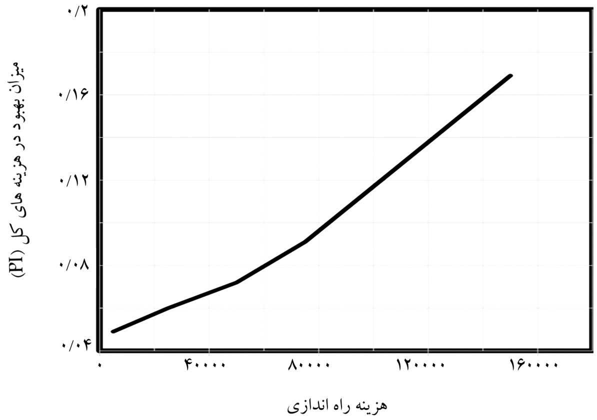
که بیانگر نسبت کاهش هزینه‌ها، یا به‌بیان دیگر افزایش سود سیستم، در حالت تصمیم‌گیری هماهنگ نسبت به حالت تصمیم‌گیری مستقل است.

۱.۵. تحلیل حساسیت مدل نسبت به هزینه‌ی راه‌اندازی

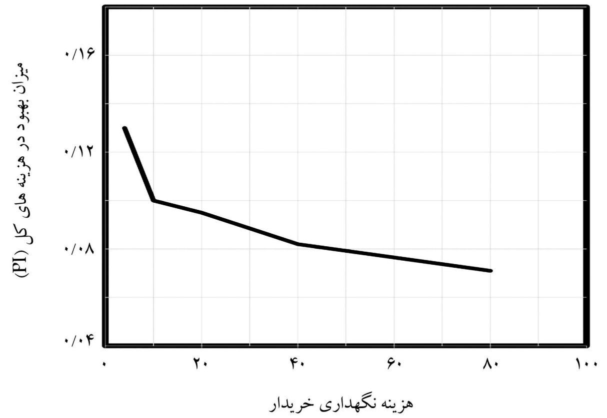
- شکل ۴ نشان می‌دهد با افزایش هزینه‌ی راه‌اندازی تولید، اهمیت هماهنگ‌سازی تصمیم‌ها بیش‌تر می‌شود چون در حالت تصمیم‌گیری مستقل، خریدار تعیین‌کننده بیشتر موارد است و توجهی به هزینه‌ی راه‌اندازی تولید برای فروشنده ندارد؛
- افزایش هزینه‌ی راه‌اندازی تولید، تأثیر افزایشی بسیار ناچیز بر روی مقدار Q^* در حالت مستقل و q^* دارد، ولی تأثیر آن بر افزایش مقادیر Q^* در حالت هماهنگ و m^* مشهودتر است.

۲.۵. تحلیل حساسیت مدل نسبت به هزینه‌ی نگهداری خریدار

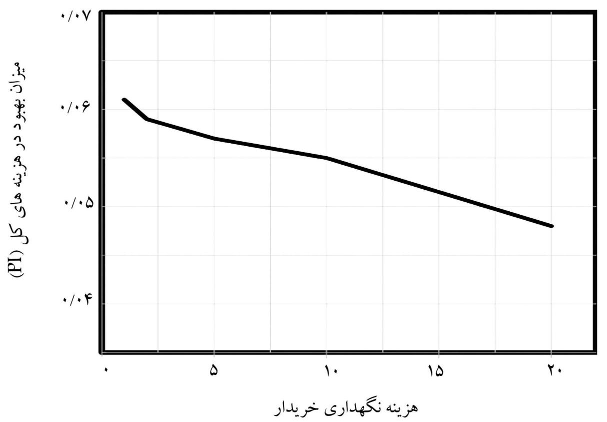
در شکل ۵ مشهود است که با افزایش h_b، اهمیت هماهنگ‌سازی تصمیم‌ها کم‌تر می‌شود؛ چراکه میزان صرفه‌جویی در هزینه‌ها کاهش می‌یابد. این بدان سبب است که افزایش هزینه‌ی نگهداری موجودی نزد خریدار، تصمیم‌گیری را بیش‌تر به سمت بهینه‌سازی هزینه‌ی خریدار سوق می‌دهد.



شکل ۴. تأثیر افزایش S بر ضریب PI.



شکل ۵. تأثیر افزایش h_b بر ضریب PI.



شکل ۶. تأثیر افزایش h_s بر ضریب PI.

۳.۵. تحلیل حساسیت مدل نسبت به هزینه‌ی نگهداری فروشنده

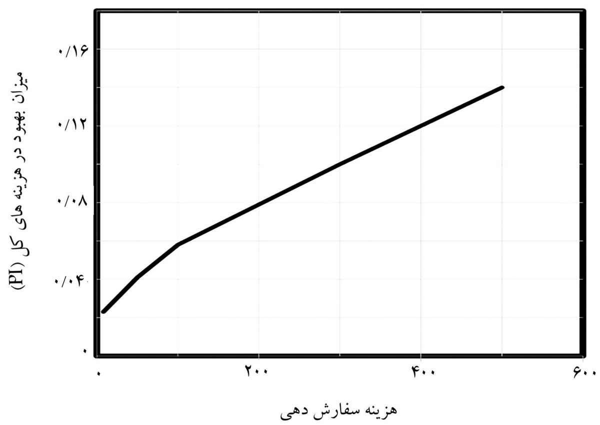
همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود با افزایش هزینه‌های نگهداری فروشنده از اهمیت تصمیم‌گیری هماهنگ کاسته شده و فروشنده سعی در کاهش هزینه‌های خود از طریق کاستن تعداد محموله‌های ارسالی برای یک انباشته تولیدی دارد.

۴.۵. تحلیل حساسیت مدل نسبت به هزینه‌ی سفارش‌دهی

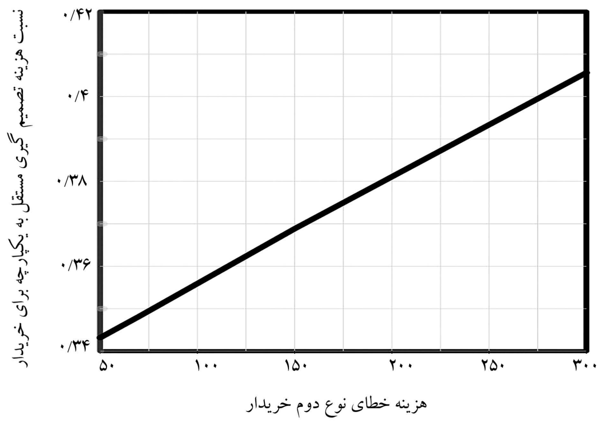
همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌کنیم با افزایش هزینه‌ی سفارش‌دهی برای

جدول ۲. مقادیر خروجی مثال مربوط به مدل.

خروجی بر حسب	مستقل بدون سرمایه‌گذاری روی کیفیت	مستقل با سرمایه‌گذاری بر کیفیت	هماهنگ بدون سرمایه‌گذاری روی کیفیت	هماهنگ
اندازه‌ی انباشته اقتصادی مشترک	۱۱۶/۲	۱۱۶/۲	۱۶۳/۱۳	۱۶۰/۴
درصد اقلام معیوب	۰/۱	۰/۰۶۹	۰/۱	۰/۰۵۹۸
تعداد انباشته اقتصادی	۶	۶	۶	۴
هزینه‌ی کل	۲۳۳۳۷	۲۳۰۳۳	۲۲۱۴۷	۲۱۸۰۳
درصد بهبود نسبت به حالت مستقل بدون سرمایه‌گذاری بر کیفیت	٪۰	٪۲/۵	٪۵/۲	٪۶/۷



شکل ۷. تأثیر افزایش F بر ضریب PI.



شکل ۸. تأثیر افزایش هزینه‌ی خطای نوع دوم بر هزینه‌ی خریدار.

خریدار اهمیت تصمیم‌گیری هماهنگ و به تبع آن میزان بهبود حاصل شده از این رویه نیز افزایش می‌یابد. حال آن که با افزایش هزینه‌ها در سمت فروشنده تا این حد بر اهمیت تصمیم‌گیری هماهنگ نمی‌افزاید زیرا فروشنده با تغییر در تعداد محموله‌های ارسالی برای یک انباشته‌ی تولیدی قادر به مدیریت هزینه‌های خود است.

۵.۵. تحلیل حساسیت مدل نسبت به هزینه‌ی خطای نوع دوم برای خریدار

در شکل ۸ نسبت هزینه‌ی تصمیم‌گیری مستقل به هزینه‌های تصمیم‌گیری یکپارچه نمایش داده می‌شود. مشاهده می‌شود که این نسبت با افزایش هزینه‌های خطای نوع دوم برای خریدار سیر صعودی پیدا می‌کند. می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش هزینه‌های این نوع خطا خریدار تمایل بیشتری به اعمال سیاست‌های یکپارچه‌سازی زنجیره‌ی تأمین پیدا کند.

۶. نتیجه‌گیری

ما در این پژوهش، با توسعه‌ی یک مدل به بررسی اهمیت هماهنگی تصمیمات مربوط به مدیریت موجودی در زنجیره‌ی تأمین، در قالب تصمیم‌گیری متمرکز برای یک سیستم تولیدی با فرض تولید اقلام معیوب در فرایند تولید پرداختیم. ما با حل مدل ارائه شده نشان دادیم که می‌توان محصولی باکیفیت‌تر برای مصرف‌کننده و تنها با هماهنگی در تصمیم‌گیری در زنجیره‌ی تأمین، به دست آورد. هم‌زمان با سرمایه‌گذاری روی کیفیت تولید، نرخ کالای معیوب رسیده به دست مشتری را کاهش می‌دهیم و از اعتبار برند خود مراقبت می‌کنیم. همچنین هزینه‌های مربوط به حمل محموله‌های برگشتی از سوی خریدار به فروشنده را نیز کاهش می‌دهیم. ما در این مقاله سعی داشتیم به تبیین اهمیت هماهنگی در تصمیمات بازپرسازی موجودی و سرمایه‌گذاری روی کیفیت بپردازیم؛ که در حالت هماهنگی اجزای زنجیره امکان‌پذیر می‌شود.

در پایان، برای واقعی‌تر و کاربردی‌تر شدن مدل، پیشنهادهایی برای مطالعات و تحقیقات آتی ارائه می‌دهیم:

۱. در نظر گرفتن توأمان سرمایه‌گذاری روی کاهش هزینه‌ی آماده سازی تولید و افزایش کیفیت تولید؛

۲. در نظرگرفتن محدودیت‌هایی نظیر محدودیت بودجه یا فضای انبار؛

۳. توسعه‌ی مدل با افزودن لایه‌های زنجیره و همچنین تعداد اعضای هر سطح از زنجیره.

منابع (References)

1. Heydari, J., Zaabi-Ahmadi, P. and Choi, T. M. " Coordinating supply chains with stochastic demand by crashing lead times", *Computers and Operations Research*, **100**, pp.53-68 (2018).

2. Lee, W. and Wang, S. "Forward and backward stocking

policies for a two-level supply chain with consignment stock agreement and stock-dependent demand", *European Journal of Operational Research*, **256**(3), 1 February, pp. 830-840 (2017).

3. Manna, A.K., Dey, J.K. and Mondal, S.K." Three-layer supply chain in an imperfect production inventory model with two storage facilities under fuzzy rough environment", *J. Uncertain. Anal. Appl*, **2**, pp. 17-29 (2014).
4. Al-Salamah, M. "Economic production quantity with the presence of imperfect quality and random machine breakdown and repair based on the artificial bee colony heuristic", *Applied Mathematical Modelling*, **63**, pp. 68-83 (2018).
5. Goyal K.S., Huang C.K. and Chen K.C. " A simple integrated production policy of an imperfect item for vendor and buyer", *Production Planning and Control*, **14:7**, pp.596-602 (2003).
6. Bassem, B., Gharbib, A. and Pellerin, A. "Joint optimal lot sizing and production control policy in an unreliable and imperfect manufacturing system", *International Journal of Production Economics*, **63**, pp. 68-83 (2013).
7. Lin T.Y. "Optimal policy for a simple supply chain system with defective items and returned cost under screening errors", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **52**, pp.307-320 (2009).
8. Al-Salamah, M. "Economic production quantity in batch manufacturing with imperfect quality, imperfect inspection, and destructive and non-destructive acceptance sampling in a two-tier market", *Computers & Industrial Engineering*, **93**, pp. 275-285 (2016).
9. Banerjee, A. "A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor", *Decis. Sci*, **17**, pp. 292-311 (1986).
10. Chakraborty, D. and Bhuiya, S.K. "A continuous review inventory model with fuzzy service level constraint and fuzzy random variable parameters", *Int. J. Appl. Comput. Math*, **3**, pp. 3159-3174 (2017).
11. Ouyang, L.Y., Yeh, N.C. and Wu, K.S. "Mixture inventory model with backorders and lost sales for variable lead time", *J. Oper. Res. Soc*, **47**, pp.829-832 (1996).
12. Sarkar, B. and Majumder, A. "Integrated vendor-buyer supply chain model with vendor's setup cost reduction", *Appl. Math. Computation*, **224**, pp. 362-371 (2013).
13. Sarkar, B., Majumder, A., Sarkar, M. and et al. "Two-echelon supply chain model with manufacturingquality improvement and setup cost reduction", *J. Ind. Manag. Optim*, **13**, pp. 1085-1104 (2017).
14. Dey, B.K., Sarkar, B., Sarkar, M. and et al. "An integrated inventory model involving discrete setup cost reduction, variable safety factor, selling-price dependent demand, and investment", *Rairo Oper. Res*, **53**, pp. 39-57 (2019).
15. Majumder, A., Jaggi, C.K. and Sarkar, B. "A multi-retailer supply chain model with backorder and variable production cost", *Rairo Oper. Res*, (In press) (2018).
16. Hsu J.T. and Hsu L.F. "An integrated vendor-buyer inventory model with imperfect items and planned back orders", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **68**, pp.2121-2132 (2013).
17. Chuang C.J., Ho C.H., Ouyang L.H. and et al. "An integrated inventory model with order-size-dependent trade credit and quality improvement", *Procedia Computer Science*, **17**, pp. 365-372 (2013).
18. Sarkar, B. and Moon, I. "Improved quality, setup cost reduction, and variable backorder costs in an imperfect production process", *Int. J. Prod. Econ*, **155**, pp. 204-213 (2014).
19. Cárdenas-Barrón, L,E., Sarkar, B. and Treviñ-Garza, G. "an improved solution to the replenishment policy for the EMQ model with rework and multiple shipments", *Appl. Math. Model*, **37**, pp. 5549-5554 (2013).
20. Pal, B., Sana, S.S. and Chaudhuri, K. "A mathematical model on EPQ for stochastic demand in an imperfect production system", *J. Manuf. Syst*, **32**, pp. 260-270 (2013).