مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۴۰۲)
دوره‌ی ۳۹، شماره‌ی ۱، صص. ۱۴۱-۱۵۴، (پژوهشی)

Original Article

یک مدل قیمت‌گذاری و موجودی با تابع تقاضای وابسته‌ی چندمتغیره و تابع هزینه‌ی نگهداری خطی ـ افزایشی برای محصولات فاسدشدنی

بهناز قاراخانی (دانشجوی دکتری)
مهسا قندهاری * (دانشیار)
آذرنوش انصاری (استادیار)
گروه مدیریت، دانشکده‌ی علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه اصفهان

قیمت‌گذاری سازوکاری مرسوم برای جذب مشتریان بیشتر است. تقاضای محصولات تازه علاوه بر قیمت به میزان تازگی و سطح نمایش داده شده در قفسه نیز بستگی دارد. به دلیل وابستگی تقاضا به سطح موجودی نمایش داده شده، صفر بودن موجودی در پایان دوره لزوماً بهینه نیست و به عنوان یک متغیر تصمیم در نظر گرفته می‌شود. این پژوهش یک مدل موجودی و قیمت‌گذاری برای محصولات فاسدشدنی انبارشدنی با هزینه‌ی نگهداری خطی ـ افزایشی نسبت به زمان ارائه می‌کند که در آن تقاضا تابعی حاصل‌ضربی از قیمت، تازگی و سطح موجودی نمایش داده شده است. متغیرهای تصمیم این مدل عبارت‌اند از: مقادیر بهینه‌ی زمان بازپرسازی، موجودی پایان دوره و نرخ شکست قیمت، مقدار بهینه‌ی سفارش و زمان اعمال شکست قیمت. نشان داده می‌شود که تابع هدف بیشینه‌سازی سود شبه‌مقعر است و یک الگوریتم جست‌وجو بر این اساس ارائه می‌شود و در نهایت مثالی برای نمایش نتایج نظری و بیان جنبه‌های مدیریتی ارائه خواهد شد.

واژگان کلیدی: مدیریت موجودی، قیمت‌گذاری، هزینه‌ی نگهداری خطی ـ افزایشی، محصولات فاسدشدنی، تابع تقاضای چندمتغیره.

b.gharakhani22@gmail.com
m.ghandehari@ase.ui.ac.ir
a.ansari@ase.ui.ac.ir

۱. مقدمه

قیمت‌گذاری به عنوان یکی از ابزارهای مدیریت درآمد، از مهم‌ترین و هیجان‌انگیزترین موضوعات برای صاحبان کسب و کار است که نه تنها برای افزایش سودآوری بلکه برای تعیین محصولاتی که قابلیت فروش دارند نیز به کار می‌رود. قیمت‌گذاری صحیح به افزایش حجم فروش و سود کمک می‌کند. از راهکار قیمت‌گذاری برای کنترل نوسان‌های تقاضا که ناشی از رفتار مشتری راهبردی است، استفاده می‌شود. مشتری تغییرات قیمت کالا را ارزیابی کرده و در قیمت مورد قبول آن را خریداری می‌کند. در سال‌های گذشته، بیشتر پژوهشگران قیمت را به عنوان تنها عامل تأثیرگذار بر تصمیمات خرید مشتری مد نظر قرار می‌دادند. ایلون و مالیا[۱] از اولین محققانی بودند که مدل موجودی تقاضای وابسته به قیمت را در نظر گرفته‌اند. قیمت‌گذاری به طور خاص در شرایطی که باید محموله‌یی از محصولات در یک زمان ضرب‌العجل به فروش برسند، مانند محصولات فاسدشدنی با تاریخ انقضای مشخص، کاربرد زیادی دارد.

بازار مواد غذایی تازه در دهه‌های اخیر گسترش زیادی یافته است. محصولات و مواد غذایی تازه به عنوان یکی از سودآورترین و رقابتی‌ترین محصولات در فروشگاه‌های زنجیره‌یی و سوپرمارکت‌ها به شمار می‌روند.[۲] کمبود مواد غذایی و همچنین اتلاف غذاهای تازه از بزرگ‌ترین معضلات در زنجیره‌ی تأمین غذا هستند. افزایش تقاضا برای محصولات تازه و متنوع از یک‌سو و از سوی دیگر میلیون‌ها تن محصول فاسد شده و ضایعاتی که هر هفته دور ریخته می‌شوند، موجبات نگرانی را برای دولت‌ها و NGO ها و جوامع ایجاد کرده است. مرکز پژوهش اقتصادی سازمان کشاورزی ایالات متحده تخمین زده است که در سال ۲۰۱۰، ۴۵ بیلیون پوند غذا توسط خرده‌فروشی‌ها به عنوان ضایعات از بین رفته است.[۳] علاوه‌بر این، حدود ۴۰٪ از محصولات کشاورزی سالیانه جهان از بین می‌رود و این در حالی است که ۱۷٪ جمعیت هند در سال ۲۰۱۴ سوء تغذیه داشته‌اند.[۴] ضایعات حاصل از

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۱۱/۱۳، اصلاحیه ۱۴۰۱/۰۱/۲۳، پذیرش ۱۴۰۱/۲/۷.
DOI:10.24200/J65.2022.59196.2260

استناد به این مقاله:
قاراخانی، بهناز، قندهاری، مهسا، و انصاری، آذرنوش، ۱۴۰۲. یک مدل قیمت‌گذاری و موجودی با تابع تقاضای وابسته‌ی چندمتغیره و تابع هزینه‌ی نگهداری خطی ـ افزایشی برای محصولات فاسدشدنی. مهندسی صنایع و مدیریت شریف، ۳۹(۱)، صص. ۱۵۴-۱۴۱.

دور ریختن مواد غذایی فاسد شده می‌تواند اثرات مخربی بر محیط زیست داشته باشد. این در حالی است که سازمان‌هایی مانند سازمان غذا و کشاورزی (IPCC)[1] و پنل بین‌المللی غیر دولتی تغییر اقلیم (NIPCC) [2] همواره تأکید زیادی بر کاهش ضایعات حاصل از موادغذایی منقضی شده دارند. بنابراین ارائه‌ی یک مدل قیمت‌گذاری و مدیریت موجودی برای محصولات تازه و غذاهای فاسدشدنی با تاریخ انقضای مشخص، به منظور کاهش هزینه‌ها و تأمین نیازهای مشتری یک مسئله مدیریتی و موضوع مهم تحقیقاتی است.

در سال‌های اخیر فاکتورهایی مانند حفظ سلامتی و پیشگیری از بیماری، مصرف‌کنندگان را به خرید محصولات تازه و ارگانیک تشویق کرده است. تازگی این محصولات نقشی کلیدی در تصمیمات خرید این مشتریان دارد. برخلاف مصرف‌کنندگان محصولاتی مانند غذاهای کنسروی که تجربه یکسانی از کیفیت این محصولات در هر بار مصرف دارند، مصرف‌کنندگان محصولات تازه در طی عمر قفسه‌یی محصول (از روز اول تولید تا تاریخ انقضای آن) تجربه‌های متفاوتی از میزان تازگی محصول خواهند داشت.[5] همین تجربه‌ی متفاوت از میزان تازگی محصول، باعث می‌شود که مصرف‌کننده در تجربه‌های بعدی محصولی را برای خرید انتخاب کند که زمان بیشتری تا رسیدن به تاریخ انقضای آن باقیمانده باشد. قیمت‌گذاری محصولات فاسدشدنی مانند محصولات لبنی، میوه‌ها و سبزیجات، غذاهای پخته شده، محصولات پروتئینی، بدون توجه به مقدار زمان باقیمانده تا تاریخ انقضاء، موجب می‌شود که مصرف‌کننده به سمت محصولات تازه‌تر جذب شود و بخشی از موجودی فروخته نشود. وجود یک سیاست قیمت‌گذاری، که در آن محصولات بر اساس زمان باقیمانده تا انقضاءشان قیمت‌گذاری می‌شوند، می‌تواند مشتریان را به خرید محصولات با تازگی کم‌تر تشویق کند.

در حوزه‌ی قیمت‌گذاری محصولات غذایی فاسدشدنی تحقیقات متعددی انجام شده است که نشان‌دهنده‌ی کشش‌پذیری تقاضای این محصولات نسبت به قیمت آنهاست. به عنوان نمونه، مطالعات انجام شده در خرده‌فروشی‌ها و سوپرمارکت‌های بزرگ نشان داده است که قیمت‌ها بر تصمیمات خرید مشتریان برای هر دو گروه مواد خوراکی سالم و غیرسالم تأثیرگذارند.[6-13] علاوه براین، برخی دیگر از محققان،[14-19] میزان خرید مواد غذایی تازه (مانند سالادها) و همچنین مواد غذایی پخته شده را نسبت به کاهش یا افزایش قیمت آنها در کافه تریاها و رستوران‌ها یا فست‌فودها مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که میزان تقاضای این محصولات با قیمت فروش و زمان باقیمانده تا تاریخ انقضای آنها ارتباط معناداری دارد. بر اساس مطالعات انجام شده،[20و21] کاهش قیمت میوه‌ها و سبزیجات تازه اثر قابل توجهی بر افزایش تمایل مشتریان و تقاضای خرید این محصولات دارد. علاوه بر این، تقاضای گروه‌های مختلف مواد غذایی، کشش قیمتی متفاوتی دارند. آندرویا و همکاران[22] با بررسی ۱۶۰ مطالعه‌ی کشش قیمتی، تقاضا برای گروه‌های اصلی مواد غذایی را بررسی کردند و نشان دادند که کشش قیمت برای غذاها و نوشیدنی‌های غیر الکلی از ۰٫۲۷ تا ۰٫۸۱ (مقادیر مطلق) متغیر است. بر اساس تحقیقات آندرویا و همکاران،[22] صرف غذا در خارج از خانه (مانند رستوران‌ها) و همچنین نوشابه، آب میوه و گوشت بیشترین پاسخ را به تغییرات قیمت (۰٫۷-۰٫۸) داشتند. به عنوان مثال، افزایش ۱۰ درصدی قیمت نوشابه باید مصرف را ۸ تا ۱۰ درصد کاهش دهد.

در بخش دیگری از پژوهش‌های مرتبط، مسائل قیمت‌گذاری و کنترل موجودی محصولات فاسدشدنی، با هم ترکیب شده‌اند. مطالعات انجام شده توسط برخی از محققان،[23-32] مثال‌هایی از پژوهش‌های انجام شده در حوزه‌ی ترکیبی سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری برای کالاهای فاسدشدنی هستند. در پژوهش‌های صورت گرفته در حوزه‌ی ترکیبی سفارش‌دهی و قیمت‌گذاری برای کالاهای فاسدشدنی انبارشدنی، «تقاضا» نقش کلیدی در مدل‌سازی موجودی فاسدشدنی دارد. بنابراین انتخاب تابع تقاضای مناسب با توجه به ماهیت این محصولات موجب تمایز مدل‌های مطالعات مختلف شده است. ایلون (۱۹۹۶) اولین محققی بود که مدل موجودی و قیمت‌گذاری با تقاضای وابسته به قیمت را ارائه کرد. پس از آن، محققان دیگری،[33-36] مدل‌های موجودی محصولات فاسدشدنی با نرخ فساد ثابت را توسعه داده‌اند. موخوپادهای[37] از فرم توانی تابع تقاضای وابسته به قیمت برای نشان دادن تأثیر بیشتر قیمت بر تمایل مشتریان به خرید محصولات فاسدشدنی استفاده کرد. راماسش،[38] در یک مطالعه‌ی موردی، اثر تخفیف را بر میزان فروش محصولات فاسدشدنی بررسی کرده است. او نشان داد که با اعمال سیاست‌های تخفیف، مشتریان تمایل بیشتری به خرید محصولات فاسدشدنی با تازگی کم‌تر دارند. تاجبخش و همکاران[39] یک مدل موجودی و قیمت‌گذاری برای محصولات فاسدشدنی با سیاست اعمال تخفیف ارائه کردند. وانگ[40] یک مدل قیمت‌گذاری برای محصولات فاسدشدنی با امکان تعیین میزان تقاضای قطعی و همچنین تخمین کیفیت به صورت پویا ارائه کرد. محققان دیگری مانند وو[41] و فنگ (۲۰۱۷) نشان داده‌اند که استفاده از فرم نمایی تابع تقاضای وابسته به قیمت برای محصولات فاسدشدنی انبارشدنی، در مقایسه با سایر فرم‌ها (ثابت، خطی و توانی) اثر این عامل را بهتر نشان می‌دهد.

علاوه بر قیمت، تازگی یکی دیگر از عوامل مؤثر بر تقاضای محصولات فاسدشدنی است.[42و43] بیشتر محصولات فاسدشدنی دارای تاریخ انقضای مشخصی هستند که روی آنها درج شده است. مشتریانی که نسبت به سلامتی خود حساس‌اند، قبل از خرید این محصولات همواره زمان باقیمانده تا تاریخ انقضا را بررسی کرده و محصول تازه‌تر را انتخاب می‌کنند. اثر تازگی محصولات فاسدشدنی بر تقاضا در مطالعات زیادی در مدل‌های موجودی در نظر گرفته شده است.[44-47] در توسعه‌ی مدل‌های موجودی فاسدشدنی، تقاضای متغیر نسبت به زمان در دو حالت زمان پیوسته یا زمان گسسته مورد بررسی قرارگرفته و اثر زمان بر تقاضا توسط توابع مختلف (خطی، نمایی، چندجمله‌یی، توانی) در نظر گرفته شده است.

بر اساس مطالعات انجام شده[48و49] نمایش حجم زیادی از محصولات می‌تواند موجب ترغیب مشتریان برای خرید بیشتر و در نتیجه افزایش تقاضای این محصولات شود. تعداد زیادی از محققان اثر سطح موجودی نمایش داده شده بر تقاضا را مطالعه کرده‌اند.[50-58] بیکر و اربن[59] اولین کسانی بودند که وابستگی تقاضای محصولات فاسدشدنی به سطح موجودی نمایش داده شده را بررسی کرده‌اند. آنها الگوی تقاضا را به صورت تابعی توانی از سطح موجودی نمایش داده شده ارائه کرده‌اند. در سال‌های اخیر، سیه و دای[60] مسئله‌ی قیمت‌گذاری برای محصولات فاسدشدنی با افق زمانی نامحدود را بررسی کرده‌اند. در مدل ارائه شده توسط آنها تقاضا به طور خطی به سطح موجودی وابسته است. اگرچه تقاضای وابسته به سطح موجودی با فرم خطی از نظر حل ریاضی بسیار ساده‌تر از فرم توانی تقاضای وابسته به موجودی است، اما فرم توانی تقاضای وابسته به سطح موجودی واقعی‌تر و کاربردی‌تر از فرم خطی آن است.

با توجه به این که تقاضای محصولات فاسدشدنی علاوه بر قیمت فروش، تحت تأثیر سطح موجودی نمایش داده شده و زمان باقیمانده تا زمان انقضای محصولات نیز هست، لذا ضروری است که این تأثیرات را به طور هم‌زمان مدل‌سازی کرد تا بتوان یک سیاست بهینه‌ی قیمت‌گذاری و بازپرسازی موجودی را پایه‌ریزی کرد. خرده‌فروشان باید برای محصولاتی که نسبت به سایر محصولات فروشگاه، زمان باقیمانده کم‌تری تا تاریخ انقضای خود دارند، قیمت رقابتی تعیین کنند. قیمت تعیین شده باید بتواند

مشتری را به خرید محصول با تازگی کم‌تر ترغیب کند و از سوی دیگر سود خرده‌فروش را افزایش دهد.

در این پژوهش، یک مدل ریاضی پیوسته برای قیمت‌گذاری و مدیریت موجودی محصولات فاسدشدنی با عمر قفسه‌یی ثابت (تاریخ انقضا) توسعه داده می‌شود. در مدل ارائه شده تابع تقاضا به تازگی، قیمت فروش و سطح موجودی نمایش داده شده وابسته است. محصولاتی مانند سبزیجات، کوکی‌ها، میوه‌ها، غذاهای پخته شده، گوشت، ماهی و تخم مرغ، نمونه‌هایی از این محصولات هستند. بر اساس مطالعات انجام شده در مرور ادبیات، در مطالعات گذشته، معمولاً تأثیر چند عامل به صورت رابطه‌ی حاصل‌جمعی دیده شده است. در این پژوهش اثرات عوامل ذکر شده بر تقاضا به صورت رابطه‌ی حاصل‌ضربی دیده شده است که قادر است اثر متقابل عوامل را بر یکدیگر مدل کند. در مطالعات انجام شده، عمدتاً اثر قیمت فروش به صورت تابع خطی دیده شده است. در حالی که در مدل ارائه شده در این پژوهش فرم نمایی تابع تقاضای وابسته به قیمت فروش در نظرگرفته شده است. همچنین در اکثر مدل‌های مشابه ارائه شده در ادبیات، اثر سطح موجودی نمایش داده شده به صورت تابع خطی دیده شده است، در حالی که فرم توانی تابع تقاضای وابسته به سطح موجودی نسبت به فرم‌های خطی قبلی توانایی بیشتری در تعیین اثر عامل سطح موجودی نمایش داده شده بر تقاضای این گروه از محصولات فاسدشدنی دارد.

علاوه بر موارد مذکور، در مطالعات پیشین معمولاً هزینه‌ی نگهداری محصولات فاسدشدنی نسبت به زمان به صورت ثابت در نظرگرفته شده است. در حالی که به دلیل ماهیت این محصولات، به خصوص محصولات تازه مانند میوه‌ها و سبزیجات، هرقدر به زمان انقضای این محصولات نزدیک‌تر شویم به هزینه‌ی بیشتری برای حفظ تازگی این محصولات نیاز داریم.[۴۱] در این پژوهش هزینه‌ی نگهداری این محصولات به صورت تابع خطی ـ افزایشی وابسته به زمان دیده شده است.

در این پژوهش با اعمال کاهش قیمت فروش در نقاط گسسته از زمان، طول دوره بازپرسازی، موجودی پایان دوره، مقدار اقتصادی سفارش، میزان کاهش قیمت و زمانی که قیمت را باید تغییر داد را همزمان تعیین خواهیم کرد. در ادامه‌ی این پژوهش در بخش ۲ به تعریف نمادها و مفروضات می‌پردازیم. پس از آن در بخش ۳ به فرموله کردن مدل ریاضی با مشارکت تقاضا به عنوان تابعی چندگانه از قیمت هر واحد، سطح موجودی نمایش داده شده، تازگی محصولات و تاریخ انقضا به صورت زیر بخش‌های مستقل می‌پردازیم. سپس تابع هدف را می‌نویسیم که در آن هدف تعیین زمان بهینه‌ی چرخه‌ی بازپرسازی، موجودی پایان دوره و نرخ تخفیف به گونه‌یی است که سود کل را بیشینه کند. در بخش ۴ ضمن بررسی ساختار تابع هدف، ثابت می‌کنیم که سود کل در تمام متغیرهای تصمیم اکیداً شبه‌مقعر است؛ این موضوع امکان جست‌وجو برای یافتن یک بهینه‌ی محلی را ساده‌تر می‌کند. بر اساس قضایای اثبات شده، شرایط لازم و کافی برای جست‌وجوی جواب بهینه با الگوریتم جست‌وجوی ارائه شده وجود خواهد داشت. در بخش ۵ مثال‌های عددی برای نشان دادن نتایج نظری و اثرات مدیریتی ارائه می‌شود.

۲. نمادها و مفروضات

یک محصول فاسدشدنی انبارشدنی مانند میوه و سبزجات، گوشت، مرغ، غذاهای پخته، شیرینی‌ها و نان‌ها را در یک خرده‌فروشی در نظر بگیرید که تاریخ انقضای مشخصی دارد. خصوصیات محصولات فاسدشدنی مورد بررسی عبارت‌اند از:

- برای هر محصول فاسدشدنی یک تاریخ انقضای مشخص در نظرگرفته شده است؛
- نرخ بازپرسازی نامحدود است.

تقاضای محصولات به دلایل زیر تحت تأثیر قیمت، تازگی و سطح موجودی نمایش داده شده در قفسه است:

الف) مشتریان همواره سعی می‌کنند محصولات را با قیمت مناسب خریداری کنند. در نتیجه سیاست کاهش قیمت بر افزایش تقاضای مشتریان تأثیر دارد؛

ب) مشتریان همواره تاریخ انقضای محصول را بررسی می‌کنند و ترجیح می‌دهند محصولی را خریداری کنند که زمان باقیمانده بیشتری تا تاریخ انقضا دارد؛

ج) نمایش حجم زیادی از محصولات در قفسه، به عنوان نمادی از تازگی محصول توسط مشتری تلقی شده و در نتیجه تقاضا را افزایش می‌دهد.

- با توجه به وابستگی تقاضا به سطح موجودی نمایش داده شده، موجودی پایان دوره بزرگ‌تر یا مساوی صفر در نظرگرفته می‌شود؛
- در اکثر مدل‌های سنتی مدیریت موجودی EOQ، هزینه‌ی نگهداری در واحد زمان در طول چرخه‌ی بازپرسازی ثابت در نظرگرفته می‌شود. در حالی که، این فرض عملاً برای تمامی محصولات مناسب نبوده و کاربرد ندارد. در خصوص اقلام فاسدشدنی که با نزدیک شدن به تاریخ انقضا میزان زوال آنها نیز افزایش می‌یابد، هزینه‌ی نگهداری هر واحد نیز به منظور حفظ طراوت و تازگی این مواد به طور پیوسته افزایش می‌یابد. در نتیجه، با توجه به ماهیت فاسدشدنی محصولات مورد بررسی، هزینه‌ی نگهداری این محصولات با نزدیک‌تر شدن به تاریخ انقضای آنها افزایش می‌یابد. در این مدل هزینه‌ی نگهداری هر واحد از محصولات به صورت تابع خطی که نسبت به زمان افزایش می‌یابد، در نظرگرفته شده است؛
- در این مدل محصول فاسد شده، بعد از تاریخ انقضایش یا بیشینه‌ی عمر مفیدش می‌تواند با ارزش بازیافتنی فروخته شود؛
- کمبود مجاز نیست؛
- محصول سفارش داده شده بلافاصله به خرده‌فروشی می‌رسد و موعد تحویل صفر است.

به منظور ساده‌سازی، نمادها به سه گروه پارامترها، متغیرهای تصمیم و توابع تقسیم شده‌اند.

پارامترها

C_p: قیمت خرید هر واحد از محصول؛

C_g: هزینه‌ی ثابت نگهداری هر واحد از محصول؛

C_h: شیب تابع خطی نگهداری وابسته به زمان؛

m: زمان انقضای محصول؛

w: اندازه‌ی فضای قفسه؛

C_o: هزینه‌ی هربار سفارش؛

λ: ضریب کشش تقاضا نسبت به قیمت ($\lambda > 0$)؛

α: حداکثر تعداد مشتریان بالقوه ($\alpha > 0$)؛

β: ضریب کشش تقاضا نسبت به سطح موجودی نمایش داده شده ($0 \leq \beta < 1$)؛

p_1: قیمت اولیه (قیمت فروش در بازه $[0, t_1]$).

- **متغیرهای تصمیم**

T: زمان بهینه‌ی بازپرسازی؛

k: ضریب بهینه‌ی کاهش قیمت،

زمانی که موجودی انبار خرده‌فروش به اتمام می‌رسد و موجودی باقیمانده فقط به اندازه موجودی قفسه (w) است؛

Q: مقدار بهینه‌ی سفارش در هر چرخه‌ی بازپرسازی؛

E: سطح موجودی پایان دوره $E \geq 0$.

- **توابع**

$F(t)$: تابع تازگی وابسته به سن محصول در زمان t، که یک تابع نزولی بین ۱ تا ۰ است؛

$D(t, k, I(t))$: تابع تقاضا که مستقیما از ضریب قیمت، زمان و سطح موجودی نمایش داده شده تأثیر می‌گیرد؛

$\prod(T, k, E)$: تابع سود کل که تابعی چندمتغیره از طول دوره‌ی بازپرسازی (T)، ضریب قیمت (k) و موجودی پایان دوره (E) است؛

$I(t)$: سطح موجودی در زمان t؛

$H(t)$: تابع هزینه‌ی نگهداری هر واحد محصول.

تابع $F(t)$ را به عنوان تابع تازگی وابسته به سن محصول در زمان t در نظر می‌گیریم که تابعی نزولی است و مقدار آن از ۱ (در ابتدای دوره) تا صفر (در زمان انقضا یعنی m) به طور خطی کاهش می‌یابد (رابطه‌ی ۱):

$$F(t) = \frac{m-t}{m} \qquad 0 \leq t \leq m \tag{۱}$$

چنان که در بخش قبل بحث شد، تابع تقاضای نمایی نسبت به سایر توابع توانایی بیشتری در نمایش میزان وابستگی تقاضا به قیمت محصولات فاسدشدنی را دارد. بنابراین از تقاضای وابسته به قیمت به صورت نمایی مانند آنچه در مدل محققانی مانند رابینسون و لاخاری (۱۹۷۵)، تامپسون و تنگ (۱۹۸۴)، تنگ و چانگ (۲۰۰۵)، چانگ و همکاران (۲۰۰۶)، آویناداو و همکاران (۲۰۱۴)، فنگ و همکاران (۲۰۱۷) ارائه شده است، استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۲):

$$D(k) = \alpha e^{-\lambda k p_1} \qquad \alpha > 0, \lambda > 0 \tag{۲}$$

در این پژوهش از فرم توانی تابع تقاضای وابسته به سطح موجودی که توسط بیکر و اربن (۱۹۸۸) ارائه شد، استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۳).

$$D(t) = [I(t)]^{\beta} \qquad 0 \leq \beta < 1. \tag{۳}$$

در این مدل تابع هزینه‌ی نگهداری هر واحد محصول به صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود (تابع خطی افزایشی نسبت به زمان):

$$H(t) = C_g + C_h t \qquad C_g, C_h \geq 0 \tag{۴}$$

۳. فرموله کردن مسئله

در ابتدا یعنی در زمان صفر، خرده‌فروش Q واحد از محصول را دریافت می‌کند و w واحد (اندازه‌ی قفسه) از آن را در قفسه نمایش می‌دهد و $Q - w$ واحد باقیمانده را در انبارش ذخیره می‌کند. هر زمان که محصولی فروخته می‌شود، خرده‌فروش موجودی را از انبار به قفسه منتقل می‌کند تا قفسه پر شود. این روند تا زمان t_1 که دیگر هیچ موجودی در انبار خرده‌فروش وجود ندارد ادامه می‌یابد. بنابراین در طول بازه $[0, t_1]$ قفسه همواره پر خواهد بود (مقدار ثابت w) و تقاضا در طول این بازه به اندازه‌ی قفسه، قیمت اولیه و تازگی محصول بستگی خواهد داشت. برای حفظ اثر این عوامل بر تقاضا، این رابطه به صورت حاصل‌ضربی در نظر گرفته شده است. بدیهی است که مقدار قیمت در طول این بازه تغییری نخواهد کرد و برابر با پارامتر p_1 (قیمت اولیه محصول) خواهد بود. از ترکیب فرض‌های بالا داریم:

$$D(t) = \left(\frac{m-t}{m}\right) w^{\beta} \alpha e^{-\lambda p_1} \qquad 0 \leq t \leq t_1 \leq T \tag{۵}$$

که در آن α و λ و β و m و p_1 پارامترهای ثابت و بزرگ‌تر از صفر هستند. علاوه بر این واضح است که زمان چرخه‌ی بازپرسازی T باید کوچک‌تر یا مساوی تاریخ انقضای محصول m باشد. به عبارت دیگر همواره باید $T \leq m$ باشد؛ در غیر این صورت اگر $T > m$ باشد، مقدار تقاضا منفی خواهد شد. برای استفاده از تمام فضای قفسه فرض می‌شود که مقدار سفارش Q بزرگ‌تر یا مساوی با اندازه‌ی قفسه‌ی w باشد $(Q \geq w)$.

در زمان t_1 انبار خرده فروش خالی می‌شود. از t_1 تا T موجودی محصول فقط به اندازه موجودی قفسه خواهد بود که آن هم به مرور مصرف می‌شود. بنابراین تقاضا به ضریب قیمت فروش، تازگی محصول و سطح موجودی نمایش داده شده در قفسه بستگی دارد. در زمان t_1 کاهش قیمت با ضریب کاهش k اعمال خواهد شد. در این زمان با توجه به تأثیر کاهش قیمت اعمال شده بر تقاضا، حجم بیشتری از محصول به فروش خواهد رسید و از ضایعات محصول جلوگیری خواهد شد. در زمان بازپرسازی T موجودی پایان دوره E با قیمت بازیافت s برای هر واحد باقیمانده به فروش می‌رسد و دوباره سفارش جدیدی با مقدار Q دریافت شده و چرخه‌ی بازپرسازی جدیدی شکل خواهد گرفت. به این ترتیب، نرخ تقاضا در طول بازه $[t_1, T]$ به صورت رابطه‌ی ۶ خواهد بود.

$$D(t, k) = \alpha \left(\frac{m-t}{m}\right) [I(t)]^{\beta} e^{-\lambda k p_1} \qquad 0 \leq t_1 \leq t \leq T \tag{۶}$$

مدل ریاضی

در هر دو بازه رابطه‌ی دیفرانسیل مطابق رابطه‌ی ۷ را داریم:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} -D(t) = -\alpha w^{\beta} \frac{m-t}{m} e^{-\lambda p_1} & 0 \leq t \leq t_1 \leq T \\ -D(t, k) = -\alpha [I(t)]^{\beta} \frac{m-t}{m} e^{-\lambda k p_1} & 0 \leq t_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{۷}$$

با اعمال شرایط مرزی $I(0) = Q$، $I(T) = E$، $I(t_1) = w$ سطح موجودی در هر دو بازه برابر با رابطه‌ی ۸ است.

$$I(t) = \begin{cases} Q - \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1} \left(t - \frac{t^2}{2m}\right) & 0 \leq t \leq t_1 \leq T \\ \left[\frac{\alpha(1-\beta) e^{-\lambda k p_1}}{2m} (t^2 + 2m(T-t) - T^2) + E^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} & 0 \leq t_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{۸}$$

$$H_1 = \int_{0}^{t_1} (C_g + C_h t) I(t) dt = C_g(Qt_1 + \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^3}{6m} - \frac{t_1^2}{2})) + C_h(\frac{t_1^2}{2}Q + \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^4}{8m} - \frac{t_1^3}{3})) \qquad 0 \le t \le t_1 \le T$$

$$H_2 = \int_{t_1}^{T} (C_g + C_h t) I(t) dt = \int_{t_1}^{T} (C_g + C_h t)\left[\frac{\alpha(1-\beta)e^{-\lambda k p_1}}{2m}(t^2 + 2m(T-t) - T^2) + E^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} dt \qquad 0 \le t_1 \le t \le T$$

(۱۳)

از آنجاکه $I(0) = Q$ و $I(t_1) = w$، مقدار اقتصادی سفارش در بازه $[0, t_1]$ از طریق رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌شود.

$$Q = w + \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}\left(t_1 - \frac{t_1^2}{2m}\right) \qquad 0 let \le t_1 \le T \qquad (۹)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۹، مقدار t_1 برابر با رابطه‌ی ۱۰ خواهد بود:

$$t_1 = m - \sqrt{m^2 - \frac{2m(Q-w)}{\alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}}} \ge 0 \qquad 0 \le t \le t_1 \le T \qquad (۱۰)$$

در بازه $[t_1, T]$ با قرار دادن $I(t_1) = w$ مقدار t_1 برابر با رابطه‌ی ۱۱ است:

$$t_1 = m - \sqrt{(m-T)^2 - \frac{2m(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)e^{-\lambda k p_1}}} \ge 0$$
$$0 \le t_1 \le t \le T \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۱ در رابطه‌ی ۹ مقدار اقتصادی سفارش برابر است با:

$$Q = w + \frac{\alpha w^{\beta} e^{-\lambda k p_1}}{2m}\left[m^2 - (m-T)^2 - \frac{2m(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)e^{-\lambda k p_1}}\right] \ge w \qquad (۱۲)$$

هزینه‌های نگهداری در دو بازه $[0, t_1]$ و $[t_1, T]$ در رابطه‌ی ۱۳ محاسبه شده است. برای ساده‌سازی با توجه به این که $I(T) = E$ و $I(t_1) = w$ در بازه $[t_1, T]$ میانگین موجودی برابر با $\frac{w+E}{2}$ خواهد بود. با در نظرگرفتن این حقیقت هزینه‌ی نگهداری در این بازه به صورت رابطه‌ی ۱۴ خواهد بود:

$$H_2 \approx C_g \frac{(w+E)}{2}(T - t_1) + C_h \frac{(w+E)}{2}\frac{(T^2 - t_1^2)}{2} \qquad (۱۴)$$

تابع سود کل

تابع سود کل به صورت زیر تعریف می‌شود:

سود کل = درآمد + درآمد حاصل از ارزش بازیافتنی ـ هزینه‌ی خرید ـ هزینه‌ی سفارش ـ هزینه‌ی نگهداری

این مسئله سطح بهینه برای موجودی دوره پایان دوره E، ضریب کاهش قیمت k و زمان چرخه‌ی بازپرسازی T، با هدف بیشینه‌سازی سود کل را تعیین می‌کند. مدل موجودی EOQ برای محصولات فاسدشدنی با تقاضای وابسته به تازگی محصول، قیمت فروش و سطح موجودی در رابطه‌های ۱۵ و ۱۶ آمده است.

$$Max \quad \Pi(E,T,k) = \frac{1}{T}\{p_1(Q-w) + kp_1(w-E) + sE - C_p Q - C_o - C_g(Qt_1 + \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^3}{6m} - \frac{t_1^2}{2})) - C_h(\frac{t_1^2}{2}Q + \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^4}{8m} - \frac{t_1^3}{3})) - C_g\frac{(w+E)}{2}(T-t_1) - C_h\frac{(w+E)}{2}\frac{(T^2 - t_1^2)}{2}\} \qquad (۱۵)$$

$$Subject\ to:$$

$$Q = w + \frac{\alpha w^{\beta} e^{-\lambda k p_1}}{2m}\left[m^2 - (m-T)^2 - \frac{2m(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)e^{-\lambda k p_1}}\right]$$

$$t_1 = m - \sqrt{(m-T)^2 + \frac{2m(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)e^{-\lambda k p_1}}}$$

$$0 \le E \le w,$$

$$0 \le kp_1 \le p_1,$$

$$and\ 0 \le t_1 \le T \le m. \qquad (۱۶)$$

۴. بررسی ساختار تابع هدف و نتایج نظری

■ **قضیه‌ی ۱:** برای مقدار k داده شده، t_1 و Q نسبت به مقعر و صعودی هستند.

■ **اثبات: پیوست ۱**

■ **قضیه‌ی ۲:** برای مقدار T داده شده؛

- t_1 نسبت به k نزولی و نسبت به E صعودی است؛
- Q نسبت به k نزولی و محدب و نسبت به E صعودی و مقعر است.

■ **اثبات: پیوست ۲**

■ **قضیه‌ی ۳:** برای مقادیر E و k داده شده، اگر رابطه ۱۷ برقرار باشد آنگاه تابع $\prod(E,T,k)$ نسبت به T شبه مقعر است و در نتیجه یک جواب بهینه‌ی T^* وجود دارد.

$$(C_g + C_h m)\frac{(m-T)^2}{(m-t_1)^2} < C_g$$
$$p_1 - C_p - C_g t_1 - C_h\frac{t_1^2}{2} > 0 \qquad (۱۷)$$

■ **اثبات: پیوست ۳**

بر اساس قضیه‌ی ۳، زمان بهینه‌ی بازپرسازی (T^*) با محاسبه‌ی مشتق اول تابع هدف $\prod(E,T,k)$ نسبت به T و مساوی با صفر قرار دادن آن، شرط لازم و کافی به دست می‌آید (روابط ۱۸ و ۱۹):

$$G = -p_1 + (-C_g - C_h t_1)\frac{-\lambda m p_1 e^{\lambda k p_1}(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)}\frac{w^{\beta}}{E^{\beta}} - C_h\frac{w-E}{2}\frac{-\lambda m p_1 e^{\lambda k p_1}(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)} + (-\frac{C_g}{2} - \frac{C_h}{2}t_1)\frac{-\lambda m p_1 e^{\lambda k p_1}(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)} + (-\frac{C_g}{2} - \frac{C_h}{2}t_1)(w-E)\frac{\lambda p_1 m e^{\lambda k p_1}}{\alpha E^{\beta}(m-t_1)}[1 - \frac{m e^{\lambda k p_1}(w^{1-\beta} - E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)^2}] \qquad (۱۸)$$

$$F = (p_1 - C_p - C_g t_1 - C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{-\beta w^{\beta}}{E^{1+\beta}} + (-C_g - C_h t_1)\frac{m e^{\lambda k p_1}}{\alpha E^{\beta}(m-t_1)}\frac{w^{\beta}}{E^{\beta}} + (2C_g + C_h t_1)\frac{m e^{\lambda k p_1}}{\alpha E^{\beta}(m-t_1)}(-\frac{C_g}{2} - \frac{C_h}{2}t_1)(w-E)[\frac{m^2 e^{2\lambda k p_1}}{\alpha^2 E^{2\beta}(m-t_1)^2} - \frac{\beta m e^{\lambda k p_1}}{\alpha E^{\beta+1}(m-t_1)}] - \frac{C_h}{2}(w-E)(\frac{m e^{\lambda k p_1}}{\alpha E^{\beta}(m-t_1)})^2 \qquad (۱۹)$$

$$M=(p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{\lambda^2p_1^2\alpha w^\beta e^{-\lambda kp_1}}{2m}\left[m^2-(m-T)^2\right]+(-C_g-C_ht_1)\frac{-\lambda mp_1e^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)}\frac{-\lambda p_1\alpha w^\beta e^{-\lambda kp_1}}{2m}\left[m^2-(m-T)^2\right]+C_h\frac{(-w+E)}{2}(\frac{-\lambda mp_1e^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)})^2+(C_g+C_ht_1)\frac{(-w+E)}{2}\frac{\lambda^2p_1^2me^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)}[\frac{me^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)^2}-1] \quad (20)$$

■**قضیه ۴:** برای مقدار T داده شده، اگر $F<0, M<0, FM-G^2>0$ باشد، آنگاه $\prod(E,T,k)$ نسبت به E و k و شبه مقعر است. بنابراین یک جواب بهینه‌ی منحصر به فرد وجود دارد.

■**اثبات: پیوست ۴**

ارائه‌ی الگوریتم جست‌وجو

در ادامه، با به کارگیری مدل ریاضی ارائه شده و با استفاده از قضایای اثبات شده، الگوریتم جست‌وجوی جواب بهینه ارائه خواهد شد. در قضیه‌های ۳ و ۴، ثابت شد که تابع هدف نسبت به متغیرهای تصمیم شبه مقعر است. بنابراین یک جواب بهینه‌ی منحصر به فرد وجود خواهد داشت. این موضوع، جست‌وجوی جواب بهینه‌ی محلی را امکان‌پذیر می‌سازد. بر اساس نتایج نظری، الگوریتم جست‌وجوی کلی زیر ارائه می‌شود.

الگوریتم جست‌وجو

گام ۱. گام برای پارامترهای ورودی

الف) $i=1$ قرار بده؛

ب) برای T مقدار اولیه $T_i=\frac{m}{2}$ را قرار بده؛

ج) $ans^i=[]$ قرار بده؛

د) $ans^*=[]$ قرار بده؛

گام ۲. با قرار دادن مقدار T_i، در روابط ۱۹ و ۲۰ مقادیر k_i و E_i را محاسبه کن؛

گام ۳. با قرار دادن مقادیر k_i و E_i در رابطه‌ی (۳-۶) مقدار T_{i+1} را محاسبه کن؛

گام ۴. اگر $-0/001<T_{i+1}-T_i<0/001$ آنگاه:

الف) مقدار $\prod_i(E_i,T_{i+1},k_i)$ را محاسبه کن و $ans_i=[E_i,T_{i+1},k_i,\prod_i]$ قرار بده؛

ب) اگر $ans_i(4)>ans^*(4)$ آنگاه $ans^*\leftarrow ans_i$. در غیر این‌صورت $i=i+1$ قرار بده و برو به گام ۲.

گام ۵. جواب‌های بهینه‌ی $E^*=E_i, T^*=T_{i+1}, k^*=k_i, \prod^*=\prod_i$ را نمایش بده.

۵. مثال‌های عددی

برای بررسی نتایج مدل‌های ارائه شده، در این بخش چند مثال عددی با نرم‌افزار MATHEMATICA ۱۲/۲ و متلب حل شده است. همچنین، پس از بررسی نتایج تحلیل حساسیت پیشنهادهای مدیریتی ارائه شده است.

۱.۵. مثال ۱

در این مثال سبزیجات بسته‌بندی شده به عنوان یک محصول فاسد شدنی انبار شدنی در نظرگرفته می‌شود. تقاضای این محصولات به قیمت فروش، تازگی (زمان باقیمانده تا تاریخ انقضای محصول) و سطح موجودی نمایش داده شده بستگی دارد. هزینه‌ی نگهداری هر واحد در طول دوره‌ی بازپرسازی به صورت خطی افزایش می‌یابد. روند تقاضای این محصولات نسبت به قیمت فروش در فروشگاه زنجیره‌یی افق کوروش، توسط دهقانی نیری و همکاران در سال ۱۳۹۹ مورد بررسی قرارگرفته است.[۶۲] جدول ۱ میزان تقاضای این محصولات را با توجه به تغییرات قیمت آنها نشان می‌دهد.

در شکل ۱ رگرسیون نمایی تقاضای وابسته به قیمت فروش این محصولات نمایش داده شده است.

سایر پارامترهای این مثال در جدول ۲ آمده است.

پس از حل مثال با استفاده از الگوریتم ارائه شده، جواب‌های بهینه به شرح جدول ۳ خواهد بود.

لازم به ذکر است پارامترهای مثال در قضیه‌های ۳ و ۴ صدق کرده و جواب بهینه‌ی محلی وجود دارد. تابع هدف نسبت به متغیرهای تصمیم در شکل‌های ۲ و ۳ نمایش داده شده است.

۲.۵. تحلیل حساسیت

در این بخش، مثال ۱ با تغییر مقدار پارامترهای مختلف مدل، حل شده است و تأثیر هر پارامتر بر متغیرهای تصمیم مسئله اندازه‌گیری و بحث شده است. نتایج تحلیل حساسیت پارامترهای مربوطه، در جدول ۴ آمده است.

بر اساس نتایج حاصل از تحلیل حساسیت پارامترها، با افزایش ضریب کشش

جدول ۱. تغییرات تقاضای سبزیجات بسته‌بندی شده نسبت به قیمت فروش آنها در فروشگاه زنجیره‌یی افق کوروش.

قیمت فروش سبزیجات (ریال)	میزان فروش سبزیجات (کیلوگرم)
۴۳۰۰۰	۳۷۰
۴۵۰۰۰	۳۴۰
۵۰۰۰۰	۳۰۰
۵۵۰۰۰	۲۵۰
۵۷۰۰۰	۲۱۰

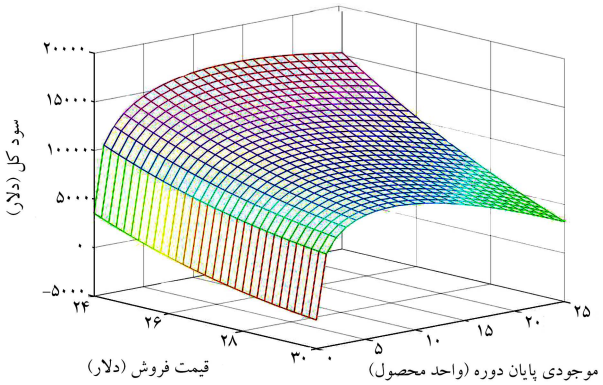
شکل ۱. تابع رگرسیون نمایی تقاضای وابسته به قیمت.

جدول ۲. پارامترهای مثال ۱.

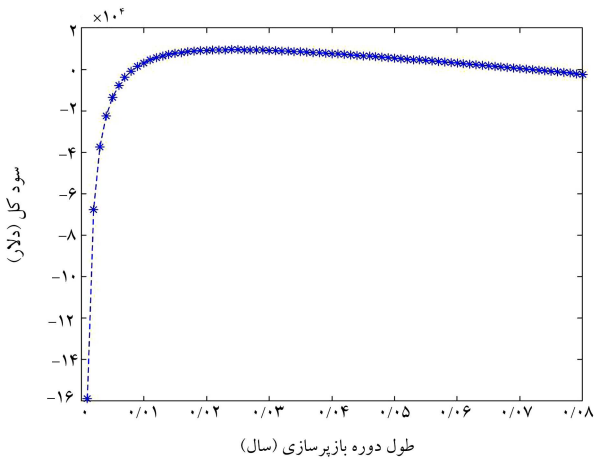
پارامترها	مقدار پارامترها
تعداد مشتریان بالقوه (نفر) (α)	۶۰۰۰
ضریب کشش تقاضا نسبت به موجودی نمایش داده شده (β)	۰/۶
ضریب کشش تقاضا نسبت به قیمت (λ)	۰/۱
هزینه خرید هر واحد محصول (هزار ریال) (C_p)	۲۰
هزینه نگهداری هر واحد محصول (هزار ریال) (C_g)	۵
شیب تابع خطی نگهداری وابسته به زمان (هزار ریال) (C_h)	۰/۲۵
هزینه سفارش (هزار ریال) (C_o)	۱۰
زمان انقضا محصول (سال) (m)	۰/۰۴
قیمت فروش ضایعات هر محصول (هزار ریال) (s)	۱۰
سایز قفسه (w)	۲۵
قیمت فروش اولیه (هزار ریال) (p_1)	۳۰

جدول ۳. جواب‌های بهینه‌ی مثال ۱.

متغیرها	مقدار بهینه
زمان بازپرسازی (T^*)	۰/۰۲۳۲
موجودی پایان دوره (E^*)	۶/۵۴۱
ضریب کاهش قیمت (k^*)	۰/۹۴۱
زمان کاهش قیمت (t_1^*)	۰/۰۰۶
مقدار اقتصادی سفارش (Q^*)	۳۹/۵۹۴
سود کل $(\prod(T,k,E))$	۸۳۶۶/۹۹



شکل ۲. تابع هدف مثال ۱ نسبت به موجودی پایان دوره و قیمت فروش.



شکل ۳. تابع هدف مثال ۱ نسبت به زمان بازپرسازی.

تقاضا نسبت به قیمت (λ)، مقدار اقتصادی سفارش Q، موجودی پایان دوره E و همچنین سود کل TP کاهش یافته است. طول دوره‌ی بازپرسازی T نیز اندکی افزایش یافته است. با افزایش λ، مدل زمان اعمال کاهش قیمت t_1 را کاهش داده است. با افزایش تعداد مشتریان بالقوه (α)، مقدار اقتصادی سفارش Q و همچنین سود کل TP به شدت افزایش می‌یابد. افزایش تعداد مشتریان بالقوه (α) موجب افزایش اندکی در موجودی پایان دوره E می‌شود. با افزایش (α)، طول دوره‌ی بازپرسازی T کاهش یافته است. زمانی که تعداد مشتریان بالقوه زیاد است، مدل تخفیف کم‌تری در نظر می‌گیرد (افزایش ضریب قیمت k). با افزایش هزینه‌ی خرید هر واحد محصول (C_p)، مقدار اقتصادی سفارش Q و همچنین سود کل TP کاهش می‌یابد. افزایش هزینه‌ی خرید هر واحد محصول (C_p) موجب کاهش موجودی پایان دوره E می‌شود. زمانی که هزینه‌ی خرید هر واحد محصول (C_p) زیاد است، مدل تخفیف کم‌تری در نظر می‌گیرد (افزایش ضریب قیمت k). با افزایش C_p مدل زمان اعمال کاهش قیمت t_1 راکمی کاهش داده است و از سیاست اعمال تخفیف کم (ضریب k بیشتر) در همان ابتدای دوره استفاده کرده است. در زمانی که هزینه‌ی خرید هر واحد محصول (C_p) به ۲۴ واحد پولی رسیده است مدل هیچ تخفیفی در نظر نگرفته است و محصول با همان قیمت اولیه‌ی p_1 به فروش خواهد رسید. افزایش هزینه‌ی هر سفارش (C_o)، تأثیر خیلی کمی بر مقدار اقتصادی سفارش Q، موجودی پایان دوره E و همچنین سود کل TP داشته و موجب کاهش اندکی در مقادیر این متغیرها شده است. افزایش هزینه‌ی ثابت نگهداری هر واحد محصول (C_g)، موجب کاهش مقدار اقتصادی سفارش Q، موجودی پایان دوره E و همچنین سود کل TP شده است. با افزایش تاریخ انقضا (m)، مقدار اقتصادی سفارش Q و نیز سود کل TP به طور فزاینده‌یی افزایش می‌یابد. در این شرایط مدل تخفیف کم‌تری در نظر می‌گیرد (افزایش ضریب قیمت k). با افزایش اندازه‌ی فضای قفسه (w) به دلیل این که نمایش حجم زیادی از محصولات تازه موجب ترغیب مشتریان به خرید بیشتر می‌شود و همانطورکه قبلاً بحث شد این پارامتر بر تقاضای مشتریان تأثیر توانی دارد، بنابراین مدل با افزایش مقدار اقتصادی سفارش Q موجب افزایش سود کل TP به طور فزاینده می‌شود. افزایش اندازه‌ی فضای قفسه (w) موجب افزایش موجودی پایان دوره E نیز می‌شود. با افزایش اندازه‌ی فضای قفسه (w) و در نتیجه افزایش مقدار اقتصادی سفارش، مدل به منظور افزایش فروش محصولات در طول همان دوره بازپرسازی T تخفیف بیشتری در نظر می‌گیرد (کاهش ضریب قیمت k). با افزایش ضریب کشش تقاضا نسبت به موجودی نمایش داده شده (β)، مدل با افزایش مقدار اقتصادی سفارش Q وکاهش طول دوره‌ی بازپرسازی T موجب افزایش سود کل TP به طور فزاینده می‌شود. افزایش ضریب کشش تقاضا نسبت به موجودی نمایش داده شده (β) موجب افزایش موجودی پایان دوره‌ی E نیز می‌شود. با افزایش مقدار ارزش بازیافتنی هر واحد (s) مدل با افزایش موجودی پایان دوره E موجب افزایش سود کل TP می‌شود. با افزایش مقدار ارزش بازیافتنی هر واحد (s) مدل تخفیف کم‌تری در نظر می‌گیرد (افزایش ضریب قیمت k).

۳.۵. پیشنهادهایی برای مدیران و صاحبان کسب و کار

یافته‌های زیر از تجزیه و تحلیل حساسیت به دست آمده است که می‌تواند به مدیران و تصمیم‌گیرندگان در خرده‌فروشی‌ها به منظور کسب سود بیشتر کمک کند:

- پارامترهای تعداد مشتریان بالقوه و ضریب کشش تقاضا نسبت به قیمت، بیشترین تأثیر را در افزایش و کاهش سود دارند. بنابراین، تصمیم‌گیرنده باید به تحلیل بازار

جدول ۴. تحلیل حساسیت تابع هدف نسبت به پارامترها.

		k	t_1	Q	T	E	Π
ضریب کشش تقاضا نسبت به قیمت (λ)	۰.۰۸۵	۱	۰.۰۰۸۲	۴۸.۸۴	۰.۰۱۹	۷.۷۹	۱۶۶۹۱.۳۲
	۰.۰۹	۰.۹۸۴	۰.۰۰۸	۴۵.۶۱	۰.۰۲۱	۷.۴۸	۱۳۳۳۷.۰۵
	۰.۰۹۵	۰.۹۶۱۵	۰.۰۰۷۵	۴۳.۱۳	۰.۰۲۲۴	۶.۹۹	۱۰۵۹۶.۲
	۰.۱	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶	۳۹.۵۹	۰.۰۲۳	۶.۵۴	۸۳۶۶.۹۹
	۰.۱۱	۰.۸۹۹۴	۰.۰۰۵	۳۴.۲۷	۰.۰۲۶	۵.۵۹۵	۵۰۵۱.۹۲
	۰.۱۲	۰.۸۶۳۷	۰.۰۰۰۲۱	۲۸.۸۴	۰.۰۲۹	۴.۷۸	۲۸۴۳.۶۸
	۰.۱۳	۰.۸۲۲	۰.۰۰۰۰۱۰۸	۲۵.۰۲	۰.۰۳۱۸	۴.۱۲	۱۳۸۰.۶۱
	۰.۱۴	۰.۷۷۹	۰.۰۰۰۰۰۰۰۵۱	۲۵	۰.۰۳۸۱	۴.۰۹	۳۳۵.۰۹
مشتریان بالقوه (α)	۲۰۰۰	۰.۸۱۶۵	۰.۰۰۰۰۲۳۴	۲۵.۰۰۲	۰.۰۳۵۴	۵.۷۰۰۹	۳۴۰.۲۴
	۳۰۰۰	۰.۸۸۸۸	۰.۰۰۰۰۰۱۴۱	۲۵.۰۰۲۰۳	۰.۰۳۲۴	۵.۷۶۵۴۳	۱۷۸۸.۲۰۲۶
	۴۰۰۰	۰.۹۱۵۶	۰.۰۰۲۸۵	۲۹.۸۶۳۸۷	۰.۰۲۷۸۳	۵.۹۷۱۷۴	۳۸۲۳.۴۴۶۴
	۵۰۰۰	۰.۹۳۲	۰.۰۰۵۴۱	۳۵.۶۳۸۸۸	۰.۰۲۶۰۵	۶.۳۵۸۲	۶۰۲۹.۶۸۸۱
	۶۰۰۰	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۹۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸۸
	۷۰۰۰	۰.۹۴۳۷	۰.۰۰۶۶۹	۴۲.۴۴۸۷۷	۰.۰۲۰۳۳۵	۶.۶۴۳۵	۱۰۷۷۰.۹۴۰۵
	۸۰۰۰	۰.۹۵۸۹۱۴	۰.۰۰۸۲	۴۷.۹۸۱۵	۰.۰۲۰۳۵	۷.۳۶۱۵۱	۱۳۲۷۴.۵۳۶۲
	۹۰۰۰	۰.۹۵۵۹۷	۰.۰۰۸۲۵	۵۱.۰۹۳۴	۰.۰۱۹۰۲	۶.۹۴۴۵	۱۵۸۴۱.۲۱۷۱
	۱۰۰۰۰	۰.۹۵۸۶	۰.۰۰۸۴	۵۴.۳۲۷۷	۰.۰۱۸۱	۶.۹۲۱۲	۱۸۴۴۴.۰۱۰۱
هزینه خرید هر واحد محصول (C_p)	۱۰	۰.۶۶۶۷	۰.۰۰۴۷	۴۹.۷۸۹	۰.۰۰۴۷۲	۲۴.۹۱۱	۵۰۴۱۱.۱۸۴۸
	۱۳	۰.۷۵۵	۰.۰۰۸۲۵	۵۶.۷۵۱	۰.۰۱۱۵۱	۱۵.۷۴۳۲	۲۹۲۷۶.۶۸۵۳
	۱۵	۰.۸۶۶۷	۰.۰۰۸۹۸	۴۹.۵۱۰۲۴۶	۰.۰۱۵۵۷	۱۳.۲۳۲۳	۲۰۵۹۳.۴۹۲۶
	۱۷	۰.۸۶۵۶	۰.۰۰۸۰۱	۴۷.۲۳۲۶۴	۰.۰۱۷۷۲	۹.۳۵۳۳۳	۱۴۷۸۱.۵۳۹۴
	۱۹	۰.۹۰۸۲	۰.۰۰۷۶	۴۳.۶۶۷۶	۰.۰۲۱۹۹۶	۷.۱۵۰۵۶	۱۰۱۹۹.۵۴۱۴
	۲۰	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۹۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸
	۲۱	۰.۹۵۸۶۲	۰.۰۰۴۶۳	۳۵.۱۷۷۴	۰.۰۲۲۹۶	۵.۶۵۳۶	۶۷۴۲.۱۲۵۶
	۲۲	۰.۹۸۳۷۶۶	۰.۰۰۴۲۳۶۷۹	۳۳.۶۸۱۳۶۶	۰.۰۲۶۳۶۵	۵.۰۴۰۱۷	۵۴۰۱.۸۶۸۹
	۲۴	۱	۰.۰۰۱۶۲۲	۲۸.۲۷۴۸۵	۰.۰۲۸۷۶	۳.۳۰۲۰۶	۳۱۸۰.۰۲۶۵
هزینه هر سفارش (C_o)	۵	۰.۹۳۹۸	۰.۰۰۶۱۵۲	۴۲.۰۲۱۲۲۹	۰.۰۲۲۵۹	۶.۵۱۶	۸۵۸۴.۳۳۰۵
	۷	۰.۹۳۷۰۳	۰.۰۰۶۲۰۴	۴۱.۷۲۴۲۸	۰.۰۲۴۷۷	۶.۵۸۷۶	۸۴۶۰.۹۰۳۹
	۹	۰.۹۳۶۹۴	۰.۰۰۶۳۴	۳۹.۵۳۴۵	۰.۰۲۳۳۱	۶.۲۵۱۹۶	۸۴۰۷.۵۷۷۹
	۱۰	۰.۹۳۳۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۰۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸
	۱۱	۰.۹۳۲۸	۰.۰۰۶۴	۳۹.۴۸۹۶۵	۰.۰۲۲۹۹	۶.۴۸۵۰۵۳	۸۳۲۳.۰۸۱
	۱۳	۰.۹۲۰۵۳	۰.۰۰۶۴۶	۳۸.۷۹۶۹۸	۰.۰۲۲۵	۶.۵۰۹۱۳۶	۸۲۲۷.۶۲۷۳
	۱۵	۰.۹۲	۰.۰۰۶۶۴۶۸	۳۸.۰۳۶۵۷۱۸	۰.۰۲۳۵۳۵۶	۶.۵۳۹۲۹	۸۱۵۳.۳۶۲۲
هزینه نگهداری هر واحد محصول (C_s)	۳	۰.۹۳۴۸	۰.۰۰۶۴۴۸	۳۹.۸۵۷۰۸	۰.۰۲۳	۶.۴	۸۴۰۵.۵۶۵۴
	۴	۰.۹۳۸۹۵۴۱۸	۰.۰۰۶۵	۳۹.۸۷۱۷	۰.۰۲۳۲۸۶	۶.۵۲۲۳۵	۸۳۸۷.۱۵۰۹
	۵	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۹۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸
	۶	۰.۹۴	۰.۰۰۶۵۳	۳۹.۹۸۱۰۵۸	۰.۰۲۳۴۱۱	۶.۳۵۶	۸۳۴۴.۹۱۹۲
	۷	۰.۹۳۹۶۳	۰.۰۰۶۵۴۹۶	۳۹.۸۵۲۶	۰.۰۲۳۴۵	۶.۴۷۶۱	۸۳۲۵.۸۵۳۵
	۸	۰.۹۴۰۳۵	۰.۰۰۶۵۶	۳۹.۸۳۵۸۴	۰.۰۲۳۵	۶.۴۶۵۱۱	۸۳۰۵.۰۱۱۳
تاریخ انقضا (m)	۰.۰۲	۰.۸۸۷۵۶	۰.۰۰۰۰۰۱۱۳۸	۲۵.۰۰۳۳	۰.۰۱۶۱۹	۵.۷۳۱۴۴	۳۶۵۳.۰۷۸۱
	۰.۰۳	۰.۹۲۵۳	۰.۰۰۳۱۸۷۷	۳۲.۷۸۲	۰.۰۱۹۸۹	۶.۲۹۴۶۳	۶۵۷۶.۹۴۸۶
	۰.۰۴	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۹۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸
	۰.۰۵	۰.۹۵۴	۰.۰۱۱۶	۴۹.۲۶۳	۰.۰۲۸۶	۶.۷۹۳	۹۴۹۵.۰۲۷۸
	۰.۰۶	۰.۹۵۵۴	۰.۰۱۲۴	۵۱.۲۵۹۲۷	۰.۰۲۸۷۶	۶.۸۵۶۰۶	۱۰۵۱۹.۳۹۱۲
سایز فضای قسمه (W)	۲۰	۰.۹۴۶	۰.۰۰۷۵۶	۳۴.۵۰۴۷	۰.۰۲۳	۵.۳۴۶	۷۶۷۵.۳۴۳۶
	۲۲	۰.۹۴۴	۰.۰۰۶۹۴	۳۶.۲۹۸	۰.۰۲۳	۵.۸۸۹	۷۹۷۳.۳۹۰۸
	۲۴	۰.۹۴۳	۰.۰۰۷۶	۴۰.۵۳۶	۰.۰۲۳	۶.۳۲۸	۸۲۰۳.۲۲۹۵
	۲۵	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۹۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸

ادامه‌ی جدول ۴.

		k	t_1	Q	T	E	Π
	۲۶	۰.۹۳۷	۰.۰۰۶۴	۴۰.۹۱۱	۰.۰۲۳۲	۶.۷۳۶	۸۴۸۷.۴۹۷۳
	۲۸	۰.۹۳۷	۰.۰۰۵۹۲	۴۲.۵۷۶	۰.۰۲۳۲	۷.۲۴۶۲	۸۷۱۴.۰۱۹۳
	۳۰	۰.۹۳۷	۰.۰۰۵۹۶۲	۴۵.۳۳۵	۰.۰۲۴	۷.۷۴۳۶	۸۹۲۷.۱۸۸۱
ضریب کشش تقاضا نسبت به موجودی نمایش داده شده (β)	۰.۳	۰.۸۱۵۱۳	۰.۰۰۰۰۷۶۲۲	۲۵.۱۰۴	۰.۰۳۷۴	۳.۲۷۸	۱۳۸۶.۴۷۵۶
	۰.۴	۰.۸۷۹۹	۰.۰۰۰۰۰۱۰۴	۲۵.۰۰۱۶	۰.۰۲۹۴	۳.۵۰۶۳	۳۰۷۶.۹۸۲۴
	۰.۵	۰.۹۱۷۳	۰.۰۰۲۳	۲۹.۲۸۳۷	۰.۰۲۵۱	۴.۵۲۸	۵۱۲۴.۴۱۷۵
	۰.۶	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۹۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸
	۰.۷	۰.۹۵۵۷	۰.۰۰۹۳	۵۱.۶۰۴۷	۰.۰۲۰۹	۸.۲۶۹۷	۱۳۴۱۶.۱۶۳۹
	۰.۸	۰.۹۶۵۸۲	۰.۰۱۰۴۸	۶۴.۵۸۷۸	۰.۰۱۸۲۳	۹.۶۷۹۶۵	۲۱۰۱۰.۱۳۱۸
ارزش بازیافتی هر واحد(s)	۵	۰.۹۲۰۵	۰.۰۰۵۲۲	۳۷.۷۶۴۶	۰.۰۲۵۱۶	۴.۰۳۹	۷۳۱۱.۲۶۱۸
	۷	۰.۹۲۳	۰.۰۰۵۶۸	۳۸.۷۰۲۶	۰.۰۲۴۳	۴.۷۸۹۲	۷۶۶۳.۱۹۹
	۹	۰.۹۳۴۲	۰.۰۰۶۱۴	۳۹.۲۳۱۷	۰.۰۲۳۶	۵.۸۶۲۹	۸۱۰۳.۲۹۹۲
	۱۰	۰.۹۴۰۶	۰.۰۰۶۴	۳۹.۵۹۳۵	۰.۰۲۳۲	۶.۵۴۰۵	۸۳۶۶.۹۸۸۸
	۱۱	۰.۹۴۶۹	۰.۰۰۷۱	۴۰.۵۶۴۴	۰.۰۲۳۲	۷.۳۲۶۳	۸۶۶۴.۶۳۵۴
	۱۳	۰.۹۵۸۵	۰.۰۰۷۹۴	۴۱.۷۰۳۹۶	۰.۰۲۲	۹.۲۲۳۸	۹۴۰۹.۶۰۱۸
	۱۵	۰.۹۷۲۷۶	۰.۰۰۸۱۵	۴۱.۳۷۶۲۹	۰.۰۱۸۹۶	۱۱.۹۵۱۹	۱۰۴۴۹.۰۳۷۱

پرداخته و رفتار مشتریان را نسبت به تغییرات قیمت به خوبی مورد سنجش قرار دهد؛

- تاریخ انقضای محصولات یکی دیگر از عواملی است که تأثیر زیادی بر سود خرده‌فروش خواهد داشت. بر اساس نتایج، با افزایش تاریخ انقضای محصول، تقاضای محصول و در نتیجه سود خرده‌فروش افزایش یافته است. محصول مورد بررسی محصولی با عمر کم است. به مدیران خرید توصیه می‌شود در مرحله‌ی انتخاب بین محصولات یکسان به طول عمر متفاوت، محصولاتی با ماندگاری بیشتر یا محصولاتی با تاریخ انقضای طولانی‌تر را برای عرضه به مشتریان انتخاب کنند؛

- همچنین نتایج تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که هزینه‌ی خرید هر واحد محصول، تأثیر زیادی بر میزان سود خرده‌فروش دارد. بنابراین، مدیران باید از طریق مذاکره با تأمین‌کنندگان و همچنین استفاده از سیستم‌های تصمیم‌گیری و ارزیابی تأمین‌کنندگان، نسبت به کاهش هزینه‌ی خرید محصول اقدام نمایند؛

- هزینه‌های نگهداری و حفظ تازگی محصولات در طول دوره‌ی بازپرسازی روند افزایشی خواهند داشت. با افزایش این هزینه‌ها اعمال سیاست‌های تخفیف قیمت می‌تواند به کاهش هزینه‌های نگهداری کمک شایانی کند؛

- با توجه به تأثیر زیاد دو پارامتر اندازه‌ی قفسه و کشش تقاضای مشتریان نسبت به سطح موجودی نمایش داده شده بر سود کل، تصمیم‌گیرندگان باید به تحلیل بازار و رفتار مصرف‌کنندگان بپردازند. در صورتی که پارامتر کشش تقاضا نسبت به بازار تخمین بالایی داشته باشد، افزایش اندازه‌ی قفسه‌های نمایش موجودی به مدیران توصیه می‌شود.

۶. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی برای مدیریت موجودی و قیمت‌گذاری محصولات فاسدشدنی انبارشدنی توسعه داده شده است. در این مدل تقاضای محصولات به صورت تابعی حاصل‌ضربی از عوامل مؤثر بر تصمیمات خرید مشتریان در نظر گرفته شده است. تقاضای محصولات به تازگی، قیمت فروش و سطح موجودی نمایش داده شده بستگی دارد. در این مدل فرض سنتی موجودی پایان دوره‌ی صفر به فرض موجودی پایان دوره‌ی غیر صفر تغییر داده شده است. برای تابع تقاضای وابسته به تازگی از فرم خطی، برای تابع تقاضای وابسته به قیمت خرید از فرم نمایی، و برای تابع تقاضای وابسته به سطح موجودی نمایش داده شده از فرم توانی استفاده شده است. مدل ارائه شده برای تمامی محصولاتی که هزینه‌ی نگهداری هر واحد آن در طول زمان افزایشی است کاربرد دارند. مدل ارائه شده ضریب کاهش قیمت (قیمت تقلیل یافته)، زمان کاهش قیمت، مقدار اقتصادی سفارش، زمان بازپرسازی و موجودی پایان دوره را با هدف بیشینه کردن سود خرده‌فروش تعیین می‌کند. برای مدل ارائه شده، ساختار تابع هدف و شرایط وجود جواب بهینه‌ی محلی مورد بررسی قرار گرفت. بر اساس قضیه‌های ارائه شده، نشان داده شد که تابع هدف نسبت به متغیرهای تصمیم شبه مقعر است و بنابراین جواب بهینه‌ی محلی وجود دارد که با الگوریتم جست‌وجو ارائه شده تعیین می‌شود. این پژوهش می‌تواند در فضای رقابتی چندمحصولی، برای حالتی که چند محصول مکمل به طور همزمان توسط خرده‌فروش عرضه می‌شود، محصولاتی که جایگزین یکدیگرند و تقاضای آنها مستقل نبوده و بر یکدیگر اثر می‌گذارند، در نظر گرفته شود. در این پژوهش، هزینه‌ی نگهداری به صورت تابع خطیِ افزایشی نسبت به زمان در نظر گرفته شده است. در پژوهش‌های آتی، هزینه‌های نگهداری می‌تواند به صورت غیرخطی در نظر گرفته شود. این پژوهش می‌تواند با مجاز در نظر گرفتن شرایط کمبود در حالت‌های فروش

از دست رفته، پس‌افت، یا به صورت ترکیبی توسعه داده شود. در پژوهش‌های آتی می‌توان با در نظرگرفتن ارزش پول، نرخ تنزیل و شرایط تورم مدل ارائه شده را توسعه داد. همچنین می‌توان با در نظرگرفتن مجاز بودن پرداخت هزینه‌های خرید با تأخیر، مدل ارائه شده را توسعه و بهبود بخشید. در این پژوهش تقاضای محصول فاسد شدنی به صورت قطعی در نظرگرفته شده است. بر اساس مطالعات انجام شده، در نظرگرفتن تقاضای محصولات تازه به صورت تصادفی منجر به ارائه‌ی مدل‌های واقعی‌تر و کاربردی‌تری خواهد شد. به منظور توسعه‌ی مدل در پژوهش‌های آتی، می‌توان سیاست‌های تخفیف مقداری را در نظرگرفت.

پانوشت‌ها

1. Food and Agriculture Organization
2. Intergovernmental Panel on Climate Change

منابع (References)

1. Eilon, S. and Mullanya, R.V. "Issuing and pricing policy of semi perishables", *Proceedings of the Fourth International Conference On Operational Research*, Wiley-Interscience, pp. 205-215 (1996).
2. Florkowski, W.J., Prussia, S.E., Shewfelt, R.L. and et al., *Postharvest Handling: A Systems Approach (Food Science and Technology)*, Second Edition. Academic Press Inc, New York (2009).
3. Buzby, J.C., Farah-Wells, H. and Hyman, J. "The estimated amount, value, and calories of postharvest food losses at the retail and consumer levels in the United States", *USDA-ERS Economic Information Bulletin*, **(121)**, pp.1-39 (2014).
4. Biswas A.K. "India must tackle food waste", Technical report, World Economic Forum (2014).
5. Abbott, J.A. "Quality measurement of fruits and vegetables", *Postharvest Biol. Technol*, **15**, pp. 207-225 (1999).
6. Karagiannis, G., Katranidis, S. and Velentzas, K. "An error correction almost ideal demand system for meat in Greece", *Agricultural Economics*, **22**, pp. 29-35 (2000).
7. French, S.A., Jeffery, R.W., Story, M. and et al. "Pricing and promotion effects on low-fat vending snack purchases: The CHIPS study", *Am J Public Health*, **91**, pp. 7-11 (2001).
8. French, S.A., Hannan, P.J., Harnack, L.J. and et al. "Pricing and availability intervention in vending machines at four bus garages", *J Occup Environ Med*, **52**(1), pp. 29-33 (2010).
9. Epstein, L.H., Dearing, K.K., Handley, E.A. and et al. "Relationship of mother and child food purchases as a function of price: A pilot study", *Appetite*, **47**, pp. 8-15 (2006).
10. Epstein, L.H., Handley, E.A., Dearing, K.K. and et al. "Purchases of food in youth. Influence of price and income", *Psychol Sci*, **17**, pp. 9-28 (2006).
11. Epstein, L.H., Dearing, K.K., Paluch, R.A. and et al. "Price and maternal obesity influence purchasing of low- and high-energy-dense foods", *Am J Clin Nutr*, **86**, pp. 22-40 (2007).
12. Epstein, L.H., Dearing, K.K., Roba, L.G. and et al. "The influence of taxes and subsidies on energy purchased in an experimental purchasing study", *Psychol Sci*, **21**, pp. 14-40 (2010).
13. Taillie, L.S., Rivera, J.A., Popkin, B.M. and et al. "Do high vs. low purchasers respond differently to a nonessential energy-dense food tax Two-year evaluation of Mexico's 8% nonessential food tax", *Prev Med*, **105**, pp. 37-42 (2017).
14. French, S.A., Story, M., Jeffery, R.W. and et al. "Pricing strategy to promote fruit and vegetable purchase in high school cafeterias", *J Am Diet Assoc*, **97**, pp. 100-108 (1997).
15. Harnack, L.J., French, S.A., Oakes, J.M. and et al. "Effects of calorie labeling and value size pricing on fast food meal choices: Results from an experimental trial", *Int J Behav Nutr Phys Act*, **5**(63), pp.1-13 (2008).
16. Yang, C.C. and Chiou, W.B. "Substitution of healthy for unhealthy beverages among college students: A health-concerns and behavioural-economics perspective", *Appetite*, **54**(3), pp. 512-516 (2010).
17. Block, J.P., Chandra, A., McManus, K.D. and et al. "Point-of-purchase price and education intervention to reduce consumption of sugary soft drinks", *Am J Public Health*, **100**, pp. 1427-33 (2010).
18. Giesen, J.C., Payne, C.R., Havermans, R.C. and et al. "Exploring how calorie information and taxes on high-calorie foods influence lunch decisions", *Am J Clin Nutr*, **93**, pp. 689-94 (2011).
19. Epstein, L.H., Finkelstein, E., Raynor, H. and et al. "Experimental analysis of the effect of taxes and subsides on calories purchased in an on-line supermarket", *Appetite*, **95**, pp. 245-251 (2015).
20. Harker, F.R., Gunson, F.A. and Jaeger, S.R. "The case for fruit quality: An interpretive review of consumer attitudes, and preferences for apples", *Postharvest Biol. Technol*, **28**, pp. 333-347 (2003).
21. Herman, D.R., Harrison, G.G., Afifi, A.A. and et al. "Effect of a targeted subsidy on intake of fruits and vegetables among low-income women in the special supplemental nutrition program for Women, infants, and children", *Am J Public Health*, **98**, pp. 98-105 (2008).
22. Andreyeva, T., Long, M.W. and Brownell, K.D. "The impact of food prices on consumption: A systematic review of research on the price elasticity of demand for food", *Am. J. Publ. Health*, **100** (2), pp. 216-222 (2010).

23. Robinson, B. and Lakhani, C. "Dynamic price models for new-product planning", *Management Science*, **21**(6), pp. 1113-1122 (1975).
24. Thompson, G.L. and Teng, J.T. "Optimal pricing and advertising policies for new product oligopoly models", *Marketing Science*, **3** (2), pp. 148-168 (1984).
25. Teng, J.T. and Chang, C.T. "Economic production quantity models for deteriorating items with price-and stock-dependent demand", *Computers and Operations Research*, **32**(2), pp. 297-308 (2005).
26. You, P.S. "Inventory policy for products with price and time-dependent demands", *Journal of the Operational Research Society*, **56**(7), pp. 870-873 (2005).
27. Chang, H.J., Teng, J.T., Ouyang, L.Y. and et al. "Retailers optimal pricing and lot-sizing policies for deteriorating items with partial backlogging", *European Journal of Operational Research*, **168**(1), pp. 51-64 (2006).
28. You, P.S. and Hsieh, Y.C. "An EOQ model with stock and price sensitive demand", *Mathematical and Computer Modelling*, **45**(7), pp. 933-942 (2007).
29. Maihami, R. and Kamalabadi, I.N. "Joint pricing and inventory control for noninstantaneous deteriorating items with partial backlogging and time and price dependent demand", *International Journal of Production Economics*, **136**(1), pp. 116-122 (2012).
30. Avinadav, T., Herbon, A. and Spiegel, U. "Optimal inventory policy for a perishable item with demand function sensitive to price and time", *International Journal of Production Economics*, **144**(2), pp. 497-506 (2013).
31. Feng, L., Chan, Y.L., Cárdenas-Barrón, L.E. and et al. "Pricing and lot-sizing polices for perishable goods when the demand depends on selling price, displayed stocks, and expiration date", *International Journal of Production Economics*, **185**(C), pp. 11-20 (2017).
32. Dye, C.Y. "Optimal joint dynamic pricing, advertising and inventory control model for perishable items with psychic stock effect", *European Journal of Operational Research*, **283**(2), pp. 576-587 (2019).
33. Wee, H.M. "Joint pricing and replenishment policy for deteriorating inventory with declining market", *International Journal of Production Economics*, **40**(2-3), pp. 163-171 (1995).
34. Cohen, M.A. "Joint pricing and ordering policy for exponentially decaying inventory with known demand", *Naval Research Logistics Quarterly*, **24**, pp. 257-268 (1977).
35. Goyal, S.K. and Giri, B. "Recent trends in modeling of deteriorating inventory", *European Journal of Operational Research*, **134**, pp. 1-16 (2001).
36. Bhattacharjee, S. and Ramesh, R. "A multi-period profit maximizing model for retail supply chain management: An integration of demand and supply-side mechanisms", *European Journal of Operational Research*, **122**(3), pp. 584-601 (2000).
37. Mukhopadhyay, S.M. "An EOQ model with two-parameter weibull distribution deterioration and price-dependent demand", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **36**, pp. 25-33 (2005).
38. Ramasesh, R.V. "Lot-sizing decision under limited-time price incentives: A review", *Omega*, **38**(3-4), pp. 118-135 (2010).
39. Tajbakhsh, M.M., Lee, C. and Zolfaghari, S. "An inventory model with random discount offerings", *Omega*, **39**(6), pp. 710-718 (2011).
40. Wang, X. and Li D. "A dynamic product quality evaluation-based pricing model for perishable food supply chains", *Omega*, **40**, pp. 906-917 (2012).
41. Wu, J., Chang, C.T., Cheng, M.C. and et al. "Inventory management for fresh produce when the time-varying demand depends on product freshness, stock level and expiration date", *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*, **3**(3), pp. 138-147 (2016).
42. Tsiros, M. and Heilman, C.M. "The effect of expiration dates and perceived risk on purchasing behavior in grocery store perishable categories", *Journal of Marketing*, **69**(2), pp. 114-129 (2005).
43. Sainathan, A. "Pricing and replenishment of competing perishable product variants under dynamic demand substitution", *Production and Operations Management*, **22**(5), pp. 1157-1181 (2013).
44. Teng, J.T., Cárdenas-Barrón, L.E., Chang, H.J. and et al. "Inventory lot-size policies for deteriorating items with expiration dates and advance payments", *Applied Mathematical Modelling*, **40**(19-20), pp. 8605-8616 (2016).
45. Li, R., Chan, Y.L., Chang, C.T. and et al. "Pricing and lot-sizing policies for perishable products with advance-cash-credit payments by a discounted cash-flow analysis", *International Journal of Production Economics*, **193**(C), pp. 578-589 (2017).
46. Dobson, G., Pinker, E.J. and Yildiz, O. "An EOQ model for perishable goods with age-dependent demand rate", *Eur. J. Oper. Res*, **257** (1), pp. 84-88 (2017).
47. Li, R. and Teng, J.T. "Pricing and lot-sizing decisions for perishable goods when demand depends on selling price, reference price, product freshness, and displayed stocks", *European Journal of Operational Research*, **270**(3), pp. 1099-1108 (2018).
48. Levin, R.I., McLaughlin, C.P., Lamone, R.P. and et al., *Productions/Operations Management: Contemporary Policy For Managing Operating Systems*, McGraw-Hill, New York p. 373 (1972).
49. Silver, E.A. and Peterson, R., *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, 2nd Edition, Wiley, New York (1985).
50. Wolfe, H.B. "A model for control of style merchandise", *Industrial Management Review*, **9**(2), pp. 69-82 (1968).
51. Mandal, B.N. and Phaujdar, S. "An inventory model for deteriorating items and stock-dependent consumption rate", *Journal of the Operational Research Society*, **40**(5), pp. 483-488 (1989).
52. Datta, T.K. and Pal, A.K. "A note on an inventory model with inventory level dependent demand rate", *Journal of the Operational Research Society*, **41**(10), pp. 971-975 (1990).

trade credits", *International Journal of Information and Management Sciences*, **24**(4), pp. 329-347 (2013).

59. Baker, R.C. and Urban, T.L. "A deterministic inventory system with an inventory level dependent demand rate", *Journal of the Operational Research Society*, **39**(9), pp. 823-831 (1988).
60. Hsieh, T.P. and Dye, C.Y. "Optimal dynamic pricing for deteriorating items with reference price effects when inventories stimulate demand", *European Journal of Operational Research*, **262**(1), pp. 136-150 (2017).
61. Al-Amin Khan, M., Shaikh, A.A., Konstantaras, I. and et al. "Inventory models for perishable items with advanced payment, linearly time-dependent holding cost and demand dependent on advertisement and selling price", *International Journal of Production Economics*, **230**(C), p. 107804 (2020).
62. Dehghan Nayeri, M., Azar, A. and Haddad, R. "An optimization model for perishable products pricing (case of ok Chain store)", *Organizational Resources Management Researches Journal*, **10**(3), pp. 81-102 (In Persian) (1399/2021).
63. Cambini, A. and Martein, L. "Generalized convexity and optimization: Theory and application", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, USA (2009).

53. Goh, M. "EOQ models with general demand and holding costs functions", *European Journal of Operational Research*, **73**(1), pp. 50-54 (1994).
54. Padmanabhan, G. and Vrat, P. "EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate", *European Journal of Operational Research*, **86**(2), pp. 281-292 (1995).
55. Wu, K.S., Ouyang, L.Y. and Yang, C.T. "An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging", *International Journal of Production Economics*, **101**(2), pp. 369-384 (2006).
56. Chang, C.T., Teng, J.T. and Goyal, S.K. "Optimal replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand", *International Journal of Production Economics*, **123**(1), pp. 62-68 (2010).
57. Lee, Y.P. and Dye, C.Y. "An inventory model for deteriorating items under stock-dependent demand and controllable deterioration rate", *Computers and Industrial Engineering*, **63**, pp. 474-482 (2012).
58. Tripathi, R.P. and Pandey, H.S. "An EOQ model for deteriorating item with time dependent demand rate under

پیوست

پیوست ۱:

■ **اثبات قضیه ۱:**

برای مقدار k داده شده، مشتق‌های مرتبه اول و دوم t_1 و Q نسبت به T برابر با روابط ۱-۱ تا ۱-۴ است:

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\alpha w^{\beta} e^{-\lambda k p_1}(m-T)}{m} > 0 \qquad (۱-۱)$$

$$\frac{d^2Q}{dT^2} = -\frac{\alpha w^{\beta} e^{-\lambda k p_1}}{m} < 0. \qquad (۱-۲)$$

$$\frac{dt_1}{dT} = (m-T)\left[(m-T)^2 + \frac{2m(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)e^{-\lambda k p_1}}\right]^{-0.5} > 0 \qquad (۱-۳)$$

$$\frac{d^2t_1}{dT^2} = \frac{(m-T)^2}{(m-t_1)^3} - \frac{1}{m-t_1} < 0. \qquad (۱-۴)$$

پیوست ۲:

■ **اثبات قضیه ۲:**

بر اساس روابط ۲-۱ و ۲-۲، t_1 نسبت به k نزولی و نسبت به E صعودی است.

$$\frac{\partial t_1}{\partial E} = \frac{m e^{\lambda k p_1}}{\alpha E^{\beta}(m-t_1)} > 0 \qquad (۲-۱)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial k} = \frac{-\lambda m p_1 e^{\lambda k p_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)} < 0 \qquad (۲-۲)$$

همچنین بر اساس روابط ۲-۳ و ۲-۴، Q نسبت به k نزولی و محدب است:

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{-\lambda p_1 \alpha w^{\beta} e^{-\lambda k p_1}}{2m}\left[m^2 - (m-T)^2\right] < 0 \qquad (۲-۳)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} = \frac{\lambda^2 p_1^2 \alpha w^{\beta} e^{-\lambda k p_1}}{2m}\left[m^2 - (m-T)^2\right] > 0 \qquad (۲-۴)$$

روابط ۲-۵ و ۲-۶، نشان می‌دهند که Q نسبت به E صعودی و مقعر است.

$$\frac{\partial Q}{\partial E} = \frac{w^{\beta}}{E^{\beta}} > 0 \qquad (۲-۵)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial E^2} = \frac{-\beta w^{\beta}}{E^{1+\beta}} < 0. \qquad (۲-۶)$$

پیوست ۳:

■ **اثبات قضیه ۳:**

اگر $Y(T)$ تابعی مثبت، مشتق‌پذیر و محدب و $X(T)$ تابعی نامنفی، مشتق‌پذیر و مقعر باشند، $\frac{X(T)}{Y(T)}$ نسبت به T یک تابع شبه مقعر است.[۶۳]

تابع هدف را به صورت زیر ساده‌سازی می‌کنیم:

$$\Pi(E,T,k) = \frac{X(T)}{Y(T)}$$

$$\begin{aligned} X(T) &= p_1(Q-w) + kp_1(w-E) + sE - C_pQ - C_o \\ &- C_g(Qt_1 + \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}(\tfrac{t_1^2}{6m} - \tfrac{t_1^2}{2})) \\ &- C_h(\tfrac{t_1^2}{2}Q + \alpha w^{\beta} e^{-\lambda p_1}(\tfrac{t_1^4}{4m} - \tfrac{t_1^3}{3})) \\ &- C_g\tfrac{(w+E)}{2}(T-t_1) - C_h\tfrac{(w+E)}{2}\tfrac{(T^2-t_1^2)}{2} \\ Y(T) &= T \end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

$Y(T)$ تابعی مثبت، مشتق‌پذیر و محدب است، با اثبات این که $X(T)$ نامنفی، مشتق‌پذیر و مقعر است می‌توان نشان داد که $\Pi(E,T,k,A)$ نسبت به T یک تابع شبه مقعر است و یک جواب بهینه‌ی یکتا دارد. با مقادیر داده شده E و k، مشتق اول $X(T)$ نسبت به T برابر با رابطه‌ی ۳-۲ است:

$$X'(T)=\frac{dX(T)}{dT}$$
$$=(p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{dQ}{dT}-\frac{C_g}{2}(w+E)$$
$$-\frac{C_g}{2}(w-E)\frac{dt_1}{dT}-C_ht_1w\frac{dt_1}{dT}-C_h\frac{(w+E)}{2}T$$
$$+C_h\frac{(w+E)}{2}t_1\frac{dt_1}{dT} \qquad (۲-۳)$$

با استفاده از روابط ۱-۱ و ۱-۲ و ۱-۳ و ۱-۴ در پیوست ۱ (اثبات قضیه ۱)، مشتق دوم $X(T)$ نسبت به T برابر با رابطه‌ی ۳-۳ است:

$$X''(T)=\frac{d^2X(T)}{dT^2}$$
$$=(-\frac{\alpha w^\beta e^{-\lambda kp_1}}{m})[(C_g+C_ht_1)\frac{(m-T)^2}{m-t_1}+p_1$$
$$-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2}]$$
$$+(-C_g-C_hm)\frac{w-E}{2}\frac{(m-T)^2}{(m-t_1)^2}$$
$$-C_h\frac{w+E}{2}+\frac{w-E}{2}\frac{1}{m-t_1}(C_g-C_ht_1) \qquad (۳-۳)$$

در نتیجه اگر روابط ۳-۳ برقرار باشد:

$$(C_g+C_hm)\frac{(m-T)^2}{(m-t_1)^2}<C_g$$
$$p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2}>0 \qquad (۴-۳)$$

آنگاه $X''(T)<0$ است و $X(T)$ نامنفی، مشتق‌پذیر و مقعر است. بنابراین $\Pi(E,T,k)$ نسبت به T شبه مقعر است و یک جواب بهینه‌ی منحصر به فرد دارد که از مساوی صفر قرار دادن مشتق اول تابع هدف نسبت به T محاسبه می‌شود (روابط ۳-۵ و ۳-۶).

$$\frac{d\Pi(E,T,k)}{dT}=\frac{X'(T)}{T}-\frac{X(T)}{T^2}=0 \qquad (۵-۳)$$

$$T[(p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{\alpha w^\beta e^{-\lambda kp_1}(m-T)}{m}$$
$$-\frac{C_g}{2}(w+E)-C_h\frac{(w+E)}{2}T-\frac{C_g}{2}(w-E)$$
$$-\frac{C_h}{2}t_1(w-E)(m-T)\Big[(m-T)^2+\frac{2m(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)e^{-\lambda kp_1}}\Big]^{-0.5}]$$
$$-[p_1(Q-w)+kp_1(w-E)+sE-C_pQ-C_o$$
$$-C_g(Qt_1+\alpha w^\beta e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^3}{6m}-\frac{t_1^2}{2}))$$
$$-C_h(\frac{t_1^2}{2}Q+\alpha w^\beta e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^3}{8m}-\frac{t_1^2}{3}))$$
$$-C_g\frac{(w+E)}{2}(T-t_1)-C_h\frac{(w+E)}{2}\frac{(T^2-t_1^2)}{2}]=0 \qquad (۶-۳)$$

پیوست ۴:

■اثبات قضیه ۴:

برای مقدار T داده شده، با در نظرگرفتن $Z(E,k)$ به صورت رابطه‌ی ۱-۴ داریم:

$$Z(k,E)=\Pi(E,T,k)\,T$$

$$Z(k,E)=p_1(Q-w)+kp_1(w-E)+sE$$
$$-C_pQ-C_o-C_g(Qt_1+\alpha w^\beta e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^3}{6m}-\frac{t_1^2}{2}))$$
$$-C_h(\frac{t_1^2}{2}Q+\alpha w^\beta e^{-\lambda p_1}(\frac{t_1^4}{8m}-\frac{t_1^3}{3}))$$
$$-C_g\frac{(w+E)}{2}(T-t_1)-C_h\frac{(w+E)}{2}\frac{(T^2-t_1^2)}{2} \qquad (۱-۴)$$

مشتق اول $Z(E,k)$ نسبت به E برابر با رابطه‌ی ۲-۴ است:

$$\frac{\partial Z(E,k)}{\partial E}=(p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{\partial Q}{\partial E}$$
$$-kp_1+s-\frac{C_g}{2}((T-t_1)+(w-E)\frac{\partial t_1}{\partial E})$$
$$-\frac{C_h}{2}t_1(w-E)\frac{\partial t_1}{\partial E}-\frac{C_h}{4}(T^2-t_1^2) \qquad (۲-۴)$$

همچنین مشتق اول و دوم t_1 و Q نسبت به E مطابق روابط ۳-۳ تا ۶-۴ است:

$$\frac{\partial t_1}{\partial E}=\frac{me^{\lambda kp_1}}{\alpha E^\beta(m-t_1)} \qquad (۳-۴)$$

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial E^2}=\frac{m^2e^{2\lambda kp_1}}{\alpha^2E^{2\beta}(m-t_1)^3}-\frac{\beta me^{\lambda kp_1}}{\alpha E^{\beta+1}(m-t_1)} \qquad (۴-۴)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial E}=\frac{w^\beta}{E^\beta} \qquad (۵-۴)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial E^2}=\frac{-\beta w^\beta}{E^{1+\beta}} \qquad (۶-۴)$$

با جایگذاری روابط ۳-۴ تا ۶-۴ در رابطه‌ی ۲-۴، مشتق اول $Z(E,k)$ نسبت به E برابر با رابطه‌ی ۷-۴ است:

$$\frac{\partial Z(E,k)}{\partial E}=(p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{w^\beta}{E^\beta}-kp_1+s$$
$$-\frac{C_g}{2}((T-t_1)+(w-E)\frac{me^{\lambda kp_1}}{\alpha E^\beta(m-t_1)})$$
$$-\frac{C_h}{2}t_1(w-E)\frac{me^{\lambda kp_1}}{\alpha E^\beta(m-t_1)}-\frac{C_h}{4}(T^2-t_1^2) \qquad (۷-۴)$$

مشتق اول $Z(E,k)$ نسبت به k برابر با رابطه‌ی ۸-۴ است:

$$\frac{\partial Z(E,k)}{\partial k}=$$
$$p_1(w-E)+(p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{\partial Q}{\partial k} \qquad (۸-۴)$$
$$+(C_g+C_ht_1)\frac{(-w+E)}{2}\frac{\partial t_1}{\partial k}$$

با جایگذاری روابط ۹-۴ و ۱۰-۴ در رابطه‌ی ۸-۴، مشتق اول $Z(E,k)$ نسبت به k به صورت رابطه‌ی ۱۱-۴ خواهد بود:

$$\frac{\partial t_1}{\partial k}=\frac{-\lambda mp_1e^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)} \qquad (۹-۴)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k}=\frac{-\lambda p_1\alpha w^\beta e^{-\lambda kp_1}}{2m}\Big[m^2-(m-T)^2\Big]<0 \qquad (۱۰-۴)$$

$$\frac{\partial Z(E,k)}{\partial k}=$$
$$p_1(w-E)+$$
$$(p_1-C_p-C_gt_1-C_h\frac{t_1^2}{2})\frac{-\lambda p_1\alpha w^\beta e^{-\lambda kp_1}}{2m}\Big[m^2-(m-T)^2\Big]$$
$$+(C_g+C_ht_1)\frac{(-w+E)}{2}\frac{-\lambda mp_1e^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)}$$
$$(۱۱-۴)$$

با استفاده از روابط ۱۲-۴ تا ۱۵-۴، مقادیر G و F و M به صورت روابط ۱۶-۴ تا ۱۸-۴ تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial k\partial E}=0 \qquad (۱۲-۴)$$

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial E\partial k}=\frac{\lambda p_1me^{\lambda kp_1}}{\alpha E^\beta(m-t_1)}[1-\frac{me^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)^2}] \qquad (۱۳-۴)$$

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial l^2}=$$
$$\frac{\lambda^2p_1^2me^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)}[\frac{me^{\lambda kp_1}(w^{1-\beta}-E^{1-\beta})}{\alpha(1-\beta)(m-t_1)^2}-1]. \qquad (۱۴-۴)$$

$$\frac{\partial^{۲}Q}{\partial k^{۲}}=\frac{\lambda^{۲}p_{۱}{}^{۲}\alpha w^{\beta}e^{-\lambda kp_{۱}}}{۲m}\left[m^{۲}-(m-T)^{۲}\right]>۰$$

(۱۵-۴)

$$\begin{aligned}G&=\tfrac{\partial^{۲}Z(E,k)}{\partial k\partial E}=\\&(p_{۱}-C_{p}-C_{g}t_{۱}-C_{h}\tfrac{t_{۱}{}^{۲}}{۲})\tfrac{\partial^{۲}Q}{\partial E\partial k}+(-C_{g}-C_{h}t_{۱})\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial k}\tfrac{\partial Q}{\partial E}-p_{۱}\\&-C_{h}\tfrac{w-E}{۲}\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial k}+(-\tfrac{C_{g}}{۲}-\tfrac{C_{h}}{۲}t_{۱})[\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial k}+(w-E)\tfrac{\partial^{۲}t_{۱}}{\partial E\partial k}]\\&=-p_{۱}+(-C_{g}-C_{h}t_{۱})\tfrac{-\lambda mp_{۱}e^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})}\tfrac{w^{\beta}}{E^{\beta}}\\&-C_{h}\tfrac{w-E}{۲}\tfrac{-\lambda mp_{۱}e^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})}\\&+(-\tfrac{C_{g}}{۲}-\tfrac{C_{h}}{۲}t_{۱})\tfrac{-\lambda mp_{۱}e^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})}\\&+(-\tfrac{C_{g}}{۲}-\tfrac{C_{h}}{۲}t_{۱})(w-E)\tfrac{\lambda p_{۱}me^{\lambda kp_{۱}}}{\alpha E^{\beta}(m-t_{۱})}[۱-\tfrac{me^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})^{۲}}]\end{aligned}$$

(۱۶-۴)

$$\begin{aligned}F&=\tfrac{\partial^{۲}Z(E,k)}{\partial E^{۲}}=\\&(p_{۱}-C_{p}-C_{g}t_{۱}-C_{h}\tfrac{t_{۱}{}^{۲}}{۲})\tfrac{\partial^{۲}Q}{\partial E^{۲}}+(-C_{g}-C_{h}t_{۱})\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial E}\tfrac{\partial Q}{\partial E}+\\&(۲C_{g}+C_{h}t_{۱})\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial E}+(-\tfrac{C_{g}}{۲}-\tfrac{C_{h}}{۲}t_{۱})(w-E)\\&\tfrac{\partial^{۲}t_{۱}}{\partial E^{۲}}-\tfrac{C_{h}}{۲}(w-E)(\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial E})^{۲}=(p_{۱}-C_{p}-C_{g}t_{۱}-C_{h}\tfrac{t_{۱}{}^{۲}}{۲})\tfrac{-\beta w^{\beta}}{E^{۱+\beta}}+\\&(-C_{g}-C_{h}t_{۱})\tfrac{me^{\lambda kp_{۱}}}{\alpha E^{\beta}(m-t_{۱})}\tfrac{w^{\beta}}{E^{\beta}}+(۲C_{g}+C_{h}t_{۱})\tfrac{me^{\lambda kp_{۱}}}{\alpha E^{\beta}(m-t_{۱})}\\&(-\tfrac{C_{g}}{۲}-\tfrac{C_{h}}{۲}t_{۱})(w-E)[\tfrac{m^{۲}e^{۲\lambda kp_{۱}}}{\alpha^{۲}E^{۲\beta}(m-t_{۱})^{۲}}-\tfrac{\beta me^{\lambda kp_{۱}}}{\alpha E^{\beta+۱}(m-t_{۱})}]-\\&\tfrac{C_{h}}{۲}(w-E)(\tfrac{me^{\lambda kp_{۱}}}{\alpha E^{\beta}(m-t_{۱})})^{۲}\end{aligned}$$

(۱۷-۴)

$$\begin{aligned}M&=\tfrac{\partial^{۲}Z(E,k)}{\partial k^{۲}}=(p_{۱}-C_{p}-C_{g}t_{۱}-C_{h}\tfrac{t_{۱}{}^{۲}}{۲})\tfrac{\partial^{۲}Q}{\partial k^{۲}}+\\&(-C_{g}-C_{h}t_{۱})\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial k}\tfrac{\partial Q}{\partial k}+C_{h}\tfrac{(-w+E)}{۲}(\tfrac{\partial t_{۱}}{\partial k})^{۲}+(C_{g}+C_{h}t_{۱})\\&\tfrac{(-w+E)}{۲}\tfrac{\partial^{۲}t_{۱}}{\partial k^{۲}}=(p_{۱}-C_{p}-C_{g}t_{۱}-C_{h}\tfrac{t_{۱}{}^{۲}}{۲})\tfrac{\lambda^{۲}p_{۱}{}^{۲}\alpha w^{\beta}e^{-\lambda kp_{۱}}}{۲m}\\&\left[m^{۲}-(m-T)^{۲}\right]+(-C_{g}-C_{h}t_{۱})\\&\tfrac{-\lambda mp_{۱}e^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})}\tfrac{-\lambda p_{۱}\alpha w^{\beta}e^{-\lambda kp_{۱}}}{۲m}\left[m^{۲}-(m-T)^{۲}\right]+\\&C_{h}\tfrac{(-w+E)}{۲}(\tfrac{-\lambda mp_{۱}e^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})})^{۲}+(C_{g}+C_{h}t_{۱})\\&\tfrac{(-w+E)}{۲}\tfrac{\lambda^{۲}p_{۱}{}^{۲}me^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})}[\tfrac{me^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})^{۲}}-۱]\end{aligned}$$

(۱۸-۴)

برای هر T داده شده، اگر $F<۰, M<۰, FM-G^{۲}>۰$ باشد، ماتریس همسین $Z(E,k)$ منفی است و بنابراین تابع $\Pi(E,T,k)$ نسبت به E و k شبه‌مقعر است. بنابراین یک جواب بهینه‌ی منحصر به فرد E^{*} و k^{*} وجود دارد. ضریب بهینه‌ی قیمت (k^{*}) از مساوی صفر قرار دادن مشتق اول تابع هدف نسبت به (رابطه‌ی ۴-۱۹) و مقدار بهینه‌ی موجودی پایان دوره (E^{*}) از مساوی صفر قرار دادن مشتق اول تابع هدف نسبت به E رابطه‌ی محاسبه خواهد شد.

$$\begin{aligned}&p_{۱}(w-E)+(p_{۱}-C_{p}-C_{g}t_{۱}-C_{h}\tfrac{t_{۱}{}^{۲}}{۲})\tfrac{-\lambda p_{۱}\alpha w^{\beta}e^{-\lambda kp_{۱}}}{۲m}\\&\left[m^{۲}-(m-T)^{۲}\right]+(C_{g}+C_{h}t_{۱})\\&\tfrac{(-w+E)}{۲}\tfrac{-\lambda mp_{۱}e^{\lambda kp_{۱}}(w^{۱-\beta}-E^{۱-\beta})}{\alpha(۱-\beta)(m-t_{۱})}=۰\end{aligned}$$

(۱۹-۴)

$$\begin{aligned}&(p_{۱}-C_{p}-C_{g}t_{۱}-C_{h}\tfrac{t_{۱}{}^{۲}}{۲})\\&\tfrac{w^{\beta}}{E^{\beta}}-kp_{۱}+s-\tfrac{C_{g}}{۲}((T-t_{۱})+(w-E)\tfrac{me^{\lambda kp_{۱}}}{\alpha E^{\beta}(m-t_{۱})})\\&-\tfrac{C_{h}}{۲}t_{۱}(w-E)\tfrac{me^{\lambda kp_{۱}}}{\alpha E^{\beta}(m-t_{۱})}-\tfrac{C_{h}}{۴}(T^{۲}-t_{۱}{}^{۲})=۰\end{aligned}$$

(۲۰-۴)