

طراحی نمودارهای کنترل میانگین پیش‌رونده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره در فاز ۲

امین ستوده (کارشناس ارشد)

امیرحسین امیری* (استاد)

گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران

محمدرضا ملکی (استادیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی گلباگان، دانشگاه صنعتی اصفهان، گلباگان

سینا جمشیدی (کارشناس ارشد)

گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، زمستان ۱۴۰۲ (۱۴۰۲)
دوری ۳۹، شماره ۲، صص. ۱۰۸-۹۹، (پژوهشی)

در برخی از کاربردهای صنعتی، کیفیت محصول بر اساس یک رابطه رگرسیونی خطی میان چند متغیر پاسخ با یک متغیر مستقل توصیف می‌شود که به آن پروفایل خطی ساده چند متغیره گفته می‌شود. بر اساس آخرین اطلاعات مولفین، رویکرد میانگین پیش‌رونده، علی‌رغم قابلیت بالا در کشف سریع تغییرات کوچک و متوسط، برای پایش پروفایل‌های خطی چند متغیره استفاده نشده است. در پژوهش حاضر، به علت عملکرد بهتر این رویکرد نسبت به نمودارهای باحافظه، سه نمودار مبتنی بر رویکرد میانگین پیش‌رونده شامل نمودارهای MPM_e ، MPM_a و MPM_{ae} به منظور پایش پروفایل‌های خطی ساده چند متغیره در فاز دو طراحی می‌شوند. عملکرد نمودارهای پیشنهادی با نمودارهای رایج شامل نمودارهای $MEWMA/x^2$ ، $MEWMA$ و $MEWMA - 3$ بر اساس شاخص متوسط طول دنباله مقایسه شده و نتایج نشان می‌دهد که روش‌های پیشنهادی نسبت به نمودارهای رقیب از عملکرد بهتری در تشخیص شیفت‌های مختلف برخوردارند. در پایان، کاربرد بهترین روش پیشنهادی با استفاده از داده‌های واقعی صنعت خودروسازی تشریح می‌شود.

aminsotodel373@gmail.com
amiri@shahed.ac.ir
m.maleki@iut.ac.ir
sajamshidi1375@yahoo.com

واژگان کلیدی: پروفایل خطی ساده چند متغیره، فاز دو، متوسط طول دنباله، میانگین پیش‌رونده.

۱. مقدمه

در بسیاری از کاربردهای کنترل کیفیت آماری، کیفیت محصول با استفاده از یک رابطه رگرسیونی میان یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل تعریف می‌شود که به اصطلاح به آن پروفایل گفته می‌شود. در موارد مشخصی، خروجی فرایند را می‌توان به وسیله چندین پروفایل همبسته توصیف نمود که با استفاده از یک رابطه خطی به متغیرهای مستقل مرتبط می‌شوند. در این صورت، اگر رگرسیون‌های چندمتغیره دارای یک متغیر مستقل باشد، یعنی هر یک از متغیرهای پاسخ پروفایل‌های رگرسیونی مورد نظر تابع تنها یک متغیر مستقل باشند، به آن پروفایل خطی ساده چندمتغیره گفته می‌شود. در این شرایط، چنانچه همبستگی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۷۷/۱۴۰، اصلاحیه ۱۴۰۱/۵/۲۹، پذیرش ۱۴۰۱/۶/۲۸. ۱۴۰۱

استاد به این مقاله:

ستوده، امین، امیری، امیرحسین، ملکی، محمدرضا، و جمشیدی، سینا، ۱۴۰۲. طراحی نمودارهای کنترل میانگین پیش‌رونده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره در فاز ۲.

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، ۳۹(۲)، صص. ۱۰۸-۹۹. DOI:10.24200/J65.2020.60203.2292

می‌شود. در نهایت، بخش پایانی به نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای پژوهش‌های آتی اختصاص می‌یابد.

۲. مدل پروفایل خطی ساده چندمتغیره

گاهی کیفیت محصول بر اساس یک پروفایل چند متغیره توصیف می‌شود. هنگامی که در یک پروفایل چندمتغیره، رابطه رگرسیونی ذکر شده خطی بوده و تنها یک متغیر مستقل موجود باشد، به آن پروفایل خطی ساده چندمتغیره می‌گویند. فرض می‌شود برای نمونه k ام، n مقدار ثابت برای متغیر مستقل موجود بوده و به ازای هر مقدار متغیر مستقل، p مقدار برای متغیرهای پاسخ وجود داشته باشد. در این صورت، مشاهدات هر نمونه به صورت $(x_{ik}, y_{i1k}, y_{i2k}, \dots, y_{ipk})$; $i = 1, 2, \dots, n$ نشان داده می‌شوند. مدل پروفایل خطی چند متغیره عبارتست از:

$$Y_k = XB + E_k; k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

که در آن Y_k ماتریس $n \times p$ متغیرهای پاسخ، X ماتریس $n \times 2$ متغیرهای مستقل، B ماتریس $2 \times p$ پارامترهای مدل و E_k ماتریس $n \times p$ عبارات خطاست. فرض می‌شود که سطرهای ماتریس E_k نسبت به هم مستقلند (به دلیل استقلال مشاهدات درون هر پروفایل)، اما عناصر هر سطر با یکدیگر همبسته‌اند. همچنین هر سطر ماتریس E_k از توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس معلوم Σ به صورت رابطه ۲ پیروی می‌کند:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} \quad (2)$$

تخمین زنده حداقل مربعات خطا، پارامترهای مدل رگرسیونی برای نمونه k ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{B}_k = (\hat{\beta}_{1k}, \hat{\beta}_{2k})^T = (X^T X)^{-1} X^T Y_k \quad (3)$$

عناصر ماتریس \hat{B}_k نیز از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\beta}_{1k} = \bar{y}_{jk} - \hat{\beta}_{2k} \bar{x} \quad (4)$$

$$\hat{\beta}_{2k} = \frac{S_{xj(j)}}{S_{xx}}; j = 1, 2, \dots, p \quad (5)$$

$$\text{به طوری که، } \bar{y}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ijk}, \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, S_{xj(j)} = \sum_{i=1}^n y_{ijk}(x_i - \bar{x}), S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

۳. نمودارهای کنترل پیشنهادی مبتنی بر رویکرد

میانگین پیش‌رونده

در این بخش نمودارهای مبتنی بر رویکرد میانگین پیش‌رونده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره ارائه می‌شوند.

چندمتغیره تحت مشاهدات انفرادی ارائه کردند. پایش بردار میانگین و ماتریس کوواریانس پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره در فاز دو، با در نظر گرفتن خودهمبستگی درونی مشاهدات توسط [۶] بررسی شد. [۷] یک نمودار EWMA تطبیقی به منظور پایش پروفایل‌های خطی ساده تک متغیره و چندمتغیره معرفی کردند. [۸] سه نمودار برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه چندمتغیره در فاز دو و با در نظر گرفتن خودهمبستگی مشاهدات پیشنهاد نمودند. به منظور اطلاعات بیشتر در زمینه پروفایل‌های خطی چندمتغیره، به مراجع [۹-۱۵] مراجعه شود.

امروزه با افزایش انتظارات مشتری، کشف تغییرات کوچک و متوسط از اهمیت بالایی برخوردار شده است. رویکردهای زیادی برای کشف این تغییرات در پژوهش‌های صورت گرفته ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به نمودارهای باحافظه مانند نمودار EWMA و جمع تجمعی، نمودارهای کنترل تطبیقی، قوانین حساس‌سازی و اخیراً نمودارهای کنترل پیش‌رونده اشاره کرد. نمودار کنترل پیش‌رونده که توسط مرجع [۱۶] ارائه شده است، در کشف تغییرات کوچک و متوسط بهتر از دیگر نمودارهای با حافظه عمل می‌کند. نمودار کنترل پیش‌رونده، یک میانگین تجمعی در طول زمان است. تفاوت بین نمودارهای کنترل میانگین پیش‌رونده و میانگین متحرک این است که در نمودار میانگین متحرک، یک فاصله ثابت حرکتی وجود دارد که به آن دامنه گفته می‌شود. به طوری که در هر دوره تعدادی از مشاهدات قبلی حذف می‌شوند. بنابراین، در رویکرد پیش‌رونده، هیچ مشاهده‌ای حذف نشده و در هر بار نمونه‌گیری از مشاهدات قبلی نیز استفاده می‌شود. می‌توان گفت که نمودار میانگین متحرک، یک مورد خاص از نمودار کنترل میانگین پیش‌رونده است. در سال‌های اخیر، نمودارهای میانگین پیش‌رونده به طور گسترده‌ای در پایش فرایندهای مختلف استفاده شده‌اند که در ذیل به برخی از مهم‌ترین آنها اشاره شده است:

نمودار میانگین پیش‌رونده بواسون و به منظور پایش داده‌های شمارشی ارائه شد. [۱۷] او نشان داد که نمودار ارائه شده از نمودارهای رقیب شامل نمودارهای شوهارت، EWMA، EWMA دوگانه و جمع تجمعی بهتر عمل می‌کند. [۱۸] به توسعه یک نمودار باحافظه ماکزیمم و بر اساس رویکرد میانگین پیش‌رونده برای پایش همزمان پارامترهای تمرکز و پراکندگی مشخصه‌های کیفی نرمال پرداختند. [۱۹] به معرفی نمودار میانگین پیش‌رونده دوگانه پرداختند. یک نمودار مبتنی بر رویکرد میانگین پیش‌رونده به منظور پایش زمان میان رویدادها توسط [۲۰] توسعه یافت. به منظور کسب اطلاعات بیشتر در زمینه نمودارهای میانگین پیش‌رونده، به مراجعی مانند [۲۱-۲۳] مراجعه شود.

پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه نشان می‌دهد که رویکرد میانگین پیش‌رونده به ندرت توسط محققین به منظور بهبود عملکرد نمودارهای پایش پروفایل به کار رفته است. در تنها تحقیق موجود در این زمینه، [۲۴] به معرفی یک نمودار باحافظه مبتنی بر رویکرد میانگین پیش‌رونده به منظور پایش همزمان پارامترهای پروفایل خطی ساده پرداختند. بر اساس آخرین پژوهش‌های صورت گرفته، تاکنون از نمودارهای میانگین پیش‌رونده برای پایش پروفایل خطی چند متغیره استفاده نشده است. بنابراین، با توجه به عملکرد رضایت‌بخش این رویکرد در کشف تغییرات کوچک و متوسط، در این پژوهش، سه نمودار میانگین پیش‌رونده به منظور پایش پروفایل‌های خطی ساده چند متغیره در فاز دو توسعه داده شده است. ساختار پژوهش حاضر به شرح زیر است: در بخش ۲، مدل پروفایل خطی ساده چند متغیره تشریح می‌شود. در بخش ۳، نمودارهای پیشنهادی ارائه می‌شوند. در بخش ۴، عملکرد نمودارهای پیشنهادی بر اساس شبیه‌سازی مونت‌کارلو مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۵، کاربرد روش پیشنهادی با استفاده از داده‌های واقعی صنعت خودروسازی تشریح

مقادیر مناسب پارامتر c را به ازای $ARL_0 \in \{168, 200, 370, 400, 500\}$ به دست آورند. آماره نمودار MPM_a براساس موارد عنوان شده برای نمونه k ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_{PM(k,\beta)}^T = PM(k,\beta) \Sigma_{PM(k,\beta)}^{-1} PM(k,\beta)^T \quad (13)$$

نمودار MPM_a زمانی که $T_{PM(k,\beta)}^T > h_\beta$ باشد، هشدار خارج از کنترل صادر می‌نماید که در آن h_β حد کنترل بالای نمودار بوده و مقدار آن با استفاده از شبیه‌سازی به نحوی تعیین می‌شود که ARL_0 برابر مقداری مشخص شود.

۲.۳. رویکرد نمودار کنترل میانگین پیش‌رونده بر اساس پارامتر خطا MPM_e

این نمودار بر اساس مقادیر خطا طراحی می‌شود. فرض می‌شود در نمونه k ام، عناصر آن به صورت $\bar{e}_k = (\bar{e}_{1k}, \bar{e}_{2k}, \dots, \bar{e}_{pk})$ برداری به ابعاد $1 \times p$ شامل عناصر خطا باشد که عناصر آن به صورت $\bar{e}_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^j \varepsilon_{ijk}}{n}$; $j = 1, \dots, p$ محاسبه می‌شوند. در این صورت، $\bar{e}_m = (\bar{e}_{1m}, \bar{e}_{2m}, \dots, \bar{e}_{pm})$; $m = 1, \dots, k$ از توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس مشخص $\Sigma_{\bar{e}} = \frac{\Sigma}{n}$ پیروی می‌کند. در این صورت، ابتدا بردار میانگین تجمعی بر اساس نمونه اول تا نمونه k ام به صورت رابطه ۱۴ محاسبه می‌شود.

$$PM(k,\varepsilon) = \frac{\sum_{m=1}^k \bar{e}_m}{k}; k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

که $PM(k,\varepsilon)$ دارای توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{PM(k,\varepsilon)} = \frac{1}{nk} \Sigma$ است. همان‌طور که اشاره شد، حدود کنترل نمودار میانگین پیش‌رونده با افزایش k نسبت به واریانس آماره پهن شده و احتمال کشف رخداد خطا به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکل، تابع جریمه معرفی شده توسط [۱۶] به کار گرفته شده و واریانس آماره MPM_e به صورت $\Sigma_{PM(k,\varepsilon)} = \frac{1}{nk} \left(\frac{c}{f(k)} \right) \Sigma$ بوده و بر اساس بررسی انجام شده توسط [۱۶] مقدار $k^{1/2}$ را بهترین گزینه برای بهینه کردن ویژگی طول دنباله نمودار نشان داده است. همچنین، مقدار مناسب ثابت c به ازای مقادیر رایج ARL_0 توسط [۱۶] محاسبه شده است. در انتها، آماره MPM_e برای نمونه k ام طبق رابطه ۱۵ محاسبه می‌شود:

$$T_{PM(k,\varepsilon)}^T = PM(k,\varepsilon) \Sigma_{PM(k,\varepsilon)}^{-1} PM(k,\varepsilon)^T \quad (15)$$

نمودار MPM_e هنگامی که $T_{PM(k,\varepsilon)}^T > h_\varepsilon$ باشد، هشدار خارج از کنترل اعلام می‌کند که h_ε با استفاده از شبیه‌سازی و برای دستیابی به مقدار ARL_0 مشخص به دست می‌آید.

۳.۳. نمودار کنترل ترکیبی MPM_e و MPM_a

همان‌طور که مشاهده شد، آماره نمودار MPM_a برای نمونه k ام بر اساس محاسبه اختلاف میان بردارهای مقادیر برآورد شده و اسمی ضرایب رگرسیونی نمونه‌های ۱ تا k و سپس محاسبه میانگین مقادیر حاصل به دست می‌آید. بنابراین، انتظار می‌رود که این نمودار عملکرد مناسبی در کشف تغییرات ضرایب رگرسیونی پروفایل از خود نشان دهد. از طرف دیگر، آماره نمودار MPM_e برای نمونه k ام بر حسب میانگین حسابی

۱.۳. رویکرد نمودار کنترل میانگین پیش‌رونده بر اساس پارامترهای میانگین MPM_a

به منظور طراحی نمودار کنترل، ابتدا ماتریس \hat{B}_k به صورت یک بردار تصادفی نرمال به ابعاد $1 \times 2p$ به صورت رابطه ۷ بازویسی می‌شود:

$$\hat{\beta}_k = (\hat{\beta}_{1k}, \hat{\beta}_{2k}, \dots, \hat{\beta}_{pk}, \hat{\beta}_{1k}, \hat{\beta}_{2k}, \dots, \hat{\beta}_{1pk}) \quad (6)$$

به طوری که $\hat{\beta}_k$ برداری $1 \times 2p$ با بردار میانگین زیر است:

$$E(\hat{\beta}_k) = (\beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{p1}, \beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{1p}) \quad (7)$$

همچنین ماتریس کوواریانس $\hat{\beta}_k$ که با $\Sigma_{\hat{\beta}_k}$ نشان داده می‌شود، ماتریسی با ابعاد $2p \times 2p$ بوده که عناصر آن با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$COV(\hat{\beta}_{uk}, \hat{\beta}_{vk}) = \sigma_{uv} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^T}{S_{xx}} \right) \quad (8)$$

$$COV(\hat{\beta}_{uk}, \hat{\beta}_{vk}) = \frac{\sigma_{uv}}{S_{xx}} \quad (9)$$

$$COV(\hat{\beta}_{uk}, \hat{\beta}_{vk}) = -\sigma_{uv} \frac{\bar{x}^T}{S_{xx}} \quad (10)$$

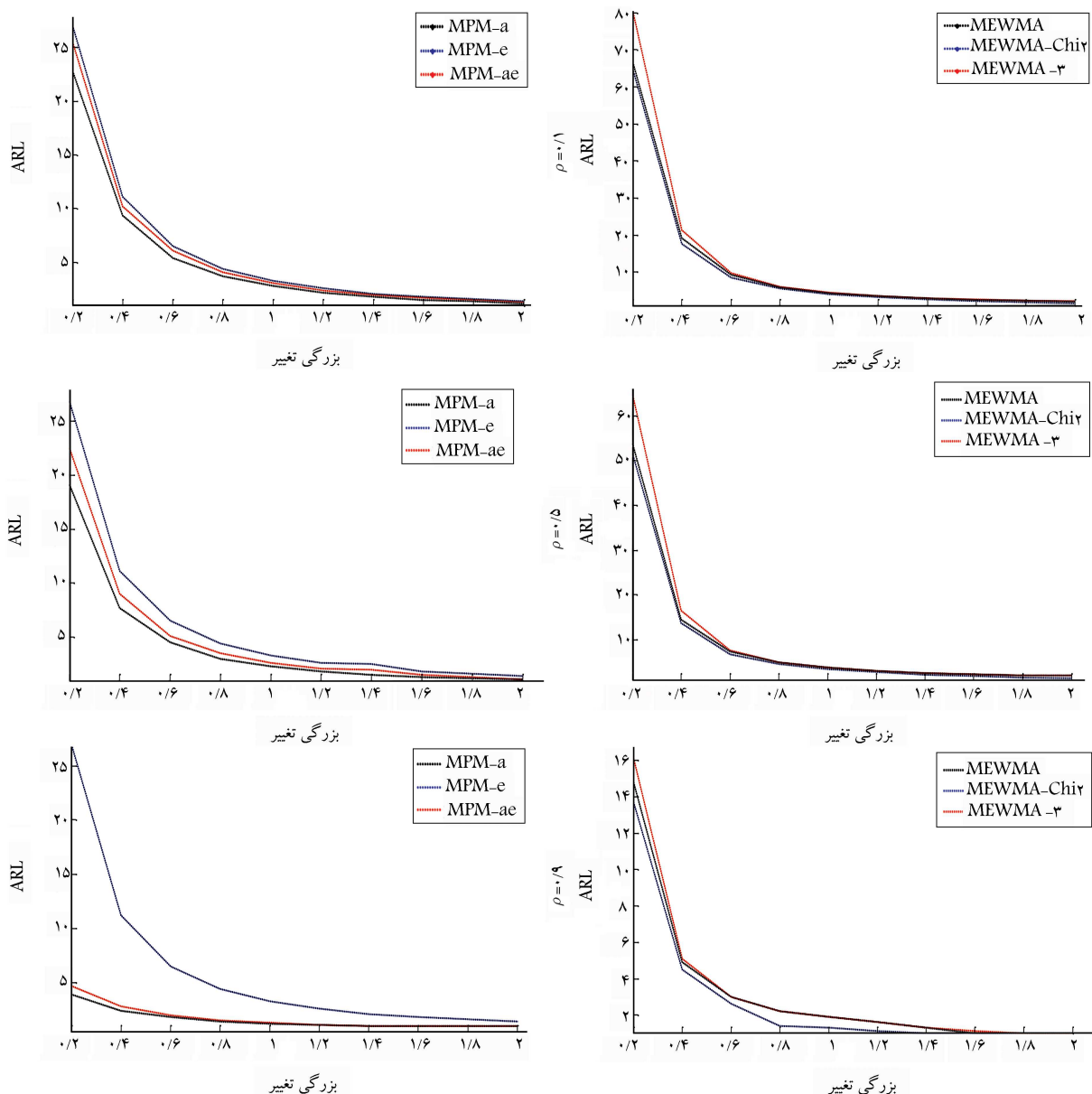
که σ_{uv} عنصر واقع در سطر u ام و ستون v ام ماتریس Σ می‌باشد. نمودار پیش‌رونده، پارامترهای پروفایل چند متغیره را به طور مستقیم پایش می‌کند. برای رسیدن به این هدف، نمودار میانگین پیش‌رونده که توسط [۱۶] مطرح شد، مورد استفاده قرار گرفته که در آن برای نمونه k ام داریم:

$$PM(k,\beta) = \frac{\sum_{m=1}^k (\hat{\beta}_m - \beta)}{k}; k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

به طوری که $\beta = (\beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{p1}, \beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{1p})$. همان‌طور که اشاره شد، بردارهای ضرایب رگرسیونی برآورد شده $\hat{\beta}_m$; $m = 1, \dots, k$ دارای توزیع نرمال $2p$ متغیره با بردار میانگین β و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\hat{\beta}_k}$ می‌باشند. به طور معادل، بردارهای اختلاف $\hat{\beta}_m - \beta$; $m = 1, \dots, k$ از توزیع نرمال $2p$ متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\hat{\beta}_k}$ پیروی می‌کند. بنابراین، بردار میانگین $PM(k,\beta) = \frac{\sum_{m=1}^k (\hat{\beta}_m - \beta)}{k}$ دارای بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{PM(k,\beta)} = \left(\frac{1}{k} \right) \Sigma_{\hat{\beta}_k}$ خواهد بود. [۱۶] نشان دادند که رویکرد میانگین پیش‌رونده برای مقادیر بزرگ k دارای حدود کنترل پهنی نسبت به واریانس آماره خواهد بود. از آنجا که احتمال بروز هشدار خارج از کنترل برای مقادیر بزرگ k کاهش می‌یابد، [۱۶] از یک تابع جریمه برای تعدیل فاصله حدود کنترل نسبت به واریانس استفاده نمودند. بر این اساس واریانس آماره $PM(k,\beta)$ به منظور کاهش نسبی فاصله حدود کنترل نسبت به مقدار آماره بر اساس [۱۶] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\Sigma_{PM(k,\beta)} = \left(\frac{1}{k} \right) \left(\frac{c}{f(k)} \right) \Sigma_{\hat{\beta}_k} \quad (12)$$

مرجع [۱۶] گزینه‌های مختلفی را برای تابع جریمه $f(k)$ بررسی کردند و دریافتند که تابع جریمه $k^{1/2}$ بهترین گزینه برای بهینه کردن ویژگی طول دنباله نمودار کنترل میانگین پیش‌رونده است. سپس، برای این تابع جریمه به جستجو برای یافتن مقدار مناسب ثابت c به ازای مقادیر رایج متوسط طول دنباله تحت کنترل (ARL_0) پرداختند و



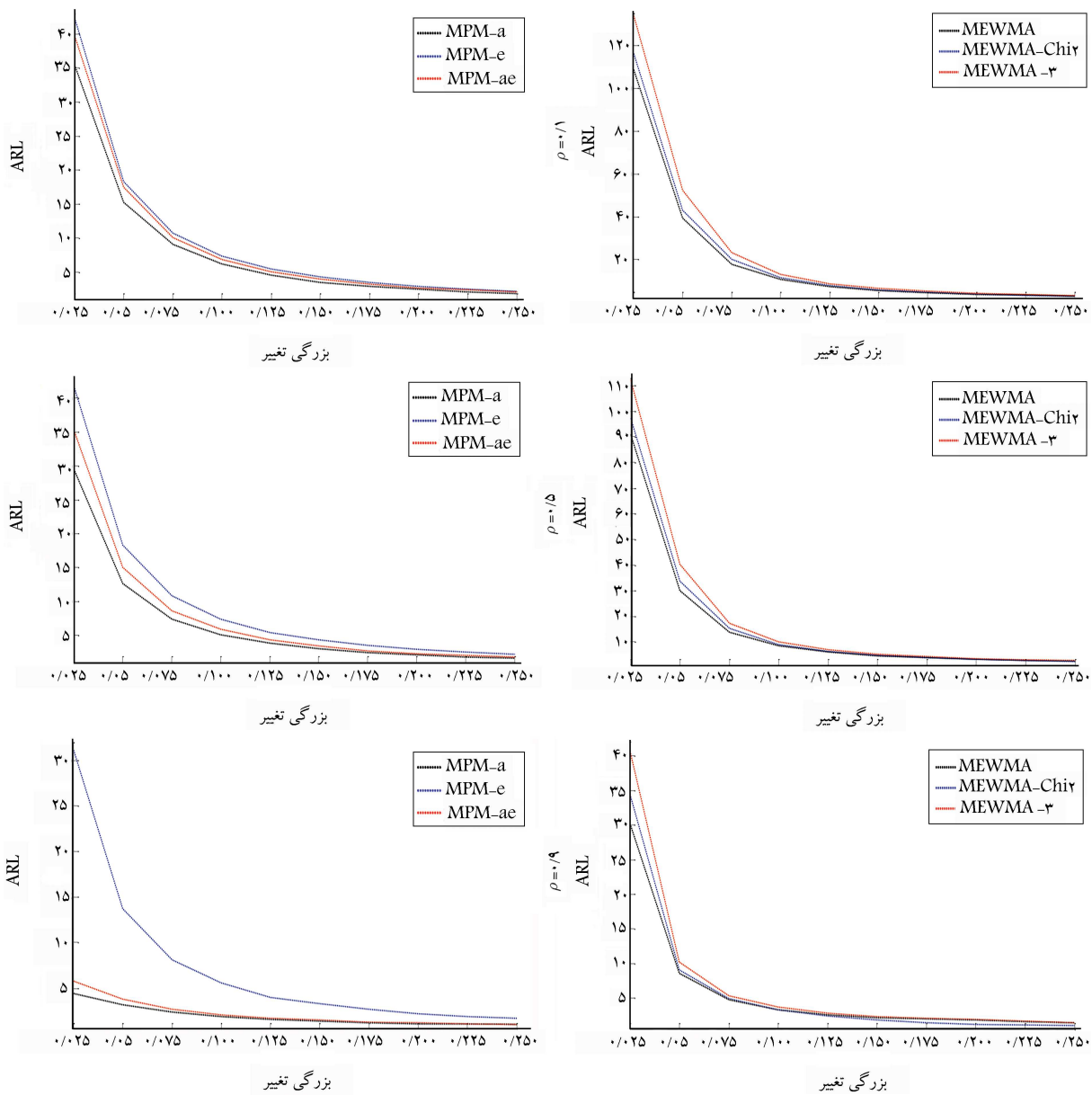
شکل ۱. مقادیر ARL تحت تغییرات عرض از مبدا پروفایل اول از مبدا پروفایل اول از $\beta_{0.1} + \lambda_0 \sigma_1$.

مقادیر خطا محاسبه می‌شوند که این امر باعث می‌شود که این نمودار، عملکرد مناسبی در واکنش به تغییرات پارامترهای انحراف معیار داشته باشد. بنابراین، در شرایطی که وقوع انحراف با دلیل بتواند به طور همزمان ضرایب رگرسیونی و پراکندگی فرایند را تحت تأثیر قرار دهد، نمودار کنترل MPM_a/MPM_e بر اساس ترکیب دو نمودار کنترل MPM_e و MPM_a می‌تواند کارایی بالایی در تشخیص خطا از خود نشان دهد. در این روش، ابتدا برای نمونه k ام، بردار میانگین $PM(k, \beta)$ بر اساس رابطه ۱۱ محاسبه می‌شود که $PM(k, \beta)$ یک بردار $1 \times 2p$ می‌باشد. همان‌طور که گفته شد، تحت شرایط کنترل، $PM(k, \beta)$ یک بردار تصادفی نرمال چند متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{PM(k, \beta)} = \frac{1}{k} \left(\frac{c}{f(k)} \right) \Sigma$ است. بنابراین آماره MPM_a برای نمونه k ام طبق رابطه ۱۳ محاسبه می‌شود. همچنین، به منظور پایش تغییرپذیری، از نمودار MPM_e استفاده می‌شود. از آنجا که $PM(k, \epsilon)$ یک بردار تصادفی نرمال چند متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس

شکل ۱. مقادیر ARL تحت تغییرات عرض از مبدا پروفایل اول از مبدا پروفایل اول از $\beta_{0.1} + \lambda_0 \sigma_1$.

۴. ارزیابی عملکرد

در این بخش، عملکرد نمودارهای پیشنهادی برای پایش پروفایل‌های خطی چند متغیره در فاز دو، بر اساس 10^5 بار شبیه‌سازی مونت‌کارلو بر حسب شاخص متوسط طول دنباله خارج از کنترل (ARL_1) ارزیابی شده و عملکرد آن‌ها در کشف تغییرات مختلف در پارامترهای مدل پروفایل خطی ساده چندمتغیره با نمودارهای ارائه



شکل ۲. مقادیر ARL تحت تغییرات شیب پروفایل اول از β_{11} به $\lambda_{11}\sigma_1 + \beta_{11}$.

توسط [۲۵] مقایسه می‌شود. به منظور مقایسه عادلانه، مقدار متوسط طول دنباله تحت کنترل برابر $ARL_0 = 200$ در نظر گرفته می‌شود که این مقدار معادل با احتمال خطای نوع اول برابر $\alpha = 0.005$ است. همچنین، مقدار ضریب هموارسازی نمودارهای کنترل رقیب، بر اساس پژوهش‌های صورت گرفته برابر 0.2 در نظر گرفته شده است. مدل پروفایل خطی ساده چند متغیره تحت کنترل مفروض نیز به صورت $Y_1 = 3 + 2x + \varepsilon_1$ و $Y_2 = 2 + x + \varepsilon_2$ در نظر گرفته شده است. در هر نمونه، $n = 4$ مشاهده وجود دارد و مقادیر ۲، ۴، ۶ و ۸ به عنوان مقادیر ثابت x در نظر گرفته شده است. همچنین بردار عناصر خطا $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ، دارای توزیع نرمال دو متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ بوده که در آن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ و ضریب ρ برابر 0.1 ، 0.5 و 0.9 تنظیم می‌شوند. به منظور مقایسه عادلانه عملکرد نمودارهای ارائه شده با نمودارهای پیشنهادی

شکل ۲. مقادیر ARL تحت تغییرات شیب پروفایل اول از β_{11} به $\lambda_{11}\sigma_1 + \beta_{11}$.
 توسط [۲۵] مقایسه می‌شود. به منظور مقایسه عادلانه، مقدار متوسط طول دنباله تحت کنترل برابر $ARL_0 = 200$ در نظر گرفته می‌شود که این مقدار معادل با احتمال خطای نوع اول برابر $\alpha = 0.005$ است. همچنین، مقدار ضریب هموارسازی نمودارهای کنترل رقیب، بر اساس پژوهش‌های صورت گرفته برابر 0.2 در نظر گرفته شده است. مدل پروفایل خطی ساده چند متغیره تحت کنترل مفروض نیز به صورت $Y_1 = 3 + 2x + \varepsilon_1$ و $Y_2 = 2 + x + \varepsilon_2$ در نظر گرفته شده است. در هر نمونه، $n = 4$ مشاهده وجود دارد و مقادیر ۲، ۴، ۶ و ۸ به عنوان مقادیر ثابت x در نظر گرفته شده است. همچنین بردار عناصر خطا $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ، دارای توزیع نرمال دو متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ بوده که در آن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ و ضریب ρ برابر 0.1 ، 0.5 و 0.9 تنظیم می‌شوند. به منظور مقایسه عادلانه عملکرد نمودارهای ارائه شده با نمودارهای پیشنهادی

جدول ۱. مقادیر ARL تحت تغییرات همزمان در عرض از مبدا دو پروفایل $\beta_{0,1} + \lambda_0 \sigma_1$ به $\beta_{0,2}$ و $\delta_0 \sigma_2 + \beta_{0,2}$.

λ_0	نمودار کنترل	δ_0				
		۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۱	کنترل	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
	MPM_a	۱۱/۵	۱۷/۷	۳۲/۴	۶۶/۰	۱۲۵/۶
	MPM_e	۱۰/۵	۱۶/۷	۳۰/۳	۶۴/۹	۱۲۴/۳
۰/۲	MPM_{ae}	۱۲/۳	۲۰/۲	۳۹/۱	۸۲/۳	۱۴۳/۸
	MPM_a	۱۲/۴	۱۹/۴	۳۲/۶	۵۲/۷	۶۶/۶
	MPM_e	۱۱/۶	۱۸/۲	۳۰/۲	۵۱/۷	۶۵/۹
۰/۳	MPM_{ae}	۱۳/۵	۲۲/۰	۳۹/۰	۶۵/۸	۸۲/۱
	MPM_a	۱۲/۶	۱۷/۸	۲۵/۲	۳۲/۷	۳۲/۰
	MPM_e	۱۱/۵	۱۶/۳	۲۴/۰	۳۰/۵	۳۰/۳
۰/۴	MPM_{ae}	۱۳/۶	۱۹/۹	۲۹/۹	۳۷/۵	۳۹/۳
	MPM_a	۱۱/۴	۱۴/۴	۱۷/۸	۱۹/۳	۱۸/۰
	MPM_e	۱۰/۷	۱۳/۷	۱۶/۶	۱۷/۹	۱۶/۸
۰/۵	MPM_{ae}	۱۲/۴	۱۶/۱	۲۰/۳	۲۱/۶	۲۰/۰
	MPM_a	۹/۹	۱۱/۵	۱۲/۴	۱۲/۵	۱۱/۵
	MPM_e	۹/۳	۱۰/۶	۱۱/۵	۱۱/۶	۱۰/۸
۰/۹	MPM_{ae}	۱۰/۲	۱۲/۲	۱۳/۴	۱۳/۷	۱۲/۳
	MPM_a	۳/۰	۲/۸	۲/۶	۲/۴	۲/۲
	MPM_e	۴/۱	۴/۷	۵/۴	۶/۴	۷/۹
۰/۱	MPM_{ae}	۱/۴	۱/۶	۱/۷	۲/۰	۲/۲
	MPM_a	۱/۹	۲/۰	۲/۲	۲/۵	۲/۹
	MPM_e	۲/۴	۲/۷	۳/۳	۴/۲	۵/۶
۰/۱۵	MPM_{ae}/MPM_e	۱/۵	۱/۷	۲/۰	۲/۴	۲/۲
	MPM_a	۳/۶	۴/۱	۴/۸	۵/۸	۷/۱
	MPM_e	۱/۳	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲/۲
۰/۱۵	MPM_{ae}/MPM_e	۱/۷	۱/۹	۲/۱	۲/۴	۲/۷
	MPM_a	۱/۹	۲/۱	۲/۵	۳/۰	۳/۷
	MPM_e	۱/۴	۱/۵	۱/۷	۲/۱	۲/۷
۰/۹	MPM_{ae}/MPM_e	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲/۱	۲/۸
	MPM_a	۱/۹	۲/۱	۲/۴	۲/۹	۳/۵
	MPM_e	۱/۱	۱/۱	۱/۲	۱/۲	۱/۳
۰/۹	MPM_{ae}/MPM_e	۱/۲	۱/۳	۱/۴	۱/۵	۱/۷
	MPM_a	۱/۱	۱/۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
	MPM_e	۱/۴	۱/۵	۱/۷	۲/۰	۲/۷

جدول ۲. مقادیر ARL تحت تغییرات مختلف در انحراف معیار پروفایل اول از σ_1 به $\gamma \sigma_1$.

ρ	نمودار کنترل	γ									
		۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰
۰/۱	MEWMA	۷۵/۰	۳۵/۴	۲۰/۵	۱۴/۰	۱۰/۱	۷/۹	۶/۴	۵/۴	۴/۲	۳/۰
	$MEWMA/\chi^2$	۵۱/۵	۱۷/۲	۸/۲	۴/۸	۳/۲	۲/۴	۲/۰	۲/۴	۲/۱	۱/۴
	MEWMA-3	۳۳/۱	۱۱/۴	۶/۴	۴/۴	۳/۴	۲/۹	۲/۵	۲/۲	۲/۲	۲/۰
۰/۱۵	MPM_a	۹۳/۰	۴۲/۴	۲۲/۶	۱۲/۴	۸/۲	۵/۶	۴/۲	۳/۳	۲/۷	
	MPM_e	۶۸/۲	۲۵/۰	۱۱/۶	۶/۲	۳/۹	۲/۷	۲/۱	۱/۸	۱/۵	
	MPM_a/MPM_e	۷۳/۰	۲۹/۵	۱۳/۶	۷/۵	۴/۵	۳/۲	۲/۴	۲/۰	۱/۷	
۰/۱۵	MEWMA	۶۹/۸	۳۲/۹	۱۸/۸	۱۲/۴	۹/۱	۷/۱	۵/۸	۴/۸	۴/۱	
	$MEWMA/\chi^2$	۴۷/۹	۱۶/۰	۷/۲	۴/۲	۲/۸	۲/۲	۲/۲	۱/۸	۱/۴	
	MEWMA-3	۳۱/۷	۱۰/۷	۶/۰	۴/۱	۳/۲	۲/۷	۲/۴	۲/۱	۱/۹	
۰/۹	MPM_a	۶۷/۶	۲۷/۹	۱۳/۶	۷/۸	۵/۴	۳/۷	۳/۰	۲/۵	۲/۱	
	MPM_e	۶۵/۲	۲۴/۷	۱۱/۱	۶/۳	۳/۸	۲/۷	۲/۱	۱/۷	۱/۴	
	MPM_a/MPM_e	۶۵/۶	۲۴/۰	۱۱/۳	۶/۳	۳/۹	۲/۸	۲/۱	۱/۸	۱/۴	
۰/۹	MEWMA	۴۹/۸	۱۸/۳	۹/۶	۶/۲	۴/۴	۳/۵	۲/۹	۲/۴	۲/۱	
	$MEWMA/\chi^2$	۲۸/۳	۶/۹	۳/۱	۲/۰	۱/۶	۱/۳	۱/۲	۱/۲	۱/۱	
	MEWMA-3	۲۰/۵	۶/۲	۳/۵	۲/۵	۲/۰	۱/۷	۱/۵	۱/۴	۱/۳	
۰/۹	MPM_a	۳/۱	۲/۲	۱/۷	۱/۵	۱/۴	۱/۳	۱/۲	۱/۲	۱/۱	
	MPM_e	۶۴/۴	۲۴/۲	۱۱/۱	۶/۲	۳/۸	۲/۷	۲/۱	۱/۷	۱/۴	
	MPM_a/MPM_e	۴/۱	۲/۷	۱/۹	۱/۶	۱/۴	۱/۳	۱/۲	۱/۲	۱/۱	

جدول ۳. مقادیر ARL تحت تغییرات همزمان در شیب هر دو پروفایل از β_{11} به $\lambda_1\sigma_1 + \beta_{11}$ و از β_{12} به $\delta_1\sigma_2 + \beta_{12}$.

λ_1	نمودار کنترل	δ_1					نمودار کنترل	λ_1				
		۰/۱۰	۰/۰۸	۰/۰۶	۰/۰۴	۰/۰۲						
۰/۰۲	MPM_a	۵/۷	۷/۷	۱۱/۸	۲۰/۰	۳۸/۵	۹/۸	۱۴/۹	۲۶/۹	۵۸/۶	۱۱۶/۶	MEWMA
	MPM_e	۸/۳	۱۱/۴	۱۷/۳	۲۸/۸	۵۲/۷	۱۰/۵	۱۶/۷	۳۰/۶	۶۶/۵	۱۲۵/۶	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۶/۶	۹/۱	۱۳/۹	۲۲/۹	۴۶/۳	۱۱/۸	۱۸/۷	۳۵/۳	۷۶/۶	۱۳۵/۹	MEWMA-3
۰/۰۴	MPM_a	۶/۱	۸/۲	۱۱/۸	۱۷/۰	۱۹/۸	۱۰/۶	۱۶/۱	۲۷/۰	۴۵/۳	۵۸/۵	MEWMA
	MPM_e	۸/۹	۱۲/۰	۱۷/۲	۲۴/۵	۲۸/۹	۱۱/۵	۱۸/۰	۳۰/۹	۴۹/۷	۶۴/۳	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۷/۱	۹/۶	۱۳/۹	۲۰/۰	۲۴/۰	۱۳/۰	۲۰/۳	۳۶/۱	۵۹/۶	۷۷/۰	MEWMA-3
۰/۰۶	MPM_a	۶/۱	۷/۷	۱۰/۰	۱۱/۶	۱۱/۸	۱۰/۶	۱۴/۷	۲۱/۴	۲۶/۹	۲۷/۱	MEWMA
	MPM_e	۸/۸	۱۱/۴	۱۴/۶	۱۷/۰	۱۷/۱	۱۱/۶	۱۶/۵	۲۳/۶	۳۰/۴	۳۰/۳	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۷/۰	۹/۲	۱۱/۹	۱۳/۹	۱۴/۰	۱۳/۱	۱۹/۱	۲۷/۷	۳۵/۵	۳۵/۳	MEWMA-3
۰/۰۸	MPM_a	۵/۷	۶/۸	۷/۷	۸/۳	۷/۹	۹/۸	۱۲/۶	۱۵/۰	۱۶/۳	۱۵/۰	MEWMA
	MPM_e	۸/۲	۹/۹	۱۱/۴	۱۲/۱	۱۱/۴	۱۰/۵	۱۳/۶	۱۶/۵	۱۷/۹	۱۶/۴	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۶/۶	۸/۰	۹/۱	۹/۷	۹/۲	۱۱/۸	۱۵/۲	۱۹/۰	۲۰/۳	۱۸/۹	MEWMA-3
۰/۱۰	MPM_a	۵/۱	۵/۷	۶/۱	۶/۰	۵/۷	۸/۵	۹/۹	۱۰/۶	۱۰/۵	۹/۹	MEWMA
	MPM_e	۷/۴	۸/۳	۸/۸	۸/۸	۸/۳	۹/۰	۱۰/۶	۱۱/۷	۱۱/۶	۱۰/۴	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۵/۸	۶/۶	۷/۱	۷/۰	۶/۵	۱۰/۱	۱۱/۹	۱۳/۰	۱۳/۲	۱۱/۸	MEWMA-3

جدول ۴. مقادیر ARL تحت تغییرات همزمان در پارامترهای پروفایل اول از β_{01} به $\lambda_0\sigma_1 + \beta_{01}$ و از β_{02} به $\lambda_0\sigma_2 + \beta_{02}$.

λ_0	نمودار کنترل	λ_1					نمودار کنترل	λ_0				
		۰/۱۰	۰/۰۸	۰/۰۶	۰/۰۴	۰/۰۲						
۰/۱	MPM_a	۴/۱	۵/۳	۷/۲	۱۰/۶	۱۸/۴	۶/۷	۸/۹	۱۳/۲	۲۳/۳	۵۱/۴	MEWMA
	MPM_e	۶/۰	۷/۷	۱۰/۵	۱۵/۴	۲۶/۳	۶/۸	۹/۱	۱۳/۶	۲۴/۰	۵۰/۹	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۴/۷	۶/۱	۸/۴	۱۲/۴	۲۲/۰	۷/۵	۱۰/۲	۱۵/۷	۲۸/۹	۶۴/۰	MEWMA-3
۰/۲	MPM_a	۳/۴	۴/۲	۵/۴	۷/۵	۱۱/۰	۵/۵	۶/۹	۹/۳	۱۳/۸	۲۴/۶	MEWMA
	MPM_e	۵/۰	۶/۱	۷/۹	۱۰/۹	۱۶/۲	۵/۴	۶/۷	۹/۰	۱۳/۳	۲۳/۹	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۳/۹	۴/۹	۶/۴	۸/۸	۱۳/۰	۵/۹	۷/۶	۱۰/۴	۱۵/۹	۲۹/۴	MEWMA-3
۰/۳	MPM_a	۲/۹	۳/۵	۴/۳	۵/۶	۷/۷	۴/۶	۵/۶	۷/۱	۹/۶	۱۴/۶	MEWMA
	MPM_e	۴/۲	۵/۱	۶/۲	۸/۱	۱۱/۱	۴/۴	۵/۴	۶/۹	۹/۰	۱۳/۷	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۳/۳	۴/۰	۵/۰	۶/۴	۸/۹	۴/۹	۵/۹	۷/۶	۱۰/۴	۱۶/۱	MEWMA-3
۰/۴	MPM_a	۲/۶	۳/۰	۳/۶	۴/۴	۵/۷	۴/۰	۴/۷	۵/۷	۷/۲	۹/۹	MEWMA
	MPM_e	۳/۷	۴/۳	۵/۲	۶/۴	۸/۲	۳/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۷	۹/۲	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۲/۹	۳/۴	۴/۱	۵/۱	۶/۶	۴/۲	۴/۹	۶/۰	۷/۷	۱۰/۴	MEWMA-3
۰/۵	MPM_a	۲/۲	۲/۶	۳/۰	۳/۶	۴/۵	۳/۶	۴/۱	۴/۸	۵/۸	۷/۳	MEWMA
	MPM_e	۳/۲	۳/۷	۴/۳	۵/۲	۶/۵	۳/۳	۳/۸	۴/۴	۵/۴	۶/۸	MEWMA/ χ^2
	MPM_{ae}	۲/۵	۲/۹	۳/۴	۴/۱	۵/۱	۳/۷	۴/۳	۴/۹	۶/۰	۷/۸	MEWMA-3

جدول ۵. مقادیر ARL تحت تغییرات همزمان در انحراف معیار پروفایل‌های اول و دوم از σ_1 به $\gamma_1 \sigma_1$ و از σ_2 به $\gamma_2 \sigma_2$.

γ_1	نمودار کنترل					نمودار	γ_2					
	۱/۵	۱/۴	۱/۳	۱/۲	۱/۱		۱/۵	۱/۴	۱/۳	۱/۲	۱/۱	
۱/۱	۱۵/۱	۲۱/۰	۳۱/۰	۴۳/۶	۶۹/۵	MPM_a	۲۲/۰	۲۹/۰	۳۹/۱	۵۵/۵	۸۱/۶	MEWMA
	۱۲/۵	۱۸/۲	۲۷/۵	۴۲/۷	۶۸/۳	MPM_e	۸/۹	۱۳/۰	۲۰/۷	۳۴/۷	۵۹/۵	MEWMA/ χ^2
	۱۲/۴	۱۸/۳	۲۷/۲	۴۱/۴	۶۴/۰	MPM_{ae}	۶/۶	۸/۶	۱۲/۴	۱۹/۷	۳۸/۰	MEWMA-3
۱/۲	۱۱/۹	۱۵/۵	۲۱/۶	۳۲/۲	۴۶/۳	MPM_a	۱۹/۴	۲۴/۳	۳۱/۹	۴۱/۹	۵۵/۶	MEWMA
	۹/۶	۱۳/۵	۱۹/۴	۲۸/۲	۴۱/۸	MPM_e	۷/۵	۱۰/۴	۱۵/۳	۲۲/۸	۳۴/۳	MEWMA/ χ^2
	۹/۹	۱۳/۹	۱۹/۲	۲۷/۹	۴۱/۶	MPM_{ae}	۵/۶	۷/۰	۹/۳	۱۳/۲	۲۰/۰	MEWMA-3
۱/۳	۹/۷	۱۲/۴	۱۶/۸	۲۱/۲	۳۱/۰	MPM_a	۱۷/۲	۲۱/۰	۲۵/۳	۳۲/۵	۳۹/۷	MEWMA
	۷/۸	۹/۹	۱۳/۹	۱۹/۴	۲۷/۵	MPM_e	۶/۱	۸/۲	۱۱/۱	۱۵/۴	۲۰/۱	MEWMA/ χ^2
	۸/۰	۱۰/۵	۱۴/۲	۱۹/۷	۲۷/۳	MPM_{ae}	۴/۹	۵/۸	۷/۲	۹/۲	۱۲/۳	MEWMA-3
۱/۴	۷/۶	۹/۷	۱۲/۳	۱۵/۹	۲۰/۷	MPM_a	۱۴/۸	۱۷/۴	۲۰/۴	۲۴/۳	۲۹/۲	MEWMA
	۶/۰	۷/۷	۱۰/۲	۱۳/۳	۱۸/۱	MPM_e	۵/۱	۶/۴	۸/۴	۱۰/۴	۱۲/۹	MEWMA/ χ^2
	۶/۱	۸/۰	۱۰/۵	۱۳/۴	۱۸/۲	MPM_{ae}	۴/۳	۴/۹	۵/۸	۷/۰	۸/۷	MEWMA-3
۱/۵	۶/۵	۷/۵	۹/۲	۱۱/۷	۱۴/۹	MPM_a	۱۳/۰	۱۵/۳	۱۷/۱	۱۹/۵	۲۲/۲	MEWMA
	۵/۰	۶/۱	۷/۸	۹/۹	۱۲/۵	MPM_e	۴/۳	۵/۱	۶/۳	۷/۵	۸/۹	MEWMA/ χ^2
	۵/۱	۶/۱	۸/۰	۱۰/۱	۱۲/۵	MPM_{ae}	۳/۸	۴/۳	۴/۸	۵/۶	۶/۶	MEWMA-3

مقادیر ARL_1 به دست آمده تحت تغییرات توام در پارامتر عرض از مبدا هر دو پروفایل در جدول ۱ گزارش شده است. نتایج مستخرج حاکی از آن است که نمودار کنترل MPM_a عملکرد بسیار رضایت‌بخشی در کشف تمامی تغییرات توام داشته و تحت تمامی مقادیر ρ از تمامی نمودارهای کنترل بهتر عمل می‌کند. همچنین نمودار ترکیبی MPM_{ae} عملکرد بهتری از نمودار میانگین پیش‌رونده بر اساس پارامتر خطا دارد و در کل نمودارهای ارائه شده عملکرد بهتری از نمودارهای پیشنهادی توسط [۲۵] دارند.

جدول ۲ نیز مقادیر ARL_1 استخراج شده به ازای تغییرات در انحراف معیار پروفایل اول از σ_1 به $\gamma_1 \sigma_1$ را گزارش می‌کند. نتایج حاصل بیانگر این است که بر خلاف تغییرات در پارامترهای عرض از مبدا و شیب، تحت دو سناریوی $\rho = 0/1$ و $\rho = 0/5$ ، نمودارهای کنترل پیشنهادی از عملکرد ضعیف‌تری نسبت به نمودارهای رقیب برخوردارند. همچنین، در میان نمودارهای پیشنهادی، نمودار MPM_e تحت سناریوهای عنوان شده نسبت به سایر روش‌ها از توان بالاتری در کشف تغییرات پارامتر انحراف معیار برخوردار است. بنابراین، تحت سناریوی همبستگی شدید میان متغیرهای پاسخ ($\rho = 0/9$)، نمودارهای کنترل MPM_a بهتر عمل می‌کند. علاوه، روش دوم به ازای هر سه مقدار ρ در تغییرات مختلف عملکرد تقریباً یکسانی دارد، در حالی‌که نمودارهای اول و سوم با افزایش ρ عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند.

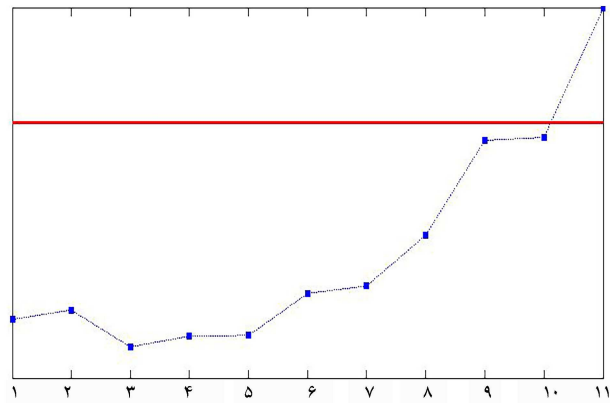
پروفایل از $\beta_{0,1}$ به $\beta_{0,1} + \lambda_0 \sigma_1$ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، غیر از سناریوی $\rho = 0/9$ که در آن نمودار $MEWMA/x^2$ بهتر از روش MPM_e عمل می‌کند، به ازای مقادیر مختلف ρ ، تمامی نمودارهای ارائه شده از عملکرد بهتری در کشف شیفت‌های مختلف نسبت به نمودارهای پیشنهادی توسط [۲۵] برخوردار هستند. همچنین عملکرد تمامی نمودارها با افزایش ρ بهبود می‌یابد. همچنین، نمودار MPM_a به‌طور یکنواخت بهتر از سایر نمودارهای پیشنهادی عمل می‌کند، در حالی‌که ضعیف‌ترین عملکرد متعلق به نمودار MPM_e است.

مقادیر ARL_1 حاصل برای تغییرات مختلف در شیب پروفایل اول از مقدار تحت کنترل $\beta_{1,1}$ به $\beta_{1,1} + \lambda_1 \sigma_1$ در شکل ۲ به تصویر کشیده شده است. نتایج نشان می‌دهد که نمودار MPM_a و پس از آن نمودار ترکیبی MPM_{ae} به ازای تمامی مقادیر ρ دارای بهترین عملکرد در کشف تمامی تغییرات مورد بررسی هستند. همچنین، با افزایش مقدار ρ ، عملکرد تمامی روش‌های پیشنهادی و نمودارهای رقیب بهبود می‌یابد. نکته حائز اهمیت دیگر، عملکرد نه چندان رضایت‌بخش نمودار MPM_e تحت سناریوی $\rho = 0/9$ است، به‌طوری‌که این نمودار، عملکرد ضعیف‌تری نسبت به روش $MEWMA$ دارد. نکته حائز اهمیت دیگر این است که تحت شیفت‌های کوچک، بهترین عملکرد در میان نمودارهای پیشنهادی توسط [۲۵] متعلق به نمودار $MEWMA$ بوده است، در حالی‌که با افزایش بزرگی شیفت، نمودار $MEWMA/x^2$ سریع‌ترین واکنش را نسبت به شیفت‌های بزرگ داراست.

$\varepsilon_1 + 1.09x + 13.6$ از توزیع نرمال چهار متغیره با بردار میانگین صفر و

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 80.0 & 89.6 & 45.1 & 25.3 \\ 89.6 & 122.1 & 71.5 & 29.1 \\ 45.1 & 71.5 & 189.0 & -28.8 \\ 25.3 & 29.1 & -28.8 & 84.4 \end{bmatrix} \text{ ماتریس کوواریانس پیروی}$$

می‌کند. هر نمونه شامل یازده مقدار فشار اسمی شامل ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰، ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۳۲ و ۳۵ است. ابتدا با شبیه‌سازی، مقدار حد بالای کنترل نمودار MPM_a برای دستیابی به $ARL_0 = 200$ تنظیم می‌شود. سپس، نمونه‌های خارج از کنترل که در آن پارامترهای عرض از مبدا تمامی پروفایل‌ها به اندازه ۵٪ واحد انحراف معیار تغییر یافته‌اند تولید می‌شود. آماره‌های نمودار MPM_a متناظر با نمونه‌های تولید شده در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود، آماره مربوط به نمونه ۱۱ از حد کنترل نمودار فراتر رفته و نمودار کنترل MPM_a یک هشدار خارج از کنترل در نمونه یازدهم صادر می‌کند.



شکل ۳. آماره نمودار MPM_a برای داده‌های صنعت خودروسازی.

نتایج جداول ۳ و ۴ نشان می‌دهد که تحت تغییرات توأم در پارامترهای دو پروفایل، عملکرد هر سه نمودار پیشنهادی از روش‌های موجود بهتر است که این موضوع تحت تمامی تغییرات برقرار است. در میان نمودارهای پیشنهادی، بهترین عملکرد متعلق به نمودار MPM_a بوده و سپس نمودار MPM_a/MPM_e دارای کم‌ترین مقادیر ARL_1 است. نتایج تغییرات هم‌زمان در انحراف معیار هر دو پروفایل در جدول ۵ بیانگر این موضوع است که نمودار $MEWMA - 3$ عملکرد بهتری از نمودارهای میانگین پیش‌رونده پیشنهادی دارد. همچنین، در میان نمودارهای پیشنهادی، روش MPM_a ضعیف‌ترین عملکرد را در کشف شیفت‌های هم‌زمان در انحراف معیار پروفایل‌های اول و دوم دارد. بنابراین، مقادیر ARL_1 استخراج شده نمودارهای پیشنهادی بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و تفاوت قابل توجهی میان سه نمودار پیشنهادی در کشف شیفت‌های اشاره شده وجود ندارد.

۵. مطالعه موردی

در این بخش، کارایی نمودار MPM_a به دلیل عملکرد بهتر آن در کشف اغلب حالت‌های خارج از کنترل نسبت به نمودارهای دیگر بر اساس داده‌های واقعی مربوط به صنعت خودروسازی تشریح می‌شود. در این مطالعه موردی که پیش از این توسط [۲۵] نیز مورد استفاده قرار گرفته است، کیفیت محصول بر اساس یک رابطه رگرسیون خطی میان یک متغیر مستقل (فشار اسمی) و چهار متغیر پاسخ همبسته (فشارهای حقیقی) بیان می‌شود. بر اساس نتایج فاز یک، رابطه رگرسیونی تحت کنترل عبارت است از $y_1 = -8.5 + 0.87x + \varepsilon_1$ ، به طوری که $y_2 = -5.8 + 0.95x + \varepsilon_2$ و $y_3 = 3.2 + 1.04x + \varepsilon_3$ و $y_4 =$

۶. نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای پژوهش‌های آتی

در این پژوهش، سه نمودار پیش‌رونده MPM_a ، MPM_e و MPM_{ae} ارائه شد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که نمودارهای پیشنهادی تحت تغییرات منفرد و توأم در پارامترهای عرض از مبدا و شیب، از نمودارهای موجود عملکرد بهتری دارند. همچنین، تحت شیفت‌های عنوان شده در میان نمودارهای پیشنهادی، بهترین عملکرد متعلق به نمودار MPM_a بوده و پس از آن نمودار MPM_{ae} قرار دارد. در مجموع، نمودار MPM_e در شرایطی که انحراف با دلیل پارامترهای عرض از مبدا و شیب را تحت تأثیر قرار دهد، نسبت به سایر روش‌های پیشنهادی ضعیف‌تر عمل می‌کند. نکته حائز اهمیت دیگر این است که با افزایش ρ ، هر سه نمودار پیشنهادی با سرعت بیش‌تری نسبت به خطا واکنش نشان می‌دهند. هنگامی که عامل انحراف باعث بروز تغییر در پارامترهای انحراف معیار شود، نمودارهای پیشنهادی از عملکرد به مراتب ضعیف‌تری نسبت به نمودار $MEWMA - 3$ برخوردارند. در این شرایط، برخلاف سناریوهای شیفت در انحراف معیار و شیب، نمودار MPM_a در میان نمودارهای موجود از عملکرد ضعیف‌تری نسبت به نمودارهای MPM_e و MPM_{ae} برخوردار است. توسعه نمودارهای ارائه شده در این پژوهش، برای پایش پروفایل‌های غیر خطی چندمتغیره به‌عنوان یک پیشنهاد آتی می‌تواند توسط محققین بررسی می‌شود. همچنین، در نظر گرفتن خودهمبستگی میان مشاهدات درون پروفایل می‌تواند به‌عنوان یک موضوع تحقیقاتی مورد توجه قرار گیرد.

منابع (References)

1. Ghashghaei, R., Amiri, A. and Khosravi, P., 2019. New control charts for simultaneous monitoring of the mean vector and covariance matrix of multi-
2. Ahmadi Yazdi, A., Zeinal Hamadani, A. and Amiri, A., 2020. Addressing the effect of parameter estimation on phase II monitoring of multivariate multiple linear pro-

variate multiple linear profiles. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 48(5), pp.1382-1405. <https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1414246>.

- files via a new cluster-based approach. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 49(17), pp.4117-4132. <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1594303>.
3. Kordestani, M., Hassanvand, F., Samimi, Y. and Shahriari, H. 2020. Monitoring multivariate simple linear profiles using robust estimators. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 49(12), pp.2964-2989. <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1584314>.
 4. Ahmadi Yazdi, A., Zeinal Hamadani, A., Karimi Gavareshki, M.H. and Amiri, A., 2021. Phase II monitoring of multivariate profiles with estimated parameters and optimal phase I subgroups. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 50(10), pp.2858-2884. <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1615626>.
 5. Haq, A., Bibi, M. and Brown, J., 2021. Monitoring multivariate simple linear profiles using individual observations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(17), pp.3573-3592. <https://doi.org/10.1080/00949655.2021.1943665>.
 6. Rahimi, S.B., Amiri, A. and Ghashghaei, R., 2021. Simultaneous monitoring of mean vector and covariance matrix of multivariate simple linear profiles in the presence of within profile autocorrelation. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 50(6), pp.1791-1808. <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1588314>.
 7. Haq, A., 2022. Adaptive MEWMA charts for univariate and multivariate simple linear profiles. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(6), pp.5383-5411. <https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1839100>.
 8. Khalili, S. and Noorossana, R., 2022. Online monitoring of autocorrelated multivariate linear profiles via multivariate mixed models. *Quality Technology & Quantitative Management*, 19(3), pp. 319-340. <https://doi.org/10.1080/16843703.2021.2015834>.
 9. Ghashghaei, R. and Amiri, A., 2017. Sum of squares control charts for monitoring of multivariate multiple linear regression profiles in phase II. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(4), pp.767-784. <https://doi.org/10.1002/qre.2055>.
 10. Taghipour, M., Amiri, A. and Saghaei, A., 2017. Phase I monitoring of within-profile autocorrelated multivariate linear profiles. *Journal of Engineering Research*, 5(4), pp.1-18.
 11. Ahmadi Yazdi, A., Hamadani, A. Z. and Amiri, A., 2019. Phase II monitoring of multivariate simple linear profiles with estimated parameters. *Journal of Industrial Engineering International*, 15(4), pp.557-570. <https://doi.org/10.1007/s40092-019-0305-y>.
 12. Bahrami, H., Niaki, S.T.A. and Khedmati, M., 2021. Monitoring multivariate profiles in multi-stage processes. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 50(11), pp.3436-3464. <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1626882>.
 13. Noorossana, R. and Khalili, S., 2021. Phase II monitoring of auto-correlated linear profiles using multivariate linear mixed model. *International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, 32(1), pp.1-11. doi:10.22068/ijiepr.32.1.1.
 14. Ahmadi Karavigh, M.H. and Amiri, A., 2022. MEWMA based control charts with runs rules for monitoring multivariate simple linear regression profiles in Phase II. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, In Press. <https://doi.org/10.1080/03610918.2022.2028833>.
 15. Rahimi, S.B., Amiri, A., Khoo, M.B. and Shadman, A., 2022. Simultaneous monitoring of mean vector and covariance matrix of auto-correlated multivariate multiple linear profiles. *Quality and Reliability Engineering International*, In Press. <https://doi.org/10.1002/qre.3149>.
 16. Abbas, N., Zafar, R.F., Riaz, M. and Hussain, Z., 2013. Progressive mean control chart for monitoring process location parameter. *Quality and Reliability Engineering International*, 29(3), pp.357-367. <https://doi.org/10.1002/qre.1386>.
 17. Abbasi, S.A., 2017. Poisson progressive mean control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(8), pp.1855-1859. <https://doi.org/10.1002/qre.2149>.
 18. Zafar, R.F., Mahmood, T., Abbas, N., Riaz, M. and Hussain, Z., 2018. A progressive approach to joint monitoring of process parameters. *Computers & Industrial Engineering*, 115, pp.253-268. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.11.015>.
 19. Abbas, Z., Nazir, H.Z., Akhtar, N., Riaz, M. and Abid, M., 2019. An enhanced approach for the progressive mean control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(4), pp.1046-1060. <https://doi.org/10.1002/qre.2444>.
 20. Alevizakos, V. and Koukouvinos, C., 2020. A progressive mean control chart for monitoring time between events. *Quality and Reliability Engineering International*, 36(1), pp.161-186. <https://doi.org/10.1002/qre.2565>.
 21. Alevizakos, V. and Koukouvinos, C., 2021. Monitoring reliability for a gamma distribution with a double progressive mean control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(1), pp.199-218. <https://doi.org/10.1002/qre.2730>.
 22. Riaz, M., Abid, M., Abbas, Z. and Nazir, H.Z., 2021. An enhanced approach for the progressive mean control charts: A discussion and comparative analysis. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(1), pp.1-9. <https://doi.org/10.1002/qre.2733>.
 23. Zafar, R.F., Khoo, M.B., Saha, S. and Chong, Z.L., 2021. Progressive mean control chart is not a special case of an exponentially weighted moving average control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(6), pp.2329-2333. <https://doi.org/10.1002/qre.2886>.
 24. Saeed, U., Mahmood, T., Riaz, M. and Abbas, N., 2018. Simultaneous monitoring of linear profile parameters under progressive setup. *Computers & Industrial Engineering*, 125, pp.434-450. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.09.013>.
 25. Noorossana, R., Eyvazian, M. and Vaghefi, A., 2010. Phase II monitoring of multivariate simple linear profiles. *Computers & Industrial Engineering*, 58(4), pp.563-570. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.12.003>.