

نمودارهای کنترل پذیرش برای پایش فرایند خودبرگشتی مرتبه‌ی اول

سید جعفریان نمین (دکتری تخصصی)

محمد صابر فلاخ‌نژاد* (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه بزد

رضا توکلی مقدم (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه فنی، دانشگاه تهران

علی سلاماس نیا (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه قم

مهندسي صنایع و مدیریت شرف، (تاپیستان ۱۴۰۲) دری ۹۴۳ شماره ۱، صص. ۷۶-۷۳، (پژوهشی)

اگر فرایند به قابلیت بالایی رسیده باشد می‌توان با در نظر گرفتن سطح انتظارات، تا حدودی تعییرات در میانگین را مجاز دانست. برای چنین وضعیتی نمودار کنترل پذیرش (*ACC*) ایجاد شده است که از مهم‌ترین مفروضات آن می‌توان به نرمال بودن و استقلال داده‌های مورد پایش اشاره کرد. با این وجود، تحت شرایطی در عمل، الگوهای همبستگی خاصی از میان اطلاعات نمونه‌ی قابل استخراج است که نقض فرض استقلال را در پی دارد. هدف اصلی این پژوهش معطوف به توصیه نمودار کنترل پذیرش در شرایطی است که داده‌های پرکاربردترین فرایند خودهمبسته، یعنی فرایند خودبرگشتی مرتبه‌ی اول (*AR(1)*، مورد پایش قرار می‌گیرد. پس از ارزیابی عملکرد روش‌های پایش با استفاده از معیار متوسط طول دنباله (*ARL*)، مشخص می‌شود که نمودار پیشنهادی *EWMA* نتایج بهتری دارد. علاوه بر این، طراحی اقتصادی - آماری نمودار مذکور با هزینه‌ی کمتری میسر می‌شود.

samrad.jafarian@stu.yazd.ac.ir
fallahnezhad@yazd.ac.ir
tavakoli@ut.ac.ir
a.salmasnia@qom.ac.ir

واژگان کلیدی: نمودار کنترل پذیرش، فرایند خودبرگشتی، متوسط طول دنباله، طراحی اقتصادی - آماری.

۱. مقدمه

باشد. تصور این‌که هر انحرافی، هرچند کوچک، باید در اسرع وقت تشخیص داده شود، واقع‌گرایانه نیست.

باکس و همکاران^[۱] ایده‌ی تقسیم شرایط فرایند مورد پایش به فقط سیاه و سفید را بسیار ساده‌انگارانه می‌دانند. فروند^[۲] بیان می‌کند که بسیاری از علل قابل تشخیص منجر به اثرات واقعی بر فرایند می‌شوند، ولی در مقابل تولانیس مجاز، این اثرات ممکن است کوچک و جزوی باشند. در این صورت، اقدام به تشخیص این اثرات اغلب غرایق‌اقتصادی خواهد بود و از لحاظ عملیاتی نباید نگران اصلاح آنها بود. اگر قابلیت فرایند بالا باشد، حتی در صورت رخ دادن علل خاص شناخته شده، ممکن است خروجی آن قابل پذیرش باشد. در چنین شرایطی، انتظار می‌رود اثرات مربوطه در برآورده کردن نیاز مشتری تأثیر نگذارند و مداخله برای توقف فرایند از نظر اقتصادی مقرر به صرفه نباشد.^[۳] برای مثال، سایش ابزار به مرور زمان می‌تواند باعث انحراف در فرایند تولید شود اما، در صورت بالا بودن قابلیت، می‌توان تا حدودی چنین تعییری را مجاز شمرد به شرط آن که

«کنترل فرایند آماری» یک روش استاندارد برای اندازه‌گیری، کنترل و بهبود کیفیت فرایندهای شرکت‌های تولیدی و خدماتی است. نمودارهای کنترلی، به عنوان کاربردی‌ترین ابزار کنترل فرایند آماری، داده‌های با کیفیت رسم شده‌ی یک فرایند را به ترتیب زمانی به صورت گرافیکی نشان می‌دهند. از این نمودارها به طور گسترده‌بیشتر شناخت و پایش بر مشخصه‌های اصلی یک فرایند در طول زمان استفاده می‌شود. در نظریه‌ی نمودار کنترل، روش‌های مختلف پایش اغلب بر اساس معیار متوسط دنباله (*ARL*)^[۱] مقایسه می‌شود. چنین متدالوی است که مقدار *ARL* آنها برابر لحاظ می‌شود و روشی که برای یک انحراف مفروض در پارامتر مقدار *ARL* کمتری نتیجه دهد انتخاب می‌شود. با این حال، در عمل، می‌خواهیم فقط زمانی واکنش نشان دهیم که تعییر فرایند به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد تا توجیه و اکتشاف وجود داشته

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۲۹ اکتبر ۱۴۰۰، اصلاحیه ۱۶/۱/۳، پذیرش ۱۴۰۱/۳/۲۴، پذیرش ۱۴۰۱/۳/۲۴.

DOI:10.24200/J65.2022.58411.2228

استناد به این مقاله:

جعفریان نمین، سمراد، فلاخ‌نژاد، محمد صابر، توکلی مقدم، رضا، و سلاماس نیا، علی، ۱۴۰۲. نمودارهای کنترل پذیرش برای پایش فرایند خودبرگشتی مرتبه‌ی اول. مهندسی صنایع و مدیریت شریف، ۱۴۰۱(۱)، صص. ۷۲-۶۳.

بر این اساس، بخش‌بندی ادامه این فصل بدین صورت است: به مرور ادبیات در حوزه‌ی نمودار ACC و معرفی نمودار سنتی ACC در بخش سوم با چهارم انجام می‌شود. سپس، نحوه‌ی محاسبه‌ی باقیمانده‌های فرایند ($AR(1)$) توضیح داده می‌شود. نمودارهای ACC پیشنهادی در حضور خودهمبستگی در بخش پنجم ارائه می‌شوند. در بخش ششم، عملکرد نمودارهای پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. سپس، طراحی بهینه‌ی اقتصادی - آماری نمودارهای ACC بررسی می‌شود. در بخش هشتم، نتایج نهایی بیان می‌شود.

۲. ادبیات نمودار کنترل پذیرش

مطالعه‌ی نمودار ACC از زمان ارائه آن توسط فروند^[۲] تا حد زیادی مورد غفلت واقع شده است، به طوری که در ادبیات موضوع، پژوهش‌های اندکی در مورد توسعه یا کاربردهای آن ارائه شده است.

در اویل دهه‌ی ۹۰ میلادی، مطالعاتی در زمینه‌ی توسعه‌ی ACC بر اساس توزیع نرمال چندمتغیره برای در نظر گرفتن دو یا چند ویژگی از یک محصول صورت گرفت.^[۱۸-۱۶] در سال ۱۹۹۸ یک نمودار کنترل پذیرش تطبیقی برای مسئله‌ی سایش ابزار ارائه شد، جایی که اندازه نمونه با توجه به فاصله میانگین از حدود مشخصات تنظیم می‌شود.^[۱۹] در سال ۲۰۰۰، مفهوم $EWMA$ با ACC ترکیب شد در شرایط وجود داده‌های غیرنرمال، در سال ۲۰۰۵ از توزیع بور^۶ برای پیشنهاد نمودار کنترل پذیرش $BACC$ استفاده شد.^[۲۰] و در سال ۲۰۰۸ نمودار کنترل پذیرش با چولگی نرمال $SNACC$ توسعه یافت.^[۲۱]

طاهریان و بلوچستانی اصل^[۲۲] از نمودارهای شواهارت و ACC برای اجرای مطالعه‌ی ۶ - سیگما در یک شرکت دارویی و همچنین تجزیه و تحلیل قابلیت استفاده کردند. او پرایم^۷ و همکاران^[۲۳] رویه‌یی بر اساس آزمون فرض از شاخص قابلیت فرایند ارائه کردند تا از لحاظ اقتصادی، زمان مناسب برای تضمیم‌گیری در مورد متوقف کردن فرایند برای رفع علل خاص تعیین شود. در توسعه‌ی دیگری از نمودار ACC ، ژوتو^۸ و همکاران^[۲۴] از شیوه‌ی کران محافظتی^۹ برای کاهش اثر خطاهای اندازه‌گیری با مفروضات متعددی استفاده کردند.

در بررسی انجام شده روی داده‌های خودهمبسته با مدل $ARIMA(0, 1, 1)$ منطبق بر یک فرایند شیمیایی، که تعیین زمان تنظیم در آن به دلیل تکرار نیاز به تنظیم هدف اهمیت دارد، از نمودار کنترل $EWMA$ با خط مرکز متحرک استفاده شد که در ظاهر شبیه نمودار ACC بود.^[۱۵] در آن روش، برای فرایند نایستایی که از میانگین منحرف می‌شود و باید مکرر تنظیم شود لازم بود تحت کنترل بودن آماری به طور مداوم بررسی شود. در حالی که در روش ACC ، چون فرایند پایدار و استа فرض می‌شود، نیازی به بررسی وضعیت نیست و توجه بر عدم تولید نامنطبی معطوف است. با در نظر گرفتن برقراری مفروضات استقلال و توزیع نرمال، طراحی‌های اقتصادی و اقتصادی - آماری نمودار ACC در شرایط قطعیت^[۲۵-۲۶] و عدم قطعیت^[۲۷-۲۸] پارامترهای ورودی مدل‌هایی با تابع هزینه‌ی دانکن^{۱۰} و تابع هزینه‌ی لورنس و ونس (L&V)^{۱۱} قبل ارائه شده است. با توجه به اطلاعات نویسنده‌گان از پژوهش‌های مرتبط، همواره برقراری شرط استقلال داده‌های مورد پایش توسط نمودار ACC مفروض بوده است. در شرایطی که مشخصه کیفی بر اساس توزیع نرمال رفتاری خودهمبسته نشان می‌دهد، اخیراً مطالعه‌یی برای توسعه‌ی نمودار ACC انجام شده است.^[۱۵] با هدف بهبود نتایج آماری و اقتصادی، در این پژوهش سعی می‌شود که

اقلام نامنطبیق تولید نشود.^[۱۲] در چنین شرایطی، نمودارهای کنترل سنتی کاربردی ندارند.

در نمودارهای کنترل سنتی، مشاهده‌ی هیچ هشداری در حالت تحت کنترل مطلوب نیست و در حالت خارج از کنترل، تمايل بر کشف سریع شیفت است. با توسعه‌ی این دو ناجیه به سه ناجیه، می‌توان ناحیه‌ی بی تقاضی را برای تحمل تغییرات مجاز در نظر گرفت. اولین مطالعه با در نظر گرفتن رویکرد سه ناجیه‌یی منجر به ارائه‌ی نمودار کنترل پذیرش (ACC) ^{۱۳} شد.^[۱۴] وodal و فلتین^[۱۵] پژوهشگران را تشوق می‌کنند تمرکز را بر ارائه‌ی روش‌هایی معطوف کنند که در صورت لزوم در کاربردهای عملی قابلیت حساسیت زدایی را داشته باشند. غالباً هر روش جدیدی که ارائه می‌شود به دنبال افزایش بیش از پیش حساسیت در تشخیص تغییرات خیلی کوچک در یک فرایند است. آنها اعتقاد دارند که هدف باید دنبال کردن هشدارهای معنادار عملیاتی باشد و نه فقط هشدارهای معنادار آماری. در تبیین تفاوت این دو اصطلاح، اگر انحراف با دلیل آماری طبق نمودارهای سنتی رخ دهد، اما توسط ACC هشداری مشاهده نشود، به این معنی است که انحراف مذکور منجر به تولید نامنطبیق نشده است و نیازی به توقف تولید نیست؛ زیرا انحراف با دلیل عملیاتی رخ نداده و زیانی حاصل نشده است. با این حال، استفاده از نمودار ACC نیز شرایط خاصی دارد به این صورت که باید تغییر پذیری در زیگرگوهای تحت کنترل باشد، انحراف استاندارد برآورده شده باشد و سطح بالایی از قابلیت فرایند به دست آمده باشد. می‌توان گفت که کاربرد عمده‌ی ACC در فاز دوم برای پایش است و کاهش تغییر پذیری در آن مطرح نیست.

وodal و فلتین^[۱۵] بیان کرده‌اند که در حال حاضر برای پایش یک یا چندین متغیر بجزئی اغلب حجم بالایی از داده‌ها وجود دارد جایی که اهمیت عملیاتی بر جسته است. در این شرایط تا زمانی که انحراف با دلیل عملیاتی رخ نداده، آنها اصلاح فرایندهای با قابلیت بالا برای هشدارهای آماری را توصیه نمی‌کنند و حساسیت زدایی در پایش را پیشنهاد می‌کنند. در فرایندهای تولیدی که تحت تأثیر عوامل ذاتی قرار دارند، با افزایش دفعات و کاهش فواصل زمانی نمونه‌گیری، حجم بالایی از داده‌ها در دسترس قرار می‌گیرند.^[۱۶] در نتیجه، الگوهای همبستگی خاصی بین آنها قابل استخراج است که نقض فرض استقلال را به دنبال دارد. به عنوان مثال، فرض کنید مجموعه‌یی از داده‌ها برای پایش آماری در دسترس است که فرایند تولید آنها خودهمبستگی از نوع $AR(1, 0)$ ^{۱۷} یا همان $AR(1)$ ^{۱۸} دارد. وجود خودهمبستگی باعث بزرگ‌تر شدن واریانس و افزایش معنی‌دار هشدارهای نادرست توسط نمودار کنترل می‌شود و در صورت نادیده گرفتن می‌تواند باعث افزایش هزینه‌های پایش شود. بر اساس دو رویکرد کالی، نمودارهای کنترل برای پایش فرایندهای خودهمبسته توسعه داده شده‌اند که عبارت‌انداز: ۱. نمودارهای کنترل باقیمانده‌ها،^[۱۹] ۲. نمودارهای کنترل اصلاح شده،^[۲۰] استفاده از روش‌های یادگیری ماشین،^[۲۱] نمونه‌گیری در تعداد کم تر^[۲۲] و استفاده از شیوه‌های مبتنی بر اطلاعات کمکی^[۲۳] از دیگر رویکردهای عملی پایش فرایندهای خودهمبسته به شمار می‌رود. برخی از کاربردهای عملی پایش فرایندهای خودهمبسته در صنایع دارویی،^[۲۴] ساخت و ساز^[۲۵] و سجاجی^[۲۶] موجود است.

در این شرایط، نخستین مطالعه برای توسعه‌ی نمودار ACC در حضور خودهمبستگی با توجه به باقیمانده‌های فرایند طبق رویکرد اول انجام شد.^[۱۵] نوآوری مطالعه‌ی حاضر به توسعه‌ی نمودار تکیبی ACC و میانگین متحرک موزون نمایی^[۲۷] در حضور داده‌های خودهمبسته معطوف است تا امکان بهبود نتایج آماری و اقتصادی با به کارگیری آن مورد بررسی قرار گیرد.

که در آن Z_α به عنوان مقدار نرمال استاندارد مرتبط با احتمال α مفروض است. می‌توان بر اساس خطای نوع دوم β ، RPL و n نیز حدود کنترل را محاسبه کرد. در شکل ۲ حدود کنترل با هر دو روش محاسبه شده است. در این بخش، فرض بر فعال بودن LSL است و بنابراین، کلیه محاسبات مطابق با این حد مشخصه است. توجه داشته باشید که می‌توان محاسبات مشابهی را به راحتی برای USL نیز گسترش داد. با در نظر گرفتن (z) به عنوان تابع توزیع نرمال استاندارد، مقادیر ریسک‌های مرتبط با LCL به صورت رابطه‌ی 4 به دست می‌آید (مقادیر ریسک مرتبط با UCL تقریباً صفر است و از محاسبات حذف شده‌اند):

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} \leq LCL | \mu = APL_L) = \int_{-\infty}^{-Z_\alpha} f_z(z) dz, \\ \beta &= 1 - P(\bar{X} \leq LCL | \mu = RPL_L) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{Z_{AQL} \sqrt{n} - Z_\alpha - Z_{RQL} \sqrt{n}} f_z(z) dz. \end{aligned} \quad (4)$$

۴. فرایند خودهمبسته ($AR(1)$)

در این مطالعه، پکار بدترین فرایند خودهمبسته از نوع $AR(1)$ بررسی می‌شود. مدل فرایند (1) ، به شرط برقراری $1 < |u|$ برای ضریب خودبرگشتی، ساختاری خودهمبسته به صورت رابطه‌ی 5 دارد:

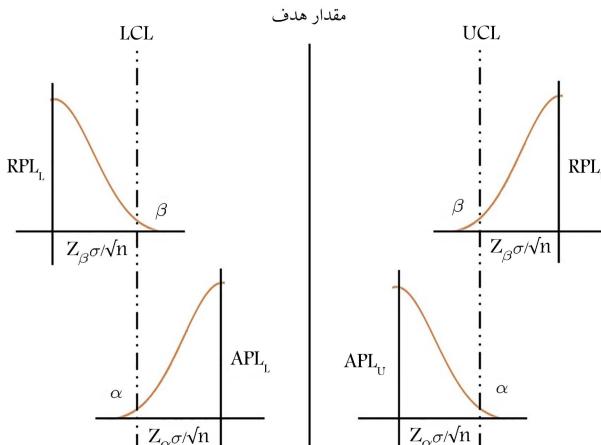
$$\begin{aligned} (X_t - \mu) &= u(X_{t-1} - \mu) + a_t \quad \Rightarrow \\ X_t &= C + uX_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim N(0, \sigma_a^2) \end{aligned} \quad (5)$$

که مشاهده‌ی فعلی واقعی X_t بر اساس تکبی خطي از مشاهده واقعی در دوره قبلی، اغتشاش دوره فعلی و مقدار ثابت $(1-u)$ برابر $C = \mu$ می‌شود. برای مقدار اندازه‌گیری شده در لحظه‌ی t ، طبق توزیع نرمال میانگین آن برابر μ و واریانس ثابت آن طبق رابطه‌ی 6 عبارت است از:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{1-u^2} \sigma_a^2. \quad (6)$$

اگر انطباق مدل بر مشاهدات طبق رویه‌ی باکس و جنکیز به درستی انجام شود و پارامتر مدل $AR(1)$ به همراه ضریب ثابت برآورده شود، آنگاه مقدار برآورده مشاهده در زمان t به صورت رابطه‌ی 7 به دست می‌آید:

$$\hat{X}_t = \hat{C} + \hat{u}X_{t-1}. \quad (7)$$



شکل ۲. حدود کنترل نمودار ACC طبق خطاهای نوع اول و دوم.

نمودار ترکیبی $EWMA$ و ACC در حضور داده‌های خودهمبسته توسعه داده شود.

۳. نمودار کنترل پذیرش

با مفروض دانستن توزیع نرمال، فروند شرایط استفاده از این نمودار را چنین توصیه می‌کند: تغییرپذیری در زیرگروه‌ها تحت کنترل باشد، انحراف استاندارد برآورده شده باشد و سطح بالایی از قابلیت فرایند به دست آمده باشد.^[۱] با دستیابی به قابلیت بالای فرایند، در واقع تغییرپذیری طبیعی آن بسیار کوچک‌تر از فاصله‌ی بین حدود مشخصات بالا USL ^{۱۳} و پایین LSL ^{۱۴} خواهد بود. در این شرایط، متغیر بودن میانگین فرایند، در محدوده‌ی با عنوان سطوح قابل پذیرش فرایند (APL)^{۱۵}، طبق رابطه‌ی 1 ، مجاز است:

$$APL_U = USL - Z_{AQL} \sigma, \quad (1)$$

$$APL_L = LSL + Z_{AQL} \sigma,$$

انحراف استاندارد و Z_{AQL} مقدار نرمال استاندارد مرتبط با احتمال سطح کیفیت قابل قبول AQL ^{۱۶} است. از طرف دیگر، سطوح قابل رد فرایند RPL ^{۱۷} (RPL_L برای محافظت در برابر علل خاص بالقوه پیشنهاد می‌شود. اگر بیشترین نسبت اقلام نامطابق قابل تحمل، سطح کیفیت قابل رد RQL ^{۱۸} نامیده شود، با در نظر گرفتن Z_{RQL} به عنوان مقدار نرمال استاندارد مرتبط با RQL ، محاسبات این حدود طبق رابطه‌ی 2 است):

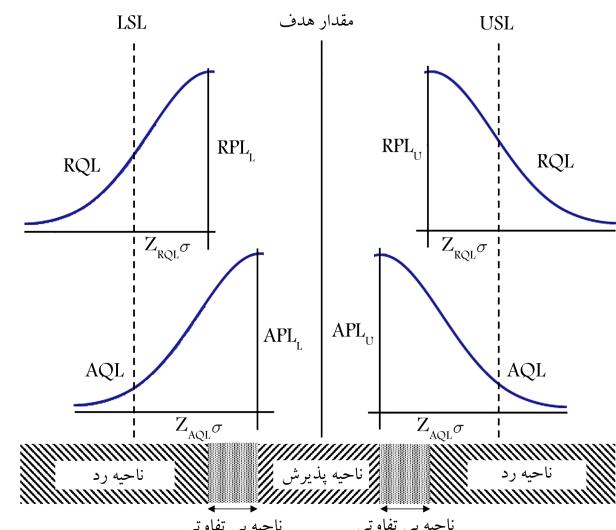
$$RPL_U = USL - Z_{RQL} \sigma, \quad (2)$$

$$RPL_L = LSL + Z_{RQL} \sigma.$$

در شکل ۱ نواحی مختلف نمودار ACC نشان داده شده است. توجه شود که در ناحیه‌ی بی تفاوتی، فرایند رد یا پذیرفته نمی‌شود. بر اساس خطای نوع اول α ، APL و اندازه نمونه مشخص (n) ، حد کنترل بالا (UCL) ^{۱۹} و حد کنترل پایین (LCL) ^{۲۰} از رابطه‌ی 3 محاسبه می‌شود:

$$UCL_\alpha = APL_U + Z_\alpha \sigma / \sqrt{n}, \quad (3)$$

$$LCL_\alpha = APL_L - Z_\alpha \sigma / \sqrt{n}.$$



شکل ۱. نواحی مختلف نمودار ACC برای مشخصه کیفی.

۳. تولید داده‌های شبیه‌سازی شده (۱) AR طبق رابطه‌ی ۹:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &\sim N(\circ, \sigma_a^r), \\ a_{\circ,j} &= \circ, \\ X_{\circ,j} &= \mu, \\ C &= \mu(1-u), \\ \sigma_X^r &= \sigma_a^r / (1-u^r), \\ X_{i,j} &= C + uX_{i-1,j} + a_{i,j}, \\ X'_{i,j} &= C + X_{i,j} + \delta\sigma_X, \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad \forall j = 1, \dots, Sc \end{aligned} \quad (9)$$

۴. انطباق مدل مناسب بر مشاهدات طبق رویه‌ی باکس و جنکینز، برای به دست آوردن برآوردهایی از ضرایب و باقیمانده‌ها:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,j} &= \hat{C} + \hat{u}X_{i-1,j}, \\ \hat{X}'_{i,j} &= \hat{C} + \hat{u}X'_{i-1,j}, \\ e_{i,j} &= \hat{a}_{i,j} = X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}, \\ e'_{i,j} &= \hat{a}'_{i,j} = X'_{i,j} - \hat{X}'_{i,j}, \quad \forall i = 1, \dots, 2000, \quad \forall j = 1, \dots, 3000, \end{aligned}$$

۵. تنظیم مقدار $LC L_a = Z_a$ و محاسبه‌ی حدود کنترل UCL_a و $UCL_{a'}$

۶. به دست آوردن مقادیر طول دنباله (RL)^[۲۱] به ازای $1, \dots, Sc$ به محاسبه‌ی $e_{i,j}$ تا زمانی که $RL_j \leq UCL_a$ ، محاسبه $e_{i,j}$ تا زمانی که $e'_{i,j} \leq UCL_{a'}$

۷. محاسبه میانگین مقادیر حاصل از گام ۶ برای کل سنتاریوها به صورت:

$$ARL_a = \sum_{j=1}^{Sc} RL_j / Sc, \quad ARL_{a'} = \sum_{j=1}^{Sc} RL'_{j,a} / Sc$$

۲.۵ نمودار $R-EWMA-ACC$

نمودار $EWMA$ ابتدا برای پایش شیفت‌های کوچک در فرایند مستقل توسعه داده شد که حساسیت بیشتری نسبت به نمودارهای شوهارت دارد.^[۲۲] زمانی که مشاهدات حاصل از فرایند رفتار همیسته سریالی داشته باشند، از نمودار $EWMA$ برای باقیمانده‌ها می‌توان استفاده کرد.^[۲۳] از ترکیب مفهوم $EWMA$ در نمودار ACC برای یکصد داده‌ی شبیه‌سازی شده در شرایط برقراری مفروضات استقلال و توزیع نرمال استفاده شده است.^[۲۰] با این حال، توسعه و کاربرد نمودار $EWMA-ACC$ برای فرایند خودهمیسته تا کنون بررسی نشده است.

آماره $EWMA$ بر مبنای باقیمانده‌ها در زمان t به صورت رابطه‌ی ۱۰ نوشته می‌شود:

$$z_t = \lambda_E e_t + (1 - \lambda_E) z_{t-1}, \quad (10)$$

جایی که ضریب هموارسازی λ_E مقادیر بین صفر و ۱ می‌تواند داشته باشد. مرسوم است که $0.25 \leq \lambda_E \leq 0.5$ در نظر گرفته شود. با این حال، مقدار حد بالای 0.5 نیز لحاظ شده است.^[۲۴] علاوه بر این، مقدار آغازین Z برابر میانگین باقیمانده‌ها لحاظ می‌شود. لازم به ذکر است که اگر به جای e_t از مقدار شیفت کرده‌ی آن، یعنی e'_t ، استفاده شود آماره $EWMA$ به صورت z'_t به دست می‌آید. اگر محاسبات با توجه به فعل بودن USL انجام شود و از انحراف معیار باقیمانده‌ها در روابط RPL_U و APL_U استفاده شود طبق روابط ۱۱ و ۱۲

به عنوان برآوردهای جمله‌ی اختشاش در زمان t ، باقیمانده از اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار برآورد شده طبق رابطه‌ی ۸ محاسبه می‌شود:

$$e_t = \hat{a}_t = X_t - \hat{X}_t. \quad (8)$$

سپس، اگر فرض نرمال و استقلال باقیمانده‌ها برقرار باشد، اعتبار مدل تأیید می‌شود و می‌توان برای پایش از آنها استفاده کرد. از لحاظ نظری، برای در نظر گرفتن علل خاص، می‌توان میانگین رابطه‌ی فرایند (۱) AR را به $\mu + 5\sigma$ تغییر داد.

۵. نمودارهای ACC برای فرایند (۱)

برقرار نبودن شرط استقلال، به دلیل حضور الگوی خودهمیسته میان داده‌ها، در استفاده از نمودارهای کنترل می‌تواند منجر به افزایش تعداد هشدارهای اشتباہ و هزینه‌های مرتبط با پایش فرایند شود.

بر اساس دو رویکرد کلی، نمودارهای کنترل برای پایش فرایند‌های خودهمیسته توسعه داده است: ۱. نمودارهای کنترل باقیمانده‌ها، ۲. نمودارهای کنترل اصلاح شده.^[۲۵] در این مطالعه، از رویکرد اول در شرایطی استفاده می‌شود که فرایند خودهمیسته از نوع (۱) AR مفروض و تغییر در میانگین فرایند مجاز باشد. با انطباق مدل مناسب بر داده‌ها، انتظار می‌رود شرایط تقریبی استقلال در پایش باقیمانده‌ها برآورده شود. بر این اساس، دو نوع نمودار ACC برای باقیمانده‌های حاصل از انطباق مدل بر فرایند (۱) توسعه داده می‌شود.

۱.۵ نمودار $R-ACC$

با در نظر گرفتن توالی مشاهدات واقعی $X = \{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ و به دست آمدن مقادیر برآورده شده‌ی متناظر آنها پس از انطباق مدل مناسب، توالی باقیمانده‌ها به صورت $e = \{e_t, t = 1, 2, \dots\}$ به دست می‌آید.^[۲۶] به دلیل صفر بودن میانگین باقیمانده‌ها از لحاظ نظری، مقدار میانگین معلوم μ به آنها افزوده می‌شود تا مقادیر ناهمیسته قابل مقایسه با USL و USL' واقعی در اختیار باشند. بدین ترتیب و پس از جایگزینی $\mu = \sigma = 0$ ، می‌توان از روابط نمودار ACC استفاده کرد. در ادامه، مقدار باقیمانده پس از اعمال شیفت با e' نشان داده خواهد شد.

برای ارزیابی نمودار پیشنهادی $R-ACC$ در فاز دوم از معیارهای آماری ARL_a و $ARL_{a'}$ طبق رویکرد شبیه‌سازی استفاده می‌شود. در هر دور شبیه‌سازی، به تعداد $i = 1, \dots, M$ اندازه‌گیری $z = 1, \dots, Sc$ سنتاریو در نظر گرفته می‌شود. رویه‌ی شبیه‌سازی برای محاسبه معیارهای آماری در گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

۱. تعیین مقادیر پیش‌فرض $\mu, \sigma_a, \delta, u, n, u'$ و USL و USL' :

۲. محاسبه‌ی مقادیر زیر با توجه به فعل بودن USL و USL' و مفروض بودن مقادیر مطلوب شاخص قابلیت فرایند C_{pk} :

$$\begin{aligned} Z_{AQL} &= 3C_{pk,u}^A, \\ Z_{RQL} &= 3C_{pk,u}^R, \\ APL_U &= USL - Z_{AQL}\sigma_\epsilon, \\ RPL_U &= USL - Z_{RQL}\sigma_\epsilon, \end{aligned}$$

خواهیم داشت:

نرم افزار MATLAB انجام می شود. تأثیر خود همبستگی به صورت $u = 0, 25, 50, 75, 100$ در نتایج مذکور آنرا تأثیرگذاری و $j = 3000$ سنتاریو در نرم افزار MATLAB انجام می شود. عملکرد نمودارهای کشتل بررسی می شود.

فرض بر این است که فرایند دارای میانگین $T = 1^\circ \mu$, انحراف استاندارد

و حدود مشخصات قابل قبول به صورت $[LSL, USL] = \sigma_a$ باشد. با این شرایط، مقدار شاخص قابلیت بالقوه اگر میانگین فرایند بر $C_p = (USL - LSL) / (6\sigma_a)$ بازه منطبق باشد، طبق رابطه $\text{۱}.\text{۶۷}$ می‌باشد. با این شرایط، مقدار شاخص RPL_U و $APLU$ محاسبه خواهد شد. از طرف دیگر، چون انحراف مثبت از مرکز فرایند مجاز شمرده می‌شود، باید C_{pk} استفاده کرد که مکان واقعی میانگین را لحاظ می‌کند. حال اگر ز شاخص RPL_U و $APLU$ واقع شود به ترتیب طبق روابط $\text{۱}.\text{۴}$ و $\text{۱}.\text{۵}$ می‌توان نوشت:

$$C_{p^{k_u}}^A = \frac{USL - \mu_1}{\sigma} = \frac{USL - APL_U}{\sigma} = \frac{Z_{AQL}}{\sigma}, \quad (14)$$

$$C_{p^{k_u}}^R = \frac{USL - \mu_1}{\zeta^\sigma} = \frac{USL - RPL_U}{\zeta^\sigma} = \frac{Z_{RQL}}{\zeta}. \quad (15)$$

ما لحاظ کردن مقادیر مطلوب $C_{pku}^R = ۱,۶۰$ و $C_{pku}^A = ۱,۲۵$ خواهیم داشت
 بنابراین، سطوح کیفیت قابل پذیرش و قابل رد $Z_{RQL} = ۳,۷۵$ و $Z_{AQL} = ۴,۸۰$
 هر ترتیب برابر $RQL = ۸۸,۴۲ \text{ ppm}$ و $AQL = ۹,۷۹ \text{ ppm}$ به دست می آید
 مخفف تعداد در میلیون^{۲۲} است). با توجه به روابط موجود در بخش‌های قبلی
 و با این فرض که انحراف استاندارد به طور دقیق برآورد شده باشد (یعنی $\sigma_e = \sigma_a$)،
 مقادیر $RPL_U = ۱۰,۰۲۵$ و $APL_U = ۱۰,۰۲۵$ حاصل می‌شود. بدین
 ترتیب، این مقادیر در روابط حدود کنترل نمودارهای پیشنهادی به کار می‌روند.

تنظیم پارامترهای نمودارهای کنترل مذکور بر اساس دستیابی به 3σ باشد: $\mu = 10$ و $\sigma = 1$.
 نجات می‌شود جایی که باید میانگین فرایند مستقل بر $APLU$ منطبق باشد. می‌دانیم $APLU$ نیز در این نوع نمودارهای کنترل یک مقدار منحرف از میانگین است. اگر

$$APL_U = \mu + \delta\sigma \Rightarrow 1^\circ, 2^\circ = 1^\circ + 0^\circ, \delta \Rightarrow \delta = 0^\circ, 2^\circ,$$

$$RPL_U = \mu + \delta\sigma \Rightarrow 1^\circ, 120^\circ = 1^\circ + 0^\circ, 1\delta^\circ \Rightarrow \delta = 1, 20^\circ$$

در جدول های ۱ تا ۳، روند ARL نمودارهای پیشنهادی و $R-ACC$ و نمودار سنتی $R-EWMA-ACC$ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که اگر لگاریتم مقادیر ARL محاسبه و در برابر ۵ ترسیم شود نتایج ACC و $R-ACC$ مشابه^[۱۵] خواهد بود. نوآوری عمدۀ در این بخش مربوط به بررسی عملکرد آماری نمودار $R-EWMA-ACC$ در سطح مختلف خود همبستگی است. به ازای اعمال شیفت های مختلف در میانگین فرایند، نموداری که متوسط طول دنباله آن برای $0 < \delta < 20$ مقدار کوچک تری داشته باشد عملکرد بهتری دارد. طبق جدول ۱ برای فرایند مستقل مشاهده می شود که نتایج دو نمودار ACC تقریباً بکدیگر متنطبق اند و $R-EWMA-ACC$ عملکرد بعثتی دارد.

$$\begin{aligned} APL_U &= USL - Z_{AQI}\sigma_e, \\ RPL_U &= USL - Z_{RQI}\sigma_e. \end{aligned} \quad (11)$$

براساس خطای نوع اول، APL_U و اندازه‌ی نمونه می‌توان حد کنترل را از رابطه‌ی ۱۲ به دست آورد:

$$UCL_{\alpha-EWMA} = APL_U + Z_\alpha \sigma_{EWMA}, \quad (12)$$

جایی، که انحراف استاندارد مذکور به صورت رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$\sigma_{EWMA} = \sigma_e \sqrt{\frac{\lambda_E}{1 - \lambda_E}}. \quad (13)$$

اگر اندازه‌ی زیرگروه بزرگ‌تر از واحد باشد باید در رابطه‌ی $\sum e_t/n \geq 10$ به جای e_t و در رابطه‌ی $12 \geq (n^{0.5})/\sigma_{EWMA}$ به جای σ_{EWMA} استفاده شود. با توجه به $UCL_{\alpha-EWMA}$ مادامی که مقدار z_t کم‌تر از حد بالای کنترل باشد کیفیت آن قابل پذیرش خواهد بود.

با درنظرگرفتن تعداد $M = 1, \dots, S_{Cr}$ سناریو، رویه‌ی شبیه‌سازی برای محاسبه‌ی معیارهای آماری نمودار $R-EWMA-ACC$ در فاز دوم، در گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

۱. تعیین مقادیر پیش فرض $\mu, \sigma_a, n, u, \delta$ و USL و LSL :
 ۲. محاسبه مقادیر Z_{AQL} , Z_{RQL} , Z_{AR} و RPL با توجه به فعال بودن USL و مفروض بودن مقادیر مطلوب شاخص قابلیت فرازیند Cpk :
 ۳. تولید داده های شبیه سازی شده طبق فرازیند $(AR(1))$:
 ۴. انطباق مدل مناسب بر مشاهدات طبق رویه باکس و جنکیشن، برای به دست آوردن برآوردهایی از ضرایب و باقیمانده ها:
 ۵. تنظیم مقادیر $Z_\alpha = Z_E$ و λ_E و به دست آوردن آماره $EWMA$ ، انحراف استاندارد و محاسبه حد کنترل بالا یی آن:

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= \lambda_E e_{i,j} + (\gamma - \lambda_E) z_{i,j}, \\ z'_{i,j} &= \lambda_E e'_{i,j} + (\gamma - \lambda_E) z'_{i-\gamma, j}, \\ \forall i &= 1, \dots, M, \quad \forall j = 1, \dots, S_C \\ \sigma_{EWMA} &= \sigma_e \sqrt{\frac{\lambda_E}{\gamma - \lambda_E}}, \\ UCL_{\alpha-EWMA} &= APL_U + L_E \sigma_{EV} \end{aligned}$$

۶. به دست آوردن مقادیر طول دنباله برای هر سناریو $j = 1, \dots, Sc$ محاسبه‌ی $RL_{\cdot j}$ تا زمانی که $z_{i,j} \leq UCL_{a-EWMA}$ و محاسبه‌ی $RL_{\cdot j}$ تا زمانی که $z'_{i,j} \leq UCL_{a-EWMA}$

$$ARL_0 = \sum_{j=1}^{Sc} RL_{0,j}/Sc, \quad ARL_\lambda = \sum_{j=1}^{Sc} RL_{\lambda,j}/Sc$$

۶. ارزیابی، عملکرد نمودارهای کنترل

مقایسه‌ی عملکرد نمودارها در فاز دوم بر اساس مقادیر ARL صورت می‌گیرد. در هر سطح از ضرب خودهمستگی، و اندازه‌ی شفت، شنبه‌سازی « اساس

جدول ۳. روند ARL نمودارهای کنترل به ازای مقادیر مختلف شیفت برای فرایند $AR(1)$ با خودهمبستگی منفی.

| u | δ | ACC | $R-ACC$ | $R-EWMA-ACC$ |
|-------|----------|--------|---------|--------------|
| -۰,۲۵ | ۰,۰۰ | ۶۸۷,۴۹ | ۷۲۴,۶۶ | ۱۸۲۱,۳۷ |
| ۰,۲۰ | ۳۷۰,۰۲ | ۲۷۰,۲۹ | ۳۶۹,۸۷ | |
| ۰,۲۵ | ۳۲۲,۴۹ | ۲۸۳,۸۴ | ۲۶۰,۰۵ | |
| ۰,۵۰ | ۱۷۵,۳۴ | ۱۱۱,۴۰ | ۴۰,۲۶ | |
| ۰,۷۵ | ۸۱,۴۳ | ۵۵,۹۸ | ۱۷,۲۶ | |
| ۱,۰۰ | ۴۵,۲۸ | ۲۸,۷۷ | ۶,۷۶ | |
| ۱,۲۵ | ۲۵,۹۶ | ۱۵,۵۹ | ۲,۴۰ | |
| <hr/> | | | | |
| -۰,۵۰ | ۰,۰۰ | ۶۲۶,۱۶ | ۱۰۶۱,۸۱ | ۲۵۴۳,۰۰ |
| ۰,۲۰ | ۳۶۹,۹۴ | ۳۶۸,۵۲ | ۳۷۰,۰۱ | |
| ۰,۲۵ | ۳۱۷,۳۱ | ۳۲۸,۰۳ | ۲۰۹,۵۵ | |
| ۰,۵۰ | ۱۷۹,۹۲ | ۱۲۲,۱۱ | ۳۲,۴۰ | |
| ۰,۷۵ | ۹۶,۳۰ | ۴۹,۹۴ | ۱۲,۸۰ | |
| ۱,۰۰ | ۵۵,۸۲ | ۲۴,۴۸ | ۳,۸۳ | |
| ۱,۲۵ | ۳۴,۳۱ | ۱۰,۴۰ | ۱,۵۰ | |
| <hr/> | | | | |
| -۰,۷۵ | ۰,۰۰ | ۵۲۴,۲۴ | ۹۴۸,۹۳ | ۲۷۷۹,۰۰ |
| ۰,۲۰ | ۳۷۰,۰۳ | ۳۷۷,۷۳ | ۳۶۹,۲۰ | |
| ۰,۲۵ | ۳۰۳,۰۷ | ۳۱۷,۴۹ | ۱۹۴,۴۴ | |
| ۰,۵۰ | ۲۰۵,۲۹ | ۸۲,۴۵ | ۳۲,۹۴ | |
| ۰,۷۵ | ۱۳۰,۸۹ | ۳۶,۷۷ | ۱۳,۸۵ | |
| ۱,۰۰ | ۸۶,۳۹ | ۲۰,۰۱ | ۶,۷۷ | |
| ۱,۲۵ | ۵۷,۸۳ | ۷,۴۱ | ۱,۸۷ | |

داده نشود منجر به افزایش تغییرپذیری طبق $u = ۰,۷۵$ می‌شود. این افزایش از یک طرف به اشتباہ باعث کاهش مقدار شاخص قابلیت فرایند می‌شود، که در این حالت با این تصور که فرایند توانایی پاسخ به نیاز مشتری را ندارد ممکن است علی‌جست وجود شود که در واقع وجود ندارند. از طرف دیگر، به ازای ضریب واریانس ثابت، باعث افزایش حد بالای کنترل می‌شود و اگر انحراف با دلیل بخ دهد نمودار کنترل حاصل به کنندی نسبت به تشخیص آنها واکنش نشان خواهد داد. برای تمامی ضرایب خودهمبستگی مثبت، $R-EWMA-ACC$ بهترین عملکرد را دارد. در جدول ۳ مشاهده می‌شود که برای فرایند خودهمبسته با ضرایب منفی، نتایج ACC بهتر از $R-ACC$ است. دلیل این امر را می‌توان ناشی از تأثیر شیفت فرایند در باقیمانده‌ها دانست که کمتر از میزان واقعی آن قابلیت کشف دارد زمانی که $R-EWMA-ACC$ در سطوح مختلف خودهمبستگی منفی در فرایند وجود دارد. با این حال، نمودار $R-EWMA-ACC$ در این شرایط نیز بهترین عملکرد را دارد.

جدول ۱. روند ARL نمودارهای کنترل به ازای مقادیر مختلف شیفت برای فرایند مستقل (ناهمبسته).

| u | δ | ACC | $R-ACC$ | $R-EWMA-ACC$ |
|------|----------|--------|---------|--------------|
| ۰,۰۰ | ۰,۰۰ | ۶۹۰,۱۱ | ۶۹۶,۸۳ | ۱۰۶۹,۹۱ |
| ۰,۲۰ | ۳۷۱,۷۹ | ۳۷۳,۵۵ | ۳۷۰,۱۲ | |
| ۰,۲۵ | ۳۳۱,۵۶ | ۳۳۰,۲۶ | ۲۷۷,۰۰ | |
| ۰,۵۰ | ۱۵۲,۲۱ | ۱۵۸,۸۵ | ۴۹,۷۳ | |
| ۰,۷۵ | ۸۱,۴۰ | ۸۷,۹۳ | ۱۹,۰۳ | |
| ۱,۰۰ | ۴۲,۴۳ | ۴۱,۷۲ | ۷,۵۵ | |
| ۱,۲۵ | ۲۴,۲۶ | ۲۴,۹۱ | ۳,۱۲ | |

جدول ۲. روند ARL نمودارهای کنترل به ازای مقادیر مختلف شیفت برای فرایند $AR(1)$ با خودهمبستگی مشبت.

| u | δ | ACC | $R-ACC$ | $R-EWMA-ACC$ |
|------|----------|--------|---------|--------------|
| ۰,۲۵ | ۰,۰۰ | ۶۹۸,۷۵ | ۵۶۶,۷۸ | ۱۱۷۶,۷۱ |
| ۰,۲۰ | ۳۷۱,۰۳ | ۳۶۶,۴۹ | ۳۶۹,۸۵ | |
| ۰,۲۵ | ۳۲۳,۳۹ | ۳۲۸,۳۷ | ۲۶۸,۳۸ | |
| ۰,۵۰ | ۱۶۳,۲۱ | ۱۹۴,۵۰ | ۴۵,۹۷ | |
| ۰,۷۵ | ۸۷,۸۷ | ۱۱۰,۵۰ | ۱۱,۳۵ | |
| ۱,۰۰ | ۴۷,۱۲ | ۵۶,۳۸ | ۱,۴۷ | |
| ۱,۲۵ | ۲۷,۶۰ | ۴۰,۱۰ | ۱,۲۲ | |
| ۰,۵۰ | ۰,۰۰ | ۵۲۸,۳۹ | ۶۵۹,۱۸ | ۵۳۶,۳۱ |
| ۰,۲۰ | ۳۶۷,۵۴ | ۳۶۹,۳۸ | ۳۷۰,۶۸ | |
| ۰,۲۵ | ۳۵۵,۳۱ | ۲۱۶,۸۰ | ۳۵۴,۴۷ | |
| ۰,۵۰ | ۲۱۷,۷۹ | ۵۲,۱۶ | ۱۷۹,۱۵ | |
| ۰,۷۵ | ۱۶۰,۷۶ | ۷۰,۹۱ | ۷۸,۶۹ | |
| ۱,۰۰ | ۹۶,۸۷ | ۱۰,۰۰ | ۱,۳۰ | |
| ۱,۲۵ | ۶۳,۸۱ | ۱۰,۰۰ | ۱,۰۰ | |
| ۰,۷۵ | ۰,۰۰ | ۵۱۸,۱۹ | ۴۰,۱,۹۴ | ۶۸۱,۶۳ |
| ۰,۲۰ | ۳۶۹,۹۱ | ۳۷۰,۶۰ | ۳۶۹,۹۸ | |
| ۰,۲۵ | ۳۴۰,۰۷ | ۳۷۲,۵۹ | ۳۸۷,۶۲ | |
| ۰,۵۰ | ۲۲۴,۵۰ | ۲۵۱,۰۵ | ۱۷۲,۶۸ | |
| ۰,۷۵ | ۱۵۳,۹۰ | ۲۰۵,۸۰ | ۸۲,۰۷ | |
| ۱,۰۰ | ۱۰۸,۶۷ | ۱۶۰,۶۲ | ۱۸,۷۸ | |
| ۱,۲۵ | ۷۵,۸۴ | ۱۵۶,۰۴ | ۱۰,۲۵ | |

در جدول ۲ برای فرایند خودهمبسته با ضریب $u = ۰,۲۵$ همچنان عملکرد یکسانی از ACC و $R-ACC$ مشاهده می‌شود (شبیه کد محاسبات ARL نمودار $R-EWMA-ACC$ در پیوست افزوده شده است). اما، به ازای ضرایب خودهمبستگی بزرگ‌تر از $u = ۰,۲۵$ عملکرد $R-ACC$ کمی بهتر از ACC است. برای تفسیر نتایج اخیر، باید گفت که اگر خودهمبستگی $AR(1)$ تشخیص

۷. طراحی اقتصادی - آماری

برای طراحی اقتصادی - آماری نمودار ACC مشابه [۱۵] از تابع هزینه‌ی دانکن و اطلاعات آن استفاده می‌شود تا امکان اعتبارسنجی نتایج نیز فراهم شود. نوآوری عمدۀ در این بخش مربوط به بررسی عملکرد اقتصادی آماری نمودار $R-EWMA-ACC$ در سطوح مختلف خودهمبستگی است.

جدول ۴. نتایج بهینه‌ی مدل با پایش به دو روش پیشنهادی و سنتی ACC به ازای مقادیر مختلف ضریب خودهمبستگی.

| u | نتایج پایش به روش | | | |
|-------|-------------------|------|------|-------|
| | n | h | L | EHC |
| -۰,۷۵ | ۲۰ | ۲,۷۷ | ۳,۸۰ | ۵,۸۱* |
| -۰,۵۰ | ۲۰ | ۲,۷۱ | ۲,۹۷ | ۵,۴۹* |
| -۰,۲۵ | ۱۹ | ۲,۳۸ | ۲,۷۴ | ۵,۳۵ |
| ۰,۰۰ | ۱۸ | ۲,۴۲ | ۲,۶۱ | ۵,۲۶ |
| ۰,۲۵ | ۱۹ | ۲,۲۷ | ۲,۷۰ | ۵,۳۵ |
| ۰,۵۰ | ۲۰ | ۲,۱۶ | ۲,۹۶ | ۵,۴۷* |
| ۰,۷۵ | ۲۰ | ۲,۴۳ | ۳,۶۶ | ۶,۰۱* |

| u | نتایج پایش به روش | | | | |
|-------|-------------------|------|------|-----------|------|
| | n | h | L | λ | EHC |
| -۰,۷۵ | ۱ | ۱,۱۵ | ۴,۰۰ | ۰,۰۵ | ۲,۳۵ |
| -۰,۵۰ | ۱ | ۱,۱۴ | ۴,۰۰ | ۰,۰۵ | ۲,۳۴ |
| -۰,۲۵ | ۱ | ۱,۱۴ | ۴,۰۰ | ۰,۰۵ | ۲,۳۴ |
| ۰,۰۰ | ۱ | ۱,۱۴ | ۴,۰۰ | ۰,۰۵ | ۲,۳۴ |
| ۰,۲۵ | ۱ | ۱,۱۴ | ۴,۰۰ | ۰,۰۵ | ۲,۳۴ |
| ۰,۵۰ | ۱ | ۱,۱۴ | ۴,۰۰ | ۰,۰۵ | ۲,۳۴ |
| ۰,۷۵ | ۱ | ۱,۱۴ | ۲,۳۴ | ۰,۰۵ | ۲,۳۴ |

جدول ۵. مقایسه نتایج بهینه EHC مدل اقتصادی - آماری با پایش به دو روش $ARMA$ و $R-EWMA-ACC$ به ازای مقادیر مختلف ضریب خودهمبستگی.

| u | مدل اقتصادی - آماری | | |
|-------|---------------------|------------|--------------|
| | ARMA | R-EWMA-ACC | اختلاف هزینه |
| -۰,۷۵ | ۵,۵۷* | ۳,۳۵ | ۲,۱۸ |
| -۰,۵۰ | ۵,۴۸* | ۳,۳۴ | ۲,۱۴ |
| -۰,۲۵ | ۵,۷۰* | ۳,۳۴ | ۲,۴۱ |
| ۰,۰۰ | ۶,۴۰* | ۳,۳۴ | ۳,۰۶ |
| ۰,۲۵ | ۷,۱۸* | ۳,۳۴ | ۳,۸۴ |
| ۰,۵۰ | ۸,۹۷* | ۳,۳۴ | ۵,۵۹ |
| ۰,۷۵ | ۱۵,۹۶* | ۳,۳۴ | ۱۲,۶۲ |

| u | مدل اقتصادی - آماری با محدودیت دوم آزاد شده | | |
|-------|---|------------|--------------|
| | ARMA | R-EWMA-ACC | اختلاف هزینه |
| -۰,۷۵ | ۵,۴۱ | ۳,۳۵ | ۲,۰۶ |
| -۰,۵۰ | ۵,۴۴ | ۳,۳۴ | ۲,۱۰ |
| -۰,۲۵ | ۵,۸۱ | ۳,۳۴ | ۲,۴۷ |
| ۰,۰۰ | ۶,۳۱ | ۳,۳۴ | ۲,۹۷ |
| ۰,۲۵ | ۷,۵۳ | ۳,۳۴ | ۴,۱۹ |
| ۰,۵۰ | ۱۱,۳۶ | ۳,۳۴ | ۸,۰۲ |
| ۰,۷۵ | ۱۵,۴۷* | ۳,۳۴ | ۱۲,۱۳ |

فرایند در ابتدا در حالت تحت کنترل قرار دارد. با نزخ خرابی یک تغییر در هر ۱۰۰ ساعت طبق توزیع نمایی، فرایند به حالت خارج از کنترل شیفت پیدا می‌کند. زیان ساعتی این رخداد ۱۰۰ دلار است. اگر نمودار کنترل هشدار اشتباہ دهد هزینه‌ی ۵۰ دلاری به دنبال دارد. در صورتی که نقطه خارج از کنترل به درستی هشدار داده شود جستجو برای کشف انحراف با دلیل با هزینه‌ی ۲۵ دلار آغاز می‌شود. در این وضعیت، فرایند همچنان بدون توقف ادامه می‌باید. هزینه‌های ثابت و متغیر نمونه‌گیری به ترتیب برابر ۵° و $۰,۰۱$ دلار است. زمان مورد نیاز برای نمونه‌گیری، بازرسی و تفسیر برابر با $۵,۰$ ساعت و زمان مورد نیاز برای کشف و برطرف کردن انحراف با دلیل ۲ ساعت لحاظ می‌شود. سایر اطلاعات به صورت $۰,۰۱ = \sigma$ ، $۰,۰۱ = \mu$ ، $USL = ۱۰,۵$ ، $LSL = ۹,۵$ ، $RQL = ۸۸,۴۲$ و $AQL = ۰,۷۹ ppm$ مفروض است.

اگر ATS_1 به عنوان متوسط زمان تا هشدار ۳۳ تعریف شود، هنگامی که فرایند به حالت خارج از کنترل شیفت پیدا کرده باشد، با در نظر گرفتن کران‌های استفاده شده در مطالعات پیشین، EHC برای تعیین متغیرهای تصمیم اندازه‌ی نمونه (n)، فاصله‌ی واحد زمان (EHC) برای نمودار ACC چنین مقداردهی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Min } EHC \\ & \text{s.t. } \alpha \leq ۰,۰۰۵, \\ & \quad ۱ - \beta \geq ۰,۹۸۰, \\ & \quad ATS_1 \leq ۴, \\ & \quad ۱ \leq n \leq ۲۰, \quad ۰,۱ \leq h \leq ۸, \quad ۱ \leq L \leq ۴, \\ & \quad ۰,۰۵ \leq \lambda_E \leq ۰,۰۴, \\ & \quad n \in N^+, \quad h, L > ۰. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

پس از حل مدل توسط الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) مشابه [۲۳]، نتایج بهینه به ازای مقادیر مختلف ضریب خودهمبستگی فرایند $AR(1)$ برای مقایسه دو روش پایش در جدول ۴ ارائه شده است (جواب نشدنی با علامت * نشانه‌گذاری شده است). طراحی نمودار ACC برای نمودار $R-EWMA-ACC$ با هزینه‌ی EHC بهینه باشد. $u = ۰$ قبلاً انجام شده است. با توجه به این که مقدار تابع هدف در یک بربسی [۲۷] برابر $۵,۰۲$ و در بربسی دیگر [۲۸] برابر $۵,۱۸$ به دست آمده و با مقدار حاصل در جدول ۴ تفاوت چندانی ندارد، اعتبار روش حل و نتایج تأیید می‌شود. با افزایش سطح خودهمبستگی، به کارگیری نمودار $R-EWMA-ACC$ هزینه‌ی کمتری نسبت به نمودار ACC نشان می‌دهد. ضمن این که جواب نمودار ACC در سطوح $۰,۷۵$ و $\pm ۰,۹۰$ نشدنی است.

نمودار $ARMA$ به عنوان یکی از پرکاربردترین نمودارهای کنترل برای پایش فرایندهای خودهمبسته به شماره‌ی رود. طراحی این نمودار اخیراً با رامترهای ثابت [۲۴] و در نظر گرفتن تابع $L&V$ انجام شده است. علاوه بر این، طراحی یکپارچه‌ی کیفیت، تولید و نگهداری و تعمیرات برای داده‌های خودهمبسته با به کارگیری نمودار $ARMA$ مورد مطالعه قرار گرفته است. بنابراین، مقایسه‌های بین نمودارهای $ARMA$ و $R-EWMA-ACC$ ارائه می‌شود تا اثر بخشی آنها برای داده‌های خودهمبسته مورد بربسی قرار گیرد. جدول ۵ نتایج بهینه‌ی EHC مدل اقتصادی - آماری با استفاده از آن دو نمودار را برای پایش نشان می‌دهد. آن‌جاکه مقدار شیفت در میانگین به ازای $۰,۰۱ = \delta$ است، توان نمودار $ARMA$ در کشف آن کم است و استفاده از نمودار $R-EWMA-ACC$ به راحلهای نشدنی منجر شده است. در حالی که به کارگیری نمودار $R-EWMA-ACC$ به نتایج شدنی

پس از ارزیابی عملکرد روش‌های پایش از طریق شیوه‌سازی، ارجحیت نمودار $R-EWMA-ACC$ بر اساس شاخص‌های آماری مورد تأیید قرار گرفت. علاوه بر این، مسئله طراحی اقتصادی - آماری نمودارهای کنترل پذیرش بررسی شد. نتایج حاصل نشان داد که استفاده از نمودار $R-EWMA-ACC$ در مقایسه با نمودار ACC منجر به صرف هزینه‌ی کم‌تری در سطوح مختلف خودهمبستگی می‌شود.

مطالعه‌ی حاضر، به عنوان اولین نمونه در جهت توسعه‌ی نمودار کنترل پذیرش برای داده‌های خودهمبسته انجام شد. واضح است که این حوزه نیاز به بررسی و مطالعه‌ی بیشتر دارد. مطابق مطالعات قبلی^[۲۱] می‌توان توسعه‌ی نمودار ACC را در دو حوزه دنبال کرد. ۱. برای باقیمانده‌های سایر فرایند‌های خودهمبسته ایستا و نایستا، ۲. در چارچوب نمودارهای اصلاح شده برای فرایند‌های خودهمبسته. نویسنده‌گان نوشتار حاضر، به پژوهش در حوزه‌ی اول اشتغال دارند.

با هزینه‌ی کم‌تر منجر شده است. پس از آزادسازی محدودیت دوم مدل، که مربوط به توان کشف است، نتایج شدنی برای نمودار $ARMA$ به دست آمد. با این حال، همچنان استفاده از نمودار $R-EWMA-ACC$ مقرن به صرفه است.

۸. نتیجه‌گیری

برای منظور کردن تأثیر انتظارات در پایش فرایند، نمودار کنترل پذیرش با تأکید بر کارایی فرایند قابل کاربرد است. در این مطالعه، به دلیل نقض فرض استقلال داده‌ها در برخی فرایند‌ها، لزム پایش با نمودار کنترل پذیرش در حضور خودهمبستگی مورد توجه قرار گرفت. در همین راستا، نمودارهای $R-ACC$ و $R-EWMA-ACC$ بر داده‌ها توسعه داده شد. بر اساس باقیمانده‌های حاصل از انطباق مدل (۱) $AR(1)$ بر داده‌ها توسعه داده شد.

پانوشت‌ها

1. Average Run Length
2. Acceptance Control Chart
3. Autoregressive Moving Average
4. Autoregressive
5. Exponentially Weighted Moving Average
6. Burr Distribution
7. Taherian & Baluchestani Asl
8. Oprime
9. Zhou
10. Guardband Technique
11. Duncan
12. Lorenzen and Vance
13. Upper Specification Limit
14. Lower Specification Limit
15. Acceptance Process Level
16. Acceptable Quality Level
17. Rejectable Process Level
18. Rejectable Quality Level
19. Upper Control Limit
20. Lower Control Limit
21. Run Length
22. Parts Per Million
23. Average Time to Signal
24. Expected Hourly Cost
25. Particle Swarm Optimization

منابع (References)

1. Box, G., Bisgaard, S., Graves, S. and et al. "Performance evaluation of dynamic monitoring systems: The waterfall chart", *Quality Engineering*, **16**, pp. 183-191 (2003).
2. Freund, R.A. "Acceptance control charts", *Industrial Quality Control*, **14**, pp. 13-23 (1957).
3. Montgomery, D.C., *Introduction To Statistical Quality Control*, 7th Edn., John Wiley & Sons (2009).
4. Oprime, P.C., Lizarelli, F.L., Pimenta, M.L. and et al. "Acceptance X-bar chart considering the sample distribution of capability indices, C_p and C_{pk} : A practical and economical approach", *International Journal of Quality & Reliability Management*, **36**, pp. 875-894 (2019).
5. Woodall, W.H. and Faltin, F.W. "Rethinking control chart design and evaluation", *Quality Engineering*, **31**, pp. 596-605 (2019).
6. Jafarian-Namin, S., Goli, A., Qolipour, M. and et al. "Forecasting the wind power generation using box-jenkins and hybrid artificial intelligence: A case study", *International Journal of Energy Sector Management*, **13**, pp. 1038-1062 (2019).
7. Li, Y., Pan, E. and Xiao, Y. "On autoregressive model selection for the exponentially weighted moving average control chart of residuals in monitoring the mean of auto-correlated processes", *Quality and Reliability Engineering International*, **36**(7), pp. 2351-2369 (2020).
8. Wang, F.-K. and Cheng, X.-B. "Exponentially weighted moving average chart with a likelihood ratio test for monitoring autocorrelated processes", *Quality and Reliability Engineering International*, **36**(2), pp. 753-764 (2020).
9. Qiu, P. and Xie, X. "Transparent sequential learning for statistical process control of serially correlated data", *Technometrics*, pp. 1-15, (2021).
DOI: 10.1080/00401706.2021.1929493.
10. Shongwe, S.C., Malela-Majika, J.-C. and Castagliola, P. "A combined mixed-s-skip sampling strategy to reduce the effect of autocorrelation on the \bar{X} scheme with and without measurement errors", *Journal of Applied Statistics*, **48**(7), pp. 1243-1268 (2021).
11. Ahmad, S., Riaz, M., Hussain, S. and et al. "On auxiliary information-based control charts for autocorrelated processes with application in manufacturing industry",

- The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **100**(5), pp. 1965-1980 (2019).
12. Prajapati, D.R. and Singh, S. "Determination of level of correlation for products of pharmaceutical industry by using modified X-bar chart", *International Journal of Quality and Reliability Management*, **33**(6), pp. 724-746 (2016).
 13. Barbeito, I., Zaragoza, S., Tarrio-Saavedra, J. and et al. "Assessing thermal comfort and energy efficiency in buildings by statistical quality control for autocorrelated data", *Applied Energy*, **190**, pp. 1-17 (2017).
 14. Keshavarz, M., Asadzadeh, S. and Niaki, S.T.A. "Controlling autocorrelated data in multistage manufacturing processes with an application to textile industry", *Quality and Reliability Engineering International*, **35**(7), pp. 2314-2326 (2019).
 15. Jafarian-Namin, S., Fallahnezhad, M.S., Tavakkoli-Moghaddam, R. and et al. "Acceptance control chart for monitoring first order autoregressive process", *17th Int. Conf. on Industrial Engineering*, Mashhad (In Persian) (1399/2021).
 16. Wesolowsky, G.O. "Simultaneous acceptance control charts for two correlated processes", *Technometrics*, **32**(1), pp. 43-48 (1990).
 17. Wesolowsky, G.O. "Simultaneous acceptance control charts for independent processes", *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, **41**(1), pp. 147-158 (1992).
 18. Steiner, S.H. and Wesolowsky, G.O. "Simultaneous acceptance control charts for products with multiple correlated characteristics", *International Journal of Production Research*, **32**(3), pp. 531-543 (1994).
 19. Wu, Z. "An adaptive acceptance control chart for tool wear", *International Journal of Production Research*, **36**(6), pp. 1571-1586 (1998).
 20. Holmes, D.S. and Mergen, A.E. "Exponentially weighted moving average acceptance charts", *Quality and Reliability Engineering International*, **16**(2), pp. 139-142 (2000).
 21. Chou, C.-Y., Chen, C.-H. and Liu, H.-R. "Acceptance control charts for non-normal data", *Journal of Applied Statistics*, **32**(1), pp. 25-36 (2005).
 22. Tsai, T.-R. and Chiang, J.-Y. "The design of acceptance control chart for non-normal data", *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, **25**(2), pp. 127-135 (2008).
 23. Taherian, T. and Balouchestani Asl, M. "Capability analysis and use of acceptance and control charts in the 6-sigma in pharmaceutical industries case study: Beheshtan tolid pharmaceutical co", *International Journal of Applied Information Systems*, **11**, pp. 127-135 (2016).
 24. Zhou, X., Govindaraju, K. and Jones, G. "Acceptance control and guardbanding for error-prone individual measurements", *Quality and Reliability Engineering International*, **35**, pp. 517-534 (2019).
 25. Kawamura, H., Nishina, K. and Suzuki, T. "Process adjustment capability control chart for simultaneous monitoring of process and state of statistical control", *Frontiers in Statistical Quality Control*, **10**, Edited by H.J. Lenz, W. Schmid, and P.T. Wilrich, Physica, Heidelberg (2012).
 26. Mohammadian, F. and Paynabar, K. "Economic design of acceptance control charts", In *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, pp. 2132-2136 (2008).
 27. Mohammadian, F. and Amiri, A. "Economic-statistical design of acceptance control chart", *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, pp. 53-61 (2013).
 28. Jafarian-Namin, S., Fallahnezhad, M.S., Tavakkoli-Moghaddam, R. and et al. "Robust economic-statistical design of acceptance control chart", *Journal of Quality Engineering and Production Optimization*, **4**, pp. 55-72 (2019).
 29. Jafarian-Namin, S., Fallahnezhad, M.S., Tavakkoli-Moghaddam, R. and et al. "Robust modeling of acceptance control chart to specify best design parameters", In *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, **393**, Edited by S.N. Shabazova, J. Kacprzyk, V.E. Balas, and V. Kreinovich, Springer Nature, Switzerland (2021).
 30. Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C., *Time Series Analysis*, 4th Edn., John Wiley & Sons (2013).
 31. Thaga, K. and Sivasamy, R. "Single variables control charts: A further overview", *Indian Journal of Science and Technology*, **8**, pp. 518-528 (2015).
 32. Osei-Aning, R., Abbasi, S.A. and Riaz, M. "Monitoring of serially correlated processes using residual control charts", *Scientia Iranica*, **24**(3), pp. 1603-1614 (2017).
 33. Salmasnia, A., Namdar, M. and Abdzadeh, B. "An integrated quality and maintenance model for two-unit series systems", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **49**, pp. 886-917 (2020).
 34. Costa, A. and Fichera, S. "Economic statistical design of ARMA control chart through a modified fitness-based self-adaptive differential evolution", *Computers & Industrial Engineering*, **105**, pp. 174-18 (2017).
 35. Costa, A. and Fichera, S. "Economic-statistical design of adaptive arma control chart for autocorrelated data", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **91**(3), pp. 623-647 (2021).
 36. Jafarian-Namin, S., Fallahnezhad, M.S., Tavakkoli-Moghaddam, R. and et al. "An integrated quality, maintenance and production model based on the delayed monitoring under the ARMA control chart", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **91**(13), pp. 2645-2669 (2021).
 37. Jafarian-Namin, S., Fallahnezhad, M.S., Tavakkoli-Moghaddam R. and et al. "Economic-statistical design of an integrated triple-concept model under various autocorrelated processes", *International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, **32**(4), pp. 1-18 (2021).
 38. Jafarian-Namin, S., Fallah Nezhad, M.S., Tavakkoli-Moghaddam, R. and et al. "An integrated model for optimal selection of quality, maintenance, and production parameters with auto correlated data", *Scientia Iranica*, (2021). DOI:10.24200/sci.2021.56484.4745.

پیوست

۷. به دست آوردن i آماره‌ی EWMA، انحراف استاندارد و محاسبه‌ی حد کنترل بالای آن در سناریو زام با توجه به مقادیر L_E و λ_E انتخابی از گام ۳:

$$\begin{aligned} z_{i,j}^{APL} &= \lambda_E e_{i,j}^{APL} + (1 - \lambda_E) z_{i-1,j}^{APL}, \\ z_{i,j}^{RPL} &= \lambda_E e_{i,j}^{RPL} + (1 - \lambda_E) z_{i-1,j}^{RPL}, \quad \forall i = 1, \dots, 2000 \\ \sigma_{EWMA} &= \sigma_e \sqrt{\frac{\lambda_E}{1 - \lambda_E}} = 0.1 \sqrt{\frac{\lambda_E}{1 - \lambda_E}}, \\ UCL_{\alpha-EWMA} &= \\ APL_U + L_E \sigma_{EWMA} &= 10.020 + L_E \sigma_{EWMA}, \end{aligned}$$

۸. قرار دادن مقادیر طول دنباله به صورت $1 = RL_{1,j} = RL_{i,j}$ در سناریو زام؛

۹. شمارنده داده تولید شده برای پایش به صورت $1 = i$ قرار داده شود؛

۱۰. اگر $z_{i,j} \leq UCL_{\alpha-EWMA}$ مقدار $1 = RL_{i,j} = RL_{1,j}$ تنظیم شود. در غیر این صورت، باید از گام ۱۲ ادامه داد؛

۱۱. اگر $i = 2000$ شده باشد باید از گام ۱۲ ادامه داد. در غیر این صورت، شمارنده داده تولید شده برای پایش به صورت $1 = i + 1 = n$ تنظیم شود و محاسبات از گام ۱۰ ادامه یابد؛

۱۲. شمارنده داده تولید شده برای پایش به صورت $1 = n$ قرار داده شود؛

۱۳. اگر $z_{i,j} \leq UCL_{\alpha-EWMA}$ مقدار $1 = RL_{1,j} = RL_{i,j}$ تنظیم شود، در غیر این صورت، باید از گام ۱۵ ادامه داد؛

۱۴. اگر $i = 2000$ شده باشد باید از گام ۱۵ ادامه داد. در غیر این صورت، شمارنده داده تولید شده برای پایش به صورت $1 = i + 1 = n$ تنظیم شود و محاسبات از گام ۱۳ ادامه یابد.

۱۵. اگر $j = 3000$ شده باشد باید از گام ۱۶ ادامه داد. در غیر این صورت، شمارنده تعداد سناریوها به صورت $1 = j + 1 = n$ تنظیم شود و محاسبات از گام ۵ ادامه یابد؛

۱۶. محاسبه‌ی میانگین مقادیر حاصل از گام‌های ۱۱ و ۱۲ برای کل ۳۰۰۰ سناریو چنین انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} ARL_{\alpha} &= \sum_{j=1}^{3000} RL_{1,j} / 3000, \quad \text{for } \delta_{APL} = 0.20, \\ ARL_{\alpha} &= \sum_{j=1}^{3000} RL_{1,j} / 3000, \quad \text{for } \delta_{RPL} = 1.25. \end{aligned}$$

۱۷. اگر مقدار ARL_{α} تقاضت چندانی با ۳۷۰ ندارد، مقادیر بهینه به صورت $L_E^* = L_E$ تنظیم شود. در غیر این صورت، الگوریتم از گام ۳ ادامه یابد.

گام‌های مربوط به محاسبات ARL در جدول ۲ به ازای $u = 0.5$ و $\delta_{APL} = 1.25, 0.20$ و $\delta_{RPL} = 1.25, 0.20$

۱. تعیین مقادیر پیش فرض $USL = u = 0.5, \sigma_a = \sigma_e = 0.1, \mu = 10$ و $LSL = 9.5, 10.5$

۲. محاسبه‌ی مقادیر زیر با توجه به فعال بودن USL و مفروض بودن مقادیر مطلوب شاخص قابلیت فرایند:

$$C_{pk_u}^A = 1.60, \quad C_{pk_u}^R = 1.25,$$

$$Z_{AQL} = 3C_{pk_u}^A = 4.80,$$

$$Z_{RQL} = 3C_{pk_u}^R = 3.75,$$

$$APL_U = USL - Z_{AQL}\sigma_e = 10.5 - 4.80\sigma_e = 10.020,$$

$$RPL_U = USL - Z_{RQL}\sigma_e = 10.5 - 3.75\sigma_e = 10.125,$$

$$\delta_{APL} = (APL_U - \mu) / \sigma_a = 0.20,$$

$$\delta_{APL} = (RPL_U - \mu) / \sigma_a = 1.25,$$

۳. تنظیم مقادیر $[1, 4]$ و $[0.05, 0.4]$ به ازای $ARL_{\alpha} = 370$ به ازای $\delta_{APL} = 0.20$ که بر اساس دستیابی ناهمبسته بر APL_U منطبق باشد؛

۴. شمارنده تعداد سناریوها به صورت $1 = j$ قرار داده شود؛

۵. تولید i داده شبیه‌سازی شده از فرایند (۱) برای سناریو زام:

$$a_{i,j} \sim N(0, \sigma_a^2 = 0.01),$$

$$a_{i,j} = 0,$$

$$X_{i,j} = \mu = 10,$$

$$C = \mu(1 - u) = 5,$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_a^2 / (1 - u) = 0.0133,$$

$$X_{i,j} = C + uX_{i-1,j} + a_{i,j} = 5 + 0.5X_{i-1,j} + a_{i,j},$$

$$X_{i,j}^{APL} = C + X_{i,j} + \delta_{APL}\sigma_X = 5 + X_{i,j} + 0.2\sigma_X,$$

$$X_{i,j}^{RPL} = C + X_{i,j} + \delta_{RPL}\sigma_X = 5 + X_{i,j} + 1.25\sigma_X,$$

$$\forall i = 1, \dots, 2000$$

۶. انطباق مدل مناسب بر مشاهدات طبق رویه باکس و جنکینز برای به دست آوردن برآوردهای مورد نیاز در سناریو زام:

$$\hat{X}_{i,j} = \hat{C} + \hat{u}X_{i-1,j},$$

$$\hat{X}_{i,j}^{APL} = \hat{C} + \hat{u}X_{i-1,j}^{APL},$$

$$\hat{X}_{i,j}^{RPL} = \hat{C} + \hat{u}X_{i-1,j}^{RPL},$$

$$e_{i,j} = \hat{a}_{i,j} = X_{i,j} - \hat{X}_{i,j},$$

$$e_{i,j}^{APL} = \hat{a}_{i,j}^{APL} = X_{i,j}^{APL} - \hat{X}_{i,j}^{APL},$$

$$e_{i,j}^{RPL} = \hat{a}_{i,j}^{RPL} = X_{i,j}^{RPL} - \hat{X}_{i,j}^{RPL}, \quad \forall i = 1, \dots, 2000$$